

Acciones docentes que promueven la argumentación en una clase de modelación: caso de estudio en secundaria.

Ações pedagógicas que promovem a argumentação em uma aula de modelagem: um estudo de caso no ensino fundamental.

Andrés Ortiz Jiménez

Fecha de recepción: 8/06/2022
Fecha de aceptación: 25/08/2022

<p>Resumen</p>	<p>Existe poca investigación respecto al conocimiento de los docentes para enseñar a promover argumentación y modelación, como también de las dificultades asociadas en ello. El objetivo de este artículo de investigación es caracterizar las acciones que realiza una profesora cuando promueve la argumentación en clases donde se implementa una situación de modelación, respecto a la conveniencia de comprar entradas al cine, siendo o no siendo socio. En el caso analizado se puede señalar que ella tiende a realizar acciones enfocadas en la participación de los estudiantes, en la gestión del error y en hacer preguntas para entender el trabajo matemático, que favorecen las fases del ciclo de modelación especialmente simplificación, interpretación y validación. Palabras clave: competencia matemática, argumentación, modelación, ciclo de modelación.</p>
<p>Abstract</p>	<p>There is not much research on teachers' knowledge of how to teach to promote argumentation and modeling, as well as the difficulties associated with it. The objective of this research article is to characterize the actions that a teacher performs when promoting argumentation in classes where a modeling situation is implemented, regarding the convenience of buying movie tickets, being or not being a member. In the case analyzed, it can be noted that she tends to perform actions focused on student participation, error management and asking questions to understand the mathematical work, which favor the phases of the modeling cycle, especially simplification, interpretation and validation. Keywords: mathematical competency, argumentation, modeling, modeling cycle</p>
<p>Resumo</p>	<p>Há pouca pesquisa sobre os conhecimentos dos professores sobre como ensinar para promover a argumentação e a modelagem, assim como as dificuldades associadas a ela. O objetivo deste artigo de pesquisa é caracterizar as ações tomadas por um professor ao promover a argumentação nas aulas em que uma situação de modelagem é implementada, em relação à conveniência de comprar ingressos de cinema, quer o professor seja ou não um membro. No caso analisado,</p>

pode-se notar que ela tende a realizar ações focalizadas na participação dos estudantes, na gestão de erros e na realização de perguntas para compreender o trabalho matemático, o que favorece as fases do ciclo de modelagem, especialmente a simplificação, interpretação e validação.

Palavras-chave: competência matemática, argumentação, modelagem, ciclo de modelagem.

1. Introducción

Existen investigaciones que plantean que la argumentación, en el aula matemática, promueve una cultura que considera la construcción del conocimiento como una actividad situada, crítica y reflexiva, que involucra la participación grupal permitiendo la comunicación y las oportunidades de aprendizaje en las lecciones de matemática (Conner et al., 2014; Krummheuer, 2007; Smith y Stein, 2011). El actual marco curricular de matemática establecido por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) señala que la argumentación, la discusión colectiva respecto a la resolución y puesta en común de los problemas favorece el aprendizaje matemático (MINEDUC, 2016), lo que es coherente con Carpenter et al. cuando señalan que:

Los estudiantes que aprenden a articular y justificar sus propias ideas matemáticas, razonar mediante explicaciones matemáticas propias y ajenas y a ofrecer una exposición razonada de sus respuestas, desarrollan una comprensión profunda que resulta fundamental para su éxito futuro, tanto en las matemáticas como en áreas relacionadas. (Carpenter et al., 2003, p. 6)

En el aula de matemáticas se espera que los estudiantes aprendan a argumentar ajustándose a estándares matemáticos adecuados al nivel educativo (Rapanta et al., 2013) y que también se impliquen en actividades argumentativas para aprender matemáticas; argumentando para comprender y facilitar a sus pares la comprensión, clarificar dudas, disentir, entre otros aspectos. En relación a lo anterior, es evidente la importancia que tiene el docente en una gestión de clases que promueve la argumentación colectiva ya que sus acciones específicas pueden fortalecer o debilitar los procesos de discusión de los estudiantes, al realizar una tarea matemática (Ayalon y Even, 2016; Solar y Deulofeu, 2016).

Por otra parte, existe evidencia sobre la relación entre la argumentación colectiva y la elaboración de modelos matemáticos. Al respecto, Brown y Redmond (2007) observaron que estudiantes que regularmente argumentan de manera colectiva en el aula, veían la matemática como un foro de discusión al realizar tareas de modelación. Además, Dede (2019) ha relacionado los procesos de argumentación con el ciclo de modelación en el aula matemática.

En consecuencia, los antecedentes señalados justifican este artículo, que es parte de una investigación en desarrollo, pues se establecen acciones en procesos de enseñanza que buscan promover la argumentación en situaciones de modelación, las cuales al ser caracterizadas puede contribuir a que profesores en servicio y estudiantes de pedagogía las incorporen, de manera reflexiva, en sus aulas.

1.1 Pregunta de investigación

Si bien han aumentado los trabajos respecto a la argumentación, Ayalon y Hershkowitz (2018) señalan que todavía existe poca investigación respecto al conocimiento de los docentes para implementarla en el aula y de las dificultades asociadas en ello. Complementando lo anterior, respecto a la importancia de este estudio, es necesario mencionar que Kauertz et al. (2012) mencionan que la relación entre el desarrollo de las competencias y la enseñanza aún es vaga, y las mediciones no proporcionan información del proceso de desarrollo de las competencias sino que señalan las metas que deberían haberse logrado, proporcionando información que es útil para el diseño de políticas públicas en educación, pero no para orientar procesos de enseñanza.

Así, entonces, al considerar los antecedentes presentados, la pregunta de investigación que orienta este artículo es ¿qué acciones realiza un docente cuando está promoviendo la argumentación, implementando una clase de modelación?

2. Antecedentes teóricos

El propósito de esta investigación hace que los antecedentes teóricos se enmarquen en el enfoque por competencias, centrándose en procesos matemáticos tales como la modelización, la argumentación, la representación entre otros, y donde el aprendizaje va más allá de los contenidos, pues apunta a que en la clase de matemática se formen ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos, permitiéndoles identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo (OCDE, 2019). Por consiguiente, en los siguientes apartados se desarrollarán los temas de competencia matemática, argumentación y modelación.

