

## Un estudio sobre el razonamiento probabilístico de estudiantes de último año de bachillerato

Karen Velasco Restrepo, Juan Carlos Galindo Realpe, David Benítez Mojica

Fecha de recepción: 29/03/2022  
Fecha de aceptación: 13/07/2022

<p><b>Resumen</b></p>	<p>En este artículo, se abordan las dificultades que presentan los estudiantes de último grado de bachillerato durante el proceso de resolución de problemas probabilísticos, a causa del sistema de creencias que influye de manera significativa durante la toma de decisiones que se presentan en la vida diaria y la importancia que tiene la intervención de GeoGebra. La recolección de datos se realizó a través de una encuesta diagnóstica y tres hojas de trabajo, en las que se presentaron los tres diseños realizados en GeoGebra, los cuales emulan situaciones probabilísticas comunes para los estudiantes. El análisis de los resultados muestra que las herramientas computacionales son de gran ayuda para los docentes y estudiantes. <b>Palabras clave:</b> Resolución de Problemas; GeoGebra; Razonamiento; Probabilidad.</p>
<p><b>Abstract</b></p>	<p>In this article, we present the difficulties experienced by high school students during the process of solving probabilistic problems, because of the belief system that significantly influences decisions in daily life and the importance of GeoGebra intervention. The data collection was carried out through a diagnostic survey and three worksheets, in which the three designs made in GeoGebra, which emulate common probabilistic situations for students, were presented. The analysis of the results shows that the computational tools are of great help to teachers and students. <b>Keywords:</b> Problem-solving; GeoGebra; reasoning; Probability.</p>
<p><b>Resumo</b></p>	<p>Neste artigo, são abordadas as dificuldades que os alunos do ensino médio apresentam durante o processo de resolução de problemas probabilísticos, devido ao sistema de crenças que influencia significativamente a tomada de decisão que ocorre na vida cotidiana e a importância da intervenção do GeoGebra. A coleta de dados foi realizada por meio de um levantamento diagnóstico e três planilhas, nas quais foram apresentados os três projetos feitos no GeoGebra, que imitam situações probabilísticas comuns para os estudantes. A análise dos resultados mostra que as ferramentas computacionais são de grande ajuda para professores e alunos. <b>Palavras-chave:</b> resolução de problemas; Geogebra; Raciocínio; Probabilidade.</p>

## 1. Introducción y problema de investigación

Este documento presenta los resultados de una investigación realizada como trabajo de grado de la Licenciatura en Educación básica con énfasis en matemáticas y la Licenciatura en Educación Media con énfasis en Matemáticas y Física del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle<sup>1</sup>. Parte de reconocer que la vida cotidiana está rodeada de diferentes eventos que se encuentran permeados y se relacionan con el azar y la probabilidad, dentro de los cuales se pueden resaltar: el deporte, los juegos, el estado del clima, el mundo biológico, entre otros. Pero lo anterior no indica que sean comprendidos de manera adecuada; incluso para los matemáticamente instruidos algunos aspectos de la probabilidad no resultan tan intuitivos (Bennet, 2000).

En Colombia la importancia que se le da a la probabilidad sigue siendo mínima en comparación con la que se les da a otros conceptos de la matemática y el reflejo de esto, se evidencia en los salones de clases en los cuales la enseñanza de esta ciencia suele estar ausente, se reduce a pocas sesiones o se ha centrado en la memorización de fórmulas y procedimientos, que difícilmente el estudiante puede relacionar con su entorno real, ya que tiene poca oportunidad de experimentar, analizar datos e indagar, tal como lo expresa (Batanero, 2009).

Es fácil evidenciar este hecho antes mencionado, solo basta con observar el orden y la forma de presentar estos temas en un libro de texto de matemáticas de último grado de secundaria, fijarse en los resultados de las Pruebas Saber 11<sup>o</sup>, que están diseñadas según los estándares establecidos por el MEN (2006) y de las cuales se puede decir, que los resultados no son alentadores.

Este panorama, es bastante alertador debido a que, desde muy pequeño, el niño se encuentra rodeado de una realidad regida por el azar, y diariamente debe valorar y tomar decisiones en circunstancias en las cuales interviene la incertidumbre o el azar. Lo anterior, motiva al desarrollo de este trabajo, ya que es necesario como docentes, identificar las creencias presentes en los estudiantes, con el fin de caracterizar su razonamiento y diseñar actividades que permitan que el estudiante avance en el razonamiento probabilístico.

Por lo tanto, fue de interés para el desarrollo de este trabajo, abordar las dificultades presentes en los estudiantes en el proceso de Resolución de Problemas en probabilidad, a causa del sistema de creencias. Para ello se realizó el diseño de una encuesta diagnóstica y tres hojas de trabajo, en las que se propusieron actividades que giraban en torno a tres diseños realizados en GeoGebra, los cuales emulan situaciones probabilísticas comunes para los estudiantes.

En ese sentido se planteó la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué importancia tiene la intervención de la mediación computacional de GeoGebra en el desarrollo de los niveles de Razonamiento Probabilístico de estudiantes de grado once de secundaria?

---

<sup>1</sup> Este proyecto titulado "Un estudio sobre razonamiento probabilístico de estudiantes de grado once de un colegio del sector público de Cali", fue realizado por Karen Velasco Restrepo y Juan Carlos Galindo Realpe bajo la tutoría del profesor David Benítez Mojica (Dr.) durante los años 2018-2019, sustentado el 12 de Junio 2019.

## 2. Fundamentos Teóricos

### 2.1 La Resolución de Problemas

La resolución de Problemas es un proceso importante en el desarrollo de las matemáticas y el estudio del conocimiento matemático, tal como lo expresa Benítez (2017). De hecho, Halmos (1980, como se citó en Santos, 1992) sugirió que el proceso de resolver problemas es el corazón de las matemáticas y Kleiner (1986, como se citó en Santos, 1992) señaló que el desarrollo del conocimiento y de las teorías matemáticas se origina a partir del esfuerzo al resolver un determinado problema. Así mismo, se menciona el trabajo de Polya (1961, como se citó en Conejo y Ortega, 2013), quien concibe la resolución de problemas como un proceso, que está compuesto por las siguientes fases: Comprender el problema, trazar un plan, ejecutar el plan y examinar la solución.

Sin embargo, aunque el modelo propuesto por Polya, resulta interesante diversas investigaciones han demostrado que no ha sido suficiente para que los estudiantes sean capaces de resolver problemas. Al respecto Benítez (2017), manifiesta que las cuatro fases muestran características de un resolutor ideal y que dentro del trabajo de Polya no hay respuesta para los siguientes interrogantes:

- ¿Qué debe hacer un resolutor cuando no ha entendido un problema?
- ¿Qué acciones instruccionales se deben emprender para promover el entendimiento de los problemas?
- ¿Qué sucede cuando las alternativas y estrategias seleccionadas por el estudiante lo conducen a caminos oscuros que no prometen llevarlo con éxito a la solución del problema?

En ese sentido, de acuerdo con Santos (1992), los trabajos de Schoenfeld constituyen aportes valiosos para la implementación de actividades que involucran Resolución de Problemas en el aprendizaje de las matemáticas y su propuesta se fundamenta en lo que denomina un “microcosmo matemático” en el salón de clase. Schoenfeld señala que en el proceso de resolución de problemas intervienen: El dominio del conocimiento, las estrategias cognoscitivas, las estrategias metacognitivas y el sistema de creencias.

Lo anterior, se evidencia en la investigación llevada a cabo por Sánchez y Benítez (1997), en la cual, se puede observar que las creencias erróneas que tienen los estudiantes sobre el concepto de probabilidad influyen considerablemente en el proceso de Resolución de Problemas.

