

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE SUMA Y RESTA EN ESCOLARES DE TRES, CUATRO Y CINCO AÑOS

Catalina María Fernández Escalona

Fecha de recepción: 27/05/2016
Fecha de aceptación: 25/10/2016

Resumen	<p>Se estudia el proceso que va desde las acciones reales y efectivas de añadir y quitar hasta la construcción de las operaciones aritméticas de suma y resta por parte de los escolares de 3, 4 y 5 años. El esquema lógico–matemático subyacente es el de transformaciones. Para que se den estas operaciones deben presentarse simultáneamente dicho esquema y la cuantificación, siendo esa simultaneidad la que lleva a las relaciones numéricas. Teniendo en cuenta que el origen de las operaciones de suma y resta en el escolar está supeditado a las acciones de añadir y quitar, se propone un plan de actuación en el aula mediante un tratamiento sistemático de dichas operaciones.</p> <p>Palabras clave: Suma, resta, operaciones aritméticas, educación infantil, educación matemática.</p>
Abstract	<p>This study examines the process that spans from real and effective addition and deduction actions to constructing the arithmetic operations of adding and taking away in schoolchildren aged 3, 4 and 5. The underlying logical-mathematical model is that of transformations. For these operations to take place this model must be introduced at the same time as quantification, since it is this simultaneity that leads to numerical relationships. Bearing in mind that the inception of addition and subtraction operations in schoolchildren is subject to the actions of adding and taking, an action plan is proposed using a systematic treatment of these operations.</p> <p>Keywords: Addition, subtraction, arithmetic operations, early childhood education, mathematical education.</p>
Resumo	<p>No artigo se estuda o processo partindo das ações reais e efetivas de somar e remover, e dando continuidade com a construção das operações aritméticas de soma e subtração por parte dos estudantes de 3, 4 e 5 anos. O esquema lógico matemático subjacente é o das transformações. Para que essas operações ocorram devem se apresentados simultaneamente esse esquema e a quantificação, sendo essa simultaneidade a que leva às relações numéricas. Lvando-se em conta que a origem dos operações de adição e de subtração no estudante é subordinada às ações de somar e retirar, propõe-se um plano de atuação em sala de aula mediante um tratamento sistemático de tais operações.</p>

Palavras-chave: adição, subtração, aritmética, educação infantil, educação matemática.

1. Introducción

Existen transformaciones que cambian la cantidad frente a otras que la dejan invariante. Las primeras son las transformaciones cuantitativas y las segundas son las cualitativas. Cuando las cantidades que se están tratando son cantidades discretas esas transformaciones tienen un reflejo en las operaciones aritméticas. (Naito y Miura, 2001).

Los niños y niñas pequeños/as (menos de tres años) son capaces de actuar sobre los objetos reales (conchas, piedras, lápices, hojas, etc.) manipulándolos y realizando acciones que más tarde concluirán en la suma y la resta; se trata de la acción real y efectiva (Dickson, Brown y Gibson, 1991; Siegler, 2016). El siguiente paso, es conseguir que los niños y niñas relaten las acciones que realizan, así van contando la acción al mismo tiempo que la ejecutan, es lo que Mialaret (1984) llama "acción acompañada de lenguaje". Con ello se consigue que: se adquieran términos básicos equivalentes a reunir-añadir, quitar-separar, diferencien unas acciones de otras, tomen conciencia del esquema de las transformaciones, sepan diferenciar las partes de un todo, etc., y en definitiva se den cuenta de todos los aspectos, a nivel de acción, que se ponen en funcionamiento al realizar una operación aritmética. A la edad de tres años los niños y niñas son capaces de contar lo que está sucediendo. (Dehaene, 2011; Vilette, 2002).

En este camino ascendente hacia la abstracción, nos encontramos que los niños y niñas de cuatro años son capaces de relatar una acción que sólo existe en su mente, que no se está realizando de forma efectiva, ya no se actúa sobre objetos concretos, es "la conducta del relato" (Hughes, 1981, Mialaret, 1984).

Finalmente, a los cinco años, los niños son capaces de comprender que una traducción simbólica del tipo $3+2$ expresa una acción real, además, por conteo ascendente, pueden resolver problemas abstractos sin base concreta como por ejemplo: "¿Cuántos son tres más dos?" (Hughes, 1981).

En el periodo que abarca la Educación Infantil se dan los primeros encuentros del niño/a con la adición y la sustracción puesto que las acciones y transformaciones que dan lugar a estas dos operaciones son elementales y aparecen simultáneamente con el concepto de número.

Mediante la revisión de investigaciones en niños y niñas pequeños/as sobre la suma y la resta (Castro, 2006; Ginsburg y Pappas, 2004; Hughes, 1981; McCrink y Wynn, 2004; Naito y Miura, 2001; Ramos, Castro, Castro-Rodríguez, 2016; Robinson, 2001; Starkey y Gelman, 1982; Zur y Gelman, 2004). podemos asegurar que existen tareas apropiadas en las que estas operaciones parten de las acciones de añadir y quitar, siendo ésta la forma más adecuada para tratar los inicios de la aritmética en Educación Infantil.

2. El paso de añadir y quitar a sumar y restar

Es un hecho constatado que los primeros encuentros del niño/a con la suma y la resta se realiza sin necesidad de una instrucción previa (Canobi, Revé y Pattison, 2003; Carpenter y Moser, 1979; Carpenter, Fennema et al, 1999; Dickson, Brown y Gibson, 1991; Opfer y Siegler, 2012). Estos contactos se realizan en un entorno cercano al niño/a; es por ello por lo que nos planteamos analizar algunas situaciones familiares en las que aparecen las acciones de quitar o añadir y en base a ellas analizar la interiorización de las operaciones aritméticas de suma y resta (Fernández, 2001).

Las acciones de añadir o quitar objetos, a una colección dada, transforman la cantidad. Lo primero que queremos observar en los niños es si realmente ellos se percatan de este hecho en edades tempranas. En general, los niños de tres años, son capaces de observar, e incluso de decir, "hay más" o "hay menos" ante situaciones en las que se transforman la cantidad.

Una de las situaciones familiares trabajadas consistía en lo siguiente: la madre le prepara para desayunar al niño pequeño (de dos a tres años) una bandeja con 4 galletas y un vaso de leche. Esta situación se repite día tras día. Después de un tiempo, una mañana sólo aparecieron 3 galletas en lugar de las cuatro que venía siendo habitual; fué entonces cuando el niño pequeño advirtió que faltaba una (Fernández, 2007).

Aprovechamos esta situación para presentarle bandejas con tres galletas, él o ella decía que había tres (respuesta que daba por subitización). Cuando ya se tenía la certeza de que conocía el estado inicial y que lo podía retener en su memoria (ésto ocurría día tras día preguntándole, varias veces y en distintos momentos, que cuántas galletas había en la bandeja), se realizaba la transformación que consistía en añadir una, y así llegamos al estado final que son cuatro galletas en la bandeja, el niño/a ante esta nueva situación decía que había una más.