2.1 Competencia matemática

Hoy en día es evidente que los elementos teóricos relacionados con las competencias matemáticas son importantes en la investigación en países de Europa, Asia, América y Oceanía (Niss et al., 2016). En general, en todos ellos, un aspecto común es que la competencia matemática de un estudiante no está centrada solamente en el dominio de contenidos respecto a algún objeto matemático o habilidades relacionadas con procedimientos de cálculo y/o resolución. Al respecto Niss y Højgaard, manifiestan que:

[...] Sin duda, al centrarnos en la competencia, ciertamente no tenemos la intención de descartar la importancia y el papel de la materia matemática, incluidos los hechos, los resultados y los métodos, en el desarrollo y posesión de la competencia y el conocimiento matemáticos [...] Lo importante no es solo lo que sabes, sino cómo lo sabes y lo que puedes hacer con lo que sabes. (Niss y Højgaard, 2019, p. 12)

Es importante, antes de continuar, precisar el concepto de competencia matemática que se utiliza en este artículo, ya que es un término que presenta una diversidad de significados. En esta investigación se utilizará el término de competencia matemática en el sentido de *mathematical competency*, ya que la gestión de la argumentación en situaciones de modelación involucra, entre otros aspectos, responder a preguntas, resolver problemas, comprender fenómenos, relaciones o mecanismos, o para adoptar una postura o una decisión. Lo anterior, es coherente en cómo esta investigación entiende la actividad matemática adscribiendo a lo que plantean Niss y Højgaard cuando señalan que

[...] se centra en la activación de las matemáticas para hacer frente a un tipo específico de desafío que requiere real o potencialmente "tipos específicos de activación" de las matemáticas para responder a preguntas, resolver problemas, comprender fenómenos, relaciones o mecanismos, o para adoptar una postura o una decisión. (Niss y Højgaard, 2019, p.14)

Las actividades donde los estudiantes plantean y responden interrogantes, según los autores mencionados, tiene cuatro componentes: pensamiento matemático fundamental, plantear y resolver problemas matemáticos, trabajar como modelos matemáticos y, por último, emprender el razonamiento matemático.

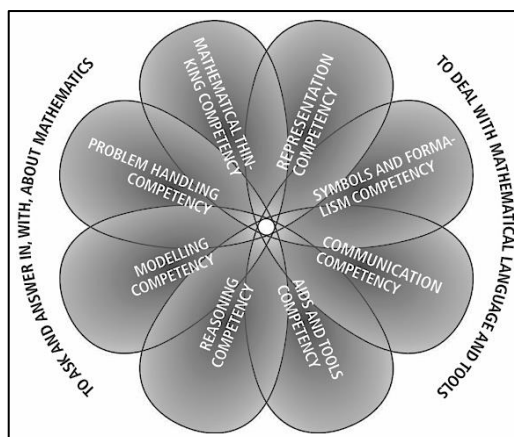


Figura 1. Representación visual de las ocho competencias matemáticas.

Fuente: Niss y Højgaard, (2019).

Es fácil observar en la Figura 1 que *mathematical competency* incorpora la Modelación Matemática y también el Razonamiento Matemático (que incluye la argumentación) como competencias, las cuales son distintas entre ellas, pero no están desarticuladas unas de otras. Además, se puede observar que la competencia Modelación se relaciona con las competencias *Razonar* y *Formular* y *Resolver Problemas*, pero también con las otras cinco competencias. Al respecto, Niss y Højgaard (2019) señalan que:

Las competencias matemáticas son distintas en el sentido de que cada competencia tiene una identidad bien definida que la distingue de las otras competencias. Cuando una de las competencias está en foco de atención, algunas o todas las otras competencias pueden entrar en escena en roles auxiliares, dependiendo de la situación y el contexto. (Niss y Højgaard, 2019, p. 19)

Además, es importante señalar que las competencias mencionadas no prescinden de los contenidos matemáticos y tampoco están en conflicto con ellos, ya que la competencia se centra en aspectos relacionados con hacer matemática, vale decir poniendo en práctica el contenido en contextos y situaciones extramatemáticas que presentan un cierto tipo de desafío; en cambio, saber un contenido matemático se refiere al conocimiento de definiciones matemáticas, conceptos, propiedades, teoremas, fórmulas, etc. (Niss y Højgaard, 2019).

2.1.1 Competencia matemática en el marco de PISA

El concepto de competencia matemática ha sido asociado a alfabetización matemática (en inglés, *mathematical literacy*) el cual está enmarcado en PISA definido por “La capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en diversos contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, hechos e instrumentos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos” (OCDE, 2019, p. 75). En la definición señalada está la idea de procesos matemáticos y capacidades subyacentes. Los procesos son i) formular matemáticamente la situación problemática dada en el contexto; ii) emplear los conocimientos matemáticos, procedimientos y razonamientos para encontrar resultados al problema matemático y así posteriormente; iii) interpretar y evaluar los resultados en el contexto del problema (OCDE, 2019, p. 77).

En el marco de PISA 2018 (OCDE, 2019) se señala un conjunto de capacidades fundamentales, llamadas competencias matemáticas de PISA, las que sustentan los procesos mencionados anteriormente. Así, entonces, las competencias matemáticas de PISA son: Comunicación, Matematización, Representación, Razonamiento y Argumentación, Diseño de estrategias para resolver problemas, Utilización de lenguaje formal, técnico, simbólico y las operaciones, Utilización de herramientas matemáticas.

En los apartados siguientes se definirán aquellas dos que se relacionan con esta investigación: Matematización y Razonamiento Argumentación. Es importante señalar que, dado el contexto del caso de estudio, en adelante se hablará de modelación para referirse a lo que OCDE (2019) señala como matematización, ya que en Chile se utiliza modelar como habilidad transversal del currículum matemático.

2.2 Modelación como competencia matemática

El estudiante es competente en modelación cuando es capaz de analizar y construir modelos matemáticos en otras áreas, matematizando la situación extramatemática, trabajando con los objetos matemáticos que están inherentes a ella, extrayendo conclusiones, validando el modelo y también analizándolo críticamente para evaluar su alcance y validez (Niss, 2011). Al respecto, Niss y Højgaard señalan que el foco de esta competencia es que los estudiantes construyan modelos, y para ellos deben ser capaces de:

[...] analizar críticamente y evaluar modelos existentes o propuestos, teniendo en cuenta propósitos, datos, hechos, características y propiedades del dominio extramatemático que se está modelando. Implica relacionarse y navegar dentro y a través de los procesos clave del "ciclo de modelado" en sus diversas manifestaciones (Niss y Højgaard, 2019, p. 16)

Es fácil observar que la competencia modelación se promueve cuando los estudiantes abordan situaciones problemáticas que van más allá de la propia matemática, por eso se señala situaciones extramatemáticas. Pero entonces, es legítimo preguntar ¿cuál es la diferencia entre resolver un problema y modelar una situación? Al respecto, Niss y Højgaard señalan:

Tratar situaciones cargadas de matemáticas que se refieren a contextos extramatemáticos de manera formal, sin requerir que se preste atención a las características extramatemáticas, podría decirse que implica la modelización en un sentido formal, por definición. Sin embargo, dado que

esta tarea no implica la competencia de modelización matemática propiamente dicha, no se incluye aquí, sino que se remite a la competencia anterior [Manejo de problemas matemáticos: plantear y resolver problemas] (Niss y Højgaard, 2019, p. 16)

De esta forma, en la competencia modelación son importantes los aspectos extramatemáticos del contexto ya que en función de ellos los modelos son validados y se proyecta su generalización; en cambio, en la competencia de manejo de problemas matemáticos el foco está puesto en las distintas estrategias que permiten resolver la situación, pero sin las condiciones que permiten la generalización. No obstante, puede suceder que en la matematización del modelo surjan problemas matemáticos y que en este caso serían parte de la modelación.