### 2.2 Los niveles de Razonamiento Probabilístico.

En relación con el Razonamiento probabilístico, en el estudio realizado por Sánchez y Benítez, (1997), se evidenció que a pesar de que la probabilidad es un concepto aparentemente conocido por muchos estudiantes, en el proceso de resolver problemas relacionados con el concepto de Probabilidad, influye fuertemente el sistema de creencias de cada individuo. En su estudio, buscaban describir algunas características del razonamiento probabilístico de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de probabilidad, definiendo así, cinco diferentes niveles de

Razonamiento Probabilístico, que van desde la impredeción hasta un pensamiento riguroso. Los cuales se describen a continuación:

- **Impredeción:** En este nivel, se ubican los estudiantes que consideran que es imposible predecir resultados en situaciones aleatorias.

Un ejemplo de ello es cuando se plantea al estudiante, la situación del lanzamiento de dos monedas de 500 pesos y se pregunta: ¿Qué es más probable, obtener dos caras- dos sellos- o cara y sello? y este responde que no es posible saber cuál es el resultado porque es una situación de azar.

- **Determinístico:** En esta categoría, se ubican los estudiantes que consideran que los resultados de una situación en la cual interviene el azar dependen de causas poderosas, las cuales pueden ser: físicas, místicas o empíricas.
- **Físicas:** Consideran que la fuerza de lanzamiento, la posición, el tamaño de un determinado objeto intervienen en el resultado de la situación.
- **Místicas:** Consideran que en el resultado del experimento intervienen, la suerte, los poderes sobrenaturales, el poder de Dios o la voluntad divina.
- **Empíricas:** Se pueden ubicar aquí, a los estudiantes que basan sus argumentos en experiencias anteriores, obtenidas con juegos de azar en el mayor de los casos. Estas experiencias se encuentran tan marcadas dentro del pensamiento del estudiante, que se consideran creencias que afectan la forma en la cual argumenta.

Un ejemplo de este nivel puede ser que al preguntarle a un estudiante la causa de que una persona gane la lotería dos veces seguidas, y lo considere como un golpe de suerte.

- **Mecánico:** Se ubican aquí, los estudiantes que hacen uso de algoritmos para dar respuesta al problema propuesto, pero su uso se hace de manera incorrecta lo que refleja que es resultado de un aprendizaje memorístico por parte del estudiante, obtenido en muchas ocasiones por algunas clases anteriores de probabilidad. Cabe aclarar que este aprendizaje es carente de significado.
- **Pre-rigor:** A este nivel pertenece el grupo de estudiantes, que ya pueden vislumbrar algunos de los resultados de un experimento (no todos), tiene una capacidad más elevada para argumentar y se puede decir que ya se han alejado un poco del pensamiento mítico, físico o empírico.

Por ejemplo, cuando un estudiante considera que al lanzar dos dados y sumar los puntos resultantes, el evento de obtener un cuatro es igualmente probable al de obtener un cinco porque las combinaciones que dan estos resultados son las siguientes:

Para cuatro:  $1 + 3, 2 + 2$

Para cinco:  $1 + 4, 2 + 3$

En este caso, se evidencia que el estudiante solo ha identificado algunas de las combinaciones posibles, lo que lo ubica en este nivel de razonamiento.

- **Rigor:** En este nivel se encuentran los estudiantes, que para argumentar hacen uso de diferentes representaciones para un problema, en otras palabras, pueden argumentar matemáticamente. Basados en el ejemplo anterior, el estudiante podrá identificar todas las combinaciones posibles y

adicionalmente, podrá realizar un diagrama de árbol o un plano cartesiano, en el cual se evidencie el espacio muestral del experimento.

### 2.3 El Software dinámico para la enseñanza de la probabilidad

Respecto al uso de software dinámico para la enseñanza de la probabilidad, en la investigación realizada por Inzunza (2014), el autor caracteriza a GeoGebra, como un software que permite al estudiante ser partícipe de la construcción de su propio conocimiento, brindándole herramientas para la exploración de nuevos conceptos, es decir, que realiza un aporte en el modelo constructivista de la enseñanza. En cuanto a la probabilidad, se dice que GeoGebra no solo se enfoca en los aspectos tradicionales de la enseñanza de la probabilidad, sino que permite abordar diferentes tipos de representaciones como la simbólica, gráfica o numérica.

Por su parte, Mera y Santana (2018) en su trabajo de grado, tenían como propósito identificar el impacto de GeoGebra como mediadora en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico en estudiantes de grado noveno, y entre las conclusiones y reflexiones finales detectaron que el uso sistemático de GeoGebra como herramienta computacional, permite confrontar las ideas previas de los estudiantes en torno al concepto de probabilidad, con los resultados de explorar los diseños en GeoGebra. Además, que el uso de los diseños elaborados en GeoGebra favorece el empleo de diferentes tipos de representación de los fenómenos probabilísticos, lo que permite un acercamiento lúdico, a la resolución de problemas de probabilidad.

Además, Chance et al. 2007, (citado en Inzunza S., 2010, p. 426) identifican aspectos en los que la tecnología digital puede contribuir en el aprendizaje de la estadística y la probabilidad, como por ejemplo en la aplicación de procedimientos automáticos en gráficas y cálculos, en el aumento de la cantidad de casos de fenómenos probabilísticos, en la exploración de estos casos, entre otros.

En ese sentido, se puede decir que GeoGebra posee cualidades por las cuales vale la pena ser destacada como un instrumento fundamental en el desarrollo del pensamiento aleatorio y en el desarrollo de distintos pensamientos de los estudiantes. Entre esas cualidades se puede apreciar que tiene licencia abierta, es fácil de usar y por ende puede utilizarse tanto en espacios universitarios como en escuelas secundarias, es muy versátil en el sentido de que puede utilizarse para el desarrollo de actividades de distintas áreas como la aritmética, la geometría, el cálculo y, las que son de interés dentro de este trabajo de grado, la estadística y probabilidad; a todo esto podemos sumarle que cuenta con una hoja de cálculo, la cual nos brinda herramientas que pueden ayudar en el análisis de los datos que se incorporen en ella.

Por estas virtudes y adicionando un diseño adecuado de diferentes actividades didácticas, se puede constituir como una herramienta pedagógica que contribuya a mejorar la enseñanza de la estadística y probabilidad, y de esta forma poder crear materiales que puedan ser utilizados a gran escala en las aulas (Inzunza, 2014).

### 3. Método

El tipo de estudio es de corte mixto, definido por Bryman (2006) citado en Moscoso (2017), como el método que se basa en el empleo simultáneo de métodos cualitativos y cuantitativos.

La aplicación de la propuesta didáctica se realizó a un grupo de 30 estudiantes, conformado por 17 mujeres (56,7%) y 13 hombres (43,3%), de entre los 16 y 19 años, pertenecientes a la Institución Educativa Técnico Industrial Pedro Antonio Molina sede Los Vencedores, ubicada en la ciudad de Cali, en el departamento del Valle de Cauca.

La recolección de datos se llevó a cabo mediante 4 sesiones presenciales, de 90 minutos cada una, en las cuales se presentó a los estudiantes la encuesta diagnóstica, las hojas de trabajo y los diseños de Geogebra.

Para efectos de esta comunicación se presentará la estructura general de los instrumentos y los diseños de Geogebra realizados para la recolección de los datos, Así mismo, parte del análisis y algunas comparaciones entre los resultados de cada hoja de trabajo y la encuesta diagnóstica.

#### 4. Diseño y validación de los instrumentos.

Para el diseño de la encuesta diagnóstica y las hojas de trabajo, se tomaron en cuenta los criterios expuestos por Benítez (2006):

- En la solución de las actividades escogidas, deben estar contempladas las siguientes características del quehacer matemático: particularizar, la búsqueda de patrones, el desarrollo del lenguaje matemático, conjeturar, generalizar, utilizar múltiples representaciones, extraer información de una representación específica, construir modelos y formular contraejemplos, entre otras.
- Podrán ser resueltas en software, tales como GeoGebra y Excel.
- Se tendrá en cuenta el contexto, en especial, los contextos hipotéticos y reales.
- Que resulten interesantes para los estudiantes, que se constituyan como un reto y se fomente el trabajo en equipo en caso sea que sea necesario.

