

<https://union.fespm.es>

## Un Proceso de Construcción Conjunta en el Diseño de un Proyecto de Enseñanza

Rosa Martínez, Patricia Detzel

Fecha de recepción: 20/09/2020  
Fecha de aceptación: 04/05/2021

|                        |   |
|------------------------|---|
| <p><b>Resumen</b></p>  | <p>Presentamos parte del desarrollo de una investigación llevada en conjunto entre investigadores y profesores de matemática de una escuela secundaria. El trabajo colaborativo permite integrar puntos de vista de todos los participantes, posibilitando la construcción de conocimientos ajustados a la realidad de la práctica de enseñanza. Se diseñaron, implementaron y analizaron actividades de enseñanza, de manera conjunta, para incluir GeoGebra en el aula. En esta ocasión procuramos dar cuenta del proceso de construcción de un proyecto de enseñanza conjunto, sobre el tema funciones, con la intención de visibilizar aspectos constitutivos de una investigación colaborativa.<br/><b>Palabras clave:</b> Investigación colaborativa, práctica de enseñanza, software GeoGebra, escuela secundaria.</p> |
| <p><b>Abstract</b></p> | <p>We present part of the development of a joint research among researchers and teachers of mathematics of a secondary school in the province. Collaborative work makes it possible to integrate the views of all participants, enabling the construction of knowledge adapted to the reality of teaching practice. Jointly designed, implemented and analyzed teaching activities to include GeoGebra in the classroom. In this occasion we try to give account of the process of construction of a joint teaching project, on the subject of functions, with the intention of visibilizing constitutive aspects of a collaborative research.<br/><b>key words:</b> Collaborative research, teaching practice, software GeoGebra, high school.</p>   |
| <p><b>Resumo</b></p>   | <p>Apresentamos parte do desenvolvimento de uma pesquisa realizada em conjunto entre pesquisadores e professores de matemática de uma escola secundária. O trabalho colaborativo permite integrar os pontos de vista de todos os participantes, possibilitando a construção de conhecimentos ajustados à realidade da prática docente. Atividades de ensino foram projetadas, implementadas e analisadas em conjunto para incluir o GeoGebra na sala de aula. Nesta ocasião procuramos dar conta do processo de construção de um projeto pedagógico conjunto, sobre funções, com o intuito de tornar visíveis os aspectos que constituem uma pesquisa colaborativa.<br/><b>Palavras-chave:</b> Pesquisa colaborativa, prática de ensino, software GeoGebra, escola secundária.</p>  |

## 1. Introducción

Este trabajo es parte de una investigación<sup>1</sup> que busca producir conocimientos matemático - didácticos en un contexto de colaboración, de manera conjunta entre docentes en la posición de investigadores (DI) y docentes de aula (DA), que se da a partir del análisis del proceso de diseño e implementación de propuestas de enseñanza.

Nos enmarcamos en un tipo de investigación participativa (Anadón, 2007), en particular en el modelo de investigación colaborativa (IC) desarrollado por Bednarz, Desgagné y sus colaboradores (Bednarz, 2004, 2009, 2013a, 2017a, 2017b; Desgagné, 1997, 1998, 2001; Desgagné, Bednarz, Couture, Poirier, y Lebuis, 2001). En la IC se da un diálogo entre DI y DA a partir de integrar sus puntos de vista posibilitando la construcción de saberes ajustados a la realidad de las prácticas de enseñanza tomando en cuenta su complejidad (Bednarz, 2017a). A los DA los moviliza repensar sus prácticas de enseñanza y a los DI producir conocimientos sobre esos procesos, el interés común está en la aceptación de unos y otros de trabajar conjuntamente en una problemática compartida para estudiarla mediante una actividad reflexiva.

Desde hace años nos preocupamos por la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria. En la comunidad de los DI, es compartida una perspectiva en la cual una propuesta de enseñanza debe impulsar, en el aula, la elaboración de relaciones con los diferentes objetos matemáticos en vistas a construir las nociones que se quieren enseñar. A partir de concebir a la clase como espacio de producción de conocimiento, las actividades que se eligen desarrollar deben desafiar a los alumnos a realizar vínculos que ayudarán a encaminar el trabajo hacia las conceptualizaciones en cuestión. Si bien hay numerosas investigaciones que producen secuencias y situaciones de enseñanza atendiendo a estas ideas, creemos necesario considerar las perspectivas de los DA sobre objetivos y potencialidades de tales situaciones de manera que puedan concebir una gestión posible de la clase. Nos interesó, a partir de convenir una problemática sobre la enseñanza, la planificación, implementación y análisis de actividades para producir conocimiento matemático didáctico en un proceso de trabajo conjunto.

Este artículo es el resultado del análisis de los registros de las reuniones y de reflexiones de nuestra participación como investigadoras<sup>2</sup> en una experiencia colaborativa<sup>3</sup> con profesores de matemática de una escuela secundaria (alumnos de 15 años) del paraje de Lonco Luan, ubicada en el interior de la provincia de Neuquén, que fue realizado entre los años 2015-2016. Los análisis llevados a cabo en el espacio de trabajo colaborativo fueron haciendo visible para todos los integrantes del grupo aspectos de la enseñanza que se problematizan. En el desarrollo de una IC, el rol del investigador deviene complejo, sobre todo en su capacidad para mantener una doble

---

<sup>1</sup>Proyecto de investigación (2013 – 2016) 04-E092, subsidiado por SeCyT de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina.

<sup>2</sup> Además de nuestra participación a los encuentros, estuvieron presentes en algunas reuniones los profesores Lucas Colipe y Emanuel Issa, integrantes del proyecto de investigación.

