

Análisis de la Resolución de Problemas Aritméticos Elementales Verbales Aditivos de una etapa a través de los Registros de Representación Semiótica

Gladys Masiell Diestra Díaz

Fecha de recepción: 03/12/2015
 Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	<p>Este artículo es un análisis exploratorio de las distintas representaciones que hace un grupo de estudiantes de 4° grado de primaria (entre 9 y 12 años de edad) al resolver una serie de actividades propuestas sobre problemas aritméticos elementales verbales, denominados PAEV, específicamente los aditivos de una etapa en la categoría semántica de comparación y/o igualación, con la finalidad de saber si dichas actividades contribuyen al aprendizaje del estudiante. Se empleó la teoría de registros de representaciones semióticas mediante un estudio de casos en el análisis y proceso de datos. Las producciones de los estudiantes mostraron que pudieron coordinar al menos dos registros de representación para la comprensión de los problemas.</p> <p>Palabras clave: Aprendizaje, coordinación, representación.</p>
Abstract	<p>This article is an exploratory analysis of the different representations that makes a group of students from 4th grade (between 9 and 12 years old) to solve a series of proposed activities on elementary verbal arithmetic problems, called PAEV specifically additives a step in the semantic comparison category 5 and 6 and/or equalization 3 and 4, in order to know whether these activities contributes to student learning. Was used the theory of semiotic representations records through case studies for analysis and data processing. The productions of the students showed that they could coordinate at least two registers of representation for understanding the problems.</p> <p>Keywords: Learning, coordination, representation.</p>
Resumo	<p>Este artigo apresenta uma análise exploratória das distintas representações que um grupo de estudantes de 4º ano do Ensino Fundamental I (de 9 a 12 anos) utilizam para resolver uma série de atividades envolvendo problemas aritméticos elementares verbais, denominados PAEV. Eram especialmente problemas aditivos, em uma etapa da categoria semântica comparar e/ou igualar, com finalidade de saber se essas atividades favoreciam a aprendizagem do estudante. Empregou-se a teoria dos registros de representação semiótica mediante um estudo de caso na análise e processamento de dados. As produções dos estudantes mostraram que eles puderam coordenar ao menos dois registros de representação para a compreensão dos problemas.</p> <p>Palavras-chave: aprendizagem, de coordenação, representação.</p>

1. Introducción

Los PAEV, son problemas aritméticos de enunciado verbal entendidos en educación como problemas de la vida real o problemas de contexto real para el

estudiante de primaria. Específicamente los PAEV aditivos de una etapa o de un paso en la categoría semántica de comparación y/o igualdad, se resuelven con operaciones aritméticas de una operación ya sea de suma o resta y que en el enunciado verbal o texto, denoten la relación de comparar dos cantidades, con las expresiones: “más que” o “menos que”, (caso de la categoría semántica de comparación) o equipararlas, con las expresiones: “tantas... como” (caso de la categoría semántica igualdad). Ejemplo:

*“Juan tiene 8 canicas. Si Pedro pierde 3, tendrá tantas canicas como Juan.
¿Cuántas canicas tiene Pedro?”*

Explica Martínez (1995, p. 170), que los PAEV han sido, tradicionalmente, el lugar natural donde los alumnos se introducían a la aritmética aplicada, que cuando se habla de aritmética aplicada parece que se habla de algo menor, sin repercusiones o trascendencia, sin embargo Martínez afirma que es todo lo contrario porque como lo indica Neshier (1980, p. 41), “la aritmética aplicada es la parcela más significativa del conocimiento para la vida futura y es frecuentemente definida como una de las destrezas más básicas para el ciudadano común” y que de manera similar Castro, Rico y Gil (1992, p. 244) lo dicen: “Los problemas aritméticos verbales se incluyen en el currículo escolar con la finalidad, entre otras, de facilitar al alumno este acercamiento entre aritmética y realidad, entre aritmética y aplicaciones a la vida real, que hacen más significativo y valioso su estudio”. También Rodríguez expone, que:

Hay muchas situaciones de la vida real que conducen a las operaciones de sumar y restar. Estas situaciones son presentadas en la escuela en forma de problemas verbales de suma y resta. Así pues, los problemas verbales más que los algoritmos son el contexto fundamental a través del cual el niño aplica el conocimiento matemático en situaciones cercanas a la vida real. (Rodríguez, 1991, p. 23)

Además los PAEV constituyen una parte fundamental del currículo de educación primaria peruana. Dentro de la estructura del sistema curricular nacional, los mapas de progreso de aprendizaje o estándares de aprendizaje nacionales creados por el Ministerio de Educación y el Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica – IPEBA, describen en el Mapa de Progreso del Aprendizaje Matemático Números y Operaciones, que una de las competencias que se pide tengan los estudiantes de 3° y 4° grado de primaria, es que resuelva y formule situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de agregar, quitar, igualar o comparar dos cantidades, según la clasificación de los PAEV: Comparación e Igualación 3 y 4. De manera similar para los estudiantes de 5° y 6° grado de primaria, según la clasificación de los PAEV: Comparación e Igualación 5 y 6.

En este caso nuestro interés va dirigido al estudiante de 4° grado de primaria, ya que para este nivel debe haber logrado resolver problemas de tipo PAEV de categoría igualar 3 y 4, y pensamos que debe estar familiarizado con problemas de tipo PAEV aditivos simples de categoría comparar 5 y 6 para cuando alcance el siguiente grado o nivel educacional.

Para el presente Análisis exploratorio, el marco teórico utilizado es la teoría de los registros de las representaciones semióticas propuesta por Duval, que plantea, que el empleo y la coordinación de diversos registros de representación semiótica en la adquisición de un objeto matemático o concepto matemático, hace posible la comprensión del mismo, y que la comprensión de un objeto matemático reposa en la conversión de al menos dos registros de representación semiótica. En el análisis y procesamiento de datos, la metodología que se empleó es la técnica del estudio de casos, desarrollándose una serie de actividades para evaluar los conocimientos adquiridos por el estudiante antes y después del análisis y de esta forma saber si dichas actividades contribuyen de alguna forma al aprendizaje del estudiante.

2. Marco Teórico

2.1 Teoría de los Registros de Representación Semiótica

La Teoría de los Registros de Representación Semiótica fue desarrollada por el Filósofo y Psicólogo Francés Raymond Duval en 1995. Su principal obra: "Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales" sentó las bases para las investigaciones en la educación matemática, sirviendo como marco teórico a diferentes trabajos sobre problemas de comprensión en las matemáticas.

Duval afirma, que para la comprensión de la matemática se requiere una coordinación entre los diversos sistemas de representación semióticos, si no se desarrolla dicha coordinación, los estudiantes no pueden cruzar el umbral de la conversión de representación. Duval explica también que la habilidad para movilizar diversas representaciones conjuntamente de manera interactiva o en paralelo depende del desarrollo de esta coordinación, y la comprensión conceptual no es la condición de tal coordinación, sino que surge de su desarrollo. En otras palabras, lo importante para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos, porque de esta forma surgirá la comprensión conceptual y al darse cuenta de la forma específica de representar para cada sistema semiótico será la condición cognitiva para la comprensión. (Duval, 2006, pp. 158-159)

Para Duval (2004), el tránsito entre los diferentes Registros de Representación Semiótica tiende a favorecer las actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos, es por ello que los alumnos deben de transitar entre varios tipos de registros, por lo menos dos, a fin de afirmar que se aprendió un determinado concepto matemático, una situación o un proceso. Según Duval, este tránsito entre Registros de Representación Semiótica, debe hacerse en forma natural y espontánea, y se logran cuando los diferentes Registros de Representación Semiótica representan para el alumno el mismo objeto. Entonces Duval explica que cuando se analiza cualquier actividad matemática tenemos que distinguir en primer lugar dos clases de

transformación sobre Los Registros de Representación Semiótica: los tratamientos y las conversiones. (Figura 1)

- Los tratamientos son transformaciones de representación dentro de un mismo registro: por ejemplo, efectuar un cálculo estrictamente en un mismo sistema de escritura o de representación de números; resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones; completar una figura según los criterios de conexidad y de simetría.
- Las conversiones son transformaciones de representaciones que consisten en cambiar de registros conservando los mismos objetos, por ejemplo: pasar de escritura algebraica de una ecuación a su representación gráfica.