En ese sentido, es importante mencionar, que la encuesta diagnóstica, las hojas de trabajo y los tres manipulativos de GeoGebra (Lanzamiento de tres monedas, Chance y Circuito Probabilístico), son materiales de creación propia y solo han sido utilizados en la investigación realizada.

Ahora bien, una vez diseñadas la encuesta diagnóstica y las hojas de trabajo, fueron presentadas a las siguientes instancias:

- Profesores que tengan conocimiento sobre la elaboración de propuestas en las TIC y en la resolución de problemas matemáticos.
- Profesor encargado del área de Matemáticas, en la Institución Educativa escogida.

Lo anterior, con la intención de perfeccionar y elaborar hojas de trabajo que permitieran dar cuenta del objeto de estudio.

Posteriormente, de acuerdo con las sugerencias recibidas por parte de las instancias mencionadas anteriormente, se realizaron los cambios y ajustes necesarios, debido a que se consideró que tales orientaciones fueron significativas dentro de este proceso para alcanzar los objetivos propuestos.

En el apartado siguiente, se describen las características destacadas de cada instrumento y su aplicación, se plantean los objetivos, las condiciones de aplicación y se presentan los resultados.

## 5. Resultados

### 5.1 Encuesta diagnóstica

Permite visualizar las concepciones que los estudiantes tenían respecto a la no equiprobabilidad, el significado de probabilidad, su habilidad para calcular probabilidades simples, para leer gráficas de representación y tablas con contenido probabilístico. Está compuesta por 18 preguntas, de las cuales trece (13) preguntas son de opción múltiple y cinco (5) preguntas abiertas. Sin embargo, cada pregunta contó con un cuadro en blanco, en el que se les pedía a los estudiantes que justificaran sus respuestas. La encuesta diagnóstica fue importante para reconocer los conocimientos previos de los estudiantes respecto al concepto de probabilidad y se constituyó como el punto de partida y la guía para el diseño de las hojas de trabajo. Su aplicación duró aproximadamente 90 minutos.

La caracterización de las respuestas de los estudiantes en la encuesta diagnóstica, se muestran en la figura 1.

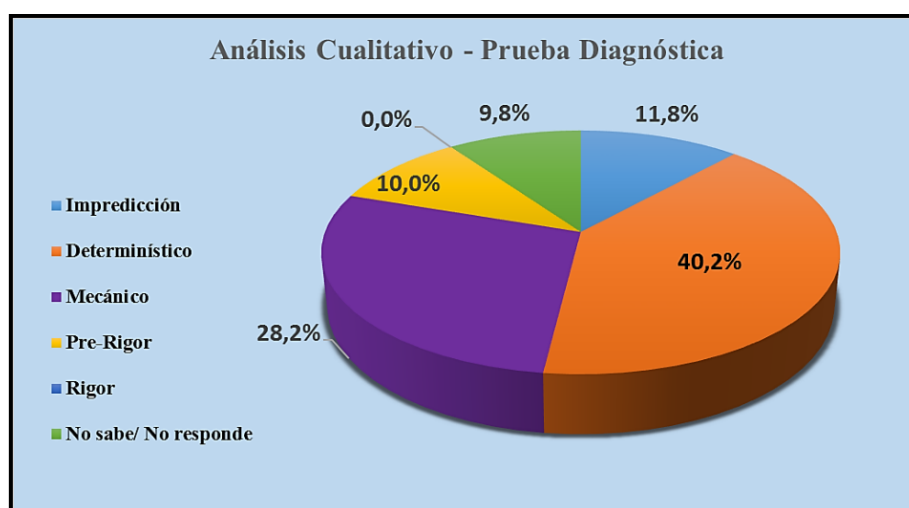


Figura 1. Análisis de los niveles de Razonamiento probabilístico identificados en la encuesta diagnóstica. Fuente: Elaboración propia.

Se puede observar que, en el grupo de estudiantes que desarrollaron la encuesta diagnóstica predomina el pensamiento determinista con un 40,2%; seguido de un pensamiento mecánico con un 28,2%; un nivel de impredicción con un 11,8%, y por último el nivel de Pre – rigor y Rigor que solo alcanzaron un 10% y 0% respectivamente. También resulta importante indicar que un 9,8% de las respuestas fueron “No sé” o no se respondieron. Este panorama resulta desalentador debido a que refleja un bajo rendimiento de los estudiantes, pero se constituye como una justificación para el desarrollo de la propuesta didáctica.

A continuación, se presentan algunas evidencias de los tipos de respuestas de los estudiantes en la encuesta diagnóstica, en las que se puede evidenciar los diferentes niveles de razonamiento probabilístico, mencionados anteriormente:

## Impredicción.

12. Suponga un sorteo de chance, en el que usted tiene el número 1234. ¿Qué es más probable?:

- a.  Que salgan las cuatro cifras.
- b.  Que salgan las tres últimas cifras.
- c.  Que salgan las dos últimas cifras.
- d.  Que salga la última cifra.
- e.  Todos los eventos anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir.
- f.  No se puede predecir cuál de los cuatro eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- g.  No sé.

*Espacio para justificar*

Porque el chance es un juego de azar, y es incierto su resultado..

Figura 2. Respuesta a la pregunta 12 de la encuesta diagnóstica categorizada en el nivel de impredicción. Fuente: Elaboración propia.

En esta pregunta, el 30% de los estudiantes escogió esta opción y un 33,3% de las justificaciones corresponde al nivel de impredicción. En este caso, la respuesta del estudiante es característica de las personas que se ubican en este nivel, debido a que le atribuyen al azar la imposibilidad de predecir el resultado.

Por otro lado, en lo relativo al nivel de pensamiento determinístico, se muestran los siguientes ejemplos:

## Determinístico – Físico

3. Usted se encuentra jugando, acompañado de sus amigos, con un parqués que no tiene vidrio. De las cinco partidas que jugó con sus amigos usted no ganó ninguna, un argumento para dicho fracaso podría ser que:

- a.  No está arrojando los dados con la suficiente fuerza.
- b.  La mala energía que producen sus amigos le causa mala suerte.
- c.  La falta de vidrio en el parqués hace que los dados tomen valores que normalmente no tomarían.
- d.  No sacudió los dados el tiempo suficiente como para obtener buenos números.
- e.  Sus amigos sacaban buenos números y le dejaban siempre los peores.
- f.  Otro criterio. ¿Cuál? \_\_\_\_\_

*Espacio para justificar*

Por que el vidrio hace que caiga el número que es pero cuando no esta hay veces que va a salir un número bueno pero por estar así se mueve y cae otro

Figura 3. Respuesta a la pregunta 3 de la encuesta diagnóstica categorizada en el nivel determinístico-físico. Fuente: Elaboración propia.

El 97,7% de las justificaciones de los estudiantes en esta pregunta, se encontraban en el nivel de pensamiento determinístico y de ellas, el 33,3% de las justificaciones son de tipo determinismo - físico, como en los casos anteriores, en los cuales los estudiantes afirman que el resultado es alterado, a causa de que el parqués



no tiene vidrio, o la fuerza con la que se lanzan los dados. Es decir, les atribuyen una explicación física a los malos resultados obtenidos al lanzar los dados.

### Determinístico - Empírico:

<p>2. Usted va a comprar una rifa, y le ofrecen el boleto con el número 00. ¿Compraría ese boleto?</p> <p>a. <input type="checkbox"/> Sí.</p> <p>b. <input checked="" type="checkbox"/> No.</p>
<p style="text-align: center;"><i>Espacio para justificar</i></p> <p>Porque he visto que muy pocas veces cae ese número</p>

Figura 4. Respuesta a la pregunta 2 de la encuesta diagnóstica categorizada en el nivel Determinístico -Empírico. Fuente: Elaboración propia.