En PISA 2018, la competencia modelación está definida como implicar la transformación de un problema definido en el mundo real a una forma estrictamente matemática (que puede incluir estructurar, conceptualizar, hacer suposiciones y/o formular un modelo), o interpretar o evaluar un resultado o un modelo matemáticos en relación con el problema original. El término matematización se utiliza para describir las actividades matemáticas fundamentales involucradas (OCDE. 2019). En la Tabla 1, se puede observar como la competencia Modelación transita por los tres procesos subyacentes a una competencia matemática, desde identificar las variables y estructuras que permiten formular matemáticamente la situación hasta comprender los alcances y límites de la solución matemática en el contexto del problema.

Competencia PISA	Procesos Matemáticos		
	Formular situaciones matemáticamente	Emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemático	Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos
Modelación	Identificar las variables y estructuras matemáticas subyacentes en el problema del mundo real, y hacer suposiciones para que puedan ser utilizadas	Utilizar la comprensión del contexto para guiar o acelerar el proceso de resolución matemática, por ejemplo, trabajando con un nivel de precisión adecuado al contexto	Comprender el alcance y los límites de una solución matemática que son consecuencia del modelo matemático empleado

Tabla 1. Relación entre procesos matemáticos y competencia Modelación.

Fuente: Elaborado a partir de OCDE (2019).

2.3 Modelación en el aula matemática

En el currículum chileno, un modelo matemático es una representación simplificada y abstracta de un sistema que opera en la realidad (MINEDUC, 2016). Dicha representación refleja algunos de los aspectos centrales del problema y posibilita la aplicación de métodos matemáticos (Blum y Niss, 1991; Greefrath y Vorhölter, 2016). En este sentido, para el MINEDUC construir modelos matemáticos implica “expresar acciones o situaciones cotidianas con lenguaje matemático, aplicar-seleccionar-evaluar modelos que involucren operatoria, identificar regularidades en expresiones numéricas y geométricas y generalizar utilizando lenguaje matemático, traducir expresiones en lenguaje cotidiano a lenguaje matemático y viceversa” (MINEDUC, 2016, p.12). En esta investigación, en concordancia con Niss (2011), hablamos del modelo matemático de una situación real cuando existe una correspondencia entre tal situación y el mundo matemático, de modo que los objetos

y relaciones de la situación están relacionados con objetos y relaciones matemáticas que los representan.

La construcción de modelos matemáticos ha mostrado diversos beneficios para el desarrollo del razonamiento y las aptitudes matemáticas en el aula. Al respecto, existe cierto consenso en que la modelación de fenómenos ayuda a la construcción de puentes entre la matemática escolar y el mundo real, desarrollando la comunicación y el trabajo colaborativo (Hein y Salett, 2004; Rodríguez, 2016). En este sentido, algunos autores sitúan las tareas que implican la construcción de modelos como la base de la actividad matemática pues en ellas se da un especial énfasis al proceso seguido por los estudiantes en dichas tareas, esto es, a procesos mediante los cuales realiza “la adecuación a los propios actos de conocimiento y no al contenido de [estos]” (Gómez, 2007, p. 32), dando así más importancia a los procesos cognitivos que a los modelos obtenidos (Blomhøj, 2004). En resumen, la construcción de modelos favorece el pensamiento crítico del estudiante sobre los fenómenos del mundo real (English, 2006; Lesh y Doerr, 2003), y resulta un medio eficaz para que el estudiante aprenda a utilizar el conocimiento matemático en situaciones novedosas.

2.3.1 Ciclo de modelación matemática

En la literatura se han propuesto diversos ciclos para describir el proceso mediante el cual se realiza la construcción de modelos matemáticos, los cuales difieren en algunas de sus etapas (Blomhøj, 2004; Blum y Niss, 1991; Maaß, 2006). En particular, Blum y Niss señalan que “el proceso de resolución de un problema puede requerir dar varias vueltas al circuito, si finalmente es satisfactorio, se ha encontrado el modelo, el solucionador de problemas puede usarlo como base para pronósticos, decisiones o acciones” (Blum y Niss, 1991, p. 39). La vuelta al circuito es lo que se denomina ciclo de modelación. Dicho proceso lejos de ser lineal o unidireccional es un ciclo en donde las reflexiones sobre el modelo llevan a su redefinición (Blomhøj, 2004, p. 23), lo que ha sido confirmado empíricamente en diversas investigaciones sobre el pensamiento de los estudiantes dentro del proceso de modelación matemática (Stillman, 2011).

En la presente investigación, se considera el ciclo de modelación de Maaß (2006) que fue adaptado de Blum (1996) y que se presenta en la Figura 2.

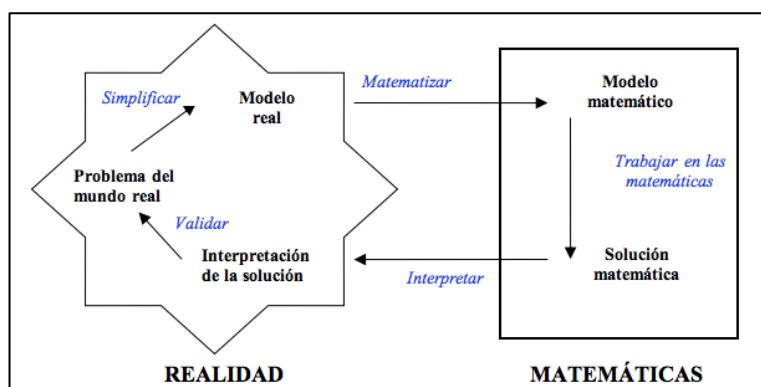


Figura 2. Ciclo de Modelación Matemática.
Fuente: Maaß (2006), adaptado de Blum (1996).

De acuerdo con el esquema presentado, las etapas de la modelación matemática son: Simplificar (Sim), Matematizar (Mat), Trabajar en la Matemática

(TrMat), Interpretar (Int) y Validar (Val). A continuación, se describen cada una de las etapas:

La etapa Simplificar es la manipulación del problema proveniente del mundo real mediante la cual se puede obtener un modelo real, construyendo supuestos de diversas hipótesis, segmentando el problema o bien descartando variables no relevantes. Utilizando sistemas de representación, esquemas, bosquejos, reconociendo las variables involucradas, identificando las condiciones iniciales. Se buscan similitudes con algo conocido del mundo matemático, lo cual es importante para enfrentar posteriormente el proceso de matematización (Aravena, 2016; Gómez, 2007). Esto permite obtener un modelo matemático inicial, denominado modelo real.