Entonces Duval pregunta: ¿Cómo hacer que los estudiantes entren en el complejo y amplio funcionamiento de la conversión de representación? Duval responde: “La mayoría de los profesores están de acuerdo en que es importante que los estudiantes usen tanto símbolos como figuras, representen modelos espaciales y numéricos, e identifiquen el mismo patrón en diferentes representaciones y contextos. Pero el tema principal es saber cuáles son los tipos de tareas y actividades para lograr este propósito”. (Duval, 2006, p. 159)

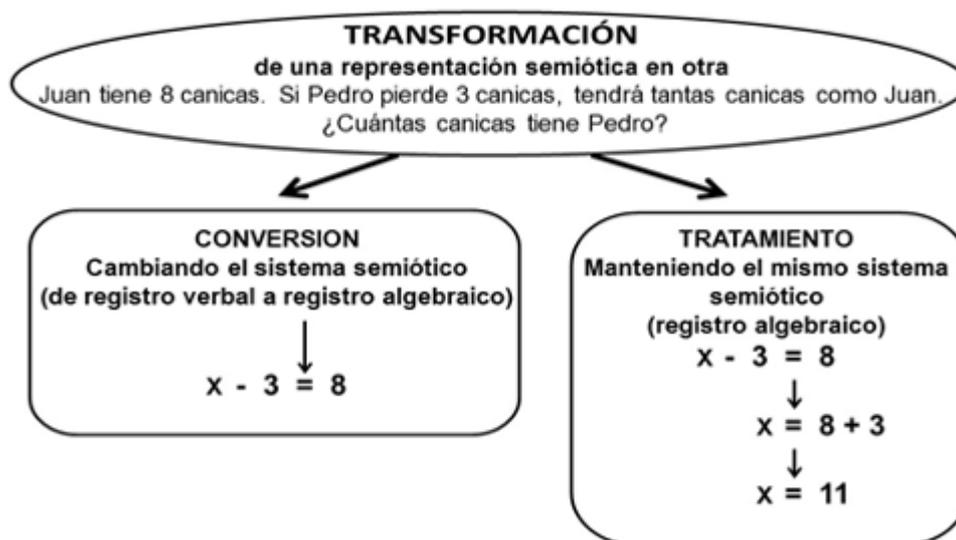


Figura 1

En nuestro caso plantearemos una serie de actividades, donde el estudiante de 4° grado de primaria en la conversión de los PAEV aditivos de una sola etapa en las categorías de comparación e igualación, transite entre varios registros de representación, siendo estas representaciones: algebraica, aritmética y gráfica.

2.2 Registros de representación semiótica y los PAEV

Explica Duval, que los problemas de la vida diaria se subrayan a menudo especialmente en la enseñanza de la educación primaria, porque se piensa que la aplicación de procedimientos y operaciones matemáticas a problemas prácticos da significado al aprendizaje de las matemáticas, pero también hay otra razón más

interesante para ese propósito de resolver problemas “de la vida real” y es que los estudiantes utilicen su experiencia física o diaria y sus representaciones mentales. Así se les podrían ahorrar a los estudiantes el problema que suscitan las representaciones semióticas y además podrían comprender los conceptos matemáticos y por tanto dar sentido a las representaciones semióticas empleadas. (Duval, 2006, pp. 162-164)

Duval también menciona, que la ventaja educativa de los problemas de la vida real es que permiten trabajar libremente con aquellas representaciones que parezcan más accesibles que las que se usan en matemáticas como las representaciones auxiliares que pueden ayudar al estudiante a comprender cada etapa del proceso de resolución. Expresa Duval que de cualquier manera, lo que importa no es el averiguar la “buena” representación sino las diversas y adecuadas representaciones para coordinarlas. En el caso del prototipo de ejemplo de los problemas aditivos, al recurrir a representaciones de tipo unidimensional, como el esquema del cálculo relacional de Vergnaud (1990), o a representaciones como la de tipos bidimensionales de Damm (1992). Duval se pregunta:

¿Cuál de estos dos tipos de representación puede hacer que los alumnos entiendan un problema aditivo (figura 2)? ¿El unidimensional de la izquierda o el bidimensional de la derecha? Los dos esquemas representan a textos del tipo: Pedro tiene (“ha ganado” o “ha perdido”) 5 canicas. Juega una partida (o “juega una segunda partida”). En total tiene 9 canicas (“ha ganado” o “ha perdido”). Se ve enseguida que el esquema de cálculo de relaciones es congruente con una de las tres operaciones posibles para una adición dada ($5 + 4 = 9$). Sin embargo el esquema bidimensional es congruente con la doble descripción del texto y permite distinguirlas. Lo que llamamos “información pertinente” del texto es la que los alumnos deben “seleccionar” y corresponde a la INTERSECCION DE DOS DETERMINACIONES SEMANTICAS DIFERENTES (marcada en el esquema con dos ejes diferentes). Tomar en cuenta la intersección de las dos determinaciones semánticas distintas ¡permite seleccionar una información y diferenciar directamente la lectura de un texto matemático de un texto ordinario! [...] (Duval, 2006, p. 165)

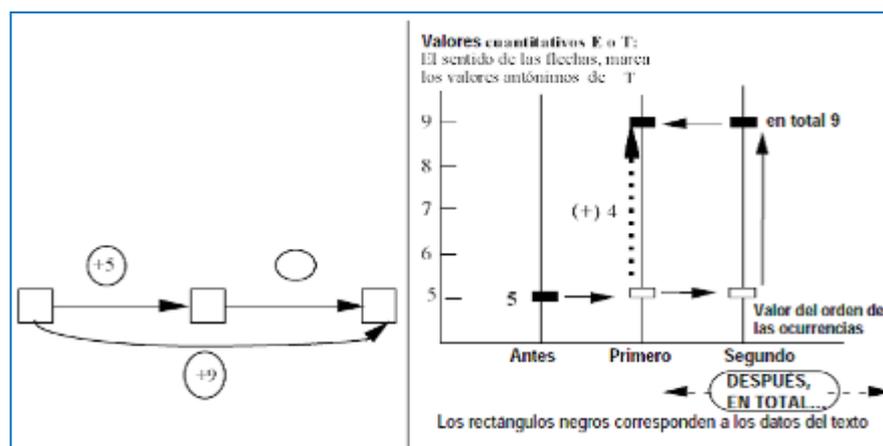


Figura 2

Duval (2006), concluye que las representaciones auxiliares son útiles y no deben ser ignoradas, que algunas veces los profesores en escuelas primarias, no pueden salir del laberinto de representaciones, incluso con problemas aditivos verbales de una sola operación al no usarlas y que de hecho la comprensión conceptual surge de la coordinación de los diversos sistemas semióticos usados, y darse cuenta de la forma específica de representar para cada sistema semiótico es

condición cognitiva para la comprensión. Por lo que hemos tomado como referencia la representación bidimensional de Damm como representación gráfica auxiliar haciéndole una pequeña variante para el desarrollo de las actividades propuestas, además de la representación algebraica y aritmética que vamos a utilizar.

3. Metodología

Para el análisis y procesamiento de datos, se empleó la técnica del estudio de casos, desarrollándose una serie de actividades (evaluaciones, sesiones de clase y repaso) para saber los conocimientos adquiridos por el estudiante antes y después del análisis, se escogió esta metodología por ser un esquema experimental basado en realizaciones didácticas en el aula, para analizar los procesos de aprendizaje del estudiante y las dificultades que encuentre al realizar las actividades propuestas. Para validar las secuencias de las actividades, hicimos una comparación entre lo que se esperaba y lo que realmente sucedió durante el desarrollo de la clase (Análisis a priori y a posteriori).

Como parte de las actividades primero se hizo un Análisis preliminar mediante una evaluación de 4 PAEV aditivo de una etapa en categorías comparación e igualdad a los estudiantes de 4° grado de primaria, después, se hicieron tres sesiones didácticas en el aula, incluido un repaso sobre el tema de desigualdades y ecuaciones. Para tener un resultado más fiable sobre el comportamiento de los estudiantes respecto al concepto de PAEV aditivo de una etapa en categorías comparación 5 y 6 y/o igualdad 3 y 4, se tomó como referencia al libro “Problemas aritméticos escolares” de Puig y Cerdán, para el diseño del contenido de cada sesión de clase. El tiempo que se otorgó para el desarrollo de cada sesión didáctica en el aula, fue de una hora académica (50 minutos), durante tres días intercalados (un día para cada sesión). Se les indicó a los estudiantes, que las actividades a realizar era un repaso sobre el tema de PAEV y que podían responder las preguntas en forma voluntaria.

En las dos primeras sesiones se les capacitó sobre cómo resolver los PAEV aditivos de un paso en la categoría comparación 5 y 6 (primera sesión) e igualdad 3 y 4 (segunda sesión); mediante el tránsito entre las representaciones de registro verbal a registro algebraico, de registro algebraico a registro gráfico y por último de registro gráfico a registro aritmético. Seguidamente se les evaluó para analizar sus producciones. En la tercera sesión de clase, se hizo el tránsito entre las representaciones de registros algebraico, gráfico y aritmético a registro verbal con una dinámica en grupo, que también fue evaluada.

Las actividades se desarrollaron con 28 estudiantes de un total de 30 que cursaban el 4° grado de primaria (Los estudiantes fluctúan entre los 9 y 12 años de edad y solo 28 asistían regularmente) de una Institución Educativa Estatal Peruana, ubicada en la ciudad de Lima, distrito de “El Agustino”. Si viene cierto no hay un estudio sociocultural de la población del distritito disponible al público, pero si se tiene información sobre su nivel socioeconómico y la mayoría de pobladores pertenece al estrato “C” y “D”; es decir que del 100% de la población, 43% de ellos cuentan con una vivienda básica completa, gozan de seguro social y tienen una

Educación superior universitaria incompleta o una Educación superior no universitaria completa y el 31% cuentan con una vivienda básica, no gozan de seguro social y solo tienen secundaria completa. El 13% del restante son estrato "B", el 10% estrato E y 3% estrato "A". (Asociación Peruana de Investigación de Mercados, 2014).