En esta respuesta se puede evidenciar que el estudiante tiene en cuenta eventos que sucedieron con antelación para poder determinar si compraría un boleto de dos números repetidos, en este caso el 00. Esto se puede afirmar debido a que, para que el estudiante realice tal juicio debe haber tenido experiencias que le hayan hecho pensar que es más difícil, o poco probable, que “caiga dos veces un mismo número”. Estas características pertenecen al pensamiento de nivel determinístico empírico.

Teniendo en cuenta lo anterior, y retomando el análisis de los resultados de la encuesta diagnóstica se puede decir, de manera general, que:

- En la mayoría de las respuestas se encuentra presente el sistema de creencias de los estudiantes, en especial las creencias de tipo físicas o de tipo místicas/mágicas. Por ejemplo, al preguntar sobre un juego de parques sin vidrio (pregunta tres) un 63,3% de los estudiantes considera que el resultado se altera por causas físicas o de la suerte.
- El 62% de las respuestas de los estudiantes se ubican en los dos niveles más inferiores de los niveles de Razonamiento Probabilístico. Un gran porcentaje de las respuestas se ubicó en un nivel de pensamiento determinista (40,2%) y el porcentaje restante (11,8%) se ubicó en el nivel de pensamiento de impredeción.
- Ningún estudiante tuvo en cuenta el concepto de probabilidad compuesta para resolver las preguntas 7 y 10, relacionadas con este concepto.
- Aunque algunas respuestas mencionaban que era necesario realizar alguna representación gráfica, ningún estudiante utilizó representaciones gráficas ni tablas.
- En términos generales, los estudiantes no tienen una idea clara sobre el concepto de probabilidad.

## 5.2. Hoja de trabajo N°1

Para la hoja de trabajo N°1 se presentó una situación que tenía que ver con el lanzamiento de tres monedas, la escogencia de esta situación se debe a que en la encuesta diagnóstica, el rendimiento a una pregunta relacionada fue deficiente, debido a que ningún estudiante respondió con una justificación acertada esta pregunta y el 36,7% de las justificaciones se clasificaron en el nivel de pensamiento de impredeción.

Por lo anterior, se plantearon una serie de preguntas relacionadas con un diseño en GeoGebra llamado “Lanzamiento de monedas”, que se puede encontrar en el siguiente link (<https://www.geogebra.org/m/zmnxtxzw>). Este diseño simula varias cantidades de lanzamientos (100, 500, 1000, 5000, 10000 y hasta 20000) de tres monedas. Para ello, cada cantidad debe ser escrita en la casilla de entrada de color azul y posteriormente se da clic sobre el botón “Animación” para que GeoGebra simule los lanzamientos (Figura 5).

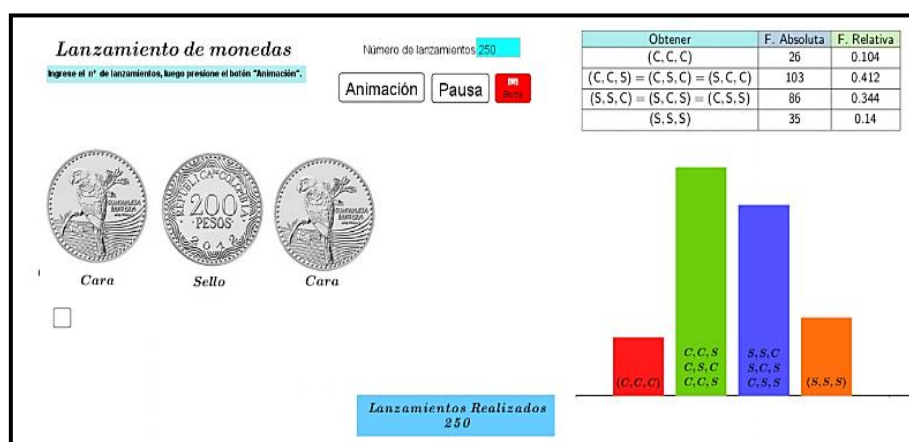


Figura 5. Diseño N°1 “Lanzamiento de monedas”. Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a la hoja de trabajo, esta se dividió en tres partes. En la primera parte, se esperaba que los estudiantes observaran con atención la gráficas de barras e identificaran que las combinaciones con mayor probabilidad de salir son: dos caras y un sello o dos sellos y una cara; y que las combinaciones con menos probabilidad de salir son: tres caras o tres sellos. En otras palabras, que identificaran que el lanzamiento de tres monedas no es un evento equiprobable.

En la segunda parte, los estudiantes debían realizar la misma cantidad de lanzamientos, pero debían centrar su atención en la tabla de frecuencias, con el fin de que observaran la cantidad de veces que sale cada combinación y pudieran evidenciar cual sucede con mayor o menor frecuencia.

Finalmente, en la tercera parte de la hoja de trabajo, se buscaba que los estudiantes relacionaran los resultados obtenidos en las dos partes anteriores y se plantearon dos situaciones problema relacionadas con lo que han observado en el diseño. La primera se trata de una apuesta en la cual se espera que el estudiante, con lo que ha identificado en la parte uno y dos de la hoja de trabajo, pueda plantear que la combinación dos caras y un sello es más probable que tres sellos. Por su parte, en la segunda situación, se esperaba que el estudiante lograra identificar que el resultado del lanzamiento de una moneda no depende de los resultados obtenidos anteriormente.

En la figura 6, se muestra la caracterización de las respuestas de los estudiantes en la hoja de trabajo N°1.



Figura 6. Porcentajes de respuestas de la hoja de trabajo N°1 categorizadas en cada nivel de Razonamiento Probabilístico. Fuente: Elaboración propia.

De la anterior gráfica se puede notar que el nivel de pre-rigor tiene mayor porcentaje con un 68,3%; seguido del nivel mecánico con un 20,8%; luego los niveles de impredicción y determinístico con un 4,2% cada uno; y por último el nivel de rigor con un 0%. También se puede notar que el 2,5% de las preguntas no fueron justificadas o los estudiantes escogieron la opción “No sé”.

Es importante resaltar que los datos reflejan una mejoría en los niveles de razonamiento en comparación con los datos obtenidos en la encuesta diagnóstica.

A continuación, se presentan algunas evidencias de los tipos de respuestas de los estudiantes en la encuesta diagnóstica, en las que se puede evidenciar los diferentes niveles de razonamiento probabilístico, mencionados anteriormente:

### Determinístico

b) Dos amigos apuestan un iPhone Xs Max último modelo que se ganaron en una rifa y resuelven que se quedará con el celular quien al lanzar tres monedas obtenga en dos de tres ocasiones la combinación que ha elegido. Javier eligió la combinación de dos caras y un sello, mientras que Francisco eligió la combinación de tres sellos. Al realizar los dos primeros lanzamientos se obtienen ambas combinaciones, por lo tanto, se deben lanzar las monedas una tercera vez para desempatar el juego ¿Cuál de las siguientes opciones consideras que es la correcta?

- Javier y Francisco tienen la misma probabilidad de ganar la apuesta.
- No se puede predecir quien de los dos tiene mayor probabilidad de ganar la apuesta.
- Entre los dos, Francisco tiene mayor probabilidad de ganar la apuesta.
- Entre los dos, Javier tiene mayor probabilidad de ganar la apuesta.
- No sé.
- Otra, ¿Cuál?

Explica tu respuesta:

*Espacio para justificar*

Por es una apuesta que implica tener suerte.

Figura 7. Respuesta a la pregunta 3b de la tercera parte de hoja de trabajo N°1 categorizada en el nivel determinístico. Fuente: Elaboración propia.

En este caso la estudiante considera que cualquiera de los dos puede ganar y argumenta que por ser una apuesta implica suerte y no tiene en cuenta los resultados que dejaba ver el diseño de GeoGebra. Un 10% de los estudiantes dio una respuesta similar, para esta pregunta.

