

## **Incidencia de la invención y reconstrucción de problemas en la competencia matemática**

**José Antonio Fernández Bravo y Juan Jesús Barbarán Sánchez**

### **Resumen**

En este artículo se presenta una investigación realizada con alumnos de 4º de Educación Primaria en la que se analiza la relación entre la invención y reconstrucción de situaciones problemáticas y, el desarrollo de las siguientes capacidades: pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, argumentar matemáticamente, representar entidades matemáticas, y, comunicarse en, con y sobre las matemáticas. Las conclusiones muestran la necesidad de crear en el aula una atmósfera que impulse la invención, el descubrimiento, la búsqueda y la investigación, para que nuestro alumnado sea competente en Matemáticas. Sugerimos que se incluya en el currículo de Matemáticas de Educación Primaria el uso de programas basados en la invención y reconstrucción de situaciones problemáticas.

### **Abstract**

The paper presents an investigation made with students of 4<sup>th</sup> grade of Primary Education in which we analyze the relation between the invention and reconstruction of problematic situations and the development of the following abilities: thinking mathematically, posing and solving mathematical problems, reasoning mathematically, representing mathematical entities, and, communicating in, with, and about mathematics. The conclusions show the necessity of creating an atmosphere that encourages the invention, discovery, search and research in the classroom, so that our students are competent in Mathematics. We suggest including the use of programs based in the invention and reconstruction of problematic situations in the curriculum of Mathematics of Primary Education.

### **Resumo**

Neste artigo apresenta-se uma investigação realizada com alunos do 4º de Educação Primaria na que se analisa a relação entre a invenção e reconstrução de situações problemáticas e, o desenvolvimento das seguintes capacidades: pensar matematicamente, formular e resolver problemas matemáticos, argumentam matematicamente, representam entidades matemáticas, e se comunicar com e sobre a matemática. Os resultados mostram a necessidade de criar uma atmosfera de sala de aula que estimula a invenção, descoberta, busca e pesquisa, para que nossos alunos são competentes em Matemática. Sugerimos incluindo no currículo de Matemática de Ensino Fundamental, utilizando programas baseados na invenção e reconstrução de situações problemáticas.

## **1. Introducción**

La resolución de problemas ha sido y sigue siendo una línea de investigación fructífera en la Didáctica de la Matemática (Santos-Trigo, 2007; Törner, Schoenfeld y Reiss, 2007) como podemos comprobar en el último Congreso Internacional de

Educación Matemática (ICME-2008). El núcleo central de las matemáticas escolares debe estar formado por la resolución de problemas (NCTM, 1980). Sin embargo, no es raro que cualquiera de nuestros alumnos nos diga que “resolver un problema se le da mal”. Muchas son las investigaciones que se han llevado a cabo sobre las dificultades que tienen alumnos de distintas edades para resolver problemas matemáticos (Juidías y Rodríguez, 2007; Lesh y Zawojewski, 2007; Schoenfeld, 1985; Selden, Selden y Mason, 1994; Verschaffel, Greer y De Corte, 2000). Hiebert (2003) concluye que este problema de índole internacional se debe a las dificultades de aprendizaje que tienen los alumnos en matemáticas. En algunas ocasiones, el alumno no entiende el vocabulario específico del problema (Bernardo, 1999), o no reconoce la/s operación/es necesarias para resolverlo (English, 1998) o no sabe interpretar la respuesta en el contexto expuesto en el mismo (Verschaffel, De Corte y Vierstraete, 1999). Dreyfus (1991) considera que la mayoría de los alumnos aprenden una gran cantidad de procedimientos estandarizados en sus clases de matemáticas pero no a trabajar matemáticamente. El bajo rendimiento de nuestros alumnos de Educación Primaria en la resolución de problemas matemáticos continúa siendo una preocupación para las escuelas, instituciones e investigación (Tárraga, 2008).

