

Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): Aplicaciones Tecnológicas para el Aprendizaje de las Matemáticas

**José Carlos Cortés Zavala, Lourdes Guerrero Magaña,
 Christian Morales Ontiveros, Lourdes Pedroza Ceras**

Resumen	<p>Se presenta el trabajo realizado bajo la línea de investigación relacionada con el uso de tecnología computacional para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En ésta convergen aspectos y tendencias educativas actuales, tales como: el uso de software, el uso de diversas plataformas de Internet, el diseño y desarrollo de software educativo y la utilización de calculadoras y computadoras, entre otros. Estudiamos las tendencias citadas desde la perspectiva de los profesores (didáctica y enseñanza) y desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas (aspectos cognitivos), a través de la creación y uso de Ambientes Tecnológicos Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas (ATIAM). Así mismo, se presentan los resultados de investigación respecto al diseño y construcción de software para el aprendizaje de las matemáticas, así como las experimentaciones realizadas en los ATIAM.</p> <p>Palabras clave: Tecnología, ambientes de aprendizaje, matemáticas.</p>
Abstract	<p>It presents the work carried out under the research related to the use of computer technology for teaching and learning of mathematics. In this converging aspects and current educational trends, such as the use of software, the use of various Internet platforms, design and development of educational software and the use of calculators and computers, among others. Aforementioned trends studied from the perspective of teachers (teaching and learning) and from the point of view of mathematics learning (cognitive aspects), through the creation and use of Interactive Technological Environments for Learning Mathematics (ATIAM). It also presents the results of research on the design and construction of software for mathematics learning, as well as the experiments conducted in the ATIAM.</p> <p>Keywords: Technology, learning environments, mathematics</p>
Resumo	<p>Ele apresenta o trabalho realizado no âmbito da investigação relacionada com o uso da tecnologia de computador para o ensino e aprendizagem da matemática. Neste aspectos convergentes e as tendências educacionais atuais, como o uso de software, o uso de várias plataformas de Internet, design e desenvolvimento de software educativo e da utilização de calculadoras e computadores, entre outros. Tendências acima mencionadas estudado a partir da perspectiva dos professores (ensino e aprendizagem) e, do ponto de vista da aprendizagem matemática (aspectos cognitivos), através da criação e uso de ambientes tecnológicos interativos para aprender matemática (ATIAM). Ele também apresenta os resultados de pesquisa sobre a concepção e construção de software para a aprendizagem de matemática.</p> <p>Palavras-chave: Tecnologia, ambientes de aprendizagem, matemática.</p>

1. Introducción

En este artículo se presentan algunos ejemplos del trabajo realizado sobre el diseño y desarrollo de software educativo (SE), que forma parte de la línea de investigación sobre el uso de tecnología computacional para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En ésta línea de investigación convergen varios aspectos y tendencias educativas actuales, tales como: el uso de software, el uso de diversas plataformas de Internet, la utilización de calculadoras y el desarrollo de SE para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El SE es diseñado y desarrollado desde la perspectiva de los profesores (didáctica y enseñanza) y desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas (aspectos cognitivos).

El uso del SE que proponemos está pensado para ser parte de un Ambiente Tecnológico Interactivo para el Aprendizaje de las Matemáticas (ATIAM) al que hemos definido como: *“aquel que se genera en el espacio o entorno donde los actores de los procesos de enseñanza y de aprendizaje (profesor y alumno) y el objeto de conocimiento, interactúan de forma organizada a través de una metodología que incluye actividades de aprendizaje con el uso de tecnología”* (Cortés, Núñez, 2007), es decir el SE forma parte de una estrategia de enseñanza general. Por otro lado el SE que proponemos contiene una propuesta de aprendizaje que se refleja en el tipo de actividades que se proponen como contenido del software.

La investigación realizada alrededor de los ATIAM (Cortés, Núñez 2007; Núñez, Cortés 2008; Núñez 2008), ha mostrado que éstos tienen potencial significativo para favorecer el desarrollo de habilidades asociadas al aprendizaje de conceptos matemáticos y a procesos de construcción relacionados con ellos.

Expondremos también algunos ejemplos del SE mencionada sin tocar a fondo los ATIAM generados con él. Las piezas de SE que expondremos son: FRACCIONES SE para el aprendizaje de operaciones con fracciones; DOMIMAT SE para jugar domino construyendo diversos tipos de escenarios matemáticos; GEODEMO SE desarrollado para promover el aprendizaje de la demostración matemática de estudiantes de bachillerato y por último EXPOBALANCE SE desarrollado para asimilar el aprendizaje de las leyes de exponenciación en estudiantes tanto de secundaria como de bachillerato.

2. Características fundamentales para el diseño de software educativo

La inclusión de la tecnología computacional en el proceso de enseñanza aprendizaje requiere del uso de software especializado. Sin embargo, la mayoría de las veces solamente se dispone de paquetes de cómputo diseñados por empresas con un objetivo comercial; esto es, sus diseños son genéricos, tratando que el producto generado llegue a la mayor cantidad de usuarios posible, resultando así el software genérico desde el punto de vista de la enseñanza, aún siendo éste de matemáticas.

Un diseño efectivo de software educativo debe estar basado en modelos de aprendizaje que puedan ser articulados en los ATIAM. Además, su implementación debe estar libre de errores computacionales y ocuparse de proponer estrategias para el aprendizaje de los conceptos matemáticos objetivo.

Por tal motivo, el desarrollo de software efectivo para la enseñanza y el aprendizaje debe considerar gran cantidad de elementos, tanto de carácter

educativo como de tipo computacional; así mismo, debe someterse a diferentes fases de evaluación de su funcionamiento y sobre el sentido educativo específico para lo que fue diseñado.

La etapa de diseño del software debe considerar mínimamente las características que se describen en los siguientes apartados.

2.1. Selección del tema a abordar

Ésta es una característica fundamental para el diseño, ya que posibilita utilizar la tecnología como una *herramienta* de apoyo para resolver un problema de aprendizaje. Dependiendo de la problemática relativa al aprendizaje de un concepto, proceso o idea matemática a atender podemos definir el tipo de tecnología a utilizar considerando también los recursos tanto académicos como económicos con los que cuenta el profesor.

2.2. Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

Es necesario considerar aspectos teóricos para elaborar una estrategia de aprendizaje que pueda dirigir la actividad educativa; se deben tomar en cuenta fundamentos de enseñanza y de aprendizaje para las actividades que se van a proponer. Además de fundamentar la propuesta de desarrollo de software en los elementos teóricos propios del área y del tema a abordar, particularmente se ha utilizado la teoría de representaciones semióticas, propuesta por Duval (1988), así mismo se pretende promover en el estudiante el uso de la visualización, en el sentido de Zimmermann W. & Cunningham S. (1991), en cada representación. Por ejemplo, en el SE "*Fracciones*" se utiliza el Registro Semiótico Numérico así como el Registro Semiótico Gráfico para representar las ideas de incrementos de una variable. Así mismo, en el SE "*DinExponentes*" no solo se utilizan estos registros semióticos, sino que además se logra identificar como un mismo objeto puede tener diferentes representaciones semióticas.