<sup>3</sup> Parte de esos resultados fueron comunicados en la Escuela de Didáctica de la Matemática, EDIMAT 2015, en el panel: Espacios de trabajo colaborativo: un medio para pensar las Tics en el aula, a cargo de Detzel y Martínez, organizado por UNSam, UNIPE, UNAJ, octubre, Buenos Aires.

verosimilitud a lo largo de todo el proceso (Bednarz, 2017a) propia del entramado de la misma. Las discusiones sobre la elaboración de consignas para el aula, que involucren el uso de GeoGebra y conocimientos de funciones, atravesadas tanto por una sensibilidad teórica como una sensibilidad práctica de los DA y DI, abrió cuestionamientos sobre el uso del software que hicieron posible configurar una perspectiva para abordar la enseñanza en el aula donde el alumno es invitado a producir ideas matemáticas. Procuraremos mostrar algunos aspectos constitutivos de la IC teniendo en cuenta el proceso de construcción del proyecto de enseñanza conjunto, sobre funciones con GeoGebra<sup>4</sup>. Estos aspectos son abordados en los puntos **3**. Selección del problema para el aula, **4**. Anticipación de la gestión de la clase y **5** Desnaturalización de una práctica de enseñanza.

## 2. Acerca de la investigación colaborativa

### 2.1 En relación a nuestra investigación

Consideramos distintas etapas de la IC (Bednarz, 2009, 2013a; Desgagné, 1998, 2001; Desgagné y otros, 2001), tales como delimitación de la problemática (co-situación), desarrollo de la investigación (co-operación) y sistematización de datos y análisis (co-producción). El prefijo “co” se refiere a una actitud del investigador de respetar las lógicas y reflejar las perspectivas de dos mundos, el de las DI y el de las DA, lo que constituyó un desafío a lo largo del proceso.

En una primera etapa, de la co-situación, delimitamos una problemática a abordar que pueda satisfacer las inquietudes de las DA<sup>5</sup> y de las DI. Profesoras de matemática de la escuela<sup>6</sup> secundaria de Lonco Luán demandan un trabajo conjunto para abordar el uso de las netbooks en la clase. La escuela recibe en esa época computadoras de un Plan Nacional<sup>7</sup>, en ese contexto las docentes tienen la firme intención de incluirlas de manera de favorecer el proceso de enseñanza y de aprendizaje para sus estudiantes y les urge potenciar su uso en el aula. Nos interesa resaltar que el trabajo se inicia por la demanda de las DA para aproximar respuestas a ¿cómo incorporar las netbooks en sus clases de matemática? Para los DI es una ocasión para indagar acerca del proceso de construcción conjunta de situaciones de enseñanza para aulas reales, que favorezcan la producción de conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes.

Se constituyeron espacios de trabajo presenciales, nueve encuentros de aproximadamente 5 hs cada uno, algunos en Aluminé y otros en la escuela C.E.P.E.M

---

<sup>4</sup> Software libre pensado para la enseñanza de la matemática y que está incorporado en las netbooks del programa 'Conectar Igualdad' en Argentina.

<sup>5</sup> Agradecemos a las Profesoras Mirta Alvarez y Liliana Mendez, docentes de matemática de la escuela. También mencionamos a la profesora Agnieszka Boczkowska quien, en su carácter de asesora pedagógica de la escuela, medió en la concreción del trabajo conjunto. Del mismo, reconocemos los aportes del técnico realizados en las reuniones que participó.

<sup>6</sup> La escuela secundaria secundaria C.P.E.M N° 79 del paraje Lonco Luan está situada en Aluminé, provincia de Neuquén. El establecimiento se ubica en la cordillera neuquina a orillas del Río Aluminé y sobre la Ruta Provincial N° 23 (a 40 Km de la localidad de Aluminé y a 360 de la ciudad capital de Neuquén). En este lugar se encuentra asentada la Comunidad Mapuche Catalán y que están distanciados entre sí. Asisten a esta escuela jóvenes de la comunidad Catalán y la comunidad Puel. No disponen de internet y en invierno, por la nieve, muchas veces quedan incomunicados.

<sup>7</sup> El programa Nacional Conectar Igualdad, creado por el decreto 450/10, tuvo como propósito recuperar y valorizar la escuela pública y reducir las brechas digitales, educativas y sociales en el país. En ese marco se distribuían netbooks a todos los alumnos y docentes de las escuelas secundarias del país.

Nº 79 en Lonco Luan, durante los años 2015 y 2016. En los mismos participaron las profesoras de matemática, la asesora pedagógica, un técnico informático de la escuela y el equipo de investigación. Los desarrollos de estos encuentros se registraron en audios y se confeccionaron diarios en los que se iban volcando los acuerdos establecidos, las consignas de las actividades, las preguntas, las tareas pendientes para los encuentros por venir. Con el uso de un proyector se elaboró el diario compartido que guardaba las huellas de las discusiones y reflexiones de los encuentros presenciales. Además, se realizaron observaciones de clases.

En esta etapa de co-situación, las DI y DA negociamos abordar un tema específico de la enseñanza de la matemática que devino de una demanda de las docentes. Como ya lo mencionamos, convenimos desarrollar colaborativamente, la planificación, implementación y análisis de actividades para la enseñanza de un conocimiento en particular. De esta manera, se fomentó que un colectivo de trabajo piense, organice e implemente actividades usando el software GeoGebra en el aula. En esta etapa, el objeto se construye en una especie de diálogo y acuerdos constantes entre las DI y las DA. Desde la perspectiva de una IC se señala la importancia en el acuerdo sobre una problemática compartida que refleje las preocupaciones de las dos comunidades.

En una primera instancia el centro de la discusión fue cómo abordar el uso del programa GeoGebra en el aula, luego fue el diseño de una propuesta de enseñanza de funciones mediadas por el uso de dicho software.

Una vez que se va configurando la problemática a estudiar, es necesario establecer una modalidad de trabajo para abordarla. De este modo entramos en la etapa de co-operación, que presenta aquí un gran desafío; debemos garantizar que las diferentes reuniones reflexivas entre los participantes sean oportunidades, no solo la recopilación de datos para las DI, sino también para lograr una mayor comprensión de las prácticas profesionales de las DA, de una reestructuración e incluso una transformación de esas prácticas. Las DI desarrollamos así un enfoque de exploración que conduce a una construcción conjunta y se da la posibilidad de producir conocimientos nuevos sobre prácticas de enseñanza.