Nuestro interés se centra en medir el grado de desarrollo de la competencia matemática de alumnos de 4º de Educación Primaria. Uno de los principales objetivos que se persiguen en la asignatura de Matemáticas es que nuestros alumnos sean matemáticamente competentes. El desarrollo de la competencia matemática debe iniciarse a edades tempranas (Cardoso y Cerecedo, 2008) ya que, de lo contrario, el alumno acarreará un desfase que le costará superar. Como afirma Goñi (2008), para desarrollar la competencia matemática de nuestros alumnos debemos mejorar su capacidad de resolver problemas. En vez de enseñar a nuestros alumnos a que resuelvan problemas de forma mecánica, deberíamos enseñarles a pensar matemáticamente para que sean los propios problemas los que creen en ellos la necesidad de analizar la extensión y limitaciones de los conceptos matemáticos que manejan. Consideramos interesante estudiar la relación que existe entre la forma en la que viene planteado un problema (completa o incompleta) y la capacidad del alumno para resolverlo.

Vigotsky (1973) reflejó lo positivo que es para los escolares inventar situaciones a partir de dibujos de objetos en una hoja de papel. Consideramos interesante conocer si la invención de situaciones problemáticas facilita en el alumno la capacidad de entender textos escritos y visuales sobre cuestiones de contenido matemático, y la de expresarse de forma escrita sobre temas matemáticos.

Para medir el grado de desarrollo de la competencia matemática de los alumnos de 4º de Educación Primaria hemos utilizado la prueba de diagnóstico propuesta por el Ministerio de Educación en el año 2010 para el citado nivel. En los últimos años se ha producido un notable aumento de los estudios realizados en torno a la competencia matemática (Fernández Bravo, Castillo y Barbarán, 2010; Murillo y Marcos, 2009; Roig y Llinares, 2006) a los que hay que añadir los llevados a cabo por instituciones educativas de ámbito internacional (OECD, 2010), y por el Ministerio de Educación junto con las comunidades autónomas (según establecen los artículos 21 y 29 de la Ley Orgánica de Educación), lo que demuestra el interés existente sobre este tema en la Educación Matemática.

Los resultados que obtienen nuestros alumnos en las pruebas de diagnóstico (que vienen establecidas en la Ley Orgánica 2/2002, de 3 de mayo, en sus artículos 21 y 29) en lo que se refiere a la competencia matemática parecen no ser satisfactorios en un elevado porcentaje. Para atender a la problemática existente sobre el desarrollo de la competencia matemática en alumnos que cursan enseñanza obligatoria, es necesario construir propuestas sobre metodologías didácticas alternativas que posibiliten una mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

En la legislación educativa de numerosos países se ha incluido el enfoque por competencias en sus currículos vigentes (Dinamarca, Portugal, Paraguay, Perú, Canadá y España). Merece especial mención por su carácter pionero, la experiencia llevada a cabo en Dinamarca, liderada por Niss (1999) a través del proyecto KOM (*Kompetencer og matematikloering* que se traduce como *Competencias y el aprendizaje de las matemáticas*) a partir del que se caracterizó el currículo de matemáticas en términos de competencias desde la escuela hasta la universidad.

Sin embargo, parece que siguiendo el programa tradicional<sup>1</sup> los resultados obtenidos no son los deseables. En este trabajo nos planteamos también conocer si la invención y reconstrucción de problemas contribuye al desarrollo de ciertas competencias matemáticas específicas introducidas por Niss (1999), cuya descripción de capacidades es la que se ha usado para asignar variables a cada una de las preguntas de la prueba de diagnóstico antes citada.