2.3. La programación

Consiste en la implementación de la propuesta en un lenguaje de programación. Es necesario elaborar una interface de comunicación y control del programa para con el usuario, y codificar, en algún lenguaje, las estrategias para abordar el tema. En particular hemos trabajado con Visual Basic y Java, ya que son lenguajes que incorporan un ambiente gráfico de fácil y rápido manejo; además, éstos combinan la programación estructurada con la orientada a objetos, dando la posibilidad de implementar módulos reutilizables para la construcción de distinto software.

2.4. Prueba del programa

Una vez que se tiene un primer prototipo, se debe realizar una prueba técnica para determinar su buen funcionamiento; después, es necesario comprobar que el software cumple los objetivos didácticos para los que se diseñó.

En la evaluación técnica se contempla que:

- no existan errores de programación
- la actividad que se propone se entienda con claridad
- permita al usuario navegar en él sin dificultad

- permita la introducción sencilla de respuestas.

Para la evaluación del software desde un punto de vista educativo, se debe valorar los objetivos didácticos para los que fue realizado. Normalmente se realizan experimentaciones piloto basadas en los sustentos teóricos, la estrategia que se está implementando y el manejo del software. Estas experimentaciones se plantean a diferentes niveles, primeramente con pequeños grupos y posteriormente con grupos de estudiantes y profesores en ambientes naturales.

2.5. Documentación

Una característica fundamental, ya que permite que el software sea utilizado por una población mayor, es la descripción del funcionamiento del programa a través de un manual y de las actividades que pueden ser utilizadas en combinación con el software. Éstas servirán de guía hacia los aprendizajes que se quieren favorecer y deberán incluir los objetivos para los que fueron creadas.

Exponemos en las siguientes secciones dos ejemplos del trabajo de investigación que se ha venido realizando y las características de desarrollo de software anteriormente expuestas.

3. Primer Ejemplo: FRACCIONES

3.1 Selección del tema a abordar

Para estudiantes de primaria y secundaria el entendimiento de lo que es un número fraccionario no es fácil. Un número fraccionario se representa de la forma $\frac{a}{b}$, lo cual hace que los estudiantes consideren, a este número, como una operación que se debe realizar. En este sentido Lamon menciona que los niños muestran un obstáculo cognitivo debido a la experiencia que de ellos tiene y que intentan hacer conexiones entre números y operaciones con los que están familiarizados (Lamon, 1999, p.25); Es decir dividir a entre b siendo el resultado el número buscado, para ellos resulta complicado entender que un número puede ser representado de la manera $\frac{a}{b}$. Este razonamiento es lógico debido a que los estudiantes, antes de trabajar con números fraccionarios, han conocido los números naturales y las operaciones entre ellos. Es difícil entender que la forma de representar a los números fraccionarios y la representación de operaciones entre números naturales es diferente, aún cuando se escriben igual.

En el software que se diseñó y desarrolló (Cortés, López 2003) se utilizan actividades que promueven la representación de números en forma de fracciones simples $\frac{a}{b}$ y mixtas $a\frac{b}{c}$. Primeramente se utiliza una representación gráfica y se pide el valor numérico, posteriormente se da la representación numérica y se pide la gráfica. Considerando que cuando el estudiante realiza operaciones gráficas con fracciones le facilitará el entendimiento de números fraccionarios.

3.2. Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

A continuación se explica la secuencia de actividades de aprendizaje que se promueven en el software fracciones. Primeramente se muestra la pantalla de inicio y se dan las opciones en la barra del menú.

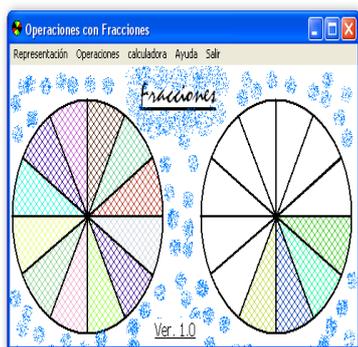


Figura 1: Pantalla de inicio

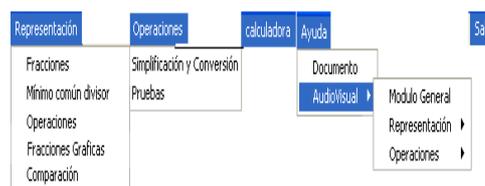


Figura 2: Opciones de menú

El módulo de Fracciones cuenta con cinco menús principales que son: Representaciones, operaciones, calculadora, ayuda y Salir. A su vez algunas de las opciones cuentan con sub-menús tal y como se muestra en las anteriores figuras.

Las actividades que realizará el estudiante están dadas en cada una de las opciones. Se han agrupado en dos rubros que son Representaciones y Operaciones. En los siguientes apartados explicaremos cada una de las actividades.

Representaciones: opción Fracciones

En esta parte, la idea principal de esta actividad es: presentar gráficamente una fracción y también su representación numérica.

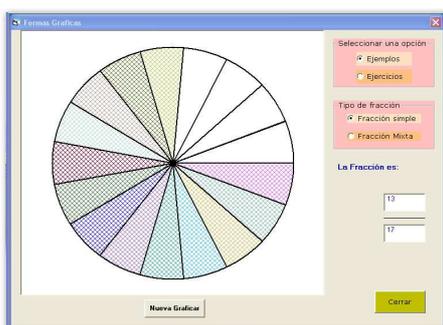


Figura 3: La pantalla principal de la actividad

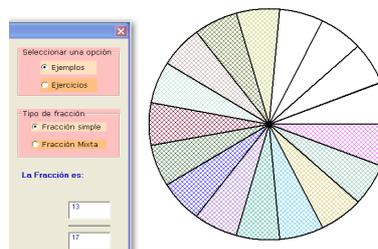


Figura 4: Ejemplo de Fracción simple

Podemos seleccionar ejemplos y ejercicios de Fracciones simples o Fracciones compuestas:



Figura 5: Un ejercicio de Fracción Simple

En los espacios en blanco el usuario introduce datos, La primera es respuesta correcta y la segunda incorrecta



Figura 6

La actividad que se espera realice el estudiante es la de convertir una representación gráfica en una fracción simple de forma numérica.

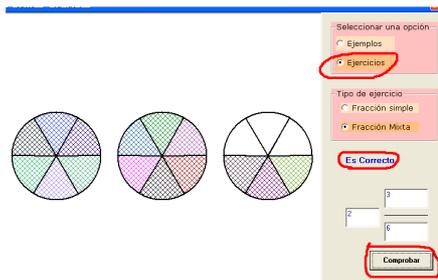


Figura 7: Un ejercicio de Fracción Mixta

La actividad que se espera realice el estudiante es la de convertir una representación gráfica en una fracción mixta de forma numérica

Representaciones: opción Mínimo común divisor

En esta parte se pretende que se adquiera la habilidad de, dados dos (ó tres) fracciones, analizar y encontrar el valor mínimo que cumple con la característica de ser divisible entre los denominadores de las fracciones presentes, y dicho valor encontrado sea representado gráficamente:



Figura 8: Pantalla principal



Figura 9: Un ejemplo

Como se observa, se podrá elegir entre si se desea suma o resta, con dos ó tres fracciones o si desea usar con fracciones simples o mixtas.