En nuestro caso, enfatizamos un trabajo de discusión y análisis didáctico con la intención de adentrarnos en un proceso de elaboración de un proyecto de enseñanza buscando cómo hacerlo posible. Realizar explicitaciones de las decisiones que se toman en relación a los actos de enseñanza dan lugar a cuestionamientos. Nuestras mediaciones, como DI, en el seno de los encuentros, se apoyan en los desarrollos de la Didáctica de la Matemática. Las DA contribuyen con conocimientos sobre prácticas de enseñanza, conocimientos de la acción compartidos por el colectivo docente.

Desde este lugar, discutir la matemática involucrada y preguntarse por las relaciones entre los procedimientos de los estudiantes y las representaciones de las funciones que la aplicación posibilita, fue lo que movilizó un proceso de problematización. Tal proceso, sostenido a lo largo de los encuentros, tuvo un rasgo fundamental que fue el de empezar a imaginar, explorar y construir un diálogo entre las actividades de enseñanza, el conocimiento que circulará en la clase, la entrada de GeoGebra y el conocimiento a enseñar. Esta instancia de reflexiones ayuda a explicitar las razones que comandan las elecciones didácticas dando lugar a la construcción de un conocimiento inédito.

Finalmente, en la etapa de co-producción, elaboramos y ponemos en forma los resultados. Llevamos a cabo un análisis de manera concomitante con la recolección de datos (en este sentido, el modelo presentado aquí no es lineal). Nuestro desafío fue atender que el conocimiento producido sea relevante tanto para las DA como para nosotras, las DI. En nuestra experiencia, los intercambios producidos en los encuentros posibilitaron desnaturalizar las relaciones imbricadas en el conocimiento en juego. Se construye, conjuntamente, una propuesta que finalmente se implementa en el aula, a partir de hacer foco en el estudio de la covariación y crecimiento uniforme, como un modo de caracterizar las funciones lineales a partir de la modelización.

## 2.2 Aspectos de la IC

Desgagné y Bednarz (2005) y Desgagné (2001) utilizan los conceptos de “sensibilidad teórica” y de “sensibilidad práctica” para indicar las respectivas posturas de los DI y de los DA que les permiten entrar en un proceso de co-construcción y llevar adelante la colaboración. La sensibilidad práctica del DA se refiere a un campo contextual, a un conjunto de recursos y condicionamientos en los que se basa para juzgar la acción que debe producirse en la práctica (Desgagné y Bednarz, 2005). En cuanto a la sensibilidad práctica del DI, lo lleva a reconocer las perspectivas de los profesionales y a acercarse a su comunidad profesional (Desgagné, 2001, 2007). En nuestra experiencia una sensibilidad práctica la encontramos, por ejemplo, en el proceso de elección de la situación que permitió abordar el tema funciones y el uso del GeoGebra en el aula, que desarrollamos en el apartado 3.

La sensibilidad teórica del DI hace referencia a un campo conceptual movilizado para examinar el objeto de cuestionamiento o para teorizar la acción práctica (Desgagné y Bednarz, 2005). En nuestra investigación, esta sensibilidad puede vincularse al conocimiento que se tiene para concebir escenarios de enseñanza sobre funciones mediante un software, en los que el carácter de necesidad del conocimiento (Brousseau, 2000, p. 10) está presente. Este aspecto se traduce en la selección y adaptación de problemas provenientes de la investigación. También se observa en los análisis a priori de situaciones de enseñanza anticipando diferentes estrategias y justificaciones a partir del marco de referencia sobre el proceso de modelización. En los DA se da una sensibilidad teórica (Desgagné y Bednarz, 2005), necesaria para que el profesional pueda participar en un proceso de co-construcción con los DI. Consideramos la sensibilidad teórica de los DA como la “disposición” del docente a “salir” momentáneamente de su práctica, e interesarse por la investigación, por las perspectivas teóricas (Barry y Saboya, 2015). En nuestro caso esta sensibilidad teórica de los DA se traduce en una apertura en la elección de los problemas tomados de la investigación y en asumir llevar adelante una propuesta diferente a la habitual, también se refleja en la explicitación de argumentos para justificar sus decisiones, diferencias e implícitos.

La IC exige el criterio de doble verosimilitud en el desarrollo del trabajo. Para ello, los DI estarán constantemente atentos a las preocupaciones de las dos “comunidades” que contribuyen a aportar a la construcción de un saber para la práctica de enseñanza (Desgagné, 2001). Este criterio toma matices según las etapas de la IC. En la co-situación, una “doble pertinencia social” se da con el desafío de definir un proyecto que reúna las preocupaciones de todos los participantes (DI y DA) (Desgagné, 2001). Por último, se debe tener en cuenta un criterio de “doble fecundidad de resultados” en la etapa de co-producción que consiste en presentar los

resultados que integran las categorías de los DA y los DI, de manera creíbles para ambos. Esta postura demanda también al DI hacerse intérprete de la palabra de los docentes tanto en la acción, como en el momento de la investigación y en el análisis de la misma. El rol del investigador es complejo, necesita de experiencia, sensibilidad y apertura para permitir esta co-construcción y mantener esta doble verosimilitud a lo largo de todo el proceso (Bednarz 2017a). Los ítems que a continuación desarrollamos tienen por propósito dar cuenta de esta complejidad.

### 3. Selección del problema para el aula

En el desarrollo de la IC se va configurando la problemática que inicialmente surgió por la demanda de las DA en incluir las netbooks en sus clases. Así, deviene un trabajo de pensar en introducir las funciones usando GeoGebra a partir de discutir diferentes situaciones.

Debatir posibles consignas para el aula permite colectivamente indagar condiciones de situaciones de enseñanza. En ese transitar las decisiones emergen de una confrontación de ideas, propia de ese trabajo colectivo, en el que se da un ir y venir con las posibilidades ideales y reales del aula con los alumnos. La aproximación colaborativa a los problemas de enseñanza abona la idea de concebir al DA como productor de conocimiento a partir del análisis de sus prácticas en el sistema real.