Se repiten los ejercicios durante varios días. La madre ponía dos bandejas con tres galletas cada una. Él o ella las veía y decía que había lo mismo. Entonces a una de las bandejas se le añadía una más, y se le preguntaba qué era lo que había pasado, y decía que había puesto una. El hecho de poner dos bandejas con el mismo número era para que tuviese simultáneamente presente el estado inicial y final de la transformación, y con ello se perseguía que el niño/a se centrara en la acción, en este caso de añadir una galleta.

No obstante, en su quehacer diario los niños y niñas dan muestra inequívoca de que las acciones de quitar o añadir cambian la cantidad. Así, por ejemplo, si un niño/a está jugando con cochecitos y en su monólogo dice: "voy a por más" y acto seguido trae dos coches más que une a su colección, prueba que este niño o niña es consciente de que la colección de objetos aumenta cuando se añaden nuevos elementos frente a la conducta de separar objetos para obtener más. Asimismo, si alguien le quita algún coche y el niño/a hace comentarios como éste: "dámelo porque ahora tengo pocos", estaremos ante un caso en el que sabe que si se quitan objetos de la colección la cantidad queda modificada para tener menos que antes.

En general, todos los niños y niñas investigados, a la edad de tres años, son capaces de decir "hay más" ante una situación en la que se añaden varios objetos a una colección de cinco elementos como máximo (si ponemos más de cinco objetos

algunos niños/as de tres años dicen que hay muchos y cuando añadimos nuevos objetos, sigue habiendo muchos). Análogamente son capaces de decir "hay menos" cuando la situación se plantea quitando varios objetos de una colección dada.

Además los niños/as pequeños/as, son capaces de establecer la relación inversa entre las dos acciones. Saben que si quitamos un objeto de una colección, lo que debemos de hacer para tener el mismo número que al principio es añadir uno. Así, por ejemplo, cuando un niño o niña juega con coches, y la madre le quita uno, dice "dame el que me has quitado". Incluso en situaciones en las que el niño/a tenía los coches dipuestos en los cuatro vértices de una mesa cuadrada, se le quitaba uno y se le preguntaba ¿qué hacemos para tener lo mismo que antes?, respondía "poner uno más", y aún en un grado de abstracción mayor, si tenía cuatro galletas en una bandeja y la madre se comía una, a la vista de que quedaban tres galletas en la bandeja, le preguntaba que cuántas galletas se había comido y respondía que una; entonces ¿qué tenemos que hacer para tener el mismo número de galletas que al principio?, y el niño/a respondía que poner una.

Esta última situación, además de poner de manifiesto la relación inversa entre las acciones de añadir y quitar, indica que los niños y niñas de tres años pueden cuantificar el cambio cuando la diferencia es de uno. Así, si cambiamos tres galletas por dos, dicen: "falta una"; pero si cambiamos cinco por tres dicen "hay menos". Por lo tanto, los pequeños y pequeñas cuantifican el cambio cuando la diferencia entre el estado inicial y el estado final de la transformación aritmética es más de uno.

2.1. ¿Cómo se recorre el camino hacia la cuantificación?

Para Dickson y otros (1991), el paso previo hacia la cuantificación, y por tanto el inicio de las operaciones, es el principio de cardinalidad. Cuando el niño/a toma conciencia de que el proceso de recuento se puede usar para obtener el número de elementos de una colección, estará iniciando el camino adecuado para cuantificar el número de objetos que se añade o se quita a una colección dada; y esto, según los autores citados se da a la edad promedio de cuatro años y dos meses.

Pero las operaciones de sumar y restar conllevan algo más que el simple recuento de una colección de objetos. Bajo las acciones de añadir y quitar, subyace el esquema de transformaciones de cantidades discretas (Vergnaud, 1985); cuando se realiza una de estas acciones se tiene que recordar y pensar simultáneamente en: el estado inicial (lo que se tenía), la transformación (acciones de quitar o añadir) y el estado final (lo que se tiene ahora); y se da la circunstancia de que las tres secuencias de la transformación no se dan al mismo tiempo, por eso en la suma y la resta el niño/a tiene que hacer algo más que contar una colección de objetos. Así, por ejemplo, se le presenta tres caramelos, se guardan en una bolsa y le damos dos caramelos más en la mano; el niño/a, que efectivamente, tiene adquirido el principio de cardinalidad dice que hay 3 caramelos en la bolsa, y que después tiene 2 caramelos más en la mano; pero si no utiliza el esquema de transformación no es capaz de llegar a la operación de sumar, que requiere establecer una relación numérica entre los 3 caramelos de la bolsa y los 2 que tiene en la mano.

2.2. ¿Cómo se establece las relaciones numéricas para cuantificar la acción?

Un indicio de que el niño/a empieza a establecer relaciones numéricas es cuando usa estrategias de recuento progresivo para cuantificar la acción. Cuando cuenta a partir de tres, dos unidades más, para determinar el número de caramelos que tiene, está estableciendo la relación que existe entre el cardinal 3 y el cardinal 2 atendiendo a la acción de añadir, y por tanto está sumando 3 y 2. Otra conducta menos evolucionada que la anterior, pero que indica el establecimiento de relaciones numéricas, es cuando se recurre al recuento completo de la nueva colección ayudándose de los dedos o de objetos materiales concretos.

Estamos en un momento de la investigación en el que se tiene adquirido el principio de cardinalidad, nuestro esfuerzo irá dirigido al establecimiento de relaciones numéricas, para ello trabajamos: *El esquema de transformaciones de cantidades discretas*.

Ello supone distinguir entre transformaciones que cambian la cantidad de aquellas que no la cambian, y que los niños y niñas sean capaces de describir y reconocer las tres partes de una transformación, esto es: Estado Inicial (E.I.), Transformación (T) y Estado Final (E.F.).

Cuando son capaces de relatar, por ejemplo, situaciones como estas: "Tenía 3 caramelos (E.I.), tú me has dado 2 (T) y por eso tengo 5 caramelos (E.F.)", será la prueba inequívoca de que están estableciendo relaciones numéricas y que por tanto están cuantificando la acción de añadir.