Cuando se ha elegido ejemplos, se mostrará el resultado, de las operaciones de las fracciones, de manera gráfica. Para que se muestre cuantos cuadritos en azul son, basta con poner el puntero del Mouse en el último cuadro y se mostrará el número del mismo. Para ver otros ejemplos solamente hay que dar clic en el botón que dice nuevo

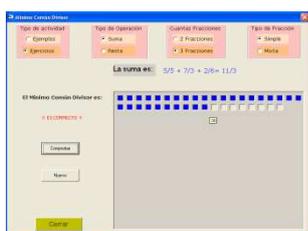


Figura 10: Un ejercicio de Fracción simple

Si se eligen ejercicios, se tendrá que buscar el valor numérico que cumple como mínimo común divisor y una vez hallado se indicara de manera gráfica dando un clic en el cuadrito deseado y, automáticamente, se seleccionarán todos los cuadritos, poniéndose en azul, desde el primero de la izquierda hasta el cuadro elegido. Dando clic en Comprobar, se sabrá si la representación dada fue la indicada o no.

Representaciones: opción operaciones

En esta parte, la idea principal es convertir de una representación numérica a una gráfica:



Figura 11: Pantalla principal

Al igual que en las actividades anteriores tenemos ejemplos y ejercicios de una fracción, de suma y de multiplicación.

Las operaciones se representan gráficamente en la forma de fracción mixta, por lo que tenemos parte entera y parte fraccionaria. Los cuadros azules representan la parte seleccionada y los amarillos la unidad. Por ejemplo el resultado de la suma $15/10$ más $5/6$ es $7/3$ que corresponde a dos entero y $1/3$.



Figura 12: Ejemplo de suma de fracciones

Ejercicio de Suma de Fracciones: En la actividad relacionada con ejercicios el estudiante tiene que seleccionar la cantidad de cuadros que corresponden a la fracción mostrada numéricamente.



Figura 13

El estudiante tendrá que seleccionar la fracción correspondiente dando un clic en el cuadro amarillo deseado (contando de izquierda a derecha) y se seleccionaran todos los cuadros desde el primero de la izquierda hasta el cuadro elegido. En caso de existir enteros debemos dar un clic en el cuadro seleccionado de la ventana de enteros. Para deseleccionar la opción tomada se da dos clics en el cuadro elegido y listo. Para validar si es correcta la respuesta, se da clic en el botón "comprobar" y sabremos si lo es o no, tal y como se muestra.



Figura 14

Representaciones: opción fracciones gráficas

La finalidad de esta parte es, la de que, mediante gráficas y su operación entre ellas, se obtenga y se introduzca el valor numérico del resultado de la suma o resta de dos fracciones simples o mixtas, además de obtener el mínimo común divisor de las dos fracciones

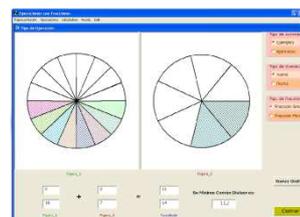


Figura 15: Pantalla principal

Las opciones que encontraremos será la de si se desea un ejemplo ó un ejercicio, o bien una suma o una resta o usar fracciones simples ó mixtas.

Cada fracción, de la operación en cuestión, está representada por una gráfica, excepto la del resultado. Los ejemplos mostrarán los resultados tanto de la operación de las fracciones (reducida a su mínima expresión) como el mínimo común divisor de las dos fracciones. Si elegimos un ejercicio, tendremos que introducir el resultado de la operación de las dos fracciones (reducida a su mínima expresión) además del mínimo común divisor. Para ver si lo teclado está bien basta con dar clic en comprobar.

Es conveniente hacer notar que el resultado de la operación de las fracciones se debe de simplificar hasta donde se pueda (reducida a su mínima expresión), ya que de lo contrario no será correcto. Por ejemplo, en la figura 16 el resultado normal es 78/60, si se da clic en comprobar nos indicará que es erróneo el resultado.

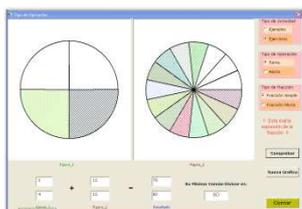


Figura 16

Simplificando la fracción, encontramos que su mínima expresión es 13/10 (la sexta parte de 78/60). Dando clic en Comprobar nos desplegará la figura 17, indicando que es correcto el resultado introducido.

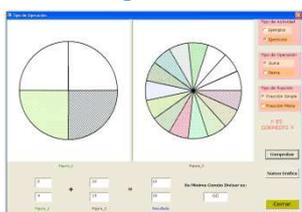


Figura 17

Como se notó, hay que poner tanto el resultado como el mínimo común divisor entre las dos fracciones para que se valide la respuesta.

Representaciones: opción comparaciones

La idea principal de esta parte es:

- Buscar la equivalencia de una fracción dada con alguna de las 12 posibles mostradas.
- Dado el resultado buscar, entre las 12 posibles mostradas, dos fracciones cuya operación, según se indique entre las dos, sea su equivalente.

Dados 2 fracciones buscar, entre las 12 posibles mostradas, una fracciones que sea el su resultado equivalente.

Su pantalla de inicio nos mostrará la elección de equivalencias, como se muestra en la figura 18.

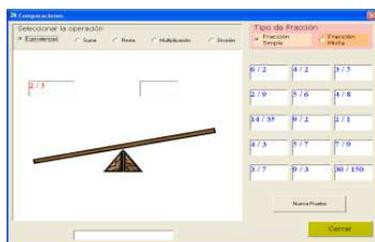


Figura 18

En la cual podremos tener las opciones a elegir del tipo de ejercicio, ya sea equivalencia, suma, resta, multiplicación o división. Y si deseamos usar fracciones simples o mixtas:



Figura 19

Si elegimos que el tipo de operación no sea equivalencias simples, sino mediante otra operación, tendremos la opción de elegir como deseamos hallar las equivalencias.



Figura 20

Si elegimos, dado el resultado hallar O si elegimos, dado dos fracciones hallar el

dos fracciones cuya operación sea equivalente a la dada, se mostrará una pantalla semejante a la figura siguiente:

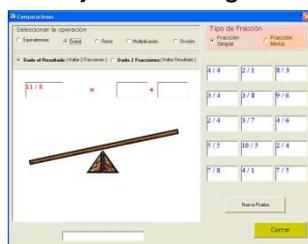


Figura 21

resultado que sea el equivalente a la operación de las dos fracciones, se mostrará una pantalla semejante a la figura:

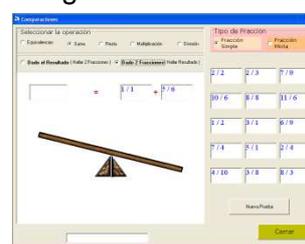


Figura 22

Seleccione una fracción dando clic en la deseada y arrástrelo hacia el espacio de la o las fracciones en blanco. Si los valores seleccionados son correctos la balanza estará en equilibrio, como en la figura:



Figura 23

Si los valores son incorrectos y mayores entonces la balanza se irá hacia la derecha y si son menores se irá a la izquierda, figura 24.



Figura 24

La figura 25 muestra los valores que se presentan, como posibles soluciones, de los cuales se deberá seleccionar uno o dos, dependiendo de lo que se pida. La forma de hacerlo es: elegir la fracción deseada y dar clic en ella y sin soltar, el botón del Mouse, arrastrarlo hacia las ventanas en blanco, y una vez posicionados en el espacio deseado soltar el botón del Mouse para dejar “caer” en el espacio elegido la fracción seleccionada, tal y como se muestra en dicha figura.