### Pre-Rigor.

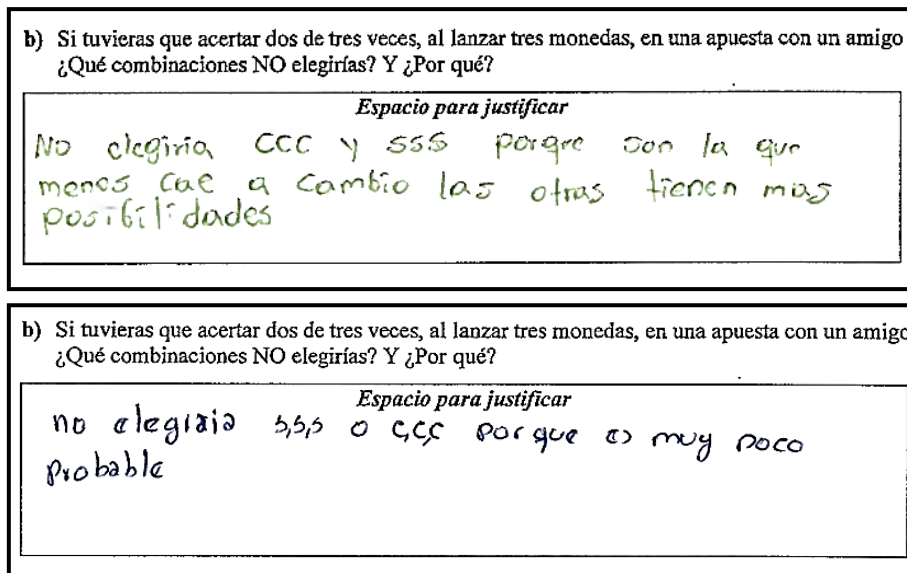


Figura 8. Respuestas a la pregunta 2b de la segunda parte de la hoja de trabajo N°1 categorizada en el nivel Pre-rigor. Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con Sánchez y Benítez (1997), en el nivel de pre-rigor se ubican los estudiantes que se alejan radicalmente de la impredeción y de lo determinista. Estos estudiantes dan argumentos matemáticos y son capaces de avizorar resultados. En los casos anteriores los estudiantes manifiestan que no elegiría las combinaciones de (C, C, C) y (S, S, S) debido a que son las combinaciones con menos probabilidad de salir, sin embargo, hace falta que sean capaces de describir el espacio muestral y así la probabilidad exacta.

Finalmente, se presenta un comparativo global de los resultados obtenidos al realizar la clasificación de cada pregunta en los niveles de razonamiento entre la encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo N.º 1 (Ver figura 9).

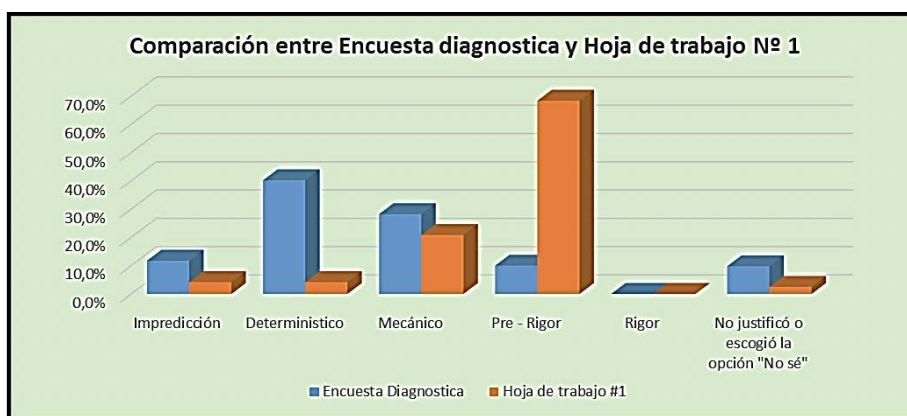


Figura 9. Comparativa entre los resultados de la Encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo N°1. Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con la gráfica anterior se puede decir que se obtuvieron avances importantes en los siguientes aspectos:

- Disminuyó el porcentaje de respuestas categorizadas en los niveles de razonamiento de impredeción y mecánico. Pasó de un 11,8% a un 4,2% y de un 28,2% a un 20,8% respectivamente.
- Disminuyó notablemente el porcentaje de respuestas categorizadas en el nivel de razonamiento determinístico. Pasó de un 40,2% a un 4,2%.
- Se incrementaron considerablemente las justificaciones de los estudiantes, clasificadas en el nivel de razonamiento de pre-rigor. Pasó de un 10% a un 68,3%.

Entre los aspectos que no se evidencia mejoría, se encuentran el siguiente:

- Ninguna justificación fue considerada en el nivel de razonamiento de Rigor.

### 5.3. Hoja de trabajo N°2

Para la hoja de trabajo N°2 se presentó una situación que tenía que ver con la preferencia de jugar el chance con diferentes cantidades de cifras, al igual que con la hoja de trabajo anterior, su escogencia radica en las argumentaciones y respuestas de los estudiantes a preguntas de la encuesta diagnóstica. En una de ellas, se buscaba que los estudiantes indicaran cual era la probabilidad de acertar al chance con una, dos, tres o cuatro cifras. Sin embargo, en promedio solo el 24% de las preguntas fue acertada, teniendo en cuenta que ningún estudiante calculó la probabilidad de forma numérica.

En esta hoja de trabajo, se plantean una serie de preguntas que respondieron los estudiantes interactuando con un diseño elaborado en GeoGebra llamado "Chance" que se puede encontrar en el siguiente link (<https://www.geogebra.org/m/nbhuegrs>), el cual simula diferentes cantidades de resultados obtenidos en sorteos de chance. Para que esto sea posible, se debe escribir la cantidad deseada en una casilla llamada "número de sorteos" y dando clic en "Animación" se simulan los resultados obtenidos en cada sorteo. Por otro lado, los estudiantes también encontrarán la opción de "pausa" y una vez terminada la dinámica para una cantidad, el diseño cuenta con un recuadro rojo para borrar los resultados obtenidos y así ingresar una cantidad diferente de sorteos (Figura 10).



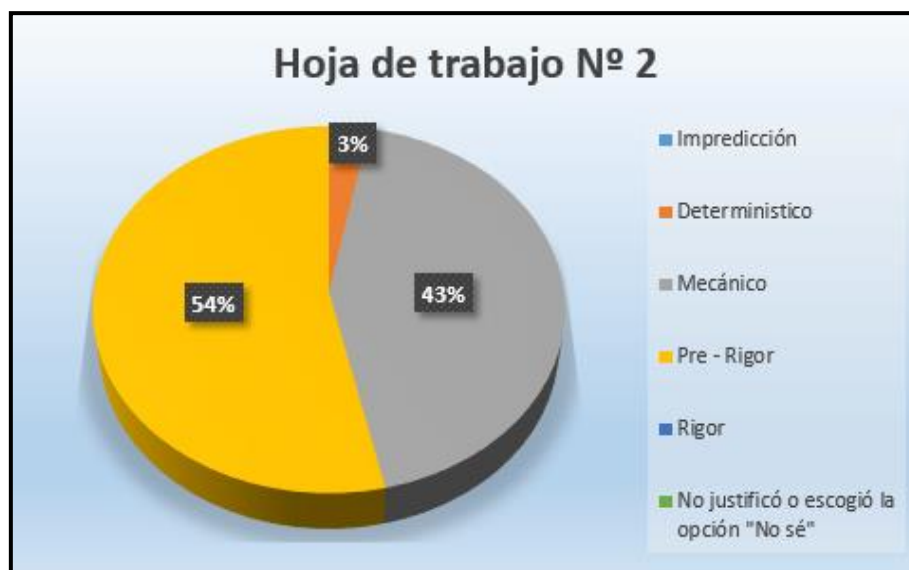
Figura 10. Diseño N°2 "Chance". Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a la hoja de trabajo, esta se dividió en tres partes. En la primera parte se invitaba a los estudiantes a que pusieran atención en la gráfica y la tabla de frecuencias e identificaran que barras eran las que lograban más altura, a su vez se esperaba que intuyeran que la probabilidad en cada cantidad de cifras era distinta, logrando argumentar porque sucedía este fenómeno, es decir que identificaran que la probabilidad de ganar en el chance variaba respecto a las cantidades de cifras que se esperaban obtener.