Para llevar a cabo esa tarea las DI pusimos a consideración actividades de enseñanza provenientes del campo de Didáctica de la Matemática en las que se propone estudiar la variación de las áreas de polígonos que están dentro de otros, a partir de construir una figura dinámica. El rol del software GeoGebra vendría a robustecer las relaciones<sup>8</sup> con el saber matemático en juego cuando se ven limitadas con el solo uso de lápiz y papel. En esta etapa de co-operación, nuestro desafío, en posición de DI, fue abrirnos a una sensibilidad más didáctica para interpretar indicios en relación al nivel de aceptación por parte de las DA, en verse con esa situación en el aula.

La consideración del problema para el aula está directamente ligada a la posibilidad de tal trabajo y a la factibilidad por parte de las profesoras para su implementación. La anticipación de las posibles intervenciones didácticas del problema de la variación de las áreas resultó una tarea compleja y, por ello, creemos que este tipo de actividades no pasó a formar parte del proyecto de enseñanza de las DA. Podemos decir que cuando, en una situación para el aula, la conceptualización que justifica el vínculo entre conocimiento y problema está por fuera de la experiencia de los docentes, resulta muy difícil que puedan introducir genuinamente su perspectiva (Sadovsky y otros, 2016, p. 18).

Esta situación nos lleva (DI) a reparar en las condiciones del entorno de las prácticas de enseñanza, para desarrollar una sensibilidad a las preocupaciones de las DA. Hay razones de demasiada estructura didáctica, según creemos, que llevan a la búsqueda de otras situaciones de enseñanza aceptadas por ambas

---

<sup>8</sup> El uso del Geogebra en la construcción de una figura dinámica permite dar sentido a la noción de variación y dependencia, dado que una misma figura posibilita estudiar distintas relaciones entre las magnitudes en juego. Además, da lugar a abordar un trabajo entre diferentes registros que avanza sobre formatos tradicionales.

comunidades. En este contexto, las DI proponemos otro tipo de situaciones que no sea tan ajena a las DA, donde la modelización está presente, aunque la necesidad del uso de GeoGebra no está resuelta.

El problema de “Las Tiendas”<sup>9</sup> emerge entonces como una situación factible para el salón de clase.

Dos tiendas de ropa del barrio han publicitado nuevas ofertas. En “Tienda la Nube” sobre el precio del artículo nos hacen una rebaja de \$50, después un recargo del 12% y finalmente un descuento de \$6. En “Tienda el Sol” sobre el precio del artículo nos realizan un aumento de \$130, después un descuento del 23% y finalmente un recargo de \$8 ¿Dónde es mejor ir a comprar?

Es una actividad que involucra el estudio y la comparación de dos variaciones lineales y, aunque no está diseñado para Geogebra se vislumbra su potencial para cumplir las expectativas de DI y DA. Comenzamos así a pensar, conjuntamente, modificaciones a la situación original de manera que sea necesario, para su resolución, el uso de dicho software.

Nuestras intervenciones como DI para adaptar la situación de enseñanza tienen por objetivo considerar una gestión de clase que promueva y sostenga una producción de conocimientos por parte de los estudiantes y que el uso de la aplicación resulte ser una herramienta eficaz para la resolución. Las DA contribuyen con aportes relativos a posibles intervenciones, explicitar condiciones de funcionamiento, conocimientos propios de su experiencia (cierto conocimiento de GeoGebra, cierto recorrido en el aula: “primero en la carpeta, durante cierto tiempo hacen cuentas, después la hoja de cálculo...”). Así, la colaboración desarrollada dio lugar a un trabajo que se encausa entre esas premisas y que pretende integrar conocimientos de prácticas de enseñanza y conocimientos de la investigación relacionados con ciertos aspectos de su trabajo (Perrin Glorian y Moreira Baltar Bellemain, 2016, p. 38).

Las DA ven en el problema de las tiendas un modo de proyectarse en su aula con una organización diferente a la habitual. Las DI sostenemos, en el análisis, el sentido de los conocimientos involucrados a partir de discutir las condiciones de la situación de enseñanza (se anticipa la consigna con la cual se plantearía la actividad en la clase, lo que se supone harían los estudiantes para resolver, posibles intervenciones del docente en relación al objeto de estudio, una organización de la clase, entre otros para favorecer ciertas interacciones de los alumnos; etc.). Esto muestra cómo la presencia de una sensibilidad teórica abrió un camino de readaptación para ser llevado al aula, en que las funciones toman su lugar, a partir de la modelización, y entonces el proceso de construcción de esos modelos es parte de lo que se debe hacer para resolver la situación y no solo la aplicación de los mismos. Al mismo tiempo, reconocemos una sensibilidad práctica en el trabajo de “recalibrado” de las actividades para el aula. Esta instancia, significó construir un análisis que permita desarrollar un uso del software en un problema escolar y, dejar de lado problemas diseñados con GeoGebra en los que la actividad matemática involucrada exige una reconstrucción de ideas demasiado alejadas de las prácticas tradicionales.

---

<sup>9</sup> El enunciado del problema fue extraído de Ruiz Munzón (2010), La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. Tesis doctoral, Departament de Matemàtiques Universitat Autònoma de Barcelona. España.p: 129.

Así, para las DI que nos inscribimos en una IC, con el deseo de sumar las inquietudes de las DA, requirió un trabajo de ajuste que nos lleve a abrírnos y a ser permeables a las preocupaciones surgidas de la práctica de enseñanza. La sensibilidad a las cuestiones compartidas, tanto por la investigación como por la práctica de enseñanza, proporcionó una reformulación en la búsqueda de un objeto que abone el trabajo conjunto entre investigadores y docentes.