La etapa Matematizar es la entrada al mundo matemático y se genera mediante la traducción, donde se sustituyen palabras por símbolos y expresiones matemáticas. Es aquí donde se consigue la formulación matemática del problema y, de manera natural, se obtiene un problema en términos matemáticos. En otras palabras, matematizar es describir las relaciones matemáticas que interpretan el proceso, aplicando métodos matemáticos como propiedades, algoritmos que resuelven el problema en términos matemáticos, hasta obtener una solución matemática del problema (Gómez, 2007; Niss, 2010), lo cual se denomina formulación del modelo matemático. En la etapa Trabajar en la Matemática se aplican propiedades, teoremas y algoritmos. Además, se hacen cálculos, se verifica mediante ejemplos concretos, se aplican métodos y resultados matemáticos conocidos, simulaciones por computador e incluso nuevos métodos ad hoc hasta obtener una solución matemática del problema. (Goizueta et al., 2021)

La etapa Interpretar la solución matemática, implica salir del mundo matemático, para determinar si el modelo desarrollado responde al problema real, ajustando los datos del problema, revisando márgenes de errores, reestudiando los resultados numéricos obtenidos en términos del problema propuestos. Además, interpretar es saber si hay diversas soluciones, cual es la más adecuada al problema (Aravena, 2016). La validación, corresponde a la etapa donde se evalúa el modelo con nuevos datos del dominio o proyectando nuevos datos, esto es, justificar la validez del modelo, si satisface las condiciones iniciales.

2.4 Argumentación como competencia matemática

La argumentación en el sentido de *mathematical competency* se relaciona con la competencia Razonamiento Matemático, la cual se centra en aspectos relacionados con la comprensión de distintas formas de razonamiento tales como: lo que es y no es una prueba, reglas principales de una demostración y la lógica de un contraejemplo (Niss, 2011). Desde el año 2019, se amplía el foco de dicha competencia pues, sin perder lo anterior, el énfasis está en analizar o producir argumentos ya sean presentados en forma oral o escrita para justificar o intentar justificar afirmaciones matemáticas Niss y Højgaard (2019).

En PISA la argumentación está de manera explícita en la competencia Razonamiento y Argumentación definida como la capacidad que involucra “[...]procesos de pensamiento con fundamentos lógicos que exploran y relacionan los elementos del problema para hacer inferencias a partir de ellos, comprobar una justificación que se da o proporcionar una justificación de las afirmaciones o soluciones a los problemas.” (OCDE, 2019, p. 81).

En la Tabla 2, se observa como la competencia Razonamiento y Argumentación transita por los tres procesos subyacentes a una competencia matemática, desde identificar las variables y estructuras que permiten formular matemáticamente la situación hasta comprender los alcances y límites de la solución matemática en el contexto del problema.

Competencia PISA	Procesos Matemáticos		
	Formular situaciones matemáticamente	Emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemático	Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos
Razonamiento y Argumentación	Explicar, defender o brindar una justificación de la representación identificada o ideada de una situación del mundo real	Explicar, defender o justificar los procesos y procedimientos utilizados para determinar un resultado o solución matemática Conectar piezas de información para llegar a una solución matemática, hacer generalizaciones o crear un argumento de varios pasos	Reflexionar sobre las soluciones matemáticas y crear explicaciones y argumentos que apoyen, refuten o califiquen una solución matemática a un problema contextualizado

Tabla 2. Relación entre procesos matemáticos y competencia Razonamiento y Argumentación.

Fuente: Elaborado a partir de OCDE (2019).

2.5 Argumentación colectiva en el aula matemática

En esta investigación se complementa la definición PISA con la de argumentación colectiva, la cual se produce en el aula cuando un estudiante menciona para sí mismo, o para otros, explicaciones, justificaciones para convencer a otros de cierta posición, respuesta o procedimientos (Conner et al., 2014; Knipping, 2008; Krummheuer, 2007; MINEDUC, 2016; Solar et al., 2021; Yackel, 2002). En forma más precisa, “un intercambio es argumentativo cuando las acciones de los participantes son interpretadas como una expresión de razones para establecer o discutir la validez de una cierta posición, ya sea de manera explícita o implícita” (Solar y Goizueta, en prensa). Cabe señalar que las actuales bases curriculares chilenas en matemática entienden la argumentación como una habilidad, la cual “se aplica al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos” (MINEDUC, 2018, p. 217), y se considera que su promoción favorece el aprendizaje matemático.

Conceptualmente la argumentación puede ser entendida como el acto de formar razones, hacer inducciones, sacar conclusiones y aplicarlas al acto al caso de una discusión (Douek, 2007). El término argumentación se puede usar para designar tanto al proceso de producir un discurso lógicamente conectado sobre un tema, como al producto de ese proceso según el contexto lo requiera (Goizueta y Planas, 2013). Utilizaremos el concepto de argumentación en el aula matemática para referirnos a la situación comunicativa que se da cuando se asocia la argumentación al hecho de convencer o persuadir al otro. Es decir, cuando se ofrecen razones que justifiquen o refuten cierta postura, con la intención de convencer al otro sobre la validez de un hecho se habla de argumentación en el aula matemática (Solar et al., 2021).

Desde la perspectiva de la comunicación en el aula, la argumentación debe ser vista como un elemento central, y por tanto debe ser promovida, pues la calidad en el aprendizaje depende de la participación del alumnado en la construcción colectiva de

argumentos (Krummheuer, 2007). La importancia de discutir ideas en la enseñanza de las matemáticas radica en la naturaleza misma de la matemática como disciplina, las formas en que los estudiantes aprenden, y el contenido de la enseñanza. En contextos donde se argumenta individual y colectivamente se promueve una cultura del aula matemática, en la que la construcción de conocimientos se entiende como una actividad situada, crítica y reflexiva que implica la participación del grupo (Conner et al., 2014; Krummheuer, 2007). Discutir matemáticamente es el mecanismo primario mediante el cual los estudiantes aprenden matemática, pues promueve la comprensión de conceptos e ideas. Además, el debate matemático entrega a los estudiantes la oportunidad de utilizar conocimientos previos, conectar ideas, aprender normas y convenciones disciplinarias, así como permitirles ver las cosas desde otra perspectiva (Boerst et al., 2011; NCTM, 2014; Yackel, 2002). Por otro lado, la confrontación de ideas entrega a los docentes la oportunidad de conocer lo que piensan sus estudiantes, proporcionando así una fuente de información útil para la toma de decisiones (Boerst et al., 2011; Solar et al., 2021).

2.6 Gestión argumentativa en el aula

La gestión argumentativa en el aula puede entenderse como la gestión de las oportunidades y limitaciones que ofrecen el entorno, la tarea matemática y los estudiantes para propiciar la argumentación (Solar et al., 2021). En este sentido, este tipo de gestión permite al docente utilizar estrategias o acciones para incluir a todos los estudiantes en el discurso matemático (Lee, 2006). Las estrategias comunicativas que permiten apoyar la argumentación se han investigado y caracterizado en Solar y Deulofeu (2016) y Solar et al. (2021) las cuales son:

- Oportunidades de participación: El docente busca que todos los estudiantes tengan la misma oportunidad de aportar e intervenir en la discusión matemática. Esta interacción está ligada a la acción docente de no validar ningún tipo de procedimiento o respuesta hasta que los estudiantes expresen sus diversas opiniones, planteamientos, soluciones y argumentos que los justifiquen, y así no limitar la participación de los estudiantes.
- Gestión del error: El docente utiliza el error en una respuesta y/o procedimiento como instancia de aprendizaje para el resto de los estudiantes, haciendo que se expongan en debate las diferentes posturas, haciendo preguntas adecuadas y contra preguntas a las respuestas de los estudiantes, pero sin que los estudiantes estén ciertos de cuál es la respuesta correcta, vale decir sin validar anticipadamente.
- Preguntas deliberadas: El profesor debe realizar preguntas que desafíen, pongan en duda y estimulen el pensamiento de los estudiantes. Las preguntas deliberadas deben mantener la discusión abierta y mantener el foco de la discusión.

