Junio de 2006, Número 6, páginas 73-78
ISSN: 1815-0640

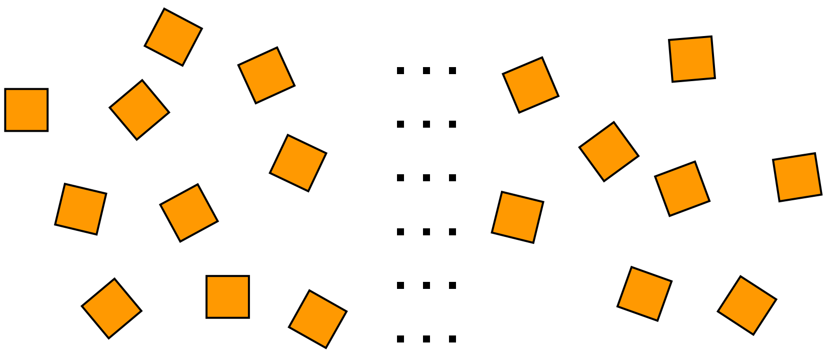
El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Determinar el perímetro mínimo que puede tener una región poligonal construida con *n* cuadrados, cada uno de área 1.[(*)]

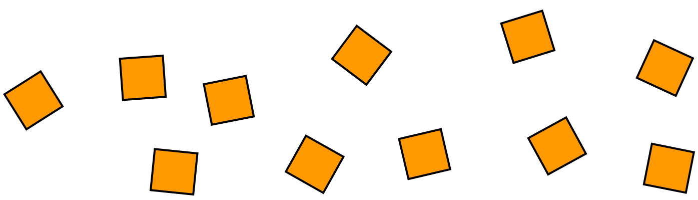


Este interesante problema puede ser utilizado didácticamente en distintos niveles educativos. De hecho, he tenido experiencias muy enriquecedoras al aplicarlo a estudiantes de primaria, de secundaria y de nivel superior, y a profesores de secundaria. Ciertamente, la presentación no fue la misma en todos los casos.

A continuación muestro cómo fue presentado en sendos talleres con estudiantes universitarios y con profesores de secundaria:

Situación

Se tienen 11 fichas cuadradas, todas del mismo tamaño.



[(*)] Problema que expuse en *el Colloque du Réseau international des IREM*, Paris, marzo del 2006

Actividades individuales

Asumir que cada ficha es de perímetro 4

1. Construir con las 11 fichas, sin superposiciones, una región poligonal que tenga perímetro 18.
2. Construir con las 11 fichas, sin superposiciones, una región poligonal que tenga el menor perímetro posible.

Actividades grupales

1. Explicar cómo se construiría una región poligonal con 476 cuadrados, cada uno de área 1, de modo que tenga perímetro mínimo.
2. Hallar el perímetro de la región poligonal correspondiente a la actividad anterior.
3. Determinar el perímetro mínimo que puede tener una región poligonal construida con *n* cuadrados, cada uno de área 1.
4. Proponer otras actividades u otro problema a partir de lo trabajado.

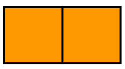
Examinemos el problema

El problema propuesto nos brinda una excelente oportunidad para mostrar que se puede llegar a una solución del problema general examinando previamente los casos más sencillos.

Llamemos P(n) al perímetro mínimo del polígono construido con n cuadrados unitarios.

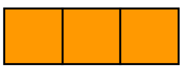
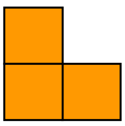
Si n = 1, tenemos un caso trivial y claramente P(1) = 4.

Si n = 2, de manera natural obtenemos



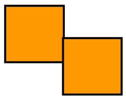
Y en consecuencia P(2) = 6

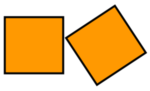
Si n = 3, esencialmente, sólo hay dos formas de añadir un cuadrado al rectángulo anterior:

Así:  o así 

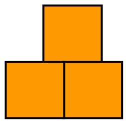
En consecuencia P(3) = 8

Lo hecho hasta aquí nos permite reflexionar sobre la intuición y el rigor al examinar estos dos casos, pues al considerar el caso $n = 2$, de manera natural hemos considerado los dos cuadrados unidos completamente por sus lados, eliminando (¿intuitivamente?) casos como los siguientes:





Y al examinar el caso $n = 3$, no hemos considerado casos como el siguiente



El problema brinda así la oportunidad de examinar situaciones equivalentes y de considerar el caso $n = 2$ en una perspectiva más formal y rigurosa, planteando el problema

$$\text{Maximizar } 8 - 2x, \text{ sujeto a la restricción } 0 \leq x \leq 1$$

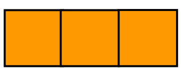
(8 es el perímetro máximo que podría tener una figura construida con dos cuadrados y x representa la longitud de la parte común que se deja de incluir en el perímetro de la nueva figura.)