## **2. Marco teórico**

*“Un problema se considera como tal para un sujeto cualquiera cuando este sujeto es consciente de lo que hay que hacer, sin saber, en principio, cómo hacerlo”.* (Fernández Bravo, 2010, p. 27) En esta investigación se ha usado el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas de Fernández Bravo (Fernández Bravo, 2010) basado en una metodología constructivista que se sustenta en el paradigma ecológico de Doyle (Doyle, 1977, 1979, 1986a, 1986b, 1995; Doyle y Carter, 1984), la teoría de la asimilación de Ausubel (Ausubel, 1976) y en la teoría de la elaboración de Merrill y Reigeluth (Reigeluth y Darwazeh, 1982; Reigeluth, Merrill y Bunderson, 1978; Reigeluth, Merrill, Wilson y Spiller, 1978). El programa consta de un conjunto de 49 modelos, con situaciones problemáticas que permiten el protagonismo directo del alumno, al inventar y reconstruir el problema matemático. Presentamos a continuación los modelos utilizados en esta investigación:

Situaciones sin número. Se presenta un problema en cuyo enunciado y pregunta no aparecen datos numéricos. Para llegar a la solución no se necesita operación alguna.

Informaciones de las que se puede deducir algo. Se presentan informaciones, sin pregunta alguna: Puede ser una frase, una portada de un libro, un cartel publicitario, una lista de precios,... La realización de la actividad consiste en deducir ideas y

---

<sup>1</sup> Entendemos por programa tradicional en la resolución de problemas matemáticos, tanto la realización de estas actividades de forma rutinaria, cuyo objetivo es llegar a la solución esperada, como aquellas actividades que se presentan de forma completa (Enunciado-Pregunta) sin posibilidad de construcción, y cuya resolución depende de la imposición de lugar en la secuenciación de un tema; sin hablar de la verificación del problema que consiste en la aprobación, por el profesor, de la validez de la estrategia.

clasificarlas en: lógicas -aquellas que son verdaderas o falsas para todos- y no lógicas; así como, posibles -muy posibles, poco posibles- e imposibles.

Situaciones cualitativas. Se presenta un enunciado y una pregunta con sentido lógico pero de forma incompleta para llegar a la solución. Se va completando todo lo que se necesite en la medida en que el alumno lo vaya pidiendo.

Enunciados abiertos. Se le da al alumno una información: A partir de una frase, de una foto, de un dibujo, de un esquema, de un titular de un periódico, un prospecto, una programación de televisión... Su labor consiste en inventar una situación problemática en la que utilice esa idea.

Problemas de lógica. No interviene el algoritmo. Utilización del razonamiento por deducción, inducción y analogía.

Inventar y resolver un problema a partir de una solución dada. El alumno creará el enunciado, la pregunta y el proceso que se pueda corresponder con la solución de partida.

Inventar y resolver un problema a partir de una expresión matemática. Creación de un enunciado y pregunta que se corresponda con el contenido de relación aplicativa de la expresión de partida.

Expresar preguntas y responderlas a partir de un enunciado dado. La labor del alumno consiste en crear preguntas que se puedan contestar teniendo en cuenta, únicamente, el enunciado de partida.

Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la operación. Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas lleva indicada la operación que se tiene que utilizar para obtener sus respuestas.

Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la solución. Se presenta un enunciado con preguntas en blanco. Cada pregunta tiene una solución dada.

Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada y una solución dada, y resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado.

Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada, la solución del problema dada y los datos numéricos dados que deben aparecer en el enunciado. Resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado.

Inventar un enunciado, y sólo uno, que se corresponda con: varias preguntas dadas y las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas. Comprobar el problema.

Cambiar los datos necesarios del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener una solución dada y distinta a la que ya se obtuvo anteriormente.

Cambiar los datos del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener la misma solución que se obtuvo anteriormente. Se parte de un problema fácil y posible de realizar por todos los alumnos. Se van cambiando los datos por otros más complejos, pero equivalentes, para que no hagan variar la solución del problema.

Cambiar lo que sea necesario, y sólo si es necesario, de un problema, para que el proceso de su resolución, que se presenta, sea correcto.

Averiguar el dato falso de un problema, dándoles la solución correcta. Existe un dato, y sólo uno, que no nos permite llegar a la solución expresada.