3.1 Análisis Preliminar

3.1.1 Análisis epistemológico

Puig y Cerdán, afirman que los PAEV son los primeros que aparecen en el currículo escolar de matemática y que al ser la primera actividad de resolución de problemas con la que se encuentran los niños en su vida escolar, debe ponerse toda la atención y el cuidado en ella. (Puig y Cerdán, 1988, c. 3, p. 1)

También Puig y Cerdán describen que los PAEV se clasifican en primer lugar en problemas de una etapa y problemas de más de una etapa, en los problemas de una etapa se hace una sola operación. En segundo lugar se clasifican como PAEV aditivos o multiplicativos, es decir aditivos si la operación a realizar es de suma o resta y multiplicativos si la operación es de multiplicación o división. Y que desde el punto de vista semántico, algunos investigadores se han puesto de acuerdo en clasificar los PAEV en cuatro grandes categorías por la gran importancia del significado del texto del problema a la hora de comprender los procesos utilizados por los niños para resolverlos. Siendo las categorías semánticas: cambio, combinación, comparación e igualación. (Puig y Cerdán, 1988, c. 3, pp. 10-15)

A continuación detallaremos las categorías que hemos utilizado en las actividades propuestas según Puig y Cerdán (1988):

Categoría semántica "Comparar"- Se incluyen en esta categoría los problemas que presentan una relación estática de comparación entre dos cantidades. Las cantidades presentes en el problema se denominan cantidad de referencia, cantidad comparada y diferencia; la cantidad comparada aparece a la izquierda de la expresión 'más que' o 'menos que', y la cantidad de referencia a su derecha. Dado que el sentido de la comparación puede establecerse en más o en menos, y dado que se puede preguntar por cualquiera de las tres cantidades, el número de tipos posibles de problemas de comparación es seis. Comparar³ y comparar⁶ se resuelven con una suma y los demás, con una resta. (Solo se muestran las que se usaron en la primera sesión de clase)

Comparar⁵. *Pedro tiene b. Pedro tiene c más que Juan. ¿Cuántos tiene Juan?*

Comparar⁶. *Pedro tiene b. Pedro tiene c menos que Juan. ¿Cuántos tiene Juan?*

En ambos casos, la letra "b" es la cantidad comparada, la letra "c" es la cantidad diferencia y la cantidad de referencia, es la respuesta a la pregunta.

Categoría semántica "Igualación"- Estos problemas se caracterizan porque hay en ellos una comparación entre las cantidades que aparecen, establecida por medio del comparativo de igualdad 'tantos como'. Como la estructura básica de este

tipo de problemas es la de los problemas de comparación, están presentes aquí también los tres tipos de cantidades: de referencia, comparada y diferencia, y la incógnita puede ser cualquiera de ellas; el sentido del cambio, que puede ser en más o en menos dependiendo de la relación entre las cantidades de referencia y comparada, duplica el número de posibilidades, con lo que de nuevo hay seis tipos de problemas de esta clase. (Solo se muestran las que se usaron en la segunda sesión de clase)

Igualar3. *Juan tiene a . Si Pedro gana c , tendrá tantos como Juan. ¿Cuántos tiene Pedro?*

Igualar4. *Juan tiene a . Si Pedro pierde c , tendrá tantos como Juan. ¿Cuántos tiene Pedro?*

En ambos casos, la letra “ a ” es la cantidad de referencia, la letra “ c ” es la cantidad diferencia y cantidad comparada, es la respuesta a la pregunta.

3.1.2 Análisis cognitivo

Se procedió a evaluar a los 28 estudiantes del 4° grado de primaria mediante cuatro problemas del tipo PAEV aditivos de un paso en la categoría comparación 5 y 6 e igualación 3 y 4. La evaluación de los conocimientos previos, es para saber si los estudiantes tienen conocimientos necesarios para desarrollar las actividades antes descritas, ya que teóricamente deberían contar con los siguientes:

- Las operaciones aritméticas básicas como la adición y la sustracción.
- La desigualdad de números naturales de dos o más cifras.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado.
- Comparación y establecimiento de equivalencias entre números naturales mediante la adición y sustracción.
- Expresar en forma aritmética o en forma algebraica un enunciado verbal.

A continuación presentamos la siguiente tabla con los resultados generales obtenidos de la evaluación de los conocimientos previos de los estudiantes de 4° grado de primaria. (Tabla 1)

Respuestas	CUESTIONARIO, PAEV Categoría Semántica:			
	Comparar 5 Pregunta N° 1	Comparar 6 Pregunta N° 2	Igualar 4 Pregunta N° 3	Igualar 3 Pregunta N° 4
Correctas	7 25%	8 29%	4 14%	4 14%
Incorrectas	20 71%	19 68%	24 86%	21 75%
En blanco	1 4%	1 4%	0 0%	3 11%

Tabla 1

De la Tabla 1, podemos observar, que el 86% y 75% de los estudiantes de 4° grado de primaria que participaron en el estudio no hicieron correctamente la representación de los PAEV aditivos de un paso en las categorías igualar 3 y 4 que son los tipos de PAEV que exige el currículo de educación primaria peruana para este nivel de estudios.

Seguidamente mostramos los cuatro problemas del tipo PAEV aditivos de un paso en la categoría comparación 5 y 6 e igualación 3 y 4 de la evaluación de conocimientos previos, comentarios del resultado general de la Tabla 1 y algunas imágenes que muestran las producciones de algunos de los estudiantes

1. Carlos tiene 8 trompos. Carlos tiene 3 trompos más que Pedro. ¿Cuántos trompos tiene Pedro? Respuesta: $8 - 3 = 5$.

Análisis: Sólo el 25% de los estudiantes, hizo bien la representación aritmética. Mostramos el caso del estudiante Luis que hizo correctamente la representación solo en los dos primeros problemas de la evaluación (Imagen 1). Al 71% restante de los estudiantes, en vez de restar las cantidades de comparación y diferencia para hallar la cantidad de referencia, las sumaron. Mostramos el caso del estudiante Marcel que no representó correctamente los problemas (Imagen 2) y también mostramos la evaluación de la estudiante Camila que dio respuesta a los problemas sin hacer representación alguna (Imagen 3).

Alumno(a): Jelmy Marcel Mayanga Espino
 Grado: 4º Sección "A" N°: 19 Fecha: 05/11-2014

1. Pedro tiene 8 trompos. Pedro tiene 3 trompos más que Carlos. ¿Cuántos trompos tiene Carlos?

Solución

$$\begin{array}{r} 8 + \\ 3 \\ \hline 11 \end{array}$$
 X

Respuesta
 Tiene 11 trompos

2. María tiene 5 figuritas. María tiene 3 figuritas menos que Sofía. ¿Cuántas figuritas tiene Sofía?

Solución

$$\begin{array}{r} 5 - \\ 3 \\ \hline 2 \end{array}$$
 X

Respuesta
 Tiene 2 figuritas

Imagen 2

Alumno(a): Luis Adrían Vilacayaga Pardo
 Grado: 4º Sección A N°: 30 Fecha: 14/11

1. Pedro tiene 8 trompos. Pedro tiene 3 trompos más que Carlos. ¿Cuántos trompos tiene Carlos?

Solución

$$\begin{array}{r} 8 + \\ 3 \\ \hline 5 \end{array}$$
 /

Respuesta
 Carlos tiene 5 trompos

2. María tiene 5 figuritas. María tiene 3 figuritas menos que Sofía. ¿Cuántas figuritas tiene Sofía?

Solución

$$\begin{array}{r} 5 + \\ 3 \\ \hline 8 \end{array}$$
 /

Respuesta
 Sofía tiene 8 figuritas

Imagen 1

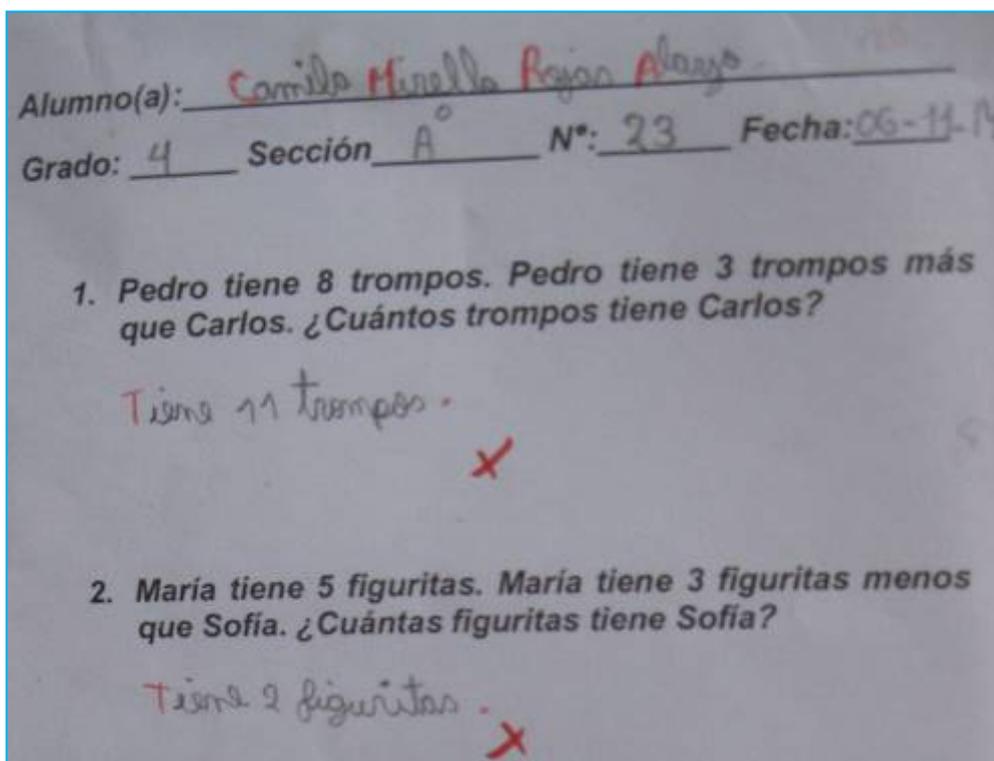


Imagen 3

2. **María tiene 5 figuritas. María tiene 3 figuritas menos que Sofía. ¿Cuántas figuritas tiene Sofía?** Respuesta: $5 + 3 = 8$.