La segunda parte de la hoja de trabajo, se les pedía a los estudiantes que realizaran una nueva cantidad de lanzamientos y se les presentaron preguntas respecto a que decisiones tomarían, teniendo en cuenta lo observado en las gráficas. Las preguntas trataban de dejar en evidencia si los estudiantes habían captado que a menor cantidad de cifras era más probable ganar en el chance y que esto no dependía de la suerte o de cuestiones mágicas.

En la tercera parte, al igual que en la primera hoja de trabajo, se presentan situaciones en las que los estudiantes deben responder basándose en lo que vieron durante el desarrollo de las primeras dos partes de la hoja de trabajo. Con estas preguntas se buscaba indagar si las creencias que tenían los estudiantes, antes de la aplicación de las hojas de trabajo, seguían presentes luego de haber interactuado con el diseño.

La caracterización de las respuestas de los estudiantes en la encuesta diagnóstica, se muestran en la figura 11.



**Figura 11. Porcentajes de respuestas de la hoja de trabajo N°2 categorizadas en cada nivel de Razonamiento Probabilístico. Fuente: Elaboración propia.**

De la anterior gráfica se puede notar que el nivel de pre-rigor tiene mayor porcentaje con un 53,5%; seguido del nivel mecánico con un 43,5%; luego el nivel determinístico con un 3%; y por último el nivel de rigor y el nivel de impredicción con un 0%. También se puede notar que no hubo ninguna pregunta que no fuera justificada o en la cual se hubiera escogido la opción "No sé".

A continuación, se presentan algunas evidencias de los tipos de respuestas de los estudiantes en la encuesta diagnóstica, en las que se puede evidenciar los diferentes niveles de razonamiento probabilístico, mencionados anteriormente:

## Mecánico

c) En GeoGebra ingrese un número de cuatro cifras de su preferencia y realice 20000 lanzamientos. Con los datos que aparecen en la tabla, contesta las siguientes preguntas

a. ¿Cuál es la probabilidad de acertar a la última cifra?

*Espacio para justificar*

$\frac{4}{2000}$  Menor probabilidad de acertar

Figura 12. Respuesta a la pregunta 1a de la tercera parte de la hoja de trabajo N°2 categorizada en el mecánico. Fuente: Elaboración propia.

En este caso se puede observar que el estudiante utiliza la regla de Laplace (cociente entre los casos probables y los casos posibles de un experimento dada una variable aleatoria), sin embargo, los datos que utiliza no son los correctos, ya que en lugar de 20000 lanzamientos utiliza 2000 lanzamientos y en lugar de utilizar los datos de la cantidad de veces que acertó en la última cifra utiliza la cantidad de veces que acertó en las cuatro cifras. Por lo tanto, este tipo de razonamiento se considera mecánico.

## Pre-Rigor.

c) En GeoGebra ingrese un número de cuatro cifras de su preferencia y realice 20000 lanzamientos. Con los datos que aparecen en la tabla, contesta las siguientes preguntas

a. ¿Cuál es la probabilidad de acertar a la última cifra?

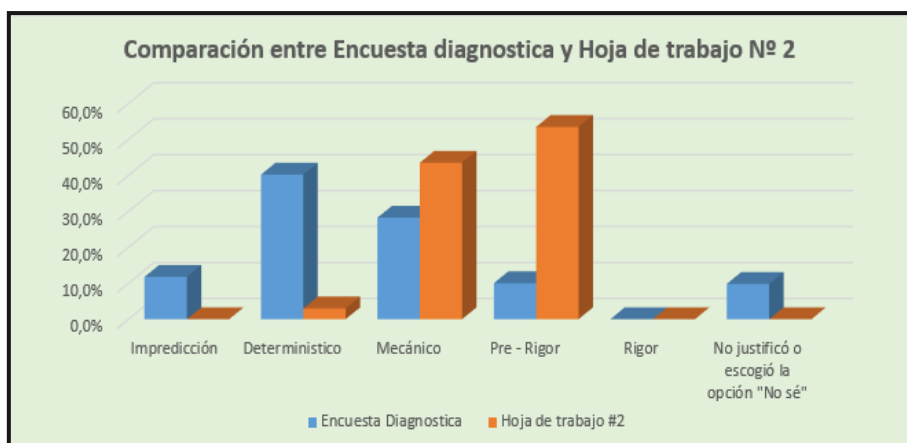
*Espacio para justificar*

$\frac{1415}{20000} \approx 9\%$  mayor probabilidad de acertar con la última cifra, en una apuesta chance

Figura 13. Respuesta a la pregunta 1a de la tercera parte de la hoja de trabajo N°2 categorizada en el Pre-Rigor. Fuente: Elaboración propia.

En este caso el estudiante toma en cuenta la regla de Laplace para poder hallar la probabilidad de acertar a la última cifra, además reconoce los datos del número favorable de casos y el número de resultados totales que debe identificar en el diseño de GeoGebra. Por estas razones este razonamiento se considera de tipo Pre-rigor.

Finalmente, se presenta un comparativo global de los resultados obtenidos al realizar la clasificación de cada pregunta en los niveles de razonamiento entre la encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo N.º 2.



**Figura 14. Comparativa entre los resultados de la Encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo No°2. Fuente: Elaboración propia.**

De acuerdo con la gráfica anterior se puede decir que se obtuvieron avances importantes en los siguientes aspectos:

- Disminuyó totalmente el porcentaje de respuestas categorizadas en el nivel de razonamiento de impredicción y las respuestas no justificadas o respuestas con la opción "No sé". Pasaron de un 11,8% a un 0% y de un 28,2% a un 0% respectivamente.
- Disminuyó notablemente el porcentaje de respuestas categorizadas en el nivel de razonamiento determinístico. Pasó de un 40,2% a un 3%.
- Se incrementaron considerablemente las justificaciones de los estudiantes, clasificadas en el nivel de razonamiento de pre-rigor. Pasó de un 10% a un 53,5%. Sin embargo, ningún estudiante alcanza el nivel de rigor.

#### 5.4. Hoja de trabajo N°3

Para la hoja de trabajo N°3 se presentó una situación que tenía que ver con el lanzamiento de balotas a través de un circuito. En la encuesta diagnóstica el rendimiento en esta pregunta fue deficiente. Específicamente el 0% de los estudiantes respondieron adecuadamente esta pregunta y el 46,7% de las justificaciones se clasificaron en el nivel de pensamiento determinístico-físico.

En esta hoja de trabajo, al igual que las anteriores, se encuentra dividida en tres partes, las preguntas fueron presentadas a los estudiantes, a la vez que interactuaban con un diseño en GeoGebra llamado "Circuito Probabilístico", el cual se puede encontrar en el siguiente link (<https://www.geogebra.org/m/ykzbzp8v>).

Este diseño simula varias cantidades de lanzamientos de balotas que recorren el circuito presentado. La cantidad de balotas, que se desea lanzar debe ser escrita en la casilla de entrada de color azul y posteriormente se da clic sobre el botón "Animación" para que GeoGebra simule los lanzamientos. Una vez finalizados los lanzamientos se debe dar clic en el botón "Pausa" y posteriormente en la casilla naranja para borrar los datos obtenidos y poder ingresar una nueva cantidad de lanzamientos (Figura 15).