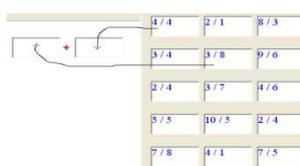


Figura 25

Observe que, en este módulo, el indicador de si la respuesta es correcta o no, será la posición del equilibrio de la balanza.

3.3. Programación del software

Este sistema fue implementado en el lenguaje Visual Basic para Windows, por requerir predominantemente un ambiente de programación para el fácil manejo de gráficos y tablas de datos.

3.4. Prueba del programa

Este software se ha probado, de manera informal, con algunos estudiantes de primaria y de secundaria, y según lo dicho por ellos se les hace una manera agradable de aprender. Una experimentación más completa y formal sobre los beneficios al usar el software de Fracciones será posteriormente expuesta.

3.5. Observaciones generales

La secuencia de actividades que se presentan en el software “Fracciones” permite al estudiante entender lo que es una fracción y ejercitarse en las operaciones básicas con números fraccionarios.

4. Segundo Ejemplo: DOMIMAT

4.1 Selección del tema a abordar

Esta aplicación está basada en el tradicional juego de Domino, pero el contenido de las fichas son expresiones matemáticas como la mostrada en la figura:

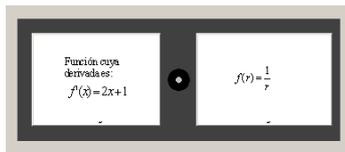


Figura 26

Se siguen las mismas reglas que el juego original, con la opción de jugar un solo usuario contra la computadora. Un de las ideas principales en esta aplicación es que el usuario puede construir sus propias fichas, ya que estas se generan a partir de imágenes en algún formato conocido (Jpg, Gif, Bmp, Tif, etc).

4.2 Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

La interface de la aplicación es la siguiente:

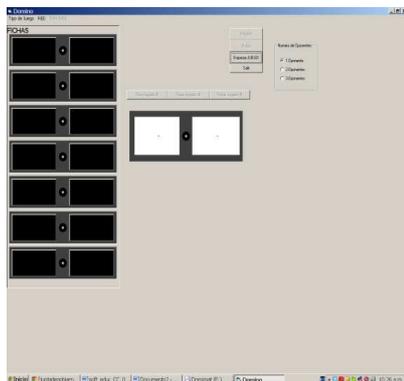


Figura 27: Pantalla principal



Figura 28: opciones que se presentan

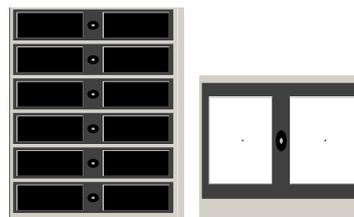


Figura 29: las fichas

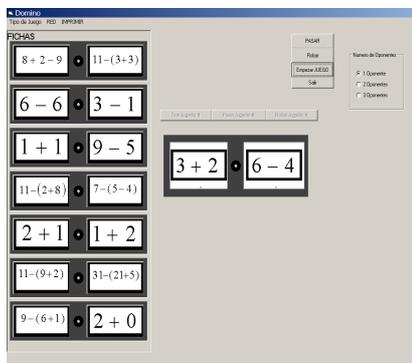


Figura 30: fichas aritméticas

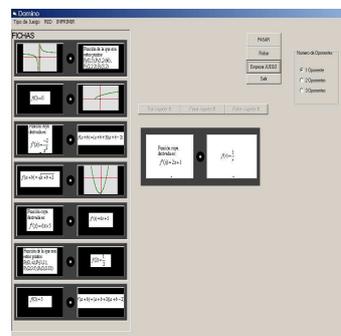


Figura 31: fichas de funciones

El juego consiste en arrastrar del mazo de fichas una ficha que en alguno de sus lados contenga una expresión equivalente a uno de los lados de la ficha muestra, si la ficha seleccionada cumple con esto, al arrastrarla se generara una nueva ficha, si no cumple con esto no se acepta el movimiento.

4.3. Programación del software

Este sistema fue implementado en el lenguaje Visual Basic para Windows, por requerir predominantemente un ambiente de programación para el fácil manejo de imágenes. Cada ficha se compone de 2 imágenes creadas en algún formato conocido (Jpg, Gif, Bmp, etc). La aplicación contiene una carpeta llamada imágenes.

En la carpeta “Imágenes” se encuentran las carpetas del tipo de juego que queremos realizar

Cada una de estas carpetas contiene en su interior 7 carpetas nombradas “0”, “1”...“6”

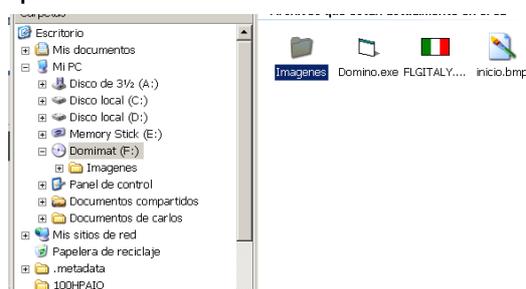


Figura 32

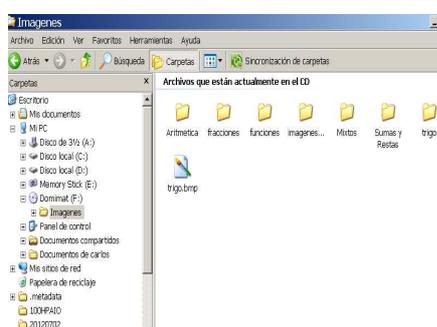


Figura 33

Y a su vez cada una de estas carpetas deberá contener al menos 8 imágenes con expresiones equivalentes.

Las fichas son generadas seleccionando de manera semi-aleatoria una imagen de cada carpeta, salvo una ficha que contiene 2 imágenes de una misma carpeta.

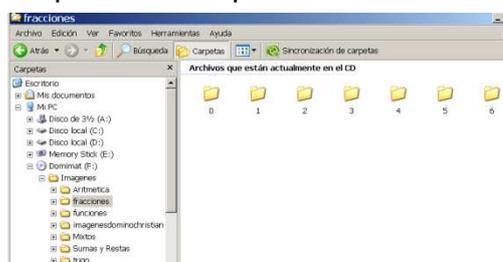


Figura 34

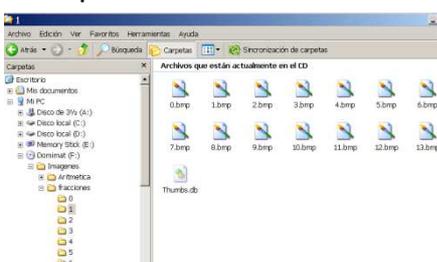


Figura 35

4.4 Prueba del programa

Esta aplicación se ha probado de manera informal con niños de edades diferentes, y de acuerdo a sus comentarios se les ha hecho divertido.

4.5 Observaciones generales

El realizar juegos didácticos a través de crear aplicaciones informáticas es una forma de introducir un aprendizaje, en el caso de “DomiMat” se deja abierta la posibilidad a los educadores de crear el tipo de juego que requieran, de hecho como “DomiMat” utiliza fichas creadas con imágenes puede ser utilizado para otro tipo de asignatura (Química a través de crear fichas de Expresiones Químicas, Lengua a través de crear fichas de Sinónimos, etc).