Análisis: En este caso el 29% de los estudiantes hizo bien la representación aritmética, como podemos apreciar el caso de la estudiante Rubí (Imagen 4). El otro 68% de ellos, en vez de sumar las cantidades del enunciado para hallar la cantidad de referencia, las restaron. En este caso representado por el estudiante Jean (Imagen 5).

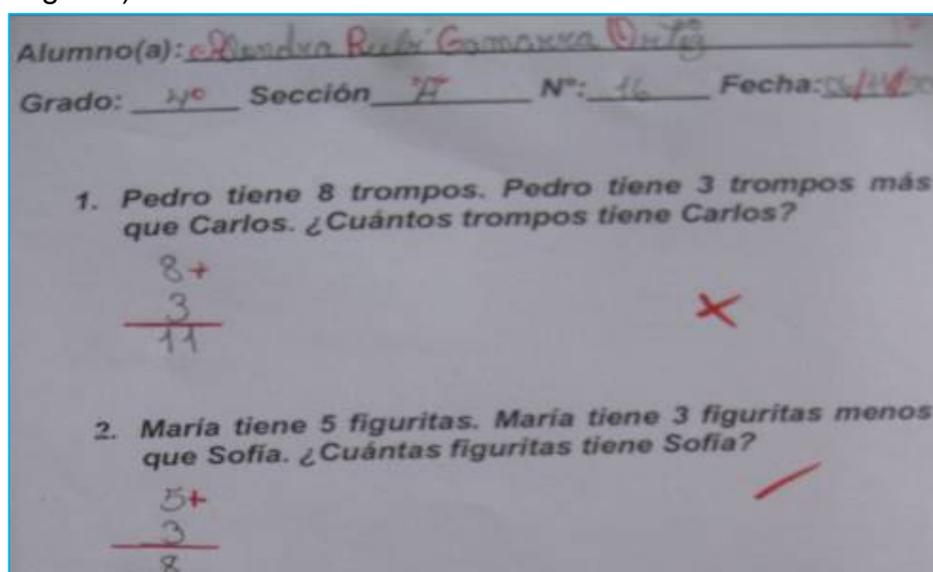


Imagen 4

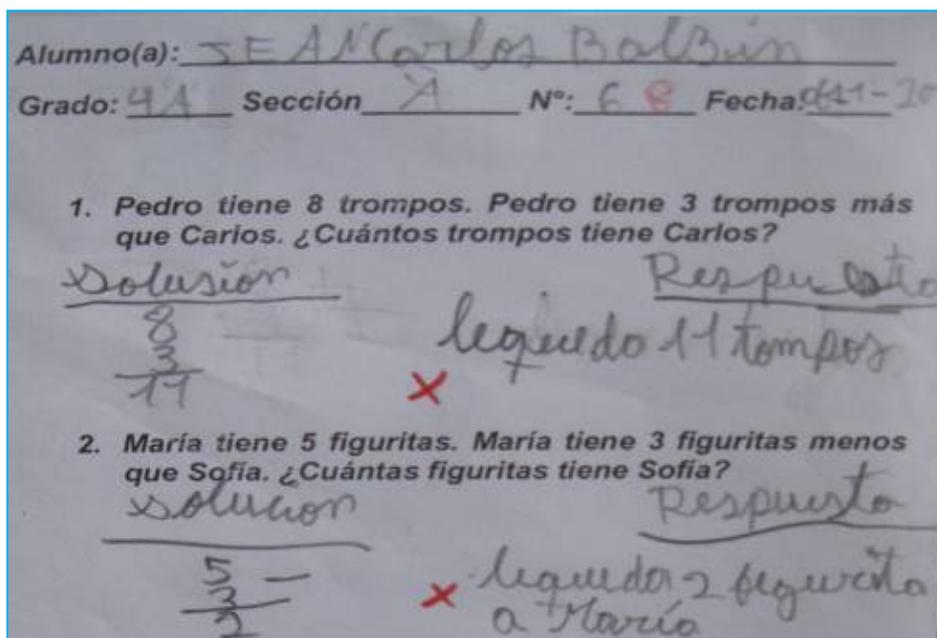


Imagen 5

3. Juan tiene 8 canicas. Si Pedro pierde 3 canicas, tendrá tantas canicas como Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro? Respuesta: $8 + 3 = 11$.

Análisis: Solo el 14% de los estudiantes hizo bien la representación aritmética, representado por el estudiante Jean (Imagen 6), el otro 86% de ellos en vez de sumar las cantidades de referencia y diferencia para hallar la cantidad comparada, las restaron, que es el caso del estudiante Luis (Imagen 7).

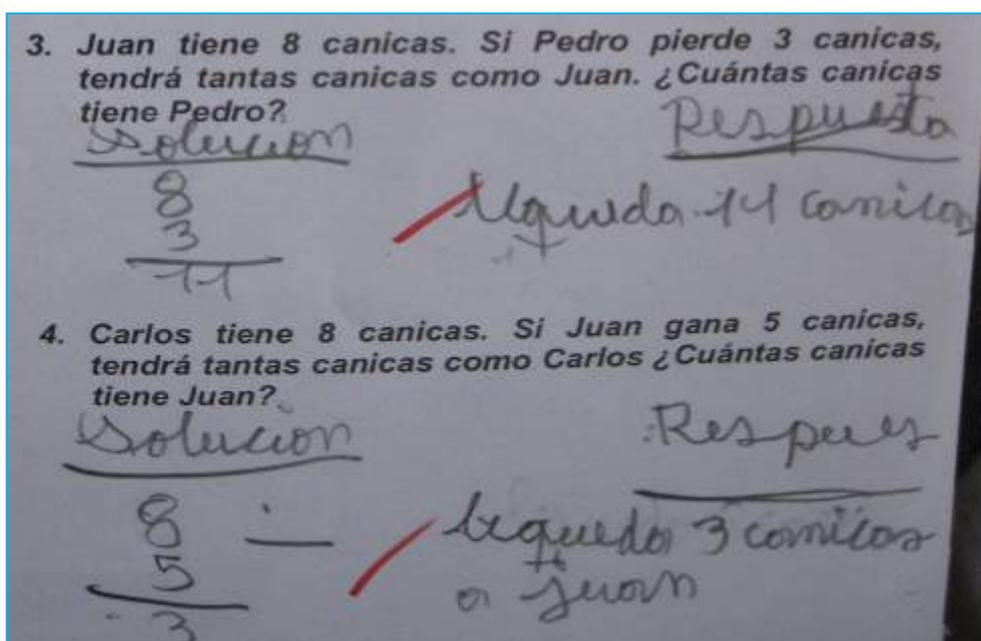


Imagen 6

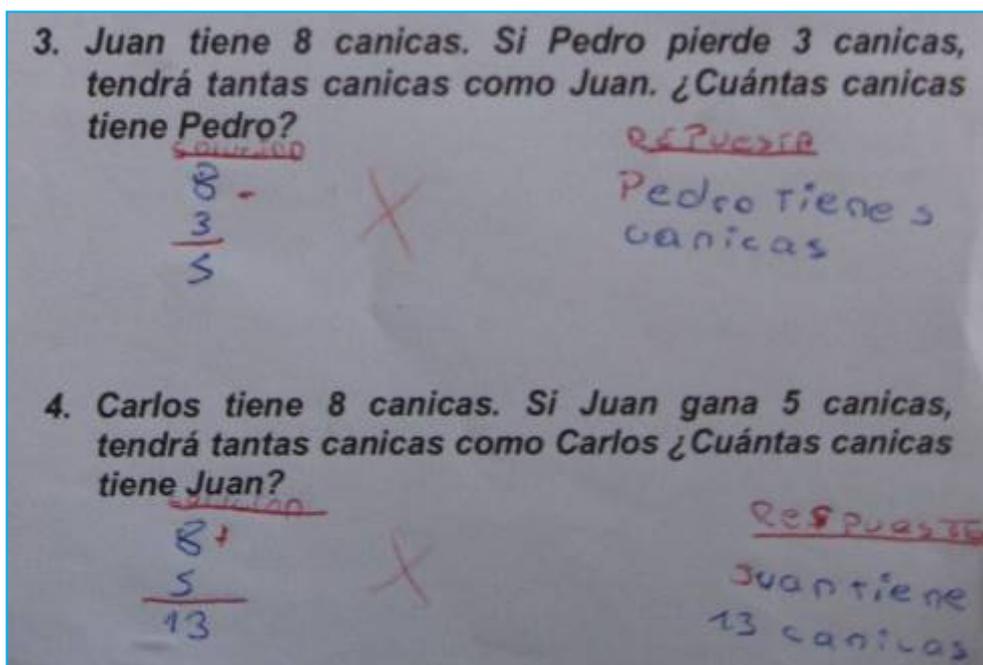


Imagen 7

4. Carlos tiene 8 canicas. Si Juan gana 5 canicas, tendrá tantas canicas como Carlos ¿Cuántas canicas tiene Juan? Respuesta: $8 - 3 = 5$.