#### 4. Anticipación de la gestión de la clase

Es importante que DI y DA compartan algunas cuestiones, una cierta concepción del aprendizaje y de la enseñanza. Nos referimos a una mínima "cultura didáctica" compartida, en el sentido que lo proponen Barry & Saboya (2015, p. 56), una cierta proximidad entre investigadores y profesionales que haga posible un trabajo conjunto y que no se trate de un diálogo de sordos. En este caso, nos aúna la convicción que trabajar con GeoGebra en el aula mejoraría las clases de matemática y en consecuencia los aprendizajes de los estudiantes.

La permeabilidad de las DI y las DA en la fase de selección de la situación de enseñanza para el aula, permitió entrar en un proceso de co-construcción. La actividad elegida (el problema de las Tiendas), satisface en principio las necesidades de los dos grupos. Su enunciado, como dijimos anteriormente, es una situación que no resulta tan ajena para las DA y las DI vimos su potencial para modelizar a las funciones a partir del uso de la hoja de cálculo de GeoGebra como recurso para estudiar las variaciones. El proceso de co-construcción, en nuestro caso, se corresponde con la búsqueda de condiciones didácticas para que el problema seleccionado, admitiera un uso adecuado de GeoGebra para su resolución. Ese juego de adaptación, a partir de modificaciones en la consigna para usar el software, se va construyendo desde perspectivas diferentes. El juego de intercambios y discusiones, las que en algunos casos conlleva cuestionamientos, configura el marco de acuerdos y construcción conjunta. Esta tarea de analizar las condiciones de uso de GeoGebra, unas, lo hacen considerando un alumno genérico (en el sentido que se usa en Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007) mientras que otras, lo hacen a partir de imaginar la clase con los alumnos reales.

En ese contexto, la tabla, como una de las representaciones más usuales para el trabajo con funciones, es un medio a través de la cual se iniciaría la propuesta para el aula, por al menos dos razones: es un conocimiento disponible por los alumnos y permite un acceso a la hoja de cálculo. Sin embargo, el modo en que entraría en la clase da lugar a la confrontación de ideas, a la diversidad de puntos de vistas. La conjunción de esas ideas y de perspectivas distintas ha estado atravesado por una sensibilidad indispensable en el desarrollo de una IC. Por un lado, las DI vemos en el problema una oportunidad para entrar al estudio de las variaciones a partir de la posibilidad de generar muchos valores que surgen como resultado de cálculos complejos y podrían ser organizados por los estudiantes. Así, en vista de una próxima inclusión del software, la posibilidad de varios pares de valores generaría la necesidad de una tabla que sistematice la información. Los intercambios que las DI alentamos lo hacemos teniendo en cuenta la necesidad del conocimiento y el uso de dicho software. En esos términos, la riqueza de entrar con la hoja de cálculo estaría dada por ser un dispositivo fértil para que a partir de utilizar la herramienta fórmula y arrastre se obtengan muchos valores en un mínimo de tiempo.

Por otro lado, las DA llevan como propuesta iniciar el trabajo organizando una tabla en el pizarrón, a partir de recuperar las cuentas en lápiz y papel que los estudiantes harían en forma individual. Desde ese lugar, las elecciones que hacen para este análisis, se apoyan en el funcionamiento de sus alumnos, en un conocimiento que traen de su propia experiencia de aula y de sus posibilidades en prever una gestión que incluya GeoGebra. Piensan en cómo desarrollar la clase para vincular los cálculos sueltos, que sus alumnos obtendrían de manera individual y con cuentas “por partes”, con expresiones que muestran las regularidades. Así, en su anticipación la clase no se iniciaría usando dicha aplicación.

Esta propuesta, que momentáneamente deja de lado el uso de GeoGebra, difiere e interpela a los DI. En este sentido Sadovsky (2016) advierte “que cuando la posición de los DA es distinta a la de los capacitadores, se suele desconfiar de las apreciaciones e interpretarlas en términos de resistencia” (p. 23). Sin embargo, abrir al debate para comprender cuáles son las razones habla de una cierta sensibilidad lo que conlleva, en este caso, a robustecer el análisis didáctico a partir de anticipar posibles escenas en las que se va configurando el lugar del software en la resolución del problema. Las discusiones, a propósito de esas perspectivas distantes en relación a la entrada en escena de GeoGebra, propiciaron una conversación que construye acuerdos para el aula. Es decir, se conjugan posturas constructivas con posibilidades reales de sostener un trabajo en el aula fundamentado en el sentido del conocimiento.

La discusión sobre cómo hacer la entrada del software, partiendo de un trabajo individual y con lápiz y papel, considerando la construcción de una tabla en el pizarrón por la docente auspicia una colaboración. Se construyen argumentos compartidos, se confrontan diferencias a propósito del trabajo que se hace. Se ilumina sobre prácticas implícitas que ayudan a comprender aspectos que suelen quedar en un segundo plano cuando se efectúan elecciones en torno al desarrollo de la clase. En ese marco, pensar esa concatenación de cuentas hechas en lápiz y papel como soporte para la construcción de las expresiones en la hoja de cálculo habla de construir un sentido de la fórmula como medio para expresar la dependencia de valores. El sentido de variación como aspecto inherente a la construcción de función comienza a tener su lugar a partir de la decisión de las DA al proponer un trabajo individual para dar la posibilidad de que surjan varios pares de valores, cuestión que se encamina hacia el estudio de regularidades en la tabla a partir de organizar esos cálculos. La discusión colectiva permitió acordar dos posiciones: una que buscaba en la diversidad de los cálculos en lápiz y papel una entrada al GeoGebra enfatizando el estudio de variaciones y otra que intentaba profundizar una búsqueda también de sentido de las fórmulas ancladas en la sucesión de cálculos aritméticos. El encuentro de ideas produce nuevas significaciones para esta problemática de la entrada al álgebra incluyendo este software. Desde este lugar, se constituye una oportunidad de discutir la transición aritmética-algebraica en el trabajo matemático de los alumnos y en el trabajo colaborativo del grupo.