5. Tercer Ejemplo: Desarrollo de Software para el Aprendizaje de la Demostración en Geometría

5.1 Selección del tema a abordar

Actualmente se está dando mucha importancia a actividades que tienen que ver con los procesos de exploración, menospreciando la actividad de demostración formal. De acuerdo con Hanna (2007), esto se debe en parte a que las calculadoras y computadoras han influenciado la práctica educativa en matemáticas y se cree que la demostración no es más la parte central ó, en todo caso, que su uso en el salón de clase no propicia el aprendizaje.

En este contexto, las nuevas propuestas educativas (SEP, 2007; NCTM, 2000) plantean que los estudiantes deben desarrollar capacidades de argumentación con el fin de poder exponer y defender sus ideas y resultados, suponiendo que dichas capacidades favorecerán en el futuro los procesos de demostración matemática. No hay duda del papel significativo de la argumentación en el aula; sin embargo, el hacer énfasis en ella parece estar subyugando la importancia de la demostración formal.

El presente trabajo aún está en una etapa de desarrollo; sin embargo, se ha tomado como un segundo ejemplo con el fin de exponer los avances que se tienen en el mismo y mostrar así la utilización de características esenciales en el desarrollo de cualquier tipo de software educativo para matemáticas. La finalidad del proyecto de investigación bajo el cual se está construyendo este software, es promover el aprendizaje de la demostración matemática de estudiantes de bachillerato. El diseño del mismo está basado en la propuesta de Tanguay (2005; 2007), que a su vez sigue la orientación teórica de Duval (1995; 1991).

5.1.1 Argumentación, demostración y otras formas de prueba

Varios investigadores (Duval, 1991, 2000; Balacheff, 1988; Harel y Sowder, 1998; Harel 2007; Tall, 1999; Herbst y Miyakawa, 2008; Kuzniak y Rauscher, 2011) han dedicado esfuerzos al estudio de las formas de validación en matemáticas, tratando de caracterizarlas y determinar su impacto, tanto en el pensamiento y razonamiento matemático, como en el aprendizaje y desarrollo mismo de las matemáticas.

Particularmente, Duval (1991, 2000) señala que en principio parecería que la argumentación y la demostración forman un continuo: argumentar, explicar, demostrar; sin embargo, en el fondo hay un distanciamiento profundo entre ellas, tanto de carácter lógico como de carácter cognitivo. Señala que "*Pasar de la argumentación a un razonamiento válido implica un descentramiento específico que no se favorece por la discusión o por la interiorización de una discusión*" (Duval, 2000). La argumentación no abre una vía de acceso a la demostración y, por tanto, ambas requieren de aprendizajes específicos por parte de los estudiantes.

En el presente trabajo, tomamos como base teórica el trabajo de Duval (1991, 1995, 2000). Si bien consideramos que la exploración, planteamiento de conjeturas y la posibilidad de usar diferentes tipos de pruebas matemáticas, son aspectos importantes del quehacer matemático, es importante no descuidar en los estudiantes el aprendizaje de la demostración. Debido a las discrepancias entre argumentación y demostración, identificadas en diferentes investigaciones, como las realizadas por Duval (1999), Balacheff (1988), Harel & Sowder (1998), entre otros investigadores, es fundamental diseñar actividades que puedan mostrar al estudiante una vía para el

aprendizaje de la demostración matemática (Kuzniak y Rauscher, 2011). En particular, debemos ayudar a los estudiantes a comprender la estructura de la demostración deductiva, lo cual se puede lograr haciendo énfasis en la estructura ternaria de la inferencia (figura 36).

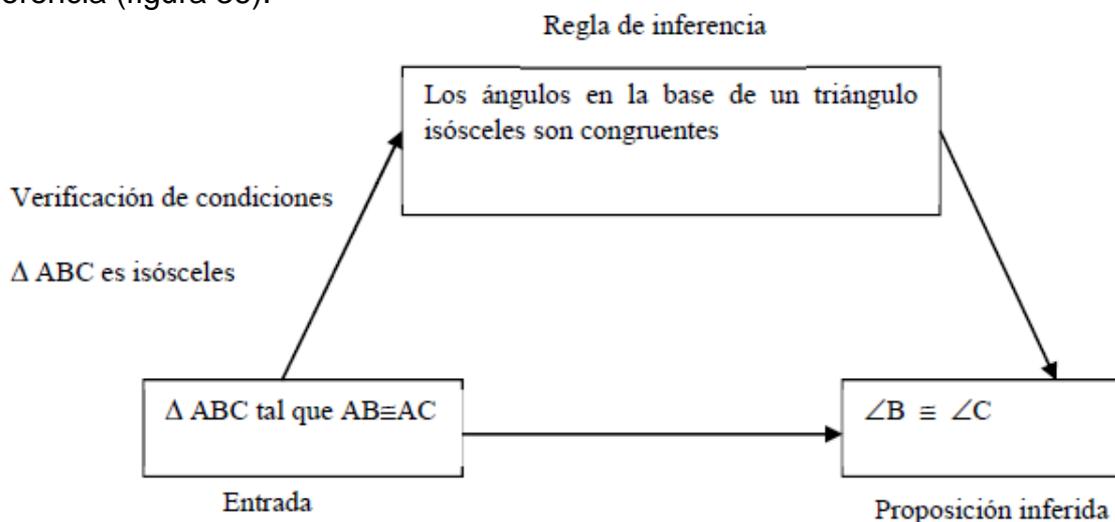


Figura 36. Estructura ternaria de una inferencia

5.2. Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

Se tomaron como base algunas actividades diseñadas y experimentadas exitosamente en lápiz-y-papel (Tanguay, 2005, 2006).

Particularmente se creó una secuencia de actividades, que fue implementada en dos grupos de estudiantes de bachillerato (estudiantes entre 15 y 17 años). Los resultados reportados muestran que las tareas favorecen el entendimiento con relación a la estructura de la demostración en geometría. En particular, la estructura de las actividades, que se describe enseguida, favorece diferentes formas de trabajo en los estudiantes, ya que pueden proceder de lo menos evidente a lo más evidente; una forma de trabajo común en el quehacer matemático (Chen y Herbst, 2012).

5.2.1. Estructura de las actividades

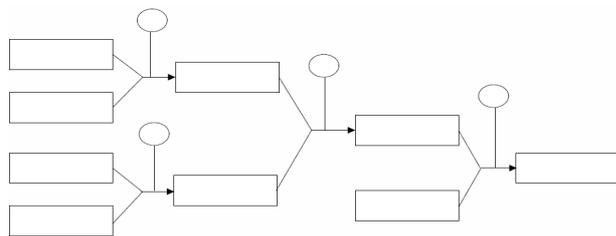
Se involucran cuatro tipos diferentes de recursos para la construcción de una demostración:

- 1) El enunciado de un teorema.
- 2) Un diagrama con la estructura genérica de la demostración.
- 3) Un conjunto de proporciones para construir la demostración; y
- 4) Una lista de justificaciones para validar cada uno de los pasos de demostración.

Por tanto, dada una proposición objetivo (no evidente), el estudiante cuenta con un diagrama (figura 37) organizado mediante casillas ligadas que guiarán la estructura de demostración. Así mismo, cuenta con un conjunto (completo, incompleto o excedido) de proposiciones que deberá ir colocando en las casillas del diagrama, de tal manera que se produzca un encadenamiento deductivo. Cada colocación deberá ser justificada mediante un enunciado que también puede ser proporcionado al estudiante. Así mismo, el alumno cuenta con una construcción geométrica (figura 38), que le proporciona una ayuda visual para el proceso de construcción.