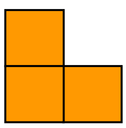
Este problema nos permite hacer un análisis gráfico de la optimización de una función lineal sujeta a restricciones específicas de su variable. Resolverlo y encontrar que el valor que maximiza la función es $x = 1$, nos lleva a descartar formalmente los dos casos que habíamos considerado al reexaminar el caso $n = 2$

El análisis hecho y las observaciones al manipular las fichas (o trabajar con lápiz y papel) en los casos con $n = 4$ y $n = 5$ permiten concluir que:

I. Al añadir un cuadrado a una figura construida, el perímetro de la nueva figura puede ser incrementado en dos unidades o puede ser el mismo. Esto último ocurrirá si la figura a la que añadimos el cuadrado no es convexa; es decir, permite que el nuevo cuadrado tenga dos lados de contacto con la figura anterior.

   Por ejemplo, con $n = 3$, ya vimos que $P(3) = 8$ y que tenemos dos posibles regiones poligonales:





Observamos que al añadir un cuadrado a la figura de la izquierda, el perímetro mínimo de la nueva región poligonal es 10, pero al añadirlo a la figura de la derecha, formando un cuadrado, el perímetro mínimo sigue siendo 8; así P(4)=8

II. La región poligonal que tendrá el perímetro mínimo será aquella que más se aproxime a un cuadrado.

Esto es coherente con la solución del problema de determinar el rectángulo de perímetro mínimo y área dada. Tal problema lo planteamos como

Minimizar $2x + 2y$
sujeto a $xy = K$ (constante dada)

Otra vez, tenemos la oportunidad de examinar un problema de optimización planteado formalmente, que ahora es de dos variables y con restricción no lineal. El problema puede resolverse gráficamente y sin recurrir al cálculo diferencial.

Con estas observaciones y recogiendo las experiencias de formar regiones poligonales de perímetro mínimo con 5, 6, 9, 10 fichas, tenemos suficientes elementos para examinar el problema con n cuadrados unitarios. Ciertamente, hay que considerar varios casos:

a) Si n es un número cuadrado perfecto; es decir, si $n = k^2$, siendo k un entero positivo.

Se forma un cuadrado de k unidades por lado y su perímetro es 4k

Así, P(n) = 4k y en consecuencia $P(n) = 4\sqrt{n}$

b) Si $n = k^2 + v$, con k^2 el cuadrado perfecto más próximo a n, y v un entero tal que $0 < v \leq k$.

- Con los k^2 cuadrados unitarios se forma un cuadrado de *k* filas y *k* columnas y se van añadiendo los *v* cuadrados unitarios, armando una fila o columna adicional al cuadrado.
- Cuando v = 1; o sea cuando se añade sólo 1 cuadrado unitario, el perímetro se incrementa en 2 unidades (4, menos los 2 lados que "se pierden" al pegarlos). Así, el perímetro de la nueva figura es 4k +2
- Cuando se añade el siguiente cuadrado unitario, el perímetro se mantiene en 4k + 2, pues al formar la nueva fila o columna adicional al cuadrado, la ficha tiene dos lados de contacto con la figura anterior. Lo mismo ocurre para v = 2, 3, … ,k.
- Cuando v = k ya se tiene $n = k^2 + k = k(k+1)$, que corresponde a un rectángulo de k filas (o columnas) y (k + 1) columnas (o filas) de cuadrados

unitarios, cuyo perímetro es 2k + 2(k + 1) = 4k +2, lo cual corrobora lo dicho anteriormente.

- En conclusión, para este caso el perímetro mínimo es P(n) = 4k + 2, que escrito en términos de n es

$$P(n) = 4\sqrt{n-v}+2$$

c) Si n = k^2 + k + w, con k^2 el cuadrado perfecto más próximo a n, y w un entero tal que 0 < w ≤ k + 1.