## 5 Desnaturalización de una práctica de enseñanza

Abordar el análisis de la inclusión de la aplicación a situaciones de enseñanza, nos permitió habilitar un diálogo entre la actividad matemática y los objetos matemáticos involucrados. En esta discusión se entrelazan aportes de los DI y DA en relación a los conocimientos acerca de posibles recorridos para la enseñanza de

funciones desde perspectivas diferentes lo que conlleva a pensar en qué medida el uso de software se constituye una herramienta potente para la clase.

Recordemos que el objetivo de este trabajo conjunto se correspondía con el requerimiento de las DA en organizar un recorrido para la enseñanza de funciones con GeoGebra. En el tercer encuentro de trabajo, la discusión había avanzado a un punto en el que la construcción de la tabla en la hoja de cálculo permitiría estudiar la relación entre los valores. Las DA se interesan en discutir cómo avanzar en la obtención de la gráfica vinculando los datos en las dos vistas simultáneas (hoja de cálculo – vista gráfica), en la que estaba en juego la construcción de fórmulas. En ese sentido, la cuestión se transforma en cómo tomar en cuenta las ventajas de esta incorporación para que no se trate de un simple traslado de lo que se hace con lápiz y papel. Ese interés nos llevó a preguntarnos ¿qué uso de las representaciones que ofrece el software resguardará su sentido?, más precisamente ¿cuál es el aporte del GeoGebra en relación al objeto de enseñanza? ¿Cuál es la contribución de la ventana gráfica?, ¿cómo avanzar en una propuesta consensuada que supere una enseñanza ostensiva<sup>10</sup> de las funciones?

En ese camino, avanzamos en pensar escenarios con el uso de GeoGebra en el que se relacionen distintos registros de representación. Al pensar la consigna para la clase surge un encadenamiento de interrogantes que pone en cuestión ciertos objetos matemáticos y las condiciones de uso del software. Así, se anticipó un momento en el cual el uso de la hoja de cálculo permitiría generar una gran cantidad de datos en un mínimo de tiempo y esfuerzo. Las cuentas las hace la aplicación, lo cual provee un caudal de datos que permitiría, a partir de usar una escala conveniente, dar la respuesta al planteo inicial, en este caso \$486, gasto que es indistinto donde se compre. Entonces, en este punto, la cuestión fue discutir: si ya se encontró ese valor ¿para qué se necesitaría la gráfica? Las DA proponen discutir la unicidad de 486 para recurrir a la gráfica como un modo de abordar la cuestión. En otras palabras, nos preguntamos: ¿cómo asegurar que no hay otros valores posibles? Concebir ese punto como la intersección de dos rectas podría asegurar la unicidad de ese valor. Esta discusión ahonda en ¿por qué los puntos que se representan, a partir de los valores de la tabla, serían puntos de una recta? El asunto se desliza a plantear cómo emergen entonces las rectas a partir de obtener un gráfico cartesiano con un conjunto de puntos alineados. Advertir que los datos de los puntos en la tabla y de la gráfica corresponden a un mismo recorte puso en cuestión la necesidad de construir el lazo entre el cálculo y el dibujo de los puntos alineados. Los puntos en la vista gráfica son el reflejo de lo que está en la tabla, la representación emerge a través del software sin hacer entrada de una fórmula (Ver Figura 1).

---

<sup>10</sup> Nos referimos con ostensivo a un tipo particular de interacción muy difundido en la enseñanza de la matemática, denominado prácticas ostensivas o simplemente ostensión. Las llamadas prácticas ostensivas describen un conjunto de procedimientos didácticos caracterizados básicamente porque el docente suministra al alumno todos los elementos y relaciones constitutivas de la noción visualizada, mientras que el alumno escucha, observa y resuelve ejercicios de aplicación de las nociones dadas por el docente (Brousseau, 2007, p. 101).

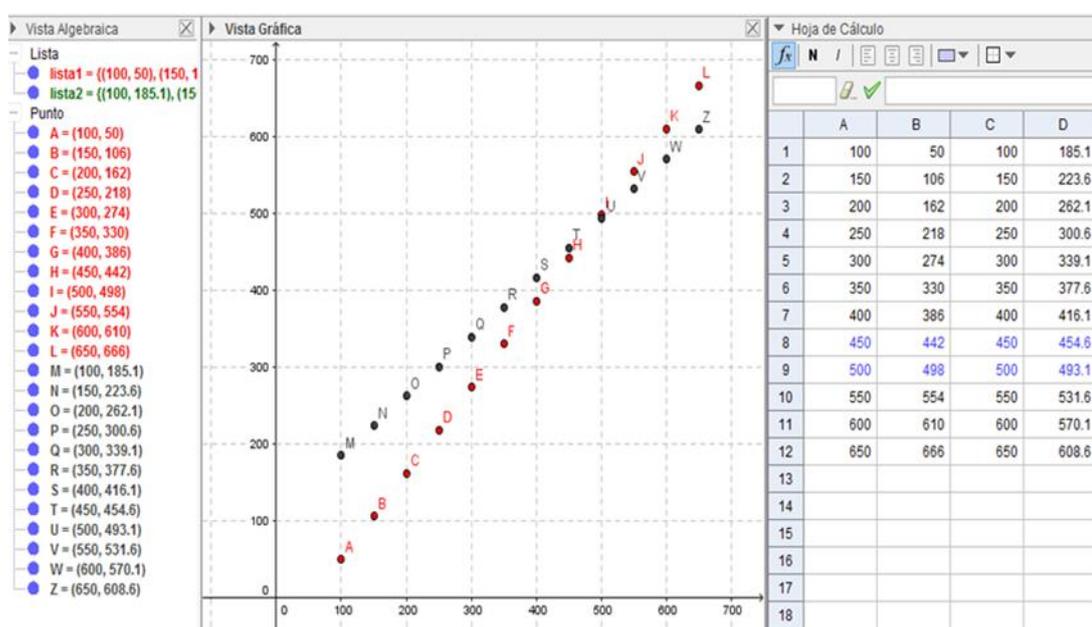


Figura 1. Captura de pantalla- del encuentro de trabajo conjunto-que muestra las tres ventanas del software: puntos, gráfica de puntos alineados y hoja de cálculo (2016)

En el desarrollo del trabajo estaba presente una fuerte intención de mantener una perspectiva de sentido del conocimiento, en este caso una inclusión de la gráfica de la recta justificada por alguna necesidad en la resolución de la actividad. Aparece el cuestionamiento del trazado de una recta como gráfica que incluye a los pares de puntos de la relación involucrada, es decir se pone en escena debatir por qué los puntos en la gráfica mantienen la alineación.