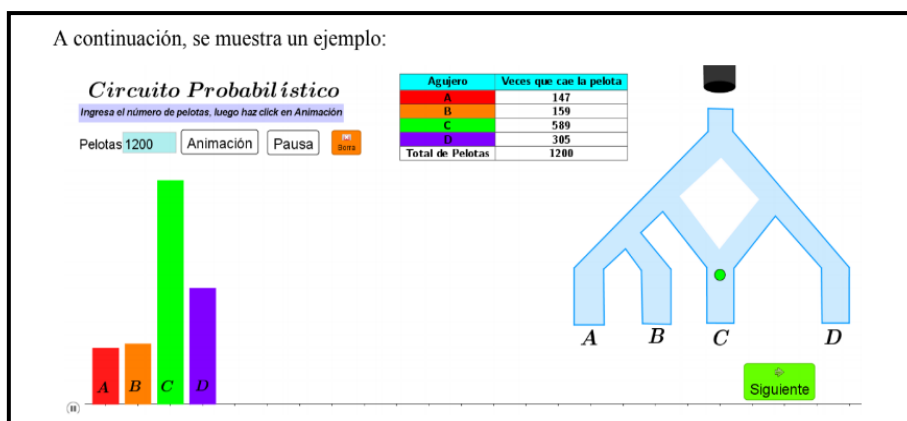


Figura 15. Diseño N°3 “Circuito probabilístico”. Fuente: Elaboración propia.

En la hoja de trabajo, en la primera parte se esperaba que los estudiantes observaran con atención la gráficas de barras e incluso se les propuso, en el primer punto de las actividades, dibujar el diagrama de barras que observaban después de realizar el lanzamiento indicado, para que posteriormente pudieran identificar cual barra era la de mayor altura y, por tanto, respondieran a la pregunta de cuál agujero tenía más probabilidad de caer una pelota.

Por otro lado, en la segunda parte de la hoja de trabajo los estudiantes debían realizar la misma cantidad de lanzamientos, pero en esta ocasión debían centrar su atención en la tabla de frecuencias, con el fin de relacionar cada cantidad de balotas que ingresan en cada orificio con las probabilidades de que eso suceda.

En la tercera parte de la hoja de trabajo se plantea una situación problema que presenta distintas afirmaciones relacionadas con los dos circuitos presentados.

La caracterización de las respuestas de los estudiantes en la encuesta diagnóstica, se muestran en la figura 16.



Figura 16. Porcentajes de respuestas de la hoja de trabajo N°3 categorizadas en cada nivel de Razonamiento Probabilístico. Fuente: Elaboración propia.

De la anterior gráfica se puede notar que el nivel de pre-rigor tiene mayor porcentaje con un 61,50%; seguido del nivel mecánico con un 23,30%; luego el nivel determinístico con un 12,20% y por último los niveles de rigor e impredicción

obtuvieron un 0%. También se puede notar que el 3,00% de las preguntas no fueron justificadas o los estudiantes escogieron la opción “No sé”.

Es importante resaltar que los datos reflejan una mejoría en los niveles de razonamiento en comparación con los datos obtenidos en la encuesta diagnóstica, ya que por lo menos el porcentaje del nivel de pre-rigor aumentó considerablemente mientras del nivel determinístico disminuyó de una manera muy notable.

A continuación, se presentan algunas evidencias de los tipos de respuestas de los estudiantes en la encuesta diagnóstica, en las que se puede evidenciar los diferentes niveles de razonamiento probabilístico, mencionados anteriormente:

### Determinístico

<p>e) Explique con sus propias palabras, cuales podrían ser las razones por las que las pelotas caen con mayor frecuencia en ese agujero.</p> <p style="text-align: center;"><i>Espacio para justificar</i></p> <p>porque puede que al bajar por hay tenga un mayor del nivel para que pase por hay</p>
<p>e) Explique con sus propias palabras, cuales podrían ser las razones por las que las pelotas caen con mayor frecuencia en ese agujero.</p> <p style="text-align: center;"><i>Espacio para justificar</i></p> <p>Por que tiene dos entradas entonces dependiendo la velocidad, con la que vaya, así mismo esta propenso a entrar en distintos agujeros.</p>

**Figura 17. Respuestas a la pregunta 1e de la primera parte de la hoja de trabajo N°3 categorizada en el mecánico. Fuente: Elaboración propia.**

En el primer caso el estudiante le atribuye un aspecto físico al hecho de que la mayoría de las balotas hayan caído en el agujero C del primer circuito que se le presenta. Su argumento es que quizás por una cuestión de un desnivel, las pelotas tienden a caer más en ese agujero. En el segundo caso el estudiante le atribuye un aspecto físico al hecho de que la mayoría de las balotas hayan caído en el agujero C del primer circuito que se le presenta. El argumento está relacionado a la velocidad con que la pelota avanza por el circuito, lo cual terminaría por definir el orificio por el que cae la balota. Es preciso mencionar que está fue la pregunta con más respuestas de tipo determinístico físico.

Finalmente, se presenta un comparativo global de los resultados obtenidos al realizar la clasificación de cada pregunta en los niveles de razonamiento entre la encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo N.º 3.

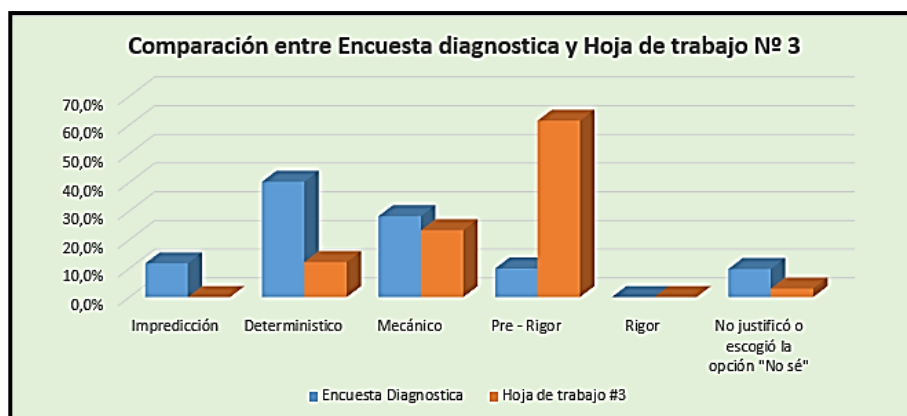


Figura 18. Comparativa entre los resultados de la Encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo N°3. Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con la gráfica anterior se puede decir que se obtuvieron avances importantes en los siguientes aspectos:

- Disminuyó totalmente el porcentaje de respuestas categorizadas en el nivel de razonamiento de impredicción, pasando de un 11,8% a un 0%.
- Disminuyó notablemente el porcentaje de respuestas categorizadas en el nivel de razonamiento determinístico. Pasó de un 40,2% a un 12,2%.
- Disminuyó notablemente el porcentaje de respuestas categorizadas en el nivel de razonamiento mecánico. Pasó de un 28,2% a un 23,3%.
- Se incrementaron considerablemente las justificaciones de los estudiantes, clasificadas en el nivel de razonamiento de pre-rigor. Pasó de un 10% a un 61,5%.
- Disminuyó la cantidad de estudiantes que no justificaban o no sabían las respuestas de las preguntas. Pasó de un 9,8% a un 3%. Sin embargo, ninguna justificación fue considerada en el nivel de razonamiento de Rigor.

## 6. Discusión de resultados

De manera general, para responder a la pregunta de investigación, se puede mencionar que los adelantos tecnológicos computacionales han sido una característica constante e importante en los últimos tiempos. Estos adelantos han significado un cambio drástico en la cultura de la sociedad, debido a la versatilidad que han tenido en los diferentes ámbitos del ser humano.