Análisis: El 14% de los estudiantes hizo bien la representación aritmética, representado por el estudiante Jean (Imagen 5). El otro 75% de ellos, para hallar la cantidad comparada en vez de restar, sumaron, representado por el estudiante Luis (Imagen 6). Quedando un 11% de estudiantes que no resolvieron el problema.

Del análisis antes hecho en las producciones de los estudiantes, observamos, que las dificultades que tienen la mayoría de estudiantes de 4° grado de primaria a quienes se les propuso los cuatro problemas del tipo PAEV aditivos de un paso en la categoría comparación 5 y 6 e igualdad 3 y 4, no están relacionadas con operaciones de cálculo, es decir no son errores de ejecución, sino son errores de representación. Según Bermejo y Rodríguez, detallan que los errores suelen presentarse de dos tipos, uno de ejecución y otro de representación. Los primeros se originan cuando el niño elige correctamente la operación aritmética correspondiente pero fracasa a la hora de ejecutarla. Los segundos surgen a causa de una representación inapropiada del problema a partir del texto verbal (Bermejo y Rodríguez, 1991, p. 38). En el resultado de la evaluación previa de conocimientos a los estudiantes de 4° grado de primaria, la mayoría son casos que corresponden a una representación inapropiada del problema.

También hemos observado que los estudiantes hicieron un solo tipo de representación, la representación aritmética. Señala García, que cuando la enseñanza ha estado centrada en la formación y el tratamiento de representaciones pertenecientes a un único registro semiótico o ha privilegiado un registro semiótico frente a otros, los conocimientos aprendidos quedan limitados a un único registro y

se generan problemas para la producción de aprendizajes conceptuales (García, 2005, p. 37). En este caso se ha privilegiado la representación aritmética y es la única que se halla en las producciones de los estudiantes de 4° grado de primaria.

3.2 Análisis A Priori

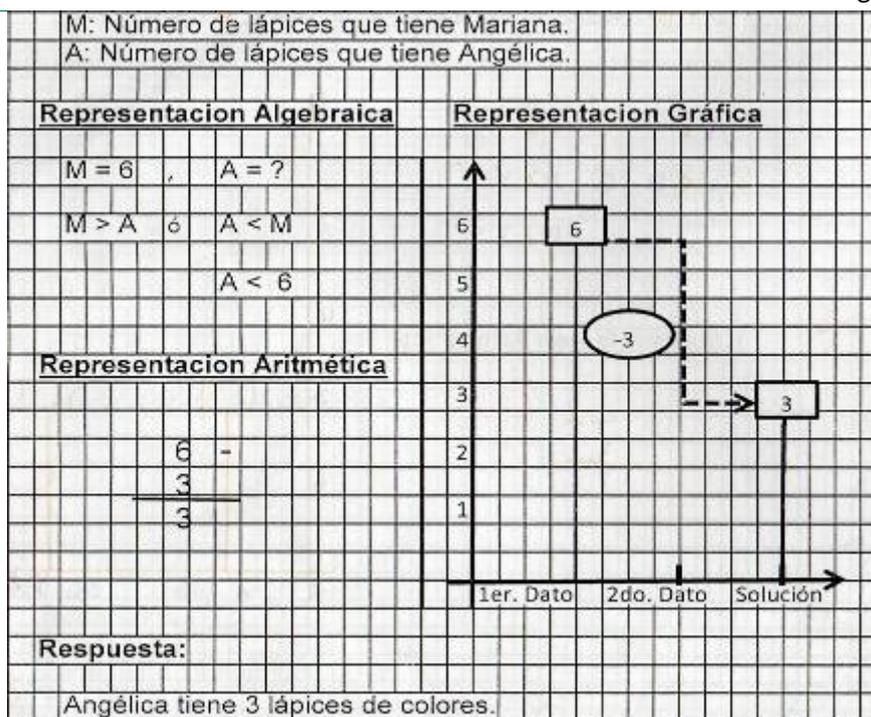
A continuación describimos los comportamientos matemáticos que se esperaban de cada estudiante por cada Sesión didáctica.

En la **Sesión N° 1**, se hizo un repaso sobre desigualdades de números naturales de dos o más cifras y sobre ecuaciones e inecuaciones de primer grado. Se enseñó PAEV aditivos de un paso categorías comparación 5 y comparación 6, mediante tres tipos de representaciones: Algebraica, Aritmética y Gráfica, por último se hizo una evaluación, se esperaba:

- Que los estudiantes reconozcan y asignen una letra que represente la cantidad comparada, que se encuentra en la primera oración del problema y la cantidad a hallar que es la cantidad de referencia (la incógnita) en forma verbal y luego numérica para la letra que se conozca su valor.
- Que puedan hacer la representación algebraica cambiando el sistema semiótico de registro verbal a registro algebraico, estableciendo las desigualdades entre las letras asignadas, (la cantidad comparada y la cantidad de referencia), luego que hagan el tratamiento correspondiente a la inecuación, reemplazando el valor numérico de la cantidad comparada, para que tengan una idea del rango de valores que puede tomar la variable cantidad de referencia que aún es una incógnita.
- Teniendo idea del rango de valores de la variable cantidad de referencia, que hagan la representación gráfica (conversión del sistema semiótico de registro algebraico y registro verbal a registro gráfico) mediante la construcción de ejes coordenados, la gráfica correspondiente al primer dato (que es la cantidad comparada), el reconocimiento y gráfica del segundo dato (que es la cantidad diferencia), identificando que operación (suma o resta) van a realizar para hallar la cantidad de referencia y por último graficarla como solución del problema.
- Que hagan la representación aritmética, es decir la conversión del sistema semiótico de registro grafico a registro numérico, confirmando la respuesta a la pregunta del problema encontrada en la representación gráfica.

Ejemplo: Mariana tiene 6 lapiceros de colores. Mariana tiene 3 lápices de colores más que Angélica. ¿Cuántos lápices de colores tiene Angélica?

Solución:

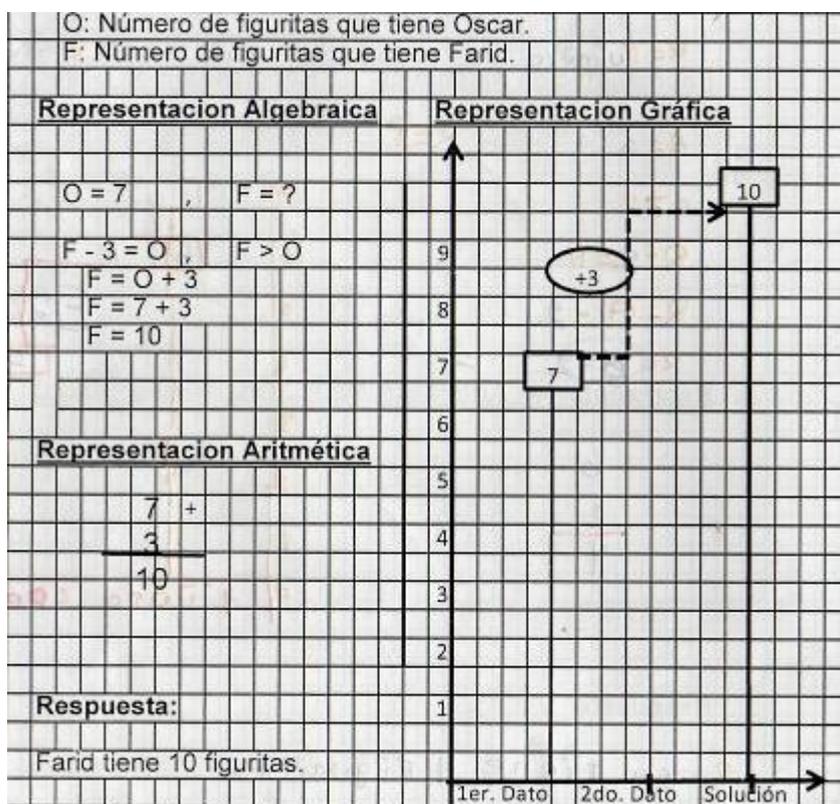


En la **Sesión N° 2**, se hizo un repaso sobre comparación y establecimiento de equivalencias entre números naturales mediante la adición y sustracción. Se enseñó PAEV aditivos de un paso categorías igualación 3 e igualación 4, mediante tres tipos de representaciones: Algebraica, Aritmética y Gráfica, por último se hizo una evaluación, se esperaba:

- Que los estudiantes identifiquen la cantidad de referencia que se encuentra en la primera oración del problema, la cantidad de diferencia que se encuentra en la segunda oración del problema y la cantidad a hallar que es la cantidad comparada (la incógnita), también asignen letras que las representan (menos a la cantidad de diferencia), en forma verbal y luego numérica para la letra asignada que se conoce su valor.
- Que puedan hacer la representación algebraica cambiando el sistema semiótico de registro verbal a registro algebraico, estableciendo correctamente la ecuación donde está la igualdad de la cantidad comparada con respecto a la letra asignada de la cantidad de referencia más la cantidad de diferencia, continuando con el tratamiento de la misma, hallando la cantidad comparada que es la incógnita del problema.
- Luego que hagan la representación gráfica mediante la construcción de ejes coordenado (conversión del sistema semiótico de registro algebraico a registro gráfico), la gráfica correspondiente al primer dato que es la cantidad de referencia, la gráfica del segundo dato que es la cantidad diferencia, y gráfica de la cantidad comparada que es la solución del problema.
- Que hagan la representación aritmética, es decir la conversión del sistema semiótico de registro grafico a registro numérico, confirmando la respuesta a la pregunta del problema encontrada en la representación gráfica y algebraica.