Estudios realizados en Chile (Solar y Deulofeu, 2016; Solar et al. 2021; Solar y Goizueta, en prensa) han utilizado el Modelo de Toulmin (2003) para describir interacciones de argumentación colectiva en el aula matemática, precisando la importancia de la refutación entre estudiantes en el aula. En este mismo sentido, Cervantes et al. (2017) señalan funciones de la refutación: persuadir, convencer, cambiar un contenido en las garantías y evidenciar la falta de garantías formales respecto a una conclusión. Para esta investigación refutación se entiende como lo

que “establece las condiciones en las que la garantía no consiente la inferencia de la conclusión a partir de los datos aportados” (Solar y Goizueta, en prensa).

Respecto al rol docente en la gestión argumentativa, diferentes estudios señalan el papel preponderante que tiene el profesor de matemática respecto a creación de oportunidades para argumentación en los estudiantes (Ayalon y Hershkowitz, 2018; Conner et al., 2014; Yackel, 2002). Al respecto, algunas investigaciones en Chile han contribuido a mostrar estrategias de enseñanza especializadas para la gestión argumentativa (Goizueta y Solar, 2019; Ortiz y Pérez, 2021; Ortiz y Carreño, 2018; Solar y Deulofeu, 2016; Solar et al., 2021), que han develado la importancia de promover las refutaciones entre pares hacia las explicaciones, justificaciones y/o conclusiones, lo que posibilita que ellos aprendan convencer a otros y situarse en diferentes posiciones argumentativas y no sólo la propia. En este sentido, entendemos que un docente promueve la argumentación cuando como mínimo hace que sus estudiantes justifiquen sus respuestas, posiciones y que refuten las de otros, aunque no necesariamente promuevan una discusión entre pares o que logren fundamentar matemáticamente las afirmaciones que realizan.

3. Metodología

El estudio corresponde a un enfoque cualitativo (Bisquerra, 2014), de alcance exploratorio y diseño de estudio de casos múltiple (Yin, 2015) y se enmarca dentro de un proyecto mayor cuyo objetivo es caracterizar la gestión que realizan los docentes para promover de manera articulada las competencias de modelación y argumentación en el aula matemática. El propósito del presente artículo es caracterizar las acciones que realiza una profesora cuando promueve la argumentación en clases donde se implementa una situación de modelación.

3.1 Participantes y contexto

Los casos en esta investigación son 3 docentes que realizan clases de matemática: dos en primaria (6-11 años) y una en secundaria (12-14 años), cada una con aproximadamente 30 estudiantes promedio por aula. Ellas participaron en un programa de desarrollo profesional docente para promover las competencias de argumentación y modelación en el aula, en el marco del Proyecto Fondecyt 1180880 “Aprendizaje de los estudiantes en contextos de argumentación colectiva y modelización en el aula de matemáticas”. Para esta selección se consideró a las profesoras que tuvieron una asistencia constante durante la formación y que durante el año 2019 se desempeñaron en distintos niveles de escolaridad, con el propósito de observar el desarrollo de la argumentación y la modelación en distintas edades.

Es importante señalar que es difícil presenciar clases en donde se pueda observar estudiantes que argumenten desarrollando tareas de modelación y por ello, para poder caracterizar las acciones docentes, primero se debe cautelar que existan estudiantes que aprendieron a modelar en contextos argumentativos.

Lo anterior, fue observado en los tres casos seleccionados quienes diseñaron una tarea para promover la modelación y la argumentación en los estudiantes. Cada una de las secuencias implementadas, fueron trabajadas en grupos pequeños de manera colaborativa y gran grupo. Cada una de las tres docentes implementó de 3-4 clases de 45-70 minutos, las que fueron filmadas con 3 cámaras. Una cámara registró todos los movimientos de la docente y las otras dos cámaras registraron a dos grupos pequeños fijos seleccionados por la profesora (grupo 1 y grupo 2), registrando sus

conversaciones y recopilando sus producciones escritas que sirvieron como antecedentes.

En este artículo, se presentan los resultados de uno de estos 3 casos, que fue escogido porque los estudiantes lograron llegar hasta la última etapa del ciclo de modelación, la validación (Maaß, 2006).

3.2 Recolección y estrategia de análisis de datos

En el análisis se empleó el método de comparación constante (Glaser y Strauss, 2006) para convertir los datos (acciones docentes) en códigos y categorías que reflejen niveles de abstracción basados en fenómenos y relaciones observados en los datos, tal como lo señalan Bikner-Ahsbahs et al. (2015) respecto a promover la argumentación y modelación en el aula. Para ello se utilizó la codificación abierta, axial y selectiva (Glaser y Strauss, 2006) tanto para los datos referidos a promover la argumentación en los estudiantes, como también en las etapas del ciclo de modelación. Este proceso está siendo apoyado con el uso del software ATLAS.ti lo que facilita trabajar con grandes cantidades de datos, optimizando la velocidad del análisis (San Martín, 2014).

3.3 Análisis de datos

En este artículo, se reporta el caso de Ángela que corresponde a un curso de 8º grado (12-14 años, segundo nivel de secundaria) a los que se les presentó la actividad Cinema Paraíso (Figura 3)

Cinema Paraíso

En el Cine Paraíso, existe la posibilidad de ser socio adquiriendo una tarjeta de suscripción anual, lo que permite comprar entradas al cine pagando un costo rebajado por entrada.

La siguiente tabla contiene un informe de lo que gastaría una persona comprando entradas al cine siendo y no siendo socio. Lamentablemente el informe se ha mojado, perdiendo parte de la información.

Nº de entradas compradas	Dinero gastado sin ser Socio	Dinero gastado Siendo socio
2	5000	9000
3	7500	11000
5	12500	
6		
70		

Una familia dice que tomando la opción más conveniente su ahorro anual del año pasado fue de \$29.000, ¿Cuántas entradas compraron?

Figura 3. Actividad diseñada e implementada por Ángela.

Fuente: Proyecto Fondecyt 1180880.

La actividad fue implementada en 3 sesiones de clases en donde la profesora gestionó en pequeños grupos (PG) de 4 estudiantes o gran grupo (GG), promoviendo la interacción entre ellos respecto a las diferentes aproximaciones en la situación de modelación "Cinema Paraíso". En la Tabla 3 se observa un resumen de lo acontecido en las sesiones 1, 2 y 3.

Clase 1	Clase 2 parte 1	Clase 2 parte 2	Clase 3 parte 1	Clase 3 parte 2
Pequeños Grupos (PG)	Gran Grupo (GG)	Gran Grupo (GG)	Gran Grupo (GG)	Gran Grupo (GG)
Gestión enfocada en escuchar las producciones y no validar respuestas	Gestión enfocada en promover el debate respecto a los modelos preliminares	Gestión enfocada en promover la construcción de un modelo	Gestión enfocada en parafrasear las ideas del PG y redirigirlas al debate	
Fases del Ciclo Sim – Mat - TrMat	Fases del Ciclo Mat – TrMat - Int	Fases del Ciclo TrMat - Int	Fases del Ciclo Int - Val	
Abordan la situación llegando a una respuesta, pero con un modelo incipiente	Discuten la pertinencia de los modelos preliminares, pero sin tener un modelo algebraico	Construyen colaborativamente un modelo algebraico	Validan los modelos preliminares presentados.	