Este tipo de relato lo consiguen los niños y niñas a una edad promedio de cuatro años y medio (Fernández, 2007). Debemos señalar que a la hora de describir la transformación anterior presentan fundamentalmente tres conductas, a saber:

- Conducta uno. Se describe una única secuencia: a) Estado Inicial (E.I.): "Antes tenía menos"; b) Estado final (E.F.): "Ahora tengo más"; c) Transformación (T): "Me has dado dos".
- Conducta dos. Se describen dos secuencias: a) Estado Inicial y Estado Final (E.I. y E.F.): "Antes tenía menos y ahora tengo más"; b) Transformación y Estado Final (T. y E.F.): "Me has dado dos y por eso ahora tengo más"; c) Estado Inicial y Transformación (E.I. y T): "Tenía menos y me has dado dos".
- Conducta tres. Se describe toda la transformación: Estado Inicial, Transformación y Estado Final (E.I., T. y E.F.): "Antes tenía menos tú me has dado dos y ahora tengo más", o bien "tengo más que antes porque tú me has dado dos".

En estas conductas se realiza una descripción cualitativa de las transformaciones, los niños y niñas saben que la cantidad ha variado, que el estado final supone una modificación de la cantidad de caramelos respecto del estado inicial lo que constituye un primer paso para llegar a cuantificar la acción.

Una vez que son capaces de realizar esas descripciones, el siguiente paso sería conseguir que pudieran describir todo el proceso de la transformación con la exigencia de que deben indicar cantidades concretas. Cuando se describe toda la transformación: Estado Inicial, Transformación y Estado Final (E.I., T. y E.F.): "Tenía

3 y ahora tengo 5 porque me has dado 2", estamos en el caso de conducta más evolucionada y supone el éxito operatorio; en ella se llega a interiorizar de tal forma la acción que se consigue expresar los estados mediante números, lo cual indica el paso de las operaciones en sentido físico a las operaciones aritméticas (Fernández, 2007).

Para pasar de las descripciones cualitativas a las cuantitativas debemos trabajar con los niños y niñas estos interrogantes: ¿cuántos tenías al principio?, ¿cuántos tienes ahora?, ¿cuántos te he dado?, ¿cuánto más tienes ahora que antes?, con el fin de que se percaten de las tres secuencias de la transformación y de que establezcan relaciones numéricas.

Referente a la acción de quitar podemos seguir los mismos pasos. Debemos conseguir que describan toda la secuencia de la transformación donde, ahora, la acción en lugar de "añadir" es "quitar". Trabajamos, por tanto, situaciones como estas: "Nuria tenía 5 caramelos, se come 2 y ahora tiene 3 caramelos".

En las descripciones cualitativas se da una situación análoga a la anterior, en este sentido los niños/as dicen: "antes tenía más y ahora tengo menos", o bien "me he comido 2", ó "tengo menos porque me he comido 2". A la hora de hacer una descripción cuantitativa, hay niños/as que establecen correctamente la relación entre 3 y 5 cuando se trata de añadir dos y no así llegar del 5 al 3 quitando 2, y es que parece ser que en un principio el recuento progresivo es más fácil que el recuento regresivo.

Para ello se propone trabajar desde el principio la acción de quitar como inversa de la de añadir. Entonces cuando decimos "tienes 3 y añades 2, ¿cuántas tienes?", inmediatamente proponemos ¿qué tienes que hacer para tener las mismas que al principio?, con ello pretendemos que con la cuenta $3+2=5$ se tenga además las cuentas $5-3=2$ y $5-2=3$ (Fernández, 2007).

Hay modelos aditivos en los que no se da el esquema de transformaciones sino que subyace el esquema parte-parte-todo, como por ejemplo "Tengo 3 coches rojos y 2 verdes, ¿cuántos coches tengo?", dándose las acciones de reunir y separar.

3. ¿Qué tipo de tareas son las adecuadas para trabajar la suma y resta en Educación Infantil?

Hay dos esquemas lógicos-matemáticos subyacente a las operaciones de suma y resta. El primero es el asociado al modelo de problemas que conlleva el esquema de transformaciones, en el que aparece un estado inicial-transformación-estado final, por ejemplo: "Tengo 3 coches y mi madre me regala 2 más, ¿cuántos coches tengo?". Estos problemas parten de las acciones de añadir para el caso de suma y de quitar para la resta. El segundo esquema lógico-matemático corresponde al modelo de problemas parte-parte-todo, ejemplo de este modelo es el problema: "Tengo 3 coches rojos y 2 verdes, ¿cuántos coches tengo?". Estos problemas parten de las acciones de reunir para el caso de la suma y de la acción de separar para el caso de la resta.

Por tanto, antes de empezar con los problemas aritméticos de suma y resta es preciso comenzar con las acciones tanto de añadir-quitar como de reunir-separar,

porque son la base subyacente a los problemas aritméticos puesto que, como se ha visto anteriormente, no basta con saber contar y dominar la secuencia numérica, sino que una suma, al igual que la resta, conlleva relacionar dos cantidades para obtener otra y esa relación entre cantidades lo da precisamente el esquema de transformaciones y el esquema parte-parte todo.

Por otra parte, una de las cuestiones que nos planteamos es por qué empezar con niños de 3 años a trabajar las operaciones aritméticas de suma y resta. Según el marco teórico presentado los niños de 3 años son capaces de cuantificar las acciones de añadir y quitar cuando la diferencia entre el estado inicial y final es menos de 5. Es por ello que las tareas referentes a la cuantificación de dichas acciones en 3 años han de tratar el tramo de la secuencia numérica del 1 al 5.

Según Fernández y Ortiz (2008) los escolares dominan la secuencia numérica de este modo: los niños de 3 años dominan la secuencia del 1 al 5, los de 4 del 1 al 10 y los de 5 tienen un dominio de la secuencia superior a 10. Llevando esto a la cuantificación de las acciones de añadir y quitar, lo que son problemas de suma y resta con el modelo de transformaciones, obtenemos que en los problemas planteados, las sumas no deben pasar de 5 en el caso de los 3 años, no pasar de 10 para 4 años y más de 10 para los de 5 años. (Escalona, 2015).

Por otra parte, teniendo en cuenta el esquema de Mialaret, según el cual para conseguir el éxito en las operaciones aritméticas se parte de la acción real y con materiales concretos, y se llega a la máxima abstracción con la expresión simbólica pasando por la conducta del relato que es relatando la acción real pero sin que ocurra. Entonces, cogiendo esas tres fases y llevándolas a cada una de las edades en cuestión, conseguimos las tareas adecuadas para los 3 años, 4 años y 5 años del siguiente modo:

- 1) Para los de 3 años empezamos por lo más básico y los problemas aritméticos se plantean mediante la acción real lo cual significa que no es un problema con enunciado verbal sino que está ocurriendo realmente, por ejemplo si decimos “María tiene 3 caramelos es que existe una niña llamada María con 3 caramelos, “la maestra le da 2 caramelos” es que realmente eso es así, entonces “María tiene 5 caramelos” y eso está ocurriendo.
- 2) Para los de 4 años nos situamos en un punto intermedio en el camino de la abstracción, entonces estamos en la conducta del relato, estamos con los problemas de enunciado verbal. El hecho habría ocurrido con anterioridad pero en este momento ya no ocurre, es la abstracción de la acción acompañada de lenguaje. Es un problema con enunciado verbal.
- 3) Para los de 5 años nos ponemos en el nivel máximo de abstracción, y les pedimos que después de la conducta del relato pase a la traducción simbólica preguntándole por ejemplo ¿cuánto es 3 más 2?.