Cambiar la pregunta de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la nueva solución sea la misma que la que se obtuvo anteriormente.

Cambiar la conjunción por disyunción, y viceversa. Resolver los problemas. Observar y comparar las soluciones.

Mezcla de los procesos de resolución de dos problemas. Se presentan dos problemas distintos. Se mezclan los procesos de resolución. La labor del alumno consiste en identificar cada proceso con el problema correspondiente.

Componer el/los enunciado/s de un/os problema/s a partir de todos/algunos de los datos que se ofrecen, y resolver la situación problemática. Se presentan enunciados tal que desde esa forma de presentación se encuentran incompletos para dar respuesta a su pregunta. Se presentan fuera del problema una serie de datos. La realización de la actividad consiste en elegir el lugar necesario de los datos para resolver el problema.

Completar los datos del enunciado de un problema a partir del proceso de resolución. Se presenta un problema resuelto, de cuyo enunciado se han borrado los datos y se ha dejado el espacio correspondiente para que el alumno lo complete según corresponda.

Completar los datos del enunciado de un problema a partir de la solución de éste. Se presenta un problema indicando su solución. De su enunciado se han borrado los datos y se han dejado los espacios en blanco. El alumno completará el enunciado según corresponda.

Inventar un problema con un vocabulario específico dado, y resolverlo. Se le da al alumno el vocabulario que debe utilizar en la invención.

Inventar un problema con: un vocabulario específico y la operación/es que debe utilizarse para su resolución.

Inventar un problema con: un vocabulario específico y la solución dada.

Resolver problemas que se presentan de forma completa, cuya resolución favorezca la aplicación de los conceptos, operaciones y relaciones lógicas a las necesidades habituales de desarrollo personal, convivencia y relación con el entorno: con solución única, sin solución definida, con varias soluciones.

Seleccionar la información necesaria mediante la consulta de documentación. Se presenta una pregunta que, para su contestación, se requiere la consulta de diccionarios, textos, enciclopedias,... o, simplemente, salir al patio, husmear en los listados de alumnos del colegio,... para recoger la información necesaria. Es imprescindible facilitar el éxito de la búsqueda, en la que muchos de ellos perderían el tiempo sin rentabilizar el esfuerzo. Para ello, se pone a disposición del alumno una serie de fichas elaboradas por el profesor -adaptadas, en número y contenido, a la edad del alumno-, entre las que se pueda seleccionar y extraer los datos necesarios para resolver el problema.

Resolver un problema que se presenta de forma distinta a la habitual. Una poesía, un caligrama, lenguaje gráfico: tablas, diagramas; un cuento breve,...

Relación entre lógica y matemática. Proponer situaciones en las que se manifieste de forma relevante la necesidad de pasar por un pensamiento lógico para llegar a un pensamiento matemático.

Estos modelos se agrupan en seis clases de situaciones procedimentales que reciben, en el programa, el nombre de metamodelos. Un metamodelo se define

como “el conjunto de clases de modelos de situaciones problemáticas distintas, presentadas a la actividad del alumno y capaces de generar ideas válidas para la resolución de problemas matemáticos”. (Fernández Bravo, 2010, p. 59)

La competencia matemática ha sido definida por diferentes autores e instituciones (Niss, 2002; OCDE, 2006; Escamilla, 2008; Rico y Lupiáñez, 2008). Niss afirma que la competencia matemática “es la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de situaciones y contextos intra y extra matemáticos, en los que éstas juegan o podrían jugar un papel” (Niss, 2002, p. 7). Destacamos en esta definición su no alusión a contenidos. Niss (1999) identificó ocho competencias que dividió en dos grupos:

- Las referidas a la habilidad de preguntar y contestar las preguntas en y con las matemáticas, que son: pensar matemáticamente, modelizar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, y, argumentar matemáticamente.