Tabla 3. Gestión en cada una de las sesiones de clases de Ángela.

Fuente: Elaboración propia.

3.3.1 Análisis de clase 1 y clase 2_parte 1 (PG)

En el inicio de la clase 1 los PG tuvieron dificultades para comprender que el procedimiento que determinaba el valor de la entrada no siendo socio, no servía para el valor de las entradas siendo socio. Incluso, algunos PG tampoco se dieron cuenta que los valores encontrados no se ajustaban a la tabla. Ante eso, llamaban a la profesora para que les dijera si estaba bien o no, pero ella hizo una gestión enfocada en acciones tales como integrar a los miembros del grupo en la discusión, no validar dichas producciones y hacer preguntas con distintos propósitos. Se observó que cuando uno o dos estudiantes del PG tenían hipótesis, dudas, procedimientos incipientes y requerían la validación de la docente, ella hacía intervenciones tales como: “¿qué opina el resto del grupo?”, “¿lo conversaron con el resto del grupo?”, “¿están todos de acuerdo?”, es decir, buscaba por una parte integrar a los demás estudiantes a la discusión y también no ser ella quien encuentra y sanciona los errores.

Lo realizado por Ángela mantuvo en los PG una discusión matemática productiva hasta la clase 2_parte 1, lo que permitió a algunos PG modificar sus respuestas iniciales y centrar el Trabajo con la Matemática en encontrar un valor base que al incorporarlo en el valor de las entradas pudiese ajustarse a la información de la tabla. En consecuencia, los PG transitaron de forma no lineal por tres fases del ciclo de modelación: Sim – Mat – TrMat, pues trataron de comprender la pregunta del problema para pasarlo a las matemáticas y trabajar con ellas para encontrar un valor base. Lo anterior, resultó complejo pues la problemática de Cinema Paraíso no se refería a qué era más conveniente ¿ser o no ser socio?, sino que a cuántas entradas había que comprar en la opción más conveniente para tener un ahorro de \$29.000 y como la tabla de valores entregada tenía datos borrados, entonces era complicado pues aún no disponían de los conocimientos matemáticos de función lineal y ecuación lineal que pasa por dos puntos.

Respecto a los errores en las respuestas de los PG, en estas dos clases se observaron acciones enfocadas en hacer preguntas para que los PG reconocieran el error, explicaran el origen del error y justificaran las hipótesis asumidas para dar

respuesta a la problemática o la pertinencia del modelo inicial con los datos planteados. Cabe señalar, que se observaron principalmente dos errores: a) establecer que la diferencia entre dos entradas era \$2.500 sin ser socio y \$ 2.000 siendo socio; b) daban una respuesta respecto a que conviene más, pero no a la pregunta del problema (¿cuántas entradas?). Ante esto la profesora realizó preguntas del tipo: “¿ok, pero cuántas entradas compraron?”, “¿con 2.000, que valor tiene 3 entradas, 4 entradas?”, “¿cuántas entradas para completar los 29.000 de ahorro?”. Esta última pregunta permitió que varios estudiantes en los diferentes PG se dieran cuenta que el valor \$ 2.000 no se ajustaba con los valores de la tabla.

3.3.2 Análisis de Clase 2_parte 2 (GG)

En clase 2_parte 2, los PG expusieron con carteles sus modelos iniciales (Figura 4) en el GG y debido a que Ángela en la clase 1 y clase 2_parte 1 no validó respuestas ni procedimientos, los estudiantes expusieron sus modelos tratando de convencer a los otros pares que no estaban de acuerdo con sus producciones en un clima de discusión matemática donde la refutación, la solicitud de explicaciones y el levantamiento de hipótesis para ajustar los datos, fueron parte importante de la clase.

Aquí, entonces, surgió una gestión de clases donde la profesora actuó como una moderadora que consideró los aspectos más relevantes de la exposición de cada PG y los redirigió al GG para la discusión. Lo anterior, lo realizó utilizando acciones en donde ella pedía la opinión en el GG respecto a la explicación de un estudiante del PG, haciendo preguntas para que explicaran modelos preliminares. Por ejemplo, “¿si yo quiero ahorrar 80 mil, cómo lo hago?”, “¿por qué 100 entradas?”, “si yo quiero ahorrar 800 mil, ¿cómo lo hago?”, “¿ustedes buscaron la diferencia entre los dos cierto?”, “¿es lo que se pedía?”, “¿52 entradas por 2.500 me da 145 mil y 58 entradas por 2 mil me da 116 mil, están todos los datos utilizados?”.

Estas acciones permitieron que los propios estudiantes validaran aquellos modelos preliminares presentados, interpretando el modelo preliminar con el contexto de la situación y, por tanto, los PG y GG accedieron a la fase de Interpretación del ciclo de modelación.

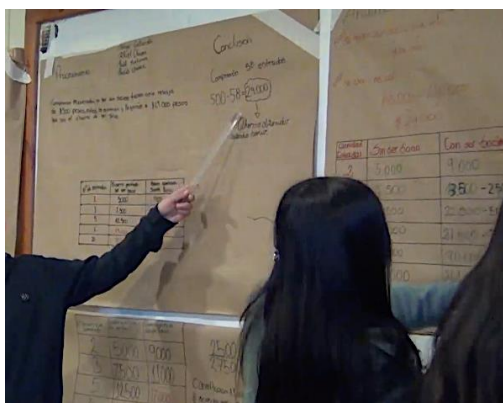


Figura 4. Exposiciones de los PG en clase 2_parte 1.

Fuente: Proyecto Fondecyt 1180880.

3.3.3 Análisis de Clase 3 parte 1 (GG)

En la primera parte de la clase 3 la profesora se enfocó en la construcción colaborativa de una expresión algebraica que permitiera generalizar la compra de entradas siendo socio y no siendo socio. Para ello, realizó acciones enfocadas en hacer preguntas o comentarios en GG para incitar la refutación y también hacer preguntas al GG para que explicaran sus producciones correctas, incorrectas, incompletas. Por ejemplo, “¿ustedes estaban generalizando la tabla, entonces cuál es la fórmula?”, “¿es sólo una fórmula?”, “¿cómo les quedaría la fórmula para la primera tabla?”, “¿pero funciona para todos?”, “¿cómo es el cálculo que estuvieron haciendo?”.