4. Informe de la investigación previa a la propuesta de enseñanza

Antes de presentar la propuesta de enseñanza pasamos a describir la investigación sobre la que nos hemos basado para presentar dicha propuesta.

Se trata de un estudio experimental cualitativo que consta de dos partes. La primera se da en el ámbito familiar y la segunda en el escolar. En el primero se caracteriza y analiza los resultados de la tarea “acción de añadir y quitar en niños de 3 años” para averiguar si se percatan, de manera espontánea, de que estas acciones cambian la cantidad o no, y en caso afirmativo ver hasta donde cuantifican la acción. En el segundo, ámbito escolar, se caracterizan y analizan los resultados de tres tareas (añadir y quitar, acciones inversas o recíprocas, esquema de transformaciones y parte-parte-todo), tratadas mediante entrevistas clínicas, para dar significado a los comportamientos generales y a las situaciones singulares encontradas, así como a los procedimientos, destrezas y estrategias en niños de 3 a 6 años para explicar las relaciones numéricas en estos escolares.

Las soluciones dadas por los niños de 3 años ante la tarea del ámbito familiar manifiesta competencias en el esquema cualitativo de transformaciones aditivas que son esquemas lógicos matemáticos subyacentes en las operaciones de suma y resta.

Las respuestas a las tareas presentadas en las entrevistas, ámbito escolar, denotan la existencia de regularidades y la posibilidad de clasificarlas, con una evidente evolución de las distintas categorías. Ello nos ha permitido secuenciar el comportamiento de los niños desde el nivel menos evolucionado, en el que los niños únicamente se percatan que “hay más” ó “hay menos” al añadir o quitar elementos en colecciones de menos de 5 objetos, hasta el nivel más evolucionado en el que los niños son capaces de establecer relaciones numéricas al tener adquirido el principio de cardinalidad e interiorizado el esquema de transformaciones.

Debemos indicar que el estudio empírico cualitativo se realizó mediante entrevistas clínicas y en el Colegio Público Juan Martín Pinzón de Ronda. Para la parte de ámbito familiar se reunió a las madres de los niños de 3 años y de los 25 niños fueron 18 madres las que participaron en el estudio. Por otra parte, las entrevistas se realizaron a 24 escolares de 3, 4 y 5 años. Se hicieron a puerta cerrada en un despacho preparado a tal efecto en el centro. Cada entrevista tuvo una duración que osciló entre 20 y 30 minutos.

La tarea del ámbito familiar consta de 3 fases:

Fase 1 (F1): El desayuno del niño va a consistir en un vaso de leche y 4 galletas que la madre va a presentar en una bandeja todos los días durante 2 meses (las galletas se disponen en hilera). Después de este tiempo en la bandeja sólo van aparecer 3 galletas y el vaso de leche.

Fase 2 (F2): Durante 5 días la madre prepara 2 bandejas idénticas con 3 galletas cada una y le pregunta al niño que cuántas galletas hay en su bandeja. A continuación añade una galleta y pregunta por lo que ha ocurrido y por el número de galletas que ha añadido.

Fase 3 (F3). La madre presenta una bandeja con 4 galletas y se come 1, entonces pregunta al niño que cuántas galletas se había comido y qué podían hacer para tener el mismo número de galletas que al principio.

Respecto a cada una de las fases señaladas se codifican y categorizan las actuaciones de los niños como Fij donde i toma los valores 1, 2 ó 3 indicando la fase y j va de 0 a 3, donde 0 indica “no sabe” o “no contesta” y 3 “contesta correctamente”.

El resultado fué un 60% de niños con “éxito operatorio”, es decir están en F13, F23 y F33, lo que significa que los niños de 3 años presentan competencias en los esquemas lógicos matemáticos subyacentes a la suma y la resta, se percatan de que las acciones de añadir y quitar cambian la cantidad, cuantifican el cambio cuando se trata de una unidad y reconocen dichas acciones como inversas o recíprocas.

Por otra parte, y análogamente, el estudio empírico cualitativo en el ámbito escolar consta de tres tareas bien diferenciadas:

1. Añadir y quitar: Al niño se le muestra 2 bandejas idénticas con un número de galletas, a continuación se añaden galletas a una de ellas y se la pregunta ¿cuál tiene más y por qué?. Análogamente se plantean las mismas cuestiones pero con la acción de quitar.

2. Acciones inversas o recíprocas: El niño debe reestablecer la cantidad inicial de galletas una vez que la experimentadora ha quitado una cantidad dada

3. Cuantificación de la acción. Esquemas de transformaciones. La experimentadora realiza la siguiente acción real delante del niño: “Tengo 3 galletas en esta bandeja, cojo 2 de este paquete y las añado a las de la bandeja, entonces ahora tengo 5 galletas en la bandeja”. Se retira la bandeja y se le pide al niño que relate todo lo que ha ocurrido.

Las respuestas se codifican de la siguiente manera:

AQ. Categorías de respuestas relativas a la realización de la primera tarea: acciones de añadir y quitar.

R(A-Q). Es el bloque de respuestas correspondiente a las acciones inversas o recíprocas

CT. Son las respuestas relativas a la cuantificación de las acciones mediante el esquema de transformaciones.

Respecto a cada uno de las tareas señaladas realizamos la categorización de respuestas de la siguiente forma: AQ_i, R(A-Q)_i y CT_i con i variando de 0 a 3, siendo 0 la correspondiente a la categoría de respuestas menos evolucionadas y 3 corresponde a la categoría de respuestas más evolucionada.

En la tabla siguiente se recogen las respuestas de cada uno de los escolares según las tareas y codificaciones consideradas. En la primera columna se indica el nombre de los escolares junto con su edad, el primer número indica el año y el segundo los meses.

	AQ0	AQ1	AQ2	AQ3	R(A-Q)0	R(A-Q)1	R(A-Q)2	R(A-Q)3	CT0	CT1	CT2	CT3
Ma3,1	■				■				■			
La3,2	■				■				■			
Mr3,3		■			■				■			
Lu3,4			■			■			■			
Lc3,9				■			■		■			
Ir3,9			■				■			■		
Mi3,10				■				■				■

Nu3,11		■			■				■	
Pa4,0			■					■		
Al4,1		■			■				■	
An4,3			■				■			■
Be4,6		■			■				■	
Mi4,6			■			■			■	
Ra4,8			■			■			■	
Sa4,11			■			■			■	
Ma4,11			■				■			■
Ja5,0			■			■				■
La5,2			■				■			■
An5,2			■				■			■
Pe5,5			■				■			■
At5,9			■			■			■	
Mr5,9			■				■			■
Pa5,11			■			■			■	
Mb5,11			■				■			■

Tabla 1. Distribución de respuestas de cada niño en cada una de las tareas en el ámbito escolar.