- Análogamente al caso anterior, con los k2 + k cuadrados unitarios se forma un rectángulo de k por (k +1) – digamos de k filas por k + 1 columnas – y se van añadiendo los w cuadrados unitarios formando una fila más (la fila se completará sólo si w = k + 1). El perímetro del rectángulo es 4k + 2 y al ir añadiendo fichas según lo indicado, el perímetro sólo se va incrementando en dos unidades; es decir

$$P(n) = 4k + 2 + 2 = 4(k+1)$$

- Cuando w = k + 1 ya tenemos la fila completa y un cuadrado de k +1 filas y k+1 columnas, cuyo perímetro es P(n) = 4(k + 1), lo cual es coherente con n = (k^2 + k) + k + 1 = k^2 + 2k + 1= $(k + 1)^2$, que ya nos ubica en el caso (a), pues n es entonces un cuadrado perfecto.
- En términos de n, la expresión para el perímetro mínimo es

$$P(n) = 2(1+\sqrt{4n-4w+1})$$

- No es necesario continuar con el análisis, pues se repetiría lo ya hecho.

Resumiendo:

$$\mathbf{P(n)} = \begin{cases} 4\sqrt{n} & \text{si } n = k^2,\ k \in Z^+ \\ 4\sqrt{n-\nu}+2 & \text{si } n = k^2+\nu,\ \nu \in Z,\ 0 < \nu \le k, \\ & k^2 \text{ el entero más próximo a } n \\ 2(1+\sqrt{4n-4w+1}) & \text{si } n = k^2+k+w,\ w \in Z,\ 0 < w \le k+1, \\ & k^2 \text{ el entero más próximo a } n \end{cases}$$

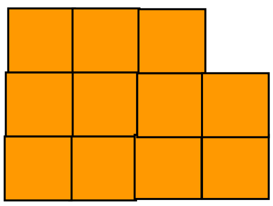
Revisando lo examinado, encontramos que el problema también nos ofrece una brillante oportunidad para emplear la función mayor entero, pues, en la formalización anterior, en verdad $k = \left[\sqrt{n}\right]$ (el mayor entero menor o igual que la raíz cuadrada de n) y entonces el resumen anterior lo podemos escribir como

$$P(n) = \begin{cases} 4\sqrt{n} & \text{si } n = [\sqrt{n}]^2 \\ 4[\sqrt{n}] + 2 & \text{si } n = [\sqrt{n}]^2 + \nu, \ \nu \in Z, \ 0 < \nu \leq [\sqrt{n}] \\ 4[\sqrt{n}] + 4 & \text{si } n = [\sqrt{n}]^2 + [\sqrt{n}] + w, \ w \in Z, \ 0 < w \leq [\sqrt{n}] + 1 \end{cases}$$

Volvamos a las actividades inicialmente planteadas

Si bien es posible obtener la solución de la segunda actividad individual experimentalmente - y la idea de proponerla es precisamente dar inicio a la actividad concreta para desarrollar la capacidad de observación y la intuición – ahora podemos aplicar el resultado obtenido y verificar que todo es coherente:

Experimentalmente se encuentra que P(11) = 14, pues la región poligonal es



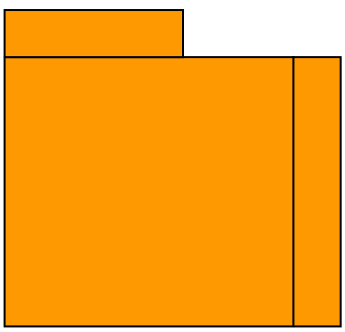
Por otra parte, aplicando la fórmula obtenida, tenemos que $\left[\sqrt{11}\right] = 3$ y escribimos 11 = 3^2 + 2. Identificamos entonces el caso (b) y en consecuencia

P(11) = 4x3 + 2 = 14

Cuando n = 476:

21^2 = 441 y 22^2 = 484 En consecuencia $\left[\sqrt{476}\right] = 21$

y escribimos 476 = 21^2 + 21 + 14, con lo cual nos ubicamos en el caso (c) y tenemos un rectángulo de 21 filas y 22 columnas de cuadraditos, al que se le ha añadido una fila con los 14 cuadraditos restantes.



Vemos que el perímetro de este polígono es

P(476) = 88.

Y aplicando la fórmula tenemos

P(476) = 4x21 + 4 = 88.