Ejemplo: Oscar tiene 7 figuritas. Si Farid regala 3 figuritas, tendrá tantas como Oscar. ¿Cuántas figuritas tiene Farid?

Solución:



En la **Sesión N° 3**, se propuso hacer entre los estudiantes cuatro grupos y a cada grupo se les entregó cuatro cartillas, en cada cartilla se encuentra el enunciado verbal de las preguntas planteadas en la sesión didáctica 1 y 2. También se les entregó cuatro papelógrafos donde están las representaciones de cada uno de los enunciados, se esperaba:

- Que los estudiantes, a partir de la representación algebraica, gráfica o aritmética que están en los papelógrafos, puedan reconocer la representación verbal; es decir los enunciados que les corresponde ubicados en las cartillas de colores.

3.3 Análisis A Posteriori

El reporte se emitirá por cada sesión didáctica con imágenes representativas de las producciones de los estudiantes antes mencionados, tales como Luis, Marcel, Camila, Rubí y Joan.

3.3.1 Resultados de evaluación de la Sesión N° 1

A continuación presentamos la siguiente tabla con los resultados generales obtenidos de la primera sesión (Tabla 2).

CUESTIONARIO. PAEV Categoría Semántica:		
Respuestas	Comparar 5 Pregunta N° 1	Comparar 6 Pregunta N° 2
Correctas	17 61%	9 32%
Incorrectas	6 21%	12 43%
En blanco	5 18%	7 25%

Tabla 2

Específicamente en la pregunta número uno que corresponde a PAEV aditivo de un paso categoría comparar 5, el 61% de los estudiantes lograron transitar por lo menos en dos representaciones diferentes, pudieron expresar en forma aritmética, algebraica y gráfica el enunciado verbal, es decir, que identificaron la operación a ejecutar y encontraron la cantidad de referencia.

Análisis por cada representación: El 89% de los estudiantes asignaron letras que representan la cantidad comparada, que se encuentra en la primera oración del problema y la cantidad a hallar que es la cantidad de referencia. El 79% de los estudiantes pudieron hacer la representación algebraica cambiando el sistema semiótico de registro verbal a registro algebraico, establecieron las desigualdades entre las letras asignadas a la cantidad comparada y la cantidad de referencia. El 61% hicieron la representación gráfica mediante la construcción de ejes coordenados, graficaron el valor correspondiente al primer dato (la cantidad comparada), la gráfica del segundo dato (la cantidad diferencia) y la gráfica de la solución del problema (la cantidad de referencia). Además, también hicieron la representación aritmética. (Tabla 3)

Comparar 5				
Respuesta	Asignación de letras	Representación Algebraica	Representación Gráfica	Representación Aritmética
Correctas	25 89%	22 79%	17 61%	17 61%
Incorrectas	2 7%	5 18%	6 21%	6 21%
En blanco	1 4%	1 4%	5 18%	5 18%

Tabla 3

En la pregunta número dos, que corresponde a PAEV aditivo de un paso categoría comparar 6, solo el 32% de los estudiantes lograron transitar por lo menos en dos representaciones diferentes.

Análisis por cada representación: El 86% de los estudiantes asignaron las letras que representan la cantidad comparada y la cantidad de referencia. Pero en este caso sólo 46% de ellos pudieron hacer el cambio del sistema semiótico de registro verbal a registro algebraico, quedando un 54% de estudiantes que no establecieron las desigualdades entre la cantidad comparada y la cantidad de referencia. Sólo el 32% hicieron la conversión del sistema semiótico de registro algebraico a registro gráfico mediante la construcción de ejes coordenados, graficando: el valor correspondiente al primer dato, el segundo dato y la solución del problema. Y de ellos el 29% lograron hacer la conversión del sistema semiótico de registro gráfico a registro numérico o representación aritmética. (Tabla 4)

Comparar 6				
Respuesta	Asignación de letras	Representación Algebraica	Representación Gráfica	Representación Aritmética
Correctas	24 86%	13 46%	9 32%	8 29%
Incorrectas	1 4%	10 36%	11 39%	13 46%
En blanco	3 11%	5 18%	8 29%	7 25%

Tabla 4

En seguida presentamos el caso de los estudiantes: Marcel (Imagen 8 - 9) y Camila (Imagen 10 - 11), que son los casos más resaltantes.

1. Bryan tiene 9 canicas. Bryan tiene 4 canicas más que Cesar. ¿Cuántas canicas tiene Cesar?

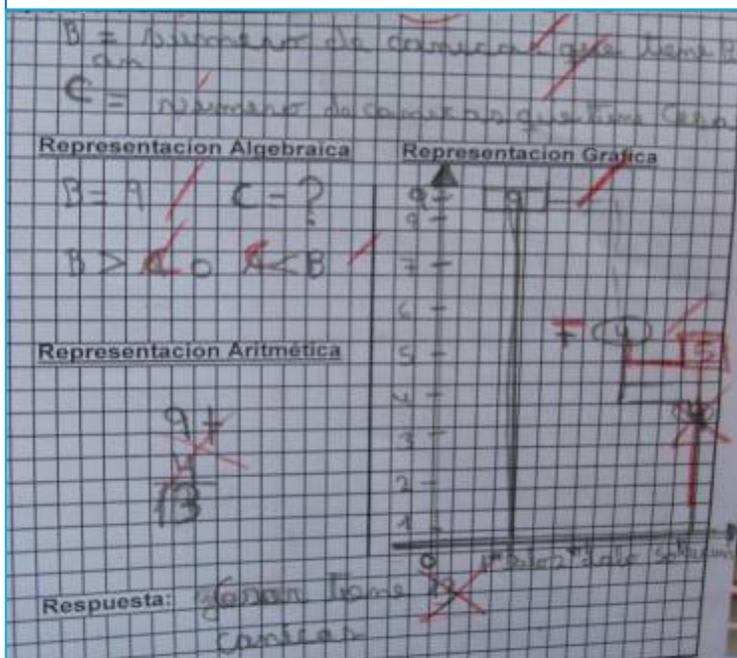


Imagen 8

Recordemos que en la evaluación de conocimientos previos, el estudiante Marcel no representó correctamente los dos primeros problemas (Imagen 2) y después de la sesión didáctica N°1 tampoco logró hacerlo. Como podemos observar en la imagen 8, el estudiante para dar respuesta a la pregunta, en la representación tanto aritmética como gráfica, en vez de restar las cantidades dadas en el enunciado del problema, las suma. Lo mismo pasó con el estudiante Joan.

En la imagen 9 podemos apreciar que el estudiante Marcel para hallar respuesta a la pregunta, en vez de sumar, resta. En la entrevista hecha a los estudiantes Joan, y Marcel, ambos expresaron tener dificultades en la representación algebraica, al relacionar las palabras “menos que” y “más que” con los signos “<” y “>”. En el caso de los estudiantes: Luis, Rubí y Camila, no tuvieron dificultad alguna para representar correctamente los problemas propuestos.

2. Víctor tiene 9 canicas. Víctor tiene 3 canicas menos que David. ¿Cuántas canicas tiene David?

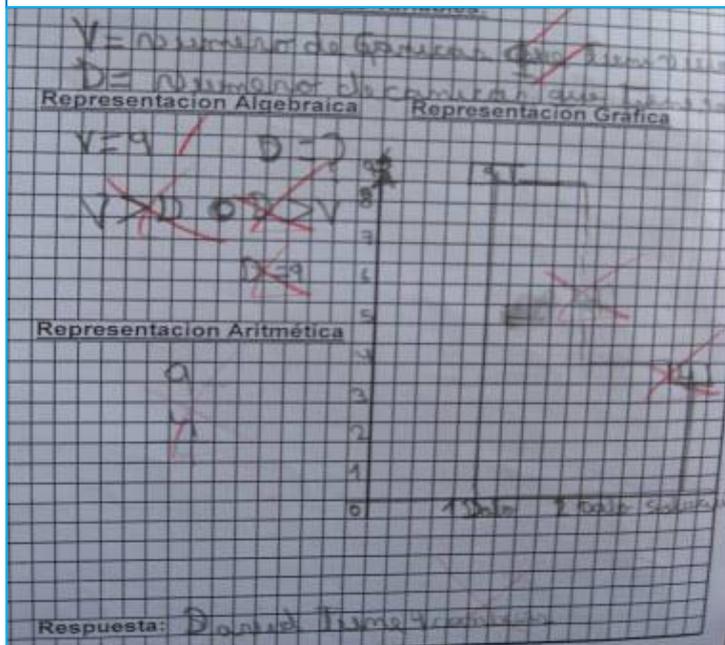


Imagen 9

El caso de la estudiante Camila nos llamó la atención, ya que en la evaluación previa ella no hizo representación alguna y las cuatro respuestas dadas por la estudiante eran incorrectas (Imagen 3). En la imagen 10 e imagen 11, observamos que la estudiante para dar respuesta a la pregunta, identifica y asigna correctamente las cantidades dadas en el enunciado mediante letras y luego transita por cada representación correctamente.