Enunciado del teorema: “Las mediatrices de los lados de un triángulo”.

Diagrama



1) Transitividad de la igualdad:

Si $x = y$ y $y = z$ entonces $x = z$

2) Un punto sobre la mediatriz de

todo segmento PQ ,
necesariamente está a la misma
distancia de los extremos P y Q .

3) Un punto a la misma distancia
de dos puntos P y Q

necesariamente está sobre la
mediatriz del segmento PQ .

M es el punto medio de AB	m es mediatriz de AB	m es mediatriz de AB
$\angle XMA = 90^\circ$	$90^\circ = \angle XMB$	$XA = XB$
$AM = BM$	$\angle XMA = \angle XMB$	$\Delta XMA = \Delta XMB$
$XM = XM$	X está sobre la recta m ; $X \neq M$; M el punto medio de AB	X está sobre la recta m ; $X \neq M$; M el punto medio de AB

Figura 37. Diagrama, proposiciones y justificaciones dadas

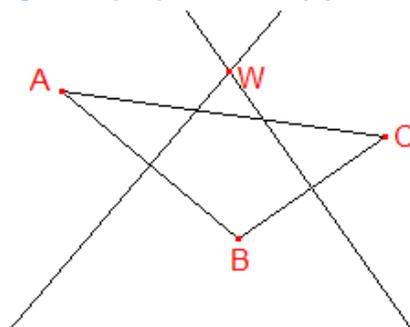


Figura 38. Construcción geométrica del teorema

5.3. Programación del software

Al incorporar a estas tareas las capacidades dinámico-interactivas proporcionadas por la tecnología, podemos generar ATIAM para producir demostraciones a través de la exploración y dinamismo de los sistemas computacionales.

Tomando como base las características de diseño de software, mencionadas al inicio del presente artículo, estamos construyendo un software para diseñar y utilizar actividades como las mostradas; es decir, aquellas que enfatizan la organización deductiva de las demostraciones. Particularmente en: a) la estructura de las inferencias, b) el papel de las reglas en la deducción; y, c) en resaltar la forma no lineal de la demostración.

En las siguientes figuras se presentan los avances en la construcción de este software. Primeramente se diseñó una interface interactiva para construir diagramas (figura 39) y se está diseñando un editor que permita desarrollar reglas y proposiciones. También se cuenta con un módulo para elaborar construcciones geométricas (figura 40). Estas herramientas se combinan para producir actividades que podrán ser almacenadas en archivos y/o integradas directamente al software (figuras 41, 42 y 43).

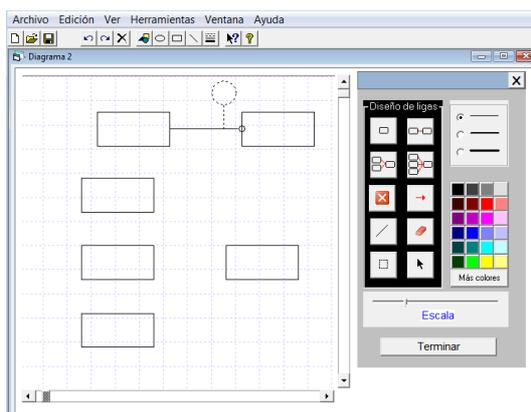


Figura 39. Interface para el diseño de diagramas

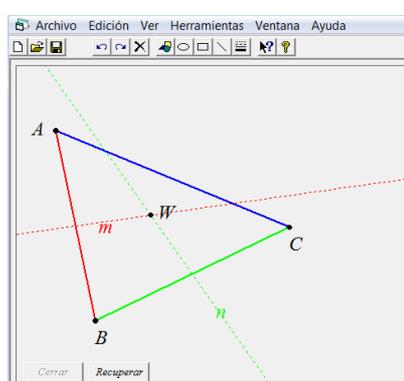


Figura 40. Construcciones geométricas dinámicas

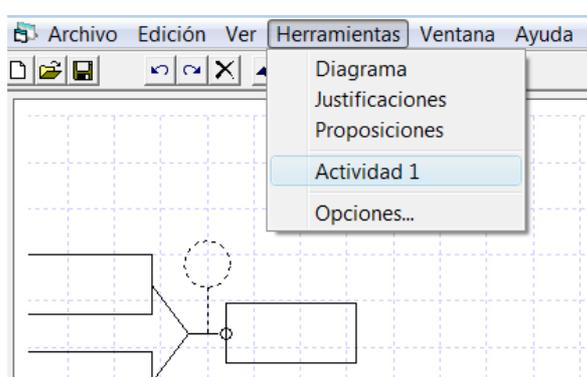


Figura 41. Actividades incorporadas al software

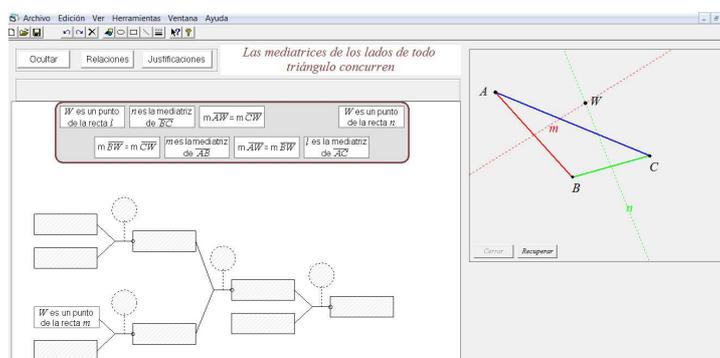


Figura 42. Ejemplo de una actividad (las relaciones pueden ser seleccionadas y arrastradas a las casillas del diagrama. La imagen es dinámica interactiva)

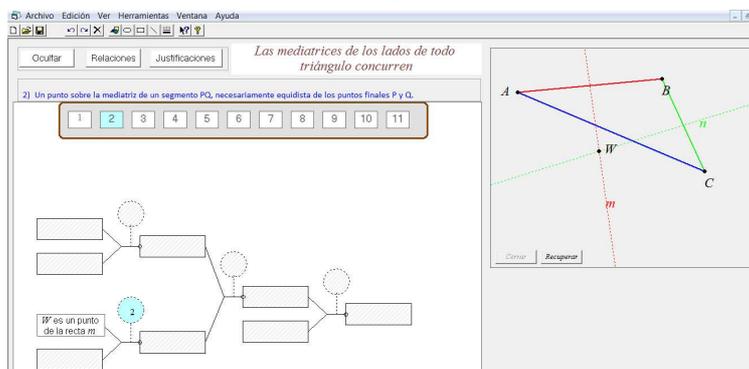


Figura 43. Ejemplo de una actividad (las justificaciones dadas pueden ser seleccionadas y arrastradas a los círculos del diagrama)

5.4 Prueba del programa

Este software no ha sido sometido aún a una evaluación pedagógica, ya que su desarrollo se encuentra en la etapa de implementación y prueba técnica. Sin embargo, esperamos contar con un prototipo que nos permita realizar las primeras evaluaciones así como las experimentaciones para el logro de los objetivos planteados en su diseño.