Las respuestas del bloque AQi son más evolucionadas (en la escala de 0 a 3, considerando $i=3$ como la que más) que las del $R(A-Q)i$, ocurre lo mismo al comparar las respuestas del bloque $R(A-Q)i$ con CTi . Esto se visualiza en la tabla observando que a medida que nos movemos en los bloques de izquierda a derecha las casillas señaladas en cada bloque de una misma fila, se mueven en sentido contrario o bien permanecen constantes.

El paso del bloque AQ al CT significa: “Realización de la cuantificación de las acciones de añadir y quitar aplicando el esquema de transformaciones de cantidades discretas”.

Según podemos observar en la tabla 1, para los niños entrevistados es condición necesaria la realización de las acciones de añadir y quitar para establecer relaciones pero no es condición suficiente. Esto se manifiesta claramente en los niños de 5 años en los que todos responden correctamente a la cuestión AQ y sin embargo no todos están en la categoría de respuesta $CT3$. Los niños de esta categoría alcanzan el éxito operatorio en las operaciones de suma y resta puesto que si aplican el esquema de transformación es porque establecen relaciones numéricas y cuantifican la acción.

5. Propuesta de enseñanza

Teniendo en cuenta los dos esquemas lógico matemáticos, junto a los tipos de acciones añadir-quitar y reunir-separar, y todo lo tratado anteriormente, proponemos

que el tratamiento didáctico de la suma y la resta en Educación Infantil se realice atendiendo a 4 tareas tipo. Cada una de ellas conlleva estos esquemas:

- Acciones de añadir y quitar, que denominaremos como AQ
- Cuantificación de las acciones de añadir y quitar mediante el esquema de transformaciones, que denominaremos como T
- Acciones de reunir y separar que denominaremos como RS
- Cuantificación de las acciones de reunir-separar mediante el esquema parte-parte-todo que denominaremos como PPT

A su vez, cada uno de estos esquemas estará dividido en tres de este modo:

AQ

- ✓ Acciones de añadir, que denominaremos A
- ✓ Acciones de quitar, que denominaremos Q
- ✓ Acciones de añadir y quitar, que denominaremos A-Q

T

- ✓ Cuantificación de las acciones de añadir, que denominaremos TA
- ✓ Cuantificación de las acciones de quitar, que denominaremos TQ
- ✓ Cuantificación de las acciones de añadir y quitar, que denominaremos T(A-Q)

RS

- ✓ Acciones de reunir, que denominaremos R
- ✓ Acciones de separar, que denominaremos S
- ✓ Acciones de reunir y separar, que denominaremos R-S

PPT

- ✓ Cuantificación de las acciones de reunir, que denominaremos PPTR
- ✓ Cuantificación de las acciones de separar, que denominaremos PPTS
- ✓ Cuantificación de las acciones de reunir y separar, que denominaremos

PPT(R-S)

Recogemos esto en la tabla siguiente:

Clases	3 años	4 años	5 años
Tareas	AQ3: <u>A3, Q3, (A-Q)3</u>	AQ4: <u>A4, Q4, (A-Q)4</u>	AQ5: <u>A5, Q5, (A-Q)5</u>
	T3: <u>TA3, TQ3, T(A-Q)3</u>	T4: <u>TA4, TQ4, T(A-Q)4</u>	T5: <u>TA5, TQ5, T(A-Q)5</u>
	RS3: <u>R3, S3, (R-S)3</u>	RS4: <u>R4, S4, (R-S)4</u>	RS5: <u>R5, S5, (R-S)5</u>
	PPT3: <u>PPTR3, PPTS3, PPT(R-S)3</u>	PPT4: <u>PPTR4, PPTS4, PPT(R-S)4</u>	PPT5: <u>PPTR5, PPTS5, PPT(R-S)5</u>

Tabla 1. Tratamiento didáctico de suma y resta en 3, 4 y 5 años

Acabamos de establecer una codificación de tareas que aclaramos a continuación: Una tarea cualquiera XYn , donde XY toma los valores AQ , T , RS y PPT y n los valores 3, 4 y 5, es la tarea que conlleva el esquema lógico-matemático XY para proponerla en la clase de 3 años, de 4 años ó de 5 años. Así por ejemplo $AQ3$ es la tarea propuesta para el tratamiento didáctico de “Acciones de Añadir y Quitar” en niños de 3 años.

Llamaremos Tarea XYn (con XY variando entre los valores AQ , T , RS y PPT , y n toma los valores 3 años, 4 años ó 5 años) a un conjunto de actividades que conlleva el esquema lógico-matemático XY adecuadas para la clase de n años.

Para cada tarea haremos lo siguiente: presentación que conlleva sistemáticamente 3 actividades (por ejemplo, para la tarea $AQ3$, las tres actividades son: acciones de añadir $A3$, acciones de quitar $Q3$ y acciones de añadir y quitar ($A-Q$) 3); análisis operatorio que consiste en analizar las competencias lógico-matemáticas implicadas en la realización de la actividad; y por último, para los esquemas implicados surgidos del análisis operatorio, se planteará una situación didáctica. Todo esto se recoge en la figura 1.