1. Bryan tiene 9 canicas. Bryan tiene 4 canicas más que Cesar. ¿Cuántas canicas tiene Cesar?

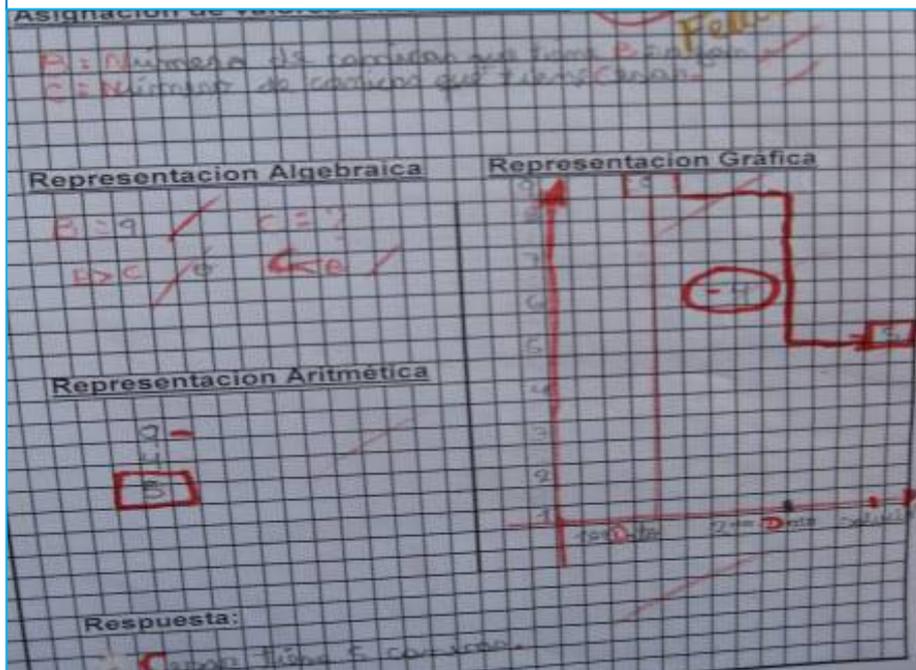


Imagen 10

2. Víctor tiene 9 canicas. Víctor tiene 3 canicas menos que David.
¿Cuántas canicas tiene David?

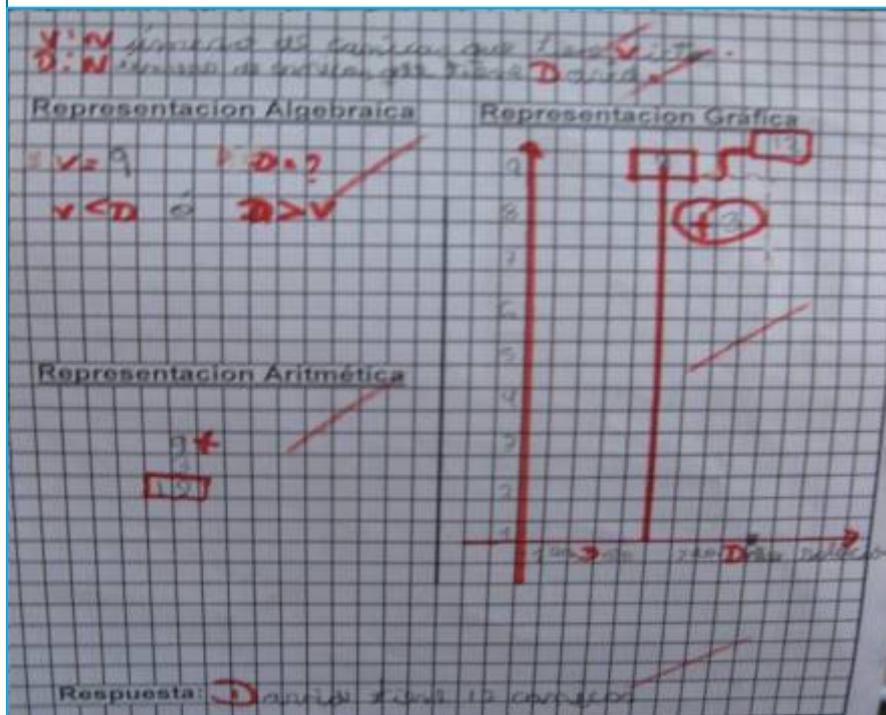


Imagen 11

3.3.2 Resultados de evaluación de la Sesión N° 2

A continuación presentamos la siguiente tabla con los resultados generales obtenidos de la segunda sesión (Tabla 5).

CUESTIONARIO, PAEV Categoría Semántica:		
Respuestas	Igualar 4 Pregunta N° 3	Igualar 3 Pregunta N° 4
Correctas	26 93%	25 89%
Incorrectas	2 7%	2 7%
En blanco	0 0%	1 4%

Tabla 5

En la pregunta número tres, que pertenece a PAEV aditivo de un paso categoría igualar 4, el 93% de los estudiantes lograron transitar por lo menos en dos representaciones diferentes.

Análisis por cada representación: en este caso el 96% de los estudiantes asignaron las letras que representan la cantidad de referencia, que se encuentra como dato en la primera oración del problema y la cantidad comparada que es la incógnita del problema. Luego el 93% de ellos pudieron hacer el cambio del sistema semiótico de registro verbal a registro algebraico, estableciendo la igualdad de la

cantidad comparada con respecto a la variable de la cantidad de referencia más la cantidad de diferencia, continuando con el tratamiento de la ecuación encontrada y hallando la cantidad comparada que es la solución al problema. También hicieron la conversión del sistema semiótico de registro algebraico a registro gráfico mediante la construcción de ejes coordenados, graficando: el valor correspondiente al primer dato, el segundo dato y la solución. Para la representación aritmética solo el 89% hicieron la conversión del sistema semiótico de registro grafico a registro numérico. (Tabla 6)

Respuesta	Igualar 4			
	Asignación de letras	Representación Algebraica	Representación Gráfica	Representación Aritmética
Correctas	27 96%	26 93%	27 96%	25 89%
Incorrectas	1 4%	0 0%	1 4%	3 11%
En blanco	0 0%	2 7%	0 0%	0 0%

Tabla 6

En la pregunta número cuatro, que pertenece a PAEV aditivo de un paso categoría igualar 3, el 89% de los estudiantes lograron transitar por lo menos en dos representaciones diferentes, pudieron expresar en forma aritmética y gráfica el enunciado verbal, también lo lograron en forma algebraica en un 86%.

Análisis por cada representación: en este caso al igual que el caso anterior el 96% de los estudiantes asignaron las letras que representan la cantidad de referencia, y la cantidad comparada. Luego el 86% de ellos pudieron hacer el cambio del sistema semiótico de registro verbal a registro algebraico, hallando la cantidad comparada. A pesar que algunos estudiantes no encontraron la solución pedida del problema en la representación algebraica, el 96% de los estudiantes hicieron la conversión del sistema semiótico de registro verbal a registro gráfico mediante la construcción de ejes coordenados, haciendo las gráficas correspondientes. Y de la representación aritmética el 93% de los estudiantes lo desarrollaron correctamente. (Tabla 7)

Respuesta	Igualar 3			
	Asignación de letras	Representación Algebraica	Representación Gráfica	Representación Aritmética
Correctas	27 96%	24 86%	25 89%	26 93%
Incorrectas	1 4%	2 7%	2 7%	1 4%
En blanco	0 0%	2 7%	1 4%	1 4%

Tabla 7

A continuación se presentan uno de los casos más frecuentes que se describieron en el análisis, el caso de la estudiante Rubí. (Imagen 12)

3. María tiene 6 peluches. Si Laura regala 4 peluches, tendrá tantos como María. ¿Cuántos peluches tiene Laura?

The image shows a student's handwritten work on a grid background. At the top, the problem is written in blue ink. Below it, the student has written: $M = 6$, $L = ?$, $L - 4 = M$, $L \times M$, $E = M + 4$, $L = 6 + 4$, and $L = 10$. There are several checkmarks and arrows indicating a process of solving. To the right, there is a coordinate system with a vertical axis from 0 to 10 and a horizontal axis. A point is plotted at (4, 6) and another at (10, 10). A horizontal line is drawn at y=6, and a vertical line is drawn at x=10. A red box is drawn around the point (10, 10). Below the grid, the word 'Respuesta:' is written, followed by 'Laura tiene 10 peluches'. The caption 'Imagen 12' is centered below the grid.

Tengamos en cuenta que en la evaluación de conocimientos previos, en los casos de los estudiantes Luis, Marcel, Camila, Rubí y Joan, solo el estudiante Joan representó correctamente los problemas 3 y 4 (Imagen 6). Después de la sesión didáctica N° 2, el que presentó pequeñas dificultades en la representación algebraica fue el estudiante Marcel. (Imagen 13 - 14).