5.5 Observaciones generales

Las consideraciones anteriores, en la línea de los trabajos de investigación de Tanguay (2006) así como del desarrollo de ATIAM's, nos han permitido proponer actividades que hacen énfasis en la organización deductiva de demostraciones, en el papel particular que juega la lógica deductiva en el proceso de justificación, así como en lo relativo al arreglo no lineal de las inferencias en la estructura global de la prueba. Saliendo parcialmente del sistema de representación usual en geometría para situarse en el registro diagramático y gráfico en mayor medida. Con ello esperamos que el estudiante tenga oportunidades para revisar o incluso rechazar su concepción tanto de la prueba como de la argumentación.

6. Cuarto ejemplo: DinExponentes

6.1 Selección del tema a abordar

En la búsqueda de nuevas posibilidades de aprendizaje significativo, se ha observado que el uso de la tecnología puede lograr marcar una diferencia significativa, siempre y cuando ésta sea dirigida adecuadamente. El caso del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas es uno de los objetivos principales de la educación básica (incluyendo el bachillerato). Su enseñanza requiere de procesos y recursos didácticos que promuevan el aprendizaje de diferentes conceptos. Sin embargo, una de las principales dificultades de aprendizaje de las matemáticas tiene que ver con la forma de enseñanza (SEP, 2010), ya que en este proceso ha habido una marcada tendencia a la mecanización, y a la memorización de reglas, fórmulas etc., dejando de lado la comprensión y argumentación que existe en el fondo. En este sentido, las diferentes formas de representar un concepto y las formas en que podemos transitar de una representación a otra, deben ser promovidas mediante experiencias de aprendizaje que ayuden a los estudiantes a conectar y entender los conceptos. En particular, la representación numérica, gráfica y la posibilidad de hacer tratamientos de manera directa sin tener que cambiar de representación, ayuda a la mejor comprensión de los conceptos y favorece el desarrollo de habilidades visuales (Hitt, 1998).

6.1.1 La enseñanza del álgebra en Educación Matemática

La problemática asociada al aprendizaje del álgebra ha sido tratada en varias investigaciones, las cuales se han enfocado en conceptos y procedimientos algebraicos, resolución de problemas y las dificultades de los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra. El simbolismo literal fue la primera forma algebraica en investigarse; con el tiempo, las investigaciones en álgebra se han ampliado para abarcar otras representaciones, el uso de herramientas tecnológicas, diferentes perspectivas en los contenidos y una amplia variedad de marcos teóricos acerca del pensamiento algebraico. Dado que el álgebra y la aritmética comparten de alguna manera símbolos o el uso de literales, se requiere de varios ajustes conceptuales para que los estudiantes que inician el estudio del álgebra asimilen el

cambio en el significado de estos símbolos. Los primeros estudios sobre la interpretación que hacen los estudiantes de los símbolos algebraicos tienden a enfocarse en niveles cognitivos previos a la experiencia aritmética, formas de pensamiento y dificultades en la notación. En este sentido, es importante que en las aulas se haga uso de ATIAMS y herramientas que han mostrado favorecer el estudio de las matemáticas.

Para el desarrollo del SE “*DinExpontes*” se toma en cuenta la base teórica de las representaciones semioticas de Duval (1999), con la idea de ayudar al estudiante a transitar de la memorización de reglas exponenciales a la comprensión de que los números se pueden representar de muchas otras formas, para transitar de la representación numérica a la representación simbólica de una forma completamente dinámica e interactiva, que solo puede lograrse haciendo uso de la tecnología.

6.2 Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

Tomando en cuenta las consideraciones indicadas en SEP (2008), en el sentido de que la comprensión de los procesos de aprendizaje de las matemáticas ha dado lugar a una nueva concepción en esta área, considerándola como, “*el proceso de conducción de la actividad del aprendizaje, lo cual a su vez, conlleva a una nueva concepción del profesor como el propiciador y conductor de dicha actividad de aprendizaje, esta concepción implica que el profesor diseñe o seleccione actividades que promuevan la construcción de conceptos a partir de experiencias concretas en la que los estudiantes puedan observar, conjeturar e interactuar.*”

Partiendo de esta visión, en la estrategia desarrollada para el modelo de las actividades en “*DinExpontes*” se utilizan los siguientes recursos para la enseñanza y aprendizaje de las leyes de exponenciación.

- a) Operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división).
- b) Representación numérica y simbólica.
- c) Manipulación de las representaciones del punto anterior.

De tal manera que estos recursos asociados a una balanza le puedan dar certidumbre a cada uno de los resultados que va obteniendo el estudiante, partiendo de actividades sencillas y que van aumentando el nivel de aprendizaje propuesto con la idea de que al final de las actividades el estudiante muestre un nivel más avanzado de la representación simbólica.

6.3 Programación del Software

En el caso particular del software *DinExponentes* hemos implementado el diseño y programación en el lenguaje Java por ser un lenguaje orientado a objetos, y en la fase de desarrollo hemos seguido la metodología descrita al inicio del presente artículo, con el fin de generar un ATIAM en el que los estudiantes, a través de la exploración, sean autosuficientes en la generación de números elevados a alguna potencia.

En las siguientes figuras se presentan los avances en la construcción de este software. Primeramente se diseñó una interface básica e interactiva para la implementación de los objetos matemáticos.

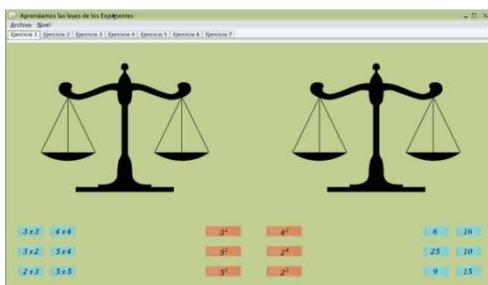


Figura 44. Interface Principal con Representación Numérica

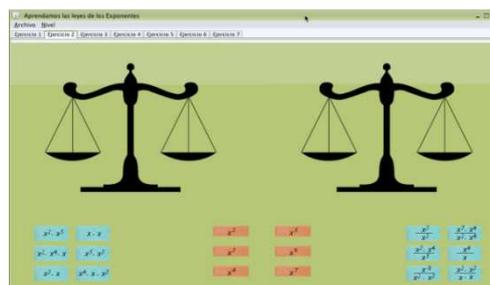


Figura 45. Representación Simbólica

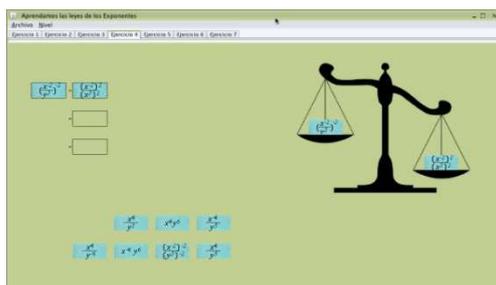


Figura 46. Representación Gráfica

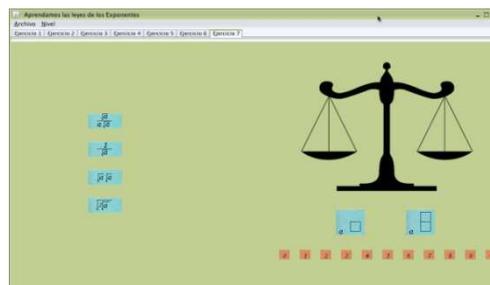


Figura 47. Diferentes representaciones del mismo objeto matemático

6.4. Prueba del Software

Este software ha sido sometido solo a pruebas técnicas, ya que cuando se trabaja con objetos que interactúan de forma dinámica se requiere utilizar tanto las coordenadas de pantalla y coordenadas del objeto como coordenadas de la nueva posición del objeto, por lo cual esto conlleva acarrear ciertos errores computacionales que deben ser depurados en esta fase de desarrollo. Posterior a esta etapa, se pretende tener un prototipo que pueda ser sometido a una prueba pedagógica que permita mostrar si es necesario trabajar más en las actividades didácticas y a su vez permita mostrar si se necesitan más objetos dinámico interactivos para la comprensión de los conceptos algebraicos.