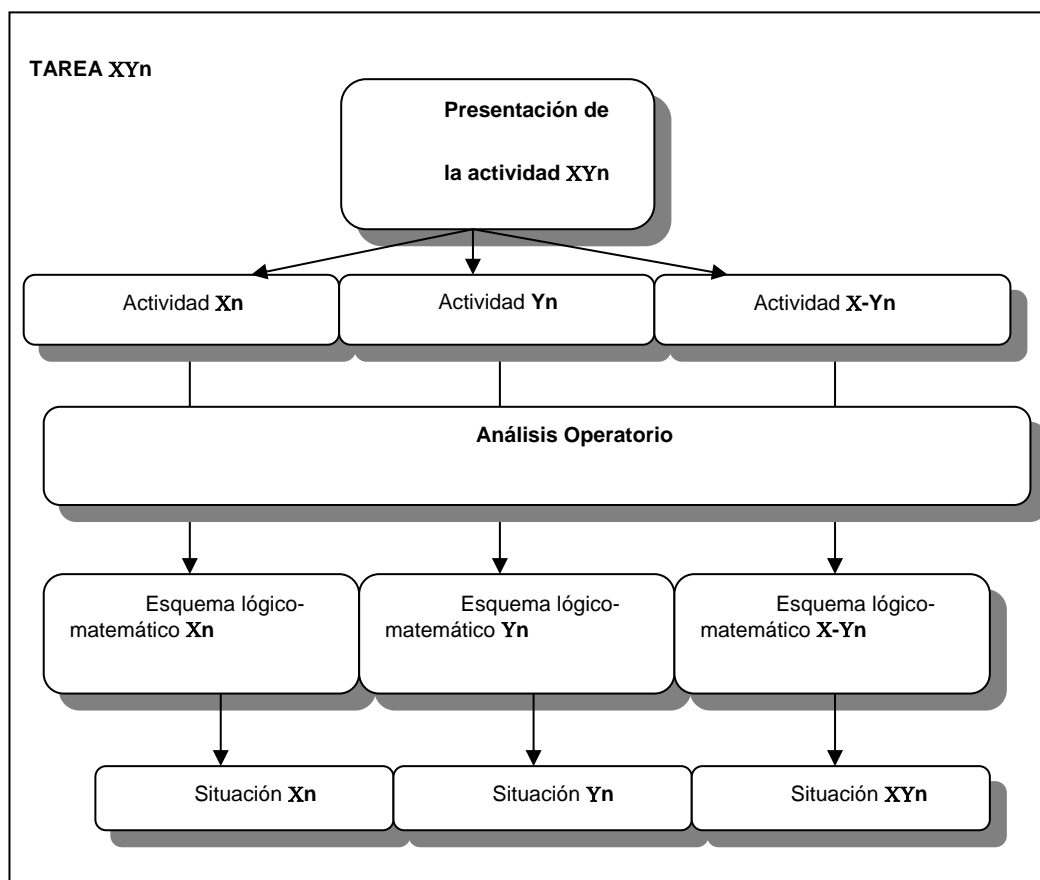


Figura 1. Actuación en el Aula de Educación Infantil en el tratamiento didáctico de suma y resta.

Por ejemplo, para la cuantificación de las acciones de añadir y quitar en 3 años, el esquema de la figura 1 de manera explícita quedaría como se expone en los apartados sucesivos.

5.1. Cuantificación de las acciones de añadir y quitar en 3 años. Tarea T3

El esquema a trabajar es: “Cuantificación de las acciones de añadir y quitar mediante el esquema de transformaciones: Estado inicial-transformación-estado final” en la clase de 3 años.

El escolar de 3 años se tiene que percatar de “cuántos más hay” si añadimos una cantidad de elementos a una colección, “cuántos menos hay” si quitamos y “hay la misma cantidad” si añadimos y quitamos el mismo número de elementos.

La característica fundamental en la forma de trabajar “la cuantificación de las acciones de añadir y quitar en 3 años” en las actividades presentadas es “acciones efectivas o reales” o también lo podemos llamar “caja abierta y cerrada”, es decir el escolar está viendo la colección de elementos y realizando las acciones de añadir y quitar para su cuantificación.

5.1.1. Cuantificación de la acción de añadir en 3 años. Actividad TA3

Vamos a trabajar de manera sistemática la cuantificación de +1 ó +2, es decir, cuando se añade 1 elemento a una colección dada ó 2 elementos como máximo. Partimos de un Estado Inicial de hasta 4 elementos como máximo y la cuantificación del Estado Final llega a 5 como máximo.

El objetivo es que los escolares realicen de manera sistemática estas sumas:

$$+1) \quad 1+1, 2+1, 3+1 \text{ y } 4+1$$

$$+2) \quad 1+2, 2+2 \text{ y } 3+2$$

Y todo ello en las dos direcciones, es decir primero hacer cada suma con el +1, y después una a una hacerlo con el +1 y a continuación con el +2, por ejemplo si $2+1=3$ entonces $2+2=4$.

Actividad TA3. El/la maestro/a juega con un niño/a delante de toda la clase. Mientras el niño esté dando la respuesta correcta sigue jugando, si falla pierde y sale otro, el resto de la clase está pendiente de lo que hace el/la profesor/a y el niño/a. El juego consiste en ir adivinando las sucesivas respuestas:

En primer lugar el maestro o maestra tiene 1 moneda en la mano que enseña a toda la clase preguntando que cuantas monedas tiene (E.I), cierra la mano y añade 1 moneda (T), el escolar tiene que adivinar cuántas monedas hay en la mano que permanece cerrada (E.F).

Se repite todo el proceso pero siendo el estado inicial 2 monedas

Igual para 3 monedas como estado inicial

Y por último se repite con 4 monedas, es decir el maestro o maestra tiene 4 monedas en la mano (E.I), la cierra y añade 1 moneda (T), el escolar tiene que adivinar cuántas monedas hay en la mano que permanece cerrada.

Se repite todo el proceso pero añadiendo 2 monedas y considerando los estados iniciales 1 moneda, 2 monedas y 3 monedas.

Por último se trabaja añadir 1 y añadir 2 como hecho deducido del primero de esta manera: “El maestro o maestra tiene 1 moneda en la mano (E.I), la cierra y añade 1 (T), el escolar tiene que averiguar cuántas monedas tiene en la mano que permanece cerrada (E.F) (Es 1+1). A continuación se hace 1+2, es decir se añade 2: “El/la maestro/a tiene 1 moneda en la mano (E.I), la cierra y añade 2 (T), el escolar tiene que averiguar cuántas monedas tiene en la mano que permanece cerrada (E.F)”. Se repite todo el proceso con “2+1 y 2+2”; y con “3+1 y 3+2”.

5.1.1.1. Análisis operatorio de la cuantificación de la acción de añadir. Esquema lógico matemático TA3

En 3 años consideramos lo que hemos llamado “acción real ó caja abierta y cerrada” por eso llevamos las monedas a la clase las tenemos en la mano, la cerramos y añadimos monedas todo ello de manera real y efectiva.

Para averiguar, en cada caso el estado final después de haber realizado la transformación de añadir 1 ó añadir 2 según el caso, el escolar tiene que realizar la operación mental de convertir la cantidad del estado inicial (que es un número cardinal) en ordinal para proseguir la cuenta y el resultado ordinal hay que volver a convertirlo en cardinal para dar la solución. Es decir, si tenemos 3 monedas (E.I) y añadimos 2 (T), entonces para obtener el estado final, 5 monedas, se ha seguido el siguiente razonamiento: el número 3 que representa las 3 monedas (cantidad y por tanto número cardinal) lo hemos situado dentro de una secuencia (1, 2, 3, 4, 5, 6,...) donde ocupa un lugar determinado (posición ordinal) y a partir de esa posición contamos 2 lugares puesto que añadimos 2 (contar 2 lugares en la secuencia es un proceso ordinal y añadir 2 es tratar el número 2 en su aspecto cardinal ya que representa una cantidad), después de contar esos 2 lugares a partir de 3 en la secuencia obtenemos el número 5 mediante un proceso ordinal, finalmente convertimos el ordinal 5 en cardinal y decimos que hay 5 monedas.