Junto con lo anterior, Ángela siguió gestionando la no validación de las respuestas sino que las redirigió nuevamente hacia el GG, pues sabía que uno de los estudiantes ya había calculado el valor de la tarjeta de ser socio (\$5.000), pero los integrantes de su grupo no estaban seguros de ello y tampoco el GG. Además, algunos PG siguen insistiendo en una única fórmula para no socio y socio. En esta situación, mediante un parafraseo de argumentos y preguntas, la docente promovió la refutación entre pares, como muestra la siguiente intervención de la maestra: “según lo que estamos diciendo podemos encontrar ciertas restricciones, el grupo de Martín señaló que en 10 entradas ninguno conviene más que otro. ¿Karina, cuando me conviene no ser socio? ¿desde cuántas entradas me conviene ser socio? ¿Cuál sería la forma general de ser socio? César escribe $2000x + 5000$. ¿César explíqueles a sus compañeros?”. Esto último, se puede observar en la Figura 5.

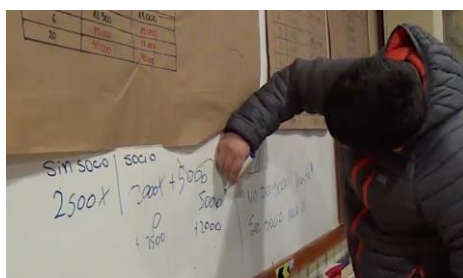


Figura 5. César expresando algebraicamente el modelo.

Fuente: Proyecto Fondecyt 1180880.

Otras acciones que realizó Ángela fueron las siguientes: explicar en pizarra en GG, utilizando ideas de los estudiantes para orientar la validación de la respuesta correcta (Ver Figura 6) y hacer preguntas al GG para explicaran con lenguaje algebraico sus ideas correctas.



Figura 6. Ángela utilizando la idea de César.

Fuente: Proyecto Fondecyt 1180880.

3.3.4 Análisis de Clase 3 parte 2 (GG)

En la segunda parte de la clase 3, la profesora se enfocó en que los estudiantes evalúen la pertinencia de los modelos presentados en los carteles, considerando la nueva información respecto a las expresiones algebraicas no siendo socio y siendo socio. Lo anterior, lo hizo parafraseando las ideas y las refutaciones de los expositores del PG y las colocó en debate con el GG. Es importante señalar, que los estudiantes en sus carteles, sólo tenían un modelo incipiente basado en los datos de la tabulación de los valores de las entradas no siendo socio y siendo socio.

4. Resultados preliminares

Los primeros resultados en el análisis del caso Ángela, muestran que la docente realizó acciones para promover la argumentación, en la implementación de las tres clases. Además hay acciones que son transversales a todas fases del ciclo de modelación, tales como: *Integra a los estudiantes del PG a la discusión, No valida las respuestas o procedimientos de los estudiantes antes de la socialización entre pares, Hace preguntas para que los estudiantes reconozcan el error, No corrige el error antes de la socialización con los estudiantes, Hace preguntas para que los estudiantes entiendan el origen del error, Pide explicaciones matemáticas al PG respecto a alguna producción matemática, Hace preguntas para que estudiantes de PG y GG expliquen sus producciones y Hace preguntas al PG y GG con la intención de entender el razonamiento de los estudiantes.* Lo anterior, es importante en las etapas de Simplificación, Matematización y Trabajando con la Matemática pues los estudiantes se sienten llamados a dar sus respuestas de cómo entender el problema, aportando ideas correctas e incorrectas, promoviendo de esta forma que refuten y confronten posturas o respuestas distintas.

Otro aspecto que se puede observar en la Tabla 4, es que Ángela ofrece oportunidades de participación a todos los estudiantes integrándolos a la discusión y, además, evitando evaluar anticipadamente las respuestas incorrectas antes de socializarlas con los pares en PG o GG, respecto a los distintos procedimientos/respuestas en Trabajando con la Matemática o al Validar los modelos producidos por los estudiantes.

También se observa que en las etapas Interpretar y Validar, la docente parafrasea las intervenciones de PG y las redirige al GG con la intención de producir debate, y con ellos hay mayores oportunidades de gestionar una discusión matemática de calidad.

Acciones docentes observadas en caso Ángela	Etapas del ciclo de Modelación				
	Sim	Mat	TrMat	Int	Val
No valida las respuestas o procedimientos del PG, antes de la socialización	sí	sí	sí		
Hace preguntas al PG para que expliquen sus producciones	sí	sí	sí		
Parafrasea la intervención de un estudiante del PG y la redirige al PG.	sí	sí	sí		
Pide a un estudiante del PG que explique a otro estudiante del PG	sí	sí	sí		
Pide opinión en el PG respecto a la explicación de un estudiante	sí	sí	sí		
No corrige el error antes de la socialización con PG	sí	sí	sí		
Hace preguntas en el PG para que reconozcan el error y entiendan el origen del error	sí	sí	sí		

Explica en pizarra en GG, utilizando ideas de los estudiantes, aspectos para direccionar la(s) respuesta(s) correcta(s)				sí	sí
Hace preguntas al GG para expliquen con lenguaje algebraico sus ideas correctas				sí	sí
Hace preguntas al GG para que expliquen sus producciones correctas, incorrectas, incompletas				sí	sí
Hace preguntas o comentarios en GG para incitar la refutación				sí	sí
No valida en GG las producciones correctas/incorrectas antes de la socialización con GG				sí	sí
Parafrasea la intervención de un estudiante del GG y la dirige al GG				sí	sí
Permite que estudiantes de GG refuten				sí	sí
Valida la(s) respuesta(s) correcta(s) en GG después de la socialización colectiva				sí	sí

Tabla 4: Acciones de Ángela observadas para promover la argumentación.

Fuente: Elaboración propia.

5. Conclusiones

A partir del estudio del caso de Ángela se puede señalar que ella tiende a utilizar estrategias comunicativas enfocadas en la participación de los estudiantes, en la gestión del error, en hacer preguntas para entender el trabajo matemático y en definitiva promover la argumentación en una situación de modelación. Estos resultados son consistentes con los reportados en otros estudios que muestran acciones claves tales como oportunidades de participación, reconocer puntos de vistas divergentes, estrategias para promover la argumentación o reconocer patrones de interacción comunicativa (Lee, 2006; Solar y Deulofeu, 2016; Goizueta y Solar, 2019; Solar y Goizueta, en prensa; Solar et al., 2021). Además, se puede observar que promover la argumentación se da en todo el ciclo de modelación.

De momento, hemos visto cuando se trabaja con pequeños grupos una situación de modelación, acciones docentes tales como: “no validar inmediatamente las respuestas”, “hacer preguntas en función de los datos”, “pedir la opinión al grupo respecto a la producción de un integrante”, “redirigir las dudas al mismo grupo”, “dada una respuesta/opinión devolver al grupo una pregunta de que si están o no de acuerdo” son acciones que contribuyen a la comprensión del problema (simplificar), la traducción matemática del mismo (matematizar) y a la interpretación del trabajo matemático realizado en los modelos preliminares encontrados por los estudiantes. Así también, cuando se exponen los modelos preliminares en el gran grupo curso y se realizan acciones tales como: “parafrasear la explicación matemática de un estudiante” para ponerla en debate en la clase, “permitir que los estudiantes refuten las explicaciones de sus compañeros”, “explicar en la pizarra ideas de los estudiantes para construir una respuesta correcta” ayuda a mejorar el análisis de los resultados (interpretar) y establecer aquellos modelos que son más pertinentes (validar) según las condiciones de la situación planteada.