6.5. Observaciones generales

La estructura de programación utilizada en *DinaExponentes* así como la estructura de las actividades asociadas a éste, permite que no solo se puedan abordar temas tales como la leyes de exponenciación, sino que además se pueden abordar otro tipo de temas, tales como resolución de inecuaciones, ecuaciones de primer y segundo grado, derivación de funciones, etc., por mencionar algunos. Sin embargo, es muy importante resaltar que el factor más importante es el cómo se desarrollen y aborden las actividades implementadas en los ATIAMS.

7. Conclusiones

La tecnología está siendo parte de nuestra vida cotidiana; particularmente, en la enseñanza, está modificando la forma en que se enseña y se aprende. No hay duda que está jugando un papel significativo como herramienta para el aprendizaje, sobre todo en aquellas áreas del conocimiento en las que la representación gráfica y visualización son mecanismos fundamentales para el entendimiento de conceptos.

Las actividades de exploración y desarrollo de conjeturas, que se pueden implementar a través de software, ahora toman una nueva relevancia en la enseñanza

ya que propician el trabajo experimental en las matemáticas.

La tecnología, como herramienta de apoyo al aprendizaje, permite que estas experiencias aporten al estudiante evidencias, que les llevan a proponer conjeturas. Dichas evidencias también pueden ayudar a buscar formas de justificación que, de manera gradual, puedan ser dirigidas hacia la demostración formal de proposiciones.

Desde el punto de vista socio-cultural, las actividades con uso de software permiten generar un ambiente de trabajo interactivo y dinámico, que enfatiza la participación activa del estudiante y una mayor responsabilidad hacia su propio aprendizaje. En este sentido, el uso de la tecnología en el salón de clase, nos brinda oportunidades para cambiar el ambiente tradicional del aula, a uno en el que sea posible favorecer procesos de pensamiento y habilidades como la reflexión, la comunicación y el debate científico; rasgos deseables en la formación de los estudiantes que son generados por los ATIAM.

Es importante aclarar que en este artículo abordamos sólo una de las tendencias inicialmente mencionadas: la relacionada con el desarrollo de software educativo para matemáticas; en artículos posteriores serán abordadas otras tendencias.

8. Bibliografía

- Balacheff, N. (1988) Etude des processus de preuve chez des élèves de Collège. Thèse de Doctorat d'état ès-sciences. Grenoble : Université Joseph Fourier.
- Chen, CH., & Herbst, P. (2012) The interplay among gestures, discourse, and diagrams in students' geometrical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 83 (pp.285–307).
- Clements D., Battista, M. (2000). Designing effective software. En: Anthony E. Kelly y Richard A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 761-776). NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Confrey, J.(1993) *A constructivist research programme towards the reform of mathematics educations*. (Introduction to symposium for the Annual Meeting of American Education Research Association), April, 1993.
- Cortés, C. y López A. (2003). FRACCIONES software de apoyo al aprendizaje. Tesis de Licenciatura Universidad Michoacana. México.
- Cortés, C. y Romero, M. (2003). DOMIMAT software educativo.
- Cortés, C. y Núñez, E. (2007) Ambientes tecnológicos interactivos para el aprendizaje de las matemáticas. *Memorias del IX Congreso Nacional de Investigación Educativa*. México 2007.
- Duval R. (1988) Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.
- Duval, R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (3), (pp. 233-261).
- Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Peter Lang, Suisse.

- Duval, R. (1999). Questioning argumentation. *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*.
- Duval, R. (2000) Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20/2 (pp.135-170).
- Hanna, G. (2007) The ongoing value of proof. En: P. Boero (Ed.) *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 3–16). Sense Publishers.
- Harel (2007). Students' proof schemes revisited. En: P. Boero (Ed.) *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 65-78). Sense Publishers.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En: A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education*. III (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Herbst, P., & Miyakawa, T. (2008). When, how, and why prove theorems? A methodology for studying the perspective of Geometry teachers. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, Vol 40, No. 3, (pp. 469–486).
- Hitt, F. (1998) Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum, *Revista de Educación Matemática*, Vol. 10, México.
- Hitt, F. (2002) *Funciones en contexto*. Editorial Pearson Educación. México.
- Hitt, F. (2007). Utilization de la calculatrice symbolique dans un environnement d'apprentissage coopératif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. *Environnements Informatisés et Ressources Numériques pour l'apprentissage Conception et usages, regards croisés*. Francia : Hermes Science.
- Hitt, F, y Cortés, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e internet*. Vol 10 2009. Costa Rica.
- Hughes, D. (1990) Visualization and Calculus Reform. In *Visualization in Teaching and Learning Mathematics: A Project (MAA notes #19)*. Walter Zimmerman and Steven Cunningham, eds. Washington DC: Mathematical Association of America, 1-8.
- Kuzniak, A. & Rauscher, J. (2011) How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 77 (pp.129–147).
- Larios, V. (2000) *Las Conjeturas en los Procesos de Validación Matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática*. Tesis de maestría en Docencia de las Matemáticas, UAQ.
- Lamon, S (1999). Teaching fractions and rations for understanding. Lawrence erlbaum associates, publishers. London 1999. p. 21-32.
- Núñez, E y Cortés, C. (2008) Propuesta de una metodología de enseñanza usando ambientes tecnológicos interactivos. En: *Investigaciones y propuestas sobre el uso de la tecnología en educación matemática*. ISBN 978-970-94810-4-4. Vol. 1, año 2008. Editorial AMIUTEM.
- Núñez, E. (2008). *Ambientes Tecnológicos Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Morelos.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- SEP (2007). *Plan de Estudios 2006*. Secretaría de Educación Pública, México.
- SEP (2008). *Reforma de la Educación Secundaria. Fundamentación Curricular*

- Matemáticas*, Secretaría de Educación Pública, México.
- SEP (2010). *La Problemática de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria*, Secretaría de Educación Pública, México.
- Tall, D. (1999) The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World*, vol, 4, 117–136. Reston, Virginia: NCTM.
- Tanguay, D. (2006) Comprendre l'structure déductive en démonstration. *Envol*, Vol. 134, France.
- Tanguay, D. (2005) Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol. 10, pp. 55-93.
- Zimmermann W. & Cunningham S. (1991). *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 25-37), MAA Series, No. 19. USA.

Cortés Zavala José Carlos: Profesor de la Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana en México. Autor de varios artículos de investigación y docencia. Presidente de AMIUTEM, Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores en México. jcortes@umich.mx

Guerrero Magaña María de Lourdes: Profesora de la Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana en México. Autora de varios artículos de investigación y docencia. gmagana@umich.mx

Morales Ontiveros Christian: Profesor de la Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana en México. chris@umich.mx

Pedroza Ceras Lourdes: Estudiante de la Facultad de Físico Matemáticas. mpedrozc@fismat.umich.mx