Vemos entonces que ese juego de interrogantes pone en evidencia la no transparencia de la relación entre los datos de la hoja de cálculo y su relación con la representación de los mismos a través de una recta, abriendo nuevas cuestiones: ¿qué es lo que nos asegura que esos datos se representan con una recta? Hay una búsqueda de sentido, de explicitar razones que vinculan las distintas representaciones desde un lugar que aporte más información a la vez que permite hablar del tipo de variación. En ese contexto, la discusión si es o no una recta la curva que describe ese conjunto de puntos, hace posible poner en juego una presentación ostensiva de la enseñanza de las funciones frente a un requerimiento de argumentos que se va entrelazando en el debate. La búsqueda de esas justificaciones lleva a anticipar lo que en sus clases podría acontecer. Ubicados en ese imaginario, se proponen distintas relaciones que podrían surgir a partir de estudiar regularidades numéricas en la tabla y que contribuyen a reconocer la variación que caracteriza el comportamiento lineal desde un lugar más ligado a visibilizar el crecimiento proporcional. Buscar razones para asegurar que el recorte de la curva es efectivamente una porción de recta, a partir de los datos de la tabla, permite resignificar el comportamiento uniforme asociado a la pendiente en los diferentes registros. Así, problematizar la relación de la información en los distintos registros lleva a visibilizar un vínculo para interpretar los cambios y conocer más sobre la dependencia y la variabilidad de las magnitudes involucradas en uno y otro registro.

En este trabajo conjunto reconocer conocimientos acerca de posibles recorridos para la enseñanza de funciones contrastados con las discusiones acerca de alcances y límites de las distintas representaciones mediadas por GeoGebra, hace que emerja una propuesta de trabajo para el aula de las funciones que avanza en los distintos registros y su vinculación. Se configura una posible entrada a las funciones estudiando la covariación (crecimiento uniforme) como un modo de caracterizar las funciones lineales.

Nos interesa remarcar una cierta sensibilidad teórica por parte de las DA al asumir llevar a su aula un planteo de enseñanza de funciones diferente al habitual entrando en el juego de redefinir las consignas de manera superar prácticas ostensivas.

## 6 Conclusión

La IC ofrece un espacio reflexivo concebido como de formación para DA tanto como de investigación a propósito de su práctica. En esta ocasión se propuso dar cuenta del proceso, llevado a cabo entre DI y DA, en la construcción de un proyecto de enseñanza sobre funciones con GeoGebra, para evidenciar la colaboración. Esa elaboración posibilitó un análisis de los aspectos constitutivos de determinados saberes que se quiere enseñar (qué relaciones se establecen, qué argumentos se movilizan, cuáles procedimientos se asocian, qué registros de representaciones se requieren, qué saberes disponen los alumnos en vínculo con lo que se quiere enseñar), ayuda a visibilizar relaciones relevantes que pueden surgir en su desarrollo en el aula.

Una de las cuestiones que guiaron el desarrollo que presentamos aquí es la complejidad que tiene desde el punto de vista del trabajo docente, concebir la enseñanza y el aula de matemática como espacios de producción de conocimientos. En ese sentido, se remarca entonces la necesidad de concebir ese trabajo a partir de un colectivo en colaboración.

Nos ubicamos en dos momentos particulares de nuestra IC, selección de la situación de enseñanza y discusión de la gestión de la clase. Se muestra parte de ese análisis con la intención de visibilizar aspectos que particularizan a una IC. De esta manera podemos decir que, en la selección de la situación de enseñanza que incluya el uso de GeoGebra en el inicio del trabajo conjunto, se convino en un problema proveniente de la investigación y que los docentes les resulta familiar. Se logra en esa aceptación satisfacer una doble pertinencia social en el sentido que la situación se reconoce por ambas comunidades. Este criterio de doble verosimilitud es fundamental dado que abre la posibilidad de entrar en un proceso de co-construcción. En la anticipación de una posible gestión de la clase se organiza un medio didáctico que emerge del juego entre una sensibilidad teórica y una sensibilidad práctica, entre DI y DA, en la creación de un “medio didáctico” que favorece el uso de la hoja de cálculo como recurso eficaz para el estudio de las variaciones y dar sentido a las funciones.

El análisis y discusión realizados constituyen una vía de acceso -conjunta- donde se redefinen las consignas, la modalidad de trabajo (un poco en papel y lápiz, luego GeoGebra) y se va configurando la propuesta que finalmente llegó al aula. Se acuerda en una entrada al aula con una organización diferente a la habitual que aborda el estudio de las funciones a partir de la modelización. En particular, el problema conduce a explorar/estudiar las variaciones entre magnitudes pudiendo

caracterizar el crecimiento uniforme. La hoja de cálculo aparece como recurso eficaz para el estudio de las variaciones y dar sentido a las funciones. Al mismo tiempo, el análisis conjunto de este recurso ofreció un escenario fértil para la problematización del conocimiento, en el que los intercambios entre los DI y DA aportan a la comprensión, a desnaturalizar prácticas y así contribuir con argumentos para disponer de mayor margen de maniobra en el aula.

El trabajo conjunto avanza atravesado por las particularidades de la IC. Un aspecto importante presente en el desarrollo de la etapa de la co-operación y que marcó el desarrollo de la experiencia se vincula con atender a las distintas perspectivas de las DI y DA conforme se va trabajando conjuntamente. Entre lo ideal y lo posible se construye un problema en el que el uso de la hoja de cálculo logra combinar perspectivas de las DI y DA. La modelización como un proceso que marca un tipo de actividad acompañado de una gestión que suaviza la transición hoja-lápiz-software sin descuidar a la producción de conocimiento por parte de los alumnos. La postura del DI es muy compleja, necesita de experiencia, sensibilidad y apertura para permitir esta co-construcción y mantener esta doble verosimilitud a lo largo de todo el proceso.