Este estudio tiene implicaciones importantes para cualquier programa formativo de profesores de matemática con foco en el aprendizaje de los estudiantes, ya que muestra características de una gestión de clases que promueve habilidades tales como: argumentar, comunicar y modelar, que en Chile son transversales desde la enseñanza primaria a la secundaria.

Referencias bibliográficas

- Ayalon, M., Even, R. (2016). Factors Shaping Students' Opportunities To Engage in Argumentative Activity. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(3), 575–601. <https://doi.org/10.1007/s10763-014-9584-3>
- Ayalon, M., Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, 49, 163–173. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010>
- Aravena, M. (2016). Modelización Matemática en Chile. En: J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa*.195-234. Gedisa.
- Bikner, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (2015). Approaches to qualitative research in mathematics education, 10, 978-94. Springer.
- Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa (Vol. 1)*. Editorial La Muralla.
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: A theory for practice. En B. Clarke et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics*.145-160. National Center for Mathematics Education.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects. State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22, 37-68. <https://doi.org/10.1007/BF00302716>
- Blum, W. (1996). Anwendungsbeziige im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven. *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, 23, 15–38.
- Boerst, T., Sleep, L., Ball, D., & Bass, H. (2011). Preparing teachers to lead mathematics discussions. *Teachers College Record*, 113(12), 2844-2877.
- Brown, R., & Redmond, T. (2007). Collective argumentation and modelling mathematics practices outside the classroom. *Mathematics: Essential research, essential practice*, 1, 163-171.
- Carpenter, T., Franke, M. & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary Schools*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.
- Cervantes, J., Cabañas, G. & Ordoñez, J. (2017). El Poder Persuasivo de la Refutación en Argumentaciones Colectivas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(59), 861-879. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a01>
- Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. & Francisco, R. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, 86(3), 401–429. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8>
- Dede, A.T (2019). Argumentos construidos dentro del ciclo de modelado matemático. *Revista Internacional de Educación Matemática en Ciencia y Tecnología*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825>
- Douek, N. (2007). *Some remarks about argumentation and proof*. In BOERO, P. (Ed.) *Theorems in School: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. 113 - 181. Sense Publishers.
- English, L. D. (2006). Mathematical Modeling in the primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 303-323.
- Glaser, B., & Strauss, A. (2006). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. Aldine Transaction.

- Gómez, J. (2007). *La matemática reflejo de la realidad. La modelización matemática como herramienta para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas*. Federación Española de Profesores de Matemática (FESPM).
- Goizueta, M. & Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 31 (1), 61-78.
- Goizueta, M., Ortiz, A., Aravena, M., Solar, H. & Cárdenas, L. (2021). Reflexiones en torno a una propuesta de formación continua enfocada en modelación matemática y gestión de la argumentación en el aula. En: C. Guerrero, A. Morales, A. & E. Ramos (Eds.). *Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática: Modelación matemática*. Vol. 35. 75-104. Grao.
- Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German speaking countries*. Springer Nature.
- Hein, N. & Salett, M. (2004) Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2). Disponible en <https://www.redalyc.org/pdf/405/40516206.pdf>
- Kauertz, A., Newmann, K. & Hearting, H. (2012) Competence in science education. En Fraser, et. al (Eds.), *Second International Handbook of Science Education*. 711-721. Springer.
- Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education*, 40(3), 427–441. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0095-y>
- Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(1), 60–82. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.02.001>
- Lee, C. (2006). *Language for learning mathematics: Assessment for learning in practice*. Open University Press.
- Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education*. Lawrence Erlbaum.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM -International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 113–142.
- MINEDUC (2016). *Bases curriculares 7º básico a 2º medio*. Ministerio de Educación de Chile.
- MINEDUC (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Ministerio de Educación de Chile.
- NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematics success for all*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Niss, M. (2010) Modeling a Crucial Aspects of Students ´ Mathematical Modeling In (Eds) R. Lesh, P. Galbarith, C. Haines & A.Hurford. *Modeling Students Mathematical Modeling Competencies* ITCMA 13. 43-59. Springer.
- Niss, M. (2011). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 6(9). 13 - 24.
- Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J. (2016). Survey team on: conceptualisations of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *ZDM Mathematics Education*, 48(5), 611-632. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0799-3>
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9–28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>

- OCDE (2019). *PISA 2018 Mathematics Framework, en PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing.
- Ortiz, A., & Carreño, C. (2018). Condiciones que promueven la habilidad de argumentar en el aula matemática de una escuela municipal en Chile. *UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 14(54), 60-77.
- Ortiz, A., & Pérez, J. (2021). Caracterización de una gestión argumentativa que promueve articuladamente argumentación y modelación en el aula matemática de primaria. *Perspectiva Educativa*, 60(3), 159-184.
- Rapanta, C., García, M. & Gilabert, S. (2013). What is meant by argumentative competence? An integrative review of methods of analysis and assessment in education. *Review of Educational Research*, 83, 483-520.
- Rodriguez, R. (2016). Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática a través de la modelación matemática desde y para la formación de ingenieros. En: J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa*. (pp. 195-234). Gedisa.
- Smith, M., & Stein, M. (2011). *5 Practices for Orchestrating Mathematics Discussion*. National Council of Teachers of Mathematics.
- San Martín, D. (2014). Teoría fundamentada y Atlas.ti: recursos metodológicos para la investigación educativa. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 16(1), 104-122. <https://redie.uabc.mx/redie/article/view/727/891>
- Solar, H. y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema*, 30(56), 1092–1112.
- Solar, H. Ortiz, A. & Ulloa, R. (2016). MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia. *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, 42(4), 281 – 298. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000500016>
- Solar, H. (2017). Modelo de formación continua para profesores de matemática en el desarrollo de las competencias matemáticas de argumentar y comunicar. In L. Pino-Fan, A. Poblete, & V. Díaz (Eds.), *Perspectivas de la investigación sobre la formación de profesores de matemáticas en Chile*. Cuadernos de Sofía. 107–132.
- Solar, H., Ortiz, A., Deulofeu, J., Ulloa, R. (2021). Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-29. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1733686>
- Solar, H., & Goizueta, M. (en prensa). Emergencia de patrones de interacción al promover la argumentación en el aula de matemáticas. *Educación Matemática*.
- Stillman, G. (2011). Applying Metacognitive Knowledge and Strategies in Applications and Modelling Tasks at Secondary School. In Kaiser G., Blum W., Borromeo-Ferri R., Stillman G. (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. ICTMA 14 (pp. 9-14). Springer.
- Schwarz, B. (2009). Argumentation and learning. En N. Muller Mirza y A.-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and Education: Theoretical Foundations and Practices*. Springer.
- Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(4), 423–440. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00143-8](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8)
- Yin, R. (2015). *Qualitative research from start to finish*. Guilford Publications.

Andrés Ortiz Jiménez:

Profesor de Matemática. Departamento de Didáctica. Facultad de Educación. Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile.
Estudiante de Doctorado en Educación: Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona. España.
aortiz@ucsc.cl ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1370-8051>