Específicamente, la educación es uno de los ámbitos que se ha beneficiado con el desarrollo de las tecnologías computacionales y es por ello, que su implementación en los salones de clase es promovida en las políticas educativas de muchos países. El MEN (1998) por ejemplo, plantea que la implementación adecuada de tecnologías computacionales facilita el aprendizaje de contenidos matemáticos en los estudiantes, que estas tecnologías amplían el campo de indagación para poder realizar avances en las estructuras didácticas ya planteadas, e incentiva a investigar cada vez más a fondo para poder realizar un uso competente de las tecnologías computacionales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Tomando en cuenta la importancia del uso de la tecnología computacional en la educación, en el presente trabajo se contó con el uso del software dinámico

GeoGebra, el cual sirvió de gran apoyo para el desarrollo del Razonamiento Probabilístico en estudiantes de grado once, a partir de la resolución de problemas en base a diseños realizados en este software. Algunas de las ventajas relevantes de utilizar la tecnología computacional en este trabajo, se presentan a continuación:

- a. El uso del software dinámico GeoGebra, permitió generar conflictos cognitivos entre los conocimientos previos de los estudiantes, identificados en la encuesta diagnóstica, y los resultados de las simulaciones de los experimentos aleatorios. Este hecho, permite construir nuevos conocimientos, por esta razón se realizó un diseño para cada hoja de trabajo con el fin de propiciar este tipo de situaciones.
- b. Las tecnologías son una herramienta motivacional para los estudiantes, debido a que abarca la resolución de problemas probabilísticos de una manera más lúdica y las simulaciones de situaciones cotidianas para los estudiantes, lo que produce un verdadero interés en dar solución a los problemas que les son planteados.
- c. La gran capacidad de cálculo que posee GeoGebra permite que se pueda profundizar en la teoría de los grandes números debido a que, al poder realizar una cantidad elevada de simulaciones computacionales, poco a poco la probabilidad frecuencial se aproxima a la probabilidad clásica. Lo anterior, se considera una característica importante debido a que disminuye las creencias erróneas que se presentan con más frecuencia al realizar un número reducido de experimentos aleatorios, es decir, que GeoGebra resulta considerablemente efectivo para disminuir las justificaciones categorizadas en el nivel de pensamiento de determinismo (Físico, determinístico/mágico y empírico).
- d. En el presente trabajo de grado se evidenciaron avances significativos en el análisis cualitativo de las hojas de trabajo. En la encuesta diagnóstica un elevado porcentaje de estudiantes se ubicaron en los niveles de impredeción y determinismo (11,8% y 40,2%, respectivamente), solo un 10% en el nivel de pre-rigor y un 0% en el de rigor; mientras que, en las hojas de trabajo, el porcentaje de estudiantes ubicados en los niveles de impredeción y determinismo son casi nulos. Por ejemplo, en la primera hoja de trabajo solo el 4,2% de estudiantes se ubicó en el nivel de impredeción, al igual que en el nivel de determinismo, mientras que el 68,3% de estudiantes se ubicó en el nivel de pre-rigor.

Resumiendo, se puede observar tras cada evidencia y argumentos presentados, que el uso de la tecnología computacional sirvió como una base sólida para realizar avances importantes en el desarrollo del Razonamiento Probabilístico de los estudiantes que participaron en la investigación.

Así mismo, se evidenció que las herramientas computacionales son de gran ayuda para los docentes y estudiantes, debido a que permiten evidenciar aspectos que no eran posible sin la herramienta, en otras palabras, permiten realizar una gran cantidad de experimentos aleatorios con una velocidad asombrosa, y abordar lo que se conoce, como la Ley de los grandes números.

Por otro lado, aunque no se trata del objetivo principal de este trabajo, y teniendo en cuenta la investigación de Sánchez y Benítez (1997) y lo que plantea Bachelard (1987), es importante mencionar con visos de generalización, que el sistema de

creencias de los estudiantes podría constituirse como un obstáculo epistemológico. Lo anterior, debido a que, a pesar de la instrucción a lo largo de su proceso educativo, los resultados de la encuesta diagnóstica, en un principio estaban relacionados con aspectos físicos, empíricos o mágicos.

Finalmente, en el desarrollo de este trabajo surgieron interrogantes que estaban por fuera del alcance del objetivo planteado. Por lo tanto, se presentan a continuación y se sugieren para trabajos posteriores:

- ¿Qué resultados se pueden obtener en el desarrollo del Razonamiento Probabilístico del estudiante, si se realiza un diseño de secuencia didáctica que también incorpore material manipulativo (Dados, monedas y otros juegos de azar)?
- Sería interesante, realizar una investigación similar a la presente, con poblaciones de diferentes culturas ¿Es posible que el sistema de creencias que se ha caracterizado en este trabajo permee la cultura?

Adicionalmente se presentan algunas sugerencias:

- En caso de trabajar con grados pertenecientes a la educación media es muy importante tener en cuenta los tiempos y las dinámicas de la Institución Educativa.
- Es importante realizar un pilotaje a los instrumentos diseñados.
- Es conveniente realizar la revisión y configuración de los computadores o aparatos tecnológicos, por medio de los cuales se presentarán los diseños, antes de la aplicación de la secuencia didáctica. Lo anterior, con el fin de evitar contratiempos.

## Referencias bibliográficas

- Bachelard, G. (1987). *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI.
- Batanero, C. (2009). Retos para la Formación Estadística de los Profesores [conferencia]. *II Encontro de Probabilidade E Estatística Na Scola*, Braga, Portugal. <http://www.ugr.es/~batanero>
- Benítez, D. (2006). *La importancia que tiene percibir la estructura superficial o profunda de los problemas matemáticos en el proceso de solución*. [Trabajo de Doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N, México].
- Benítez, D. (2017). *La Resolución de Problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. (Publicación interna). Cali, Colombia.
- Bennet, D. J. (2000). *Aleatoriedad*. (G. Fernando. y M. Fierro, Trad.). Alianza Editorial S.A. (Trabajo original publicado 2000).
- Conejo, L. y Ortega, T. (2013). Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. *Educación Matemática*, 25(3), 7-38.
- Inzunza, S. (2010). Entornos virtuales de aprendizaje: un enfoque alternativo para la enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística. *Revista mexicana de investigación educativa*, 15(45), 423-452. <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?S1405-66662010000200005>

- Inzunsa, S. (2014). Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. GeoGebra*, Buenos Aires, Argentina.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. <https://www.mineducacion.gov.co>.
- Mera, B. y Santana, A., (2018). *La mediación computacional de GeoGebra en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico en estudiantes de noveno grado* [Trabajo de grado, Universidad del Valle, Colombia].
- Moscoso, J. (2017). Los métodos mixtos en la investigación en educación: hacia un uso reflexivo. *Cuadernos de Pesquisa*, 47(164), 632-649. <https://doi.org/10.1590/198053143763>
- Sánchez, E., y Benítez, D. (1997). Algunos acercamientos al razonamiento probabilista de los alumnos. En F. Rosa María. (Ed.). *Actas de Las Undécima Reunión Latinoamericana de Matemáticas Educativa*, (pp.157–161). Grupo Editorial Iberoamérica : CLAME.
- Santos, M. (1992). Resolución de Problemas: El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Educación Matemática*, 4(agosto), 16–23.

**Karen Velasco Restrepo.** Estudiante de Maestría en Educación Matemática de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Licenciada en educación básica con énfasis en Matemáticas por la Universidad del Valle de Cali, Colombia. Hoy en día realiza una investigación sobre las creencias a cerca de las matemáticas y los procesos de enseñanza y aprendizaje de profesores en formación. [Karen.velasco@alumno.buap.mx](mailto:Karen.velasco@alumno.buap.mx)  
[0000-0003-2298-8171](tel:0000-0003-2298-8171)

**Juan Carlos Galindo Realpe.** Docente de matemáticas y física en educación media. Licenciado en educación media con énfasis en Matemáticas por la Universidad del Valle de Cali, Colombia. [juan.galindo@correounivalle.edu.co](mailto:juan.galindo@correounivalle.edu.co)  
[0000-0003-2559-5998](tel:0000-0003-2559-5998)

**David Benítez Mojica.** Profesor-investigador en la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle de Cali, Colombia. Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. [david.benitez@correounivalle.edu.co](mailto:david.benitez@correounivalle.edu.co)  
[0000-0001-7421-6080](tel:0000-0001-7421-6080)