### Bibliografía

- Anadon M. (2007). *La recherche participative. Multiples regards*. Québec: Presses de l'Université du Québec.
- Barry y Saboya (2015). Un éclairage sur l'étape de co-situation de la recherche collaborative à travers une analyse comparative de deux études en didactique des mathématiques, en *Recherches Qualitatives. La Recherche Qualitative Aujourd'hui: Réflexions et Pratiques*. Canadá. Vol. 34(1), pp. 49-73.
- Bednarz N., Desgagné S., Diallo P. Poirier, L. (2001). Approche collaborative de recherche: une illustration en didactique des mathématiques. In P. Jonnaert, S. Laurin (dir.). *Les didactiques des disciplines, un débat contemporain*. Sainte-Foy: Presses de l'Université du Québec. p. 177-207.
- Bednarz, N. (2004). Collaborative research and professional development of teachers in mathematics [CD-ROM]. Dans M. Niss y E. Emberg (Éds), *Proceedings of the international conference on mathematics education*. Copenhagen, Denmark : Plenary Lectures.
- Bednarz, N. (2009). Analysis of a collaborative research project : a researcher and a teacher confronted to teaching mathematics to students presenting difficulties. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 8(1), 1-24.
- Bednarz, N. (2013a). Recherche collaborative en didactique des mathématiques. Une entrée avec les enseignants sur les questions de la profession. Dans A. Bronner, C. Bulf; C. Castela, J.; P. Georget; M. Languier; B. Pedemonte, ... E. Roditi (Éds), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (Vol. 1, pp. 121-170). Grenoble: *La Pensée Sauvage*.
- Bednarz, N. (2013b). À la rencontre entre deux préoccupations : vers la clarification d'un objet commun d'investigation. Dans N. Bednarz (Éd.), *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement* (pp. 41-47). Paris: L'Harmattan.
- Bednarz, N. (2017a). Conferencia inaugural EDIMAT 2017. Parte 1: De la entrada en la investigación al análisis: la investigación colaborativa-en-acción sus

- características sus exigencias sus aportes *Escuela en Didáctica de la Matemática*. Neuquén.
- Bednarz, N. (2017b). Conferencia inaugural EDIMAT 2017. Parte 2: La actividad reflexiva en el corazón de la perspectiva de investigación colaborativa. Características de los dispositivos puestos en lugar fundamentos la co-operación en acción exigencias. *Escuela en Didáctica de la Matemática*. Neuquén.
- Bednarz, N. (2017c). Conferencia inaugural EDIMAT 2017. Parte 3: Análisis y difusión: los desafíos de la doble verosimilitud. *Escuela en Didáctica de la Matemática*. Neuquén.
- Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las matemáticas, en *Educación Matemática*. México, Vol. 12 No. 1 Abril 2000 pp. 5-38. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/1/03Brousseau.pdf>
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*, libros del Zorzal, Bs. As.
- Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée de rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, 23(2), 371-393.
- Desgagné, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative : illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives*, 18, 77-105.
- Desgagné, S.; Bednarz, N.; Couture, C.; Poirier, L. y Lebus, P. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un nouveau rapport à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, 27(1), 33-64.
- Desgagné S. (2001). La recherche collaborative: nouvelle dynamique de recherche en éducation. In M. Anadon (dir.). *Des nouvelles dynamiques de recherche en éducation*. Québec : Presses de l'Université Laval. p. 51-76.
- Desgagné, S., y Bednarz, N. (2005). Médiation entre recherche et pratique en éducation: faire de la recherche « avec » plutôt que « sur » les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation*, XXXI (2), 245-258.
- Desgagné, S. (2007). Le défi de coproduction de «savoir» en recherche collaborative : autour d'une démarche de reconstruction et d'analyse de récits de pratique enseignante. Dans M. Anadón (Éd.), *La recherche participative: multiples regards* (pp. 89-121). Québec : Presses de l'Université du Québec.
- Detzel y Martínez (2015). Espacios de trabajo colaborativo: un medio para pensar las Tic en el aula, en VII Escuela en Didáctica de la Matemática, octubre, Buenos Aires.
- Perrin-Glorian, M. J. y Moreira Baltar Bellemain, P. (2016). L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres, en I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática, novembro de 2016, Bonito - Mato Grosso do Sul - Brasil
- Ruiz Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. VOLUMEN 1, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelon.
- Sadovsky, P.; Itzcovich, H.; Quaranta, M.E.; Becerril, M. M. y García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática, en *Educación Matemática*, vol. 27, núm. 1, abril de 2016.

**Martinez, Rosa.** Es Profesora en Matemáticas. Magister en Educación en Ciencias de la Universidad Nacional del Comahue. Se desempeña como Profesor Adjunto, en el área de Didáctica de la Matemática en la Facultad de Ciencias de la Educación -UNCo. Ha participado en numerosos proyectos de investigación en enseñanza de la matemática. Actualmente investiga en temáticas relacionadas con la conformación de grupos colaborativos entre investigadores y docentes de matemática alrededor de la problemática de su enseñanza. [rosifmartinez@gmail.com](mailto:rosifmartinez@gmail.com)

**Detzel, Patricia.** Es Profesora en Matemáticas. Magister en Educación en Ciencias, con orientación Matemática, de la Universidad Nacional del Comahue. Se desempeña como Profesor Adjunto, dedicación completa en el Departamento de Matemática de FaEA, de la Universidad Nacional del Comahue. Ha participado en numerosos proyectos de investigación en enseñanza de la matemática. Actualmente investiga sobre temáticas vinculadas a la formación continua de docentes que enseñan matemática, desde una perspectiva colaborativa. [pdetzel@gmail.com](mailto:pdetzel@gmail.com)