3. María tiene 6 peluches. Si Laura regala 4 peluches, tendrá tantos como María. ¿Cuántos peluches tiene Laura?

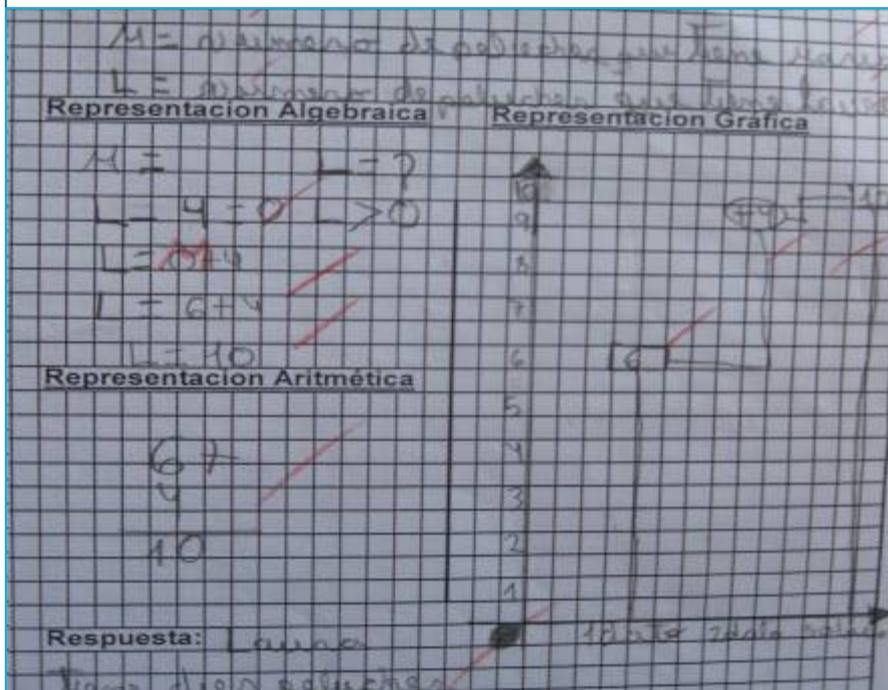


Imagen 13

4. Ana tiene 6 figuritas. Si Rosa gana 2 figuritas, tendrá tantas como Ana. ¿Cuántos peluches tiene Rosa?

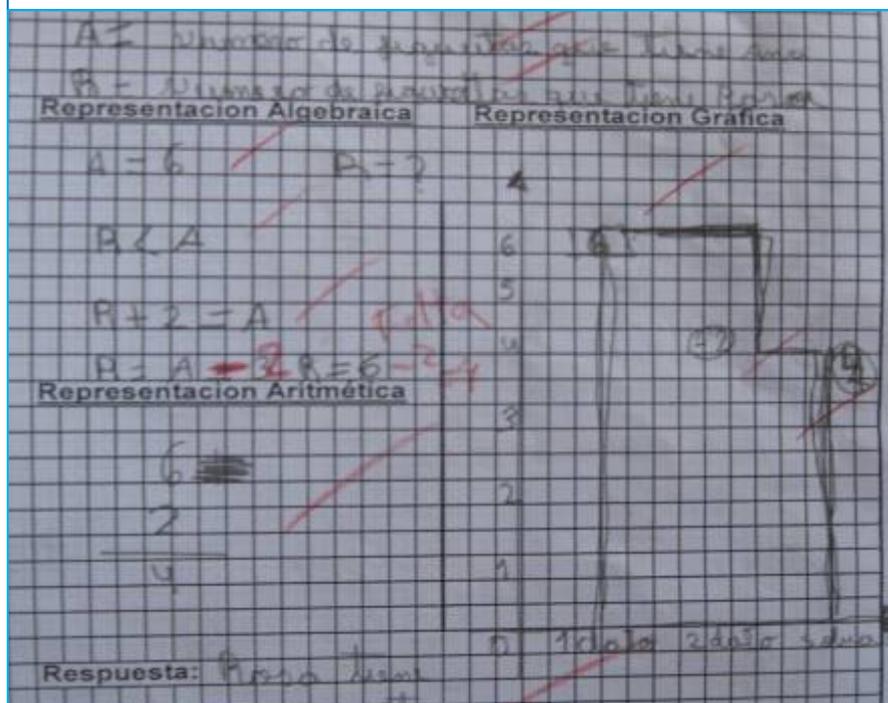


Imagen 14

4. Conclusiones

A pesar que hubo un porcentaje bastante considerable de estudiantes de 4° grado de primaria que no lograron resolver el problema de tipo PAEV aditivo de un paso categoría comparar 6, podemos decir que los estudiantes han mostrado que son capaces de transitar y coordinar varias representaciones logrando aprehender el concepto PAEV aditivo de un paso específicamente en la categoría igualar 3 y 4, que es una de las competencias que exige el currículo de educación peruana a los estudiantes de este grado o nivel educativo.

Los resultados revelan que los estudiantes son capaces de coordinar los registros algebraicos a partir de un registro verbal, y los registros gráficos a partir de un registro verbal y algebraico, en este caso en particular de los PAEV, la mayoría de los estudiantes sostienen que para ellos fue de gran ayuda el registro algebraico en la conversión de registro verbal a registro gráfico, ya que necesitaban el rango de valores de la cantidad a hallar para poder hacer los ejes coordenados y entender con claridad la operación a ejecutar (suma o resta), para hallar la solución y graficarla.

La complejidad en la representación algebraica específicamente en el tratamiento para PAEV aditivo de un paso en las categorías comparar 5 y 6, se debió a la falta de ejercitación en el tema de desigualdades por parte de los estudiantes, en el análisis podemos observar que la dificultad del estudiante estaba relacionada exactamente con la palabra “menos que” y también con la falta de capacitación en resolver inecuaciones. Es cierto que no se exige aún resolver este tipo de problema en el currículo de educación peruana para este grado o nivel, pero en el futuro con un poco más de capacitación en el tema de desigualdades e inecuaciones será resuelto.

Con respecto a PAEV aditivo de un paso en las categorías igualar 3 y 4 también hubo un grado de complejidad en el tratamiento de la representación algebraica, mucho menor y más sencilla de resolver mediante un repaso sobre el tema de ecuaciones en la sesión propuesta. Al final los estudiantes pudieron hacer la conversión y el tratamiento.

En el caso de la representación gráfica muchos de los estudiantes la entendieron fácilmente porque anteriormente ya habían recibido clases sobre cómo hacer ejes coordenados. La conversión de registro algebraico y verbal al registro gráfico les fue de gran ayuda para entender si la operación a realizar era de suma o de resta para resolver el problema, sin embargo notamos que para transitar de registro gráfico a verbal no les era muy sencillo como lo hicieron de registro algebraico a verbal, sólo el 53% de estudiantes lo logró.

En general observamos que las dificultades que presentan los estudiantes es, por que no se promueve la conversión entre registros de representación y se privilegia la enseñanza tradicional (representación aritmética), claro que ello implica tener bien capacitados a los niños en temas de desigualdades, inecuaciones, ecuaciones, construcción de ejes coordenados y gráficas.

Bibliografía

- Apeim - Asociación Peruana de Investigación de Mercados (2014). *NIVELES SOCIOECONÓMICOS 2014*. Recuperado el 21 de Agosto de 2016, de <http://www.apeim.com.pe/wp-content/themes/apecim/docs/nse/APEIM-NSE-2014.pdf>
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1991). *La operación de sumar: el caso de los problemas verbales*. *SUMA*, 8, 35 - 39.
- Castro, E., Rico, L. y Gil, F. (1992). *Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos*. *Enseñanza de las Ciencias*, 10(3), 243 - 253.
- Consejo Nacional de Seguridad Ciudadana (2014). *FICHA INFORMATIVA SOBRE SEGURIDAD CIUDADANA DEL DISTRITO DE EL AGUSTINO*. Recuperado el 21 de Agosto de 2016, de <http://conasec.mininter.gob.pe/obnasec/pdfs/Nro.01-DistritoelAgustino.pdf>
- Damm, W. (1991). *Compréhension d'un énoncé de problème: le choix de la donnée de référence*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 4, 197 - 225.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Editorial del Instituto de Educación y Pedagogía de Universidad del Valle, Colombia.
- Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. *LA GACETA DE LA RSME*, 9(1), 143 -168.
- Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica – IPEBA (2013). *Mapas de progreso del aprendizaje Matemática: Números y operaciones*. Recuperado el 16 de Octubre de 2014, de <http://www.ipeba.gob.pe/estandares/MapasProgresoMatematicaNumerosOperaciones.pdf>
- García, J (2005). *La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales, sus características y el uso que se hace de ellas en el aula*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada. España.
- Ministerio de Educación del Perú (2009). *Diseño Curricular Nacional de EBR*. Recuperado el 13 de Octubre de 2014, de <http://ebr.minedu.gob.pe/pdfs/dcn2009final.pdf>
- Martínez, J. (1995). *Importancia de los PAEV de una etapa. Indicaciones para su tratamiento en el aula*. *Tavira*, 12, 169 - 183.
- Municipalidad de El Agustino (2016). *Historia del Distrito*. Recuperado el 21 de Agosto de 2016, de <http://mdea.gob.pe/index.php/el-agustino/historia-del-distrito>
- Nesher, P. (1980). *The Stereotyped Nature of School Word Problems. For the Learning of Mathematics*, 1, 41- 48.
- Rodríguez, P. (1991). *Análisis de los procesos cognitivos que conducen a la adquisición y desarrollo de la propiedad conmutativa* (Tesis doctoral). Universidad Complutense, Madrid. España.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Editorial Síntesis, Madrid. España.
- Vergnaud, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels, Recherches en didactique des mathématiques*, 10, 133 -170.

Gladys Masiell Diestra Díaz: Licenciada en Investigación Operativa por La Universidad Nacional Mayor de San Marcos (2007). Egresada de La Maestría en Educación Matemática de La Universidad Nacional Mayor de San Marcos (2013). Ha trabajado y apoyado como profesora de matemáticas de primaria en instituciones privadas y estatales. Se desarrolló el presente artículo como proyecto de tesis para optar el grado de Magister en Educación