Para conseguir que los escolares piensen en la secuencia numérica para resolver problemas con cantidades presentamos la situación TA3

5.1.1.2. Situación a partir del análisis operatorio de la cuantificación de la acción de añadir en 3 años. Situación TA3

Vamos a realizar 3+2. Hay una escalera con 10 peldaños. En cada escalón hay 1 caramelo. Cada vez que el osito sube un escalón coge el caramelo que allí se encuentra. Cuando va por el tercer escalón el osito se detiene después de haber cogido el caramelo que allí se encuentra. Preguntamos ¿cuántos caramelos tiene el osito?, como está en el tercer escalón, posición ordinal, tiene 3 (cantidad y por tanto número cardinal), y el problema es ¿cuándo suba 2 escalones más cuántos caramelos va a tener?, por lo que la respuesta y razonamiento es: cuatro (señalando

el cuarto escalón porque el 4 está después del 3) y cinco porque el 5 está después del 4, y como ya se han contado 2 lugares la respuesta es 5.

5.1.2. Cuantificación de la acción de quitar en 3 años. Actividad TQ3

Vamos a trabajar de manera sistemática la cuantificación de -1 ó -2 , es decir, cuando se quita 1 elemento a una colección dada ó 2 elementos como máximo. Partimos de un Estado Inicial de hasta 4 elementos como máximo.

El objetivo es que los escolares realicen de manera sistemática estas restas:

-1) 2-1, 3-1 y 4-1

-2) 3-2 y 4-2

Y todo ello en las dos direcciones, es decir primero hacer cada resta con el -1 , y después una a una hacerlo con el -1 y a continuación con el -2 , por ejemplo si $3-1=2$ entonces $3-2=1$.

Actividad T3. El/la maestro/a juega con un niño/a delante de toda la clase. Mientras el escolar esté dando la respuesta correcta sigue jugando, si falla pierde y sale otro, el resto de la clase está pendiente de lo que hace el/la profesor/a y el niño/a. El juego consiste en ir adivinando las sucesivas respuestas:

En primer lugar el maestro o maestra tiene 2 monedas en la mano que enseña a toda la clase preguntando que cuantas monedas tiene (E.I), cierra la mano y quita 1 moneda (T), el escolar tiene que adivinar cuántas monedas hay en la mano que permanece cerrada (E.F).

Se repite todo el proceso pero siendo el estado inicial 3 monedas

Igual con 4 monedas como estado inicial, es decir el maestro tiene 4 monedas en la mano (E.I), la cierra y quita 1 moneda (T), el niño tiene que adivinar cuántas monedas hay en la mano que permanece cerrada.

Se repite todo el proceso pero quitando 2 monedas y considerando los estados iniciales 3 monedas, y 4 monedas.

Por último se trabaja quitar 1 y quitar 2 como hecho deducido del primero de esta manera: "El maestro/a tiene 3 monedas en la mano (E.I), la cierra y quita 1 (T), el escolar tiene que averiguar cuántas monedas tiene en la mano que permanece cerrada (E.F) (Es 3-1). A continuación se hace 3-2, es decir se quitan 2: "El maestro/a tiene 3 monedas en la mano (E.I), la cierra y quita 2 (T), el escolar tiene que averiguar cuántas monedas tiene en la mano que permanece cerrada (E.F)". Se repite todo el proceso con "4-1 y 4-2.

5.1.2.1. Análisis operatorio de la cuantificación de la acción de quitar. Esquema lógico matemático TQ3

En 3 años consideramos lo que hemos llamado "acción real ó caja abierta y cerrada" por eso llevamos las monedas a la clase las tenemos en la mano, las cerramos y quitamos monedas todo ello de manera real y efectiva.

Para averiguar, en cada caso el estado final después de haber realizado la transformación de quitar 1 ó quitar 2 según el caso, el escolar tiene que realizar la operación mental de convertir la cantidad del estado inicial (que es un número cardinal) en ordinal para hacer un recuento regresivo y el resultado que es ordinal volver a convertirlo en cardinal para dar la solución.

5.1.2.2. Situación a partir del análisis operatorio de la cuantificación de la acción de quitar en 3 años. Situación TQ3

Vamos a realizar la resta 5-2. El osito se encuentra en el 5º escalón con 5 caramelos. Cada vez que baje un peldaño debe dejar un caramelo en el mismo, la pregunta es ¿cundo baje 2 peldaños, cuántos caramelos va a tener?.

5.1.3. Cuantificación de añadir-quitar en 3 años. Actividad T(A-Q)3

Vamos a trabajar de manera sistemática la cuantificación de +1 ó +2 como inversa o recíproca de la cuantificación de -1 ó -2 es decir, cuando se añade 1 ó 2 elementos a una colección dada para seguidamente quitar 1 ó 2 (según proceda) entonces volvemos a tener el mismo número que al principio. Partimos de un Estado Inicial de hasta 4 elementos como máximo y la cuantificación del Estado Final llega a 5 como máximo.

El objetivo es que los escolares realicen de manera sistemática estas sumas y restas:

$$+1, -1) \text{ “} \underline{2+1} \text{ y } \underline{3-1} \text{” y “} \underline{3+1} \text{ y } \underline{4-1} \text{”}$$

$$+2, -2) \text{ “} \underline{2+2} \text{ y } \underline{4-2} \text{” y “} \underline{3+2} \text{ y } \underline{5-2} \text{”}$$

Actividad T(A-Q)3. El/la maestro/a juega con un niño/a delante de toda la clase. Mientras el escolar esté dando la respuesta correcta sigue jugando, si falla pierde y sale otro, el resto de la clase está pendiente de lo que hace el/la profesor/a y el niño/a. El juego consiste en ir adivinando las sucesivas respuestas:

En primer lugar el maestro/a tiene 2 monedas en la mano que enseña a toda la clase preguntando que cuantas monedas tiene (E.I), cierra la mano y añade 1 moneda (TA), el escolar tiene que adivinar cuántas monedas hay en la mano que permanece cerrada (E.F). A continuación el maestro/a abre la mano y comprueban que hay 3 monedas entonces pregunta ¿cuántas monedas tengo que quitar para tener igual que al principio, es decir 2?.

Se repite todo el proceso pero siendo el estado inicial 3 monedas

Por último, se repite todo el proceso pero añadiendo 2 y quitando 2 monedas y considerando los estados iniciales 2 monedas, y 3 monedas.

5.1.3.1. Análisis operatorio de la cuantificación de la acción de añadir-quitar. Esquema lógico matemático T(A-Q)3

En 3 años consideramos lo que hemos llamado “acción real ó caja abierta y cerrada” por eso llevamos las monedas a la clase las tenemos en la mano, la cerramos y añadimos-quitamos monedas todo ello de manera real y efectiva.

Para averiguar, en cada caso el estado final después de haber realizado la transformación de añadir 1 ó añadir 2 según el caso, el escolar tiene que realizar la operación mental de convertir la cantidad del estado inicial (que es un número cardinal) en ordinal para proseguir la cuenta y el resultado que es ordinal volver a convertirlo en cardinal para dar la solución. A continuación tiene que pensar que la acción de quitar es inversa o recíproca a la de añadir por eso quitando la misma cantidad que antes añadimos volvemos a tener el estado inicial.

5.1.3.2. Situación a partir del análisis operatorio de la cuantificación de la acción de añadir-quitar en tres años. Situación T(A-Q)3

Vamos a realizar la suma $3+2$ y la resta $5-2$.

Tenemos una escalera con 10 peldaños, cada vez que el osito sube un escalón coge 1 caramelo que se encuentra en él. Igualmente cuando baja un peldaño debe soltar 1 caramelo. Así tenemos que subir es añadir y bajar es quitar con respecto a la cantidad de caramelos que tiene el osito.

El osito ha subido 3 escalones, se encuentra por tanto en el tercer escalón y tiene 3 caramelos, ¿cuándo suba 2 escalones más cuántos caramelos va a tener?, se encontrará en el quinto escalón y tendrá 5 caramelos, entonces preguntamos ¿cuántos caramelos tiene que dejar para ocupar la misma posición que al principio, es decir para estar en el escalón número 3?

6. Síntesis

El modelo de la figura 1 se aplica, para las acciones de añadir y quitar y la cuantificación mediante el esquema de transformaciones, en la clase de 3, 4 y 5 años atendiendo a las siguientes pautas:

✓ En la clase de 3 años se trabaja las acciones de añadir y quitar provocando la acción, por eso se le dice al escolar “coge más”, “quita algunas”. Para la cuantificación de estas acciones se realiza de manera sistemática añadiendo uno con el esquema de transformaciones y con el formato “caja abierta-caja cerrada” (Hughes, 1981) o lo que es lo mismo “acción real” (Mialaret, 1984).

✓ En la clase de 4 años se trabaja las acciones de añadir y quitar sin provocar la acción, por eso se le dice al escolar “¿qué tienes que hacer para tener más? y para tener menos” Para la cuantificación de estas acciones se realiza de manera sistemática añadiendo 2, 3 ó 4 con el esquema de transformaciones y con el formato “caja cerrada-caja hipotética” (Hughes, 1981) o lo que es lo mismo “acción real y conducta del relato” (Mialaret, 1984).

✓ En la clase de 5 años se trabaja las acciones de añadir y quitar mediante un relato, sin objetos tangibles. Para la cuantificación de estas acciones se realiza de manera sistemática trabajando los dobles, los dobles más uno con el esquema de transformaciones y con el formato “caja hipotética- código formal” (Hughes, 1981) o lo que es lo mismo “conducta del relato-representación simbólica” (Mialaret, 1984).

Bibliografía



- Canobi, K. Reeve, R. & Pattison, P. (2003). *Patterns of Knowledge in Children's Addition*. *Developmental Psychology*, 39 (3), 21-34.
- Canobi, K. (2004). *Individual Differences in Children's Addition and Subtraction Knowledge*. *Cognitive Development*, 19 (1), 81-93.
- Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1979). *An investigation of the learning of addition and subtraction*. Research and Development Center for Individualized Schooling, Madison, Wisconsin.
- Carpenter, T.P. Fennema, E. et al (1999). *Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Castro, E. (2006). Competencia matemática desde la infancia. *Pensamiento Educativo*, 39 (2), 119- 135
- Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*. OUP USA.
- Dickson, L., Brown, M. & Gibson. O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor, S.A, Cerdanyola. España
- Escalona, C. M. F. (2015). Análisis cognitivo de la secuencia numérica: procesamiento de la información y epistemología genética. *Pensamiento Educativo*, 52 (2), 172-188
- Fernandez, C. (2001). Aprendizajes numéricos en el ámbito familiar. En A. Gervilla, M. Barreales, R. Galante & I. Martinez, (Eds), *Familia y Educación* (pp. 339-348). HUM 205, Málaga. España.
- Fernández, C. (2007). *¿Cómo y cuándo abordar la didáctica de las operaciones de suma y resta?*. *Bordón*, 59(1), 63-80
- Ginsburg, H. & Pappas, S. (2004). *SES, Ethnic, and Gender Differences in Young Children's Informal Addition and Subtraction: A Clinical Interview Investigation*. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 25 (2), 171-192
- Hughes, M. (1981). *Can Pre-School Children Add and Subtract?*. *Educational Psychology*, 1(3), 207-219.
- Mccrink, K. & Wynn, K. (2004). *Large, number addition and subtraction by 9-month-old infants*. *Psychological Science*, 15, 776-781.
- Mialaret, G. (1984). *Las Matemáticas cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Aprendizaje Visor, Madrid. España.
- Naito, M. & Miura, H. (2001). Japanese Children's Numerical Competencies: Age- and Schooling-Related Influences on the Development of Number Concepts and Addition Skills. *Developmental Psychology*, 37 (2), 17-30.
- Opfer, J. E., & Siegler, R. S. (2012). Development of quantitative thinking. *Developmental Science*, 15, 863 – 875
- Ramos, L., Castro, E., Castro-Rodríguez, E., (2016) Instrucción en el uso de esquemas para la resolución de problemas aditivos a estudiantes con necesidades educativas especiales. *Enseñanza de las Ciencias*, 34.(1), 173-192
- Robinson, K. (2001). The Validity of Verbal Reports in Children's Subtraction. *Journal of Educational Psychology*. 93 (1), 211-222
- Siegler, R. S. (2016). Magnitude knowledge: the common core of numerical development. *Developmental Science*, 19(3), 341-361.
- Starkey, P. & Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. En T. Carpenter, J. Moser & T.

- Romberg(Eds). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. (pp.99-116). Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, Nueva Jersey.
- Vergnaud, G. (1985). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Peter Lang, New York.
- Vilette, B. (2002). *Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction? Evidence against early arithmetic*. *Cognitive Development*, 17, 1365-1383
- Zur, O. &Gelman, R. (2004). *Young Children Can Add and Subtract by Predicting and Checking*. *Early Childhood Research Quarterly*, 19 (1), 121-137.

Catalina María Fernández Escalona

UNIVERSIDAD DE MALAGA

País España

Resumen biográfico

PROFESORA TITULAR DE UNIVERSIDAD

UN SEXENIO DE INVESTIGACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, DE LAS CIENCIAS
SOCIALES Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

cfernandez@uma.es