**Tabla 1: Capacidades asociadas al segundo grupo de competencias matemáticas específicas (Adaptado de Niss (2002))**

Competencias matemáticas específicas	Capacidades
<b>Pensar matemáticamente</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Proponer cuestiones propias de las matemáticas (¿Cuántos hay? ¿Cómo encontrarlo? Si es así, ¿entonces?) y conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a las cuestiones anteriores.</li> <li>● Entender la extensión y las limitaciones de los conceptos matemáticos y saber utilizarlos.</li> <li>● Ampliar la extensión de un concepto mediante la abstracción de sus propiedades, generalizando los resultados a un conjunto más amplio de objetos.</li> <li>● Distinguir entre diferentes tipos de enunciados matemáticos (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas ('si-entonces'), afirmaciones con cuantificadores, etc.).</li> </ul>
<b>Plantear y resolver problemas matemáticos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Identificar, definir y plantear diferentes tipos de problemas matemáticos (teóricos, prácticos, de respuesta abierta, cerrados, etc.).</li> <li>● Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos (teóricos, prácticos, de respuesta abierta, cerrados), planteados por otros o por uno mismo, a ser posible utilizando distintos procedimientos.</li> </ul>
<b>Modelizar matemáticamente</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Analizar los fundamentos y propiedades de modelos existentes.</li> <li>● Traducir e interpretar los elementos del modelo en términos del mundo real.</li> <li>● Diseñar modelos matemáticos:                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- Estructurar el campo o situación que va a modelarse.</li> <li>- Traducir la realidad a una estructura matemática (matematizar).</li> <li>- Validar el modelo.</li> <li>- Analizar y criticar el modelo.</li> <li>- Comunicar acerca del modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones).</li> <li>- Dirigir y controlar el proceso de modelización.</li> </ul> </li> </ul>
<b>Argumentar matemáticamente</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Seguir y evaluar cadenas de argumentos.</li> <li>● Conocer lo que es una demostración matemática y en qué difiere de otros tipos de razonamientos matemáticos.</li> <li>● Descubrir las ideas básicas de una demostración.</li> <li>● Diseñar argumentos matemáticos formales e informales y transformar los argumentos heurísticos en demostraciones válidas.</li> </ul>

- Las que tienen que ver con la habilidad de utilizar el lenguaje y las herramientas matemáticas, y son: representar entidades matemáticas (objetos y situaciones), utilizar símbolos y formalismos matemáticos, comunicarse en, con y sobre las matemáticas, y, utilizar recursos y herramientas.

**Tabla 2: Capacidades asociadas al segundo grupo de competencias matemáticas específicas (Adaptado de Niss (2002))**

Competencias matemáticas específicas	Capacidades
<b>Representar entidades matemáticas (objetos y situaciones)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entender, utilizar, decodificar e interpretar diferentes clases de representaciones de objetos matemáticos, fenómenos y situaciones.</li> <li>• Utilizar y entender la relación entre diferentes representaciones de una misma entidad u objeto, incluido el conocimiento de sus restricciones y limitaciones.</li> <li>• Escoger entre varias representaciones de acuerdo con la situación y el propósito.</li> </ul>
<b>Utilizar símbolos y formalismos matemáticos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal de las matemáticas y entender su relación con el lenguaje natural.</li> <li>• Entender la naturaleza y las reglas de los sistemas matemáticos (sintaxis y semántica).</li> <li>• Traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico y formal.</li> <li>• Trabajar con enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.</li> </ul>
<b>Comunicarse en, con y sobre las matemáticas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entender textos escritos, visuales u orales de otros, en una variedad de registros lingüísticos, sobre temas de contenido matemático.</li> <li>• Expresarse uno mismo de forma oral, visual o escrita sobre temas matemáticos, con diferentes niveles de precisión teórica y técnica.</li> </ul>
<b>Utilizar recursos y herramientas (incluyendo las nuevas tecnologías)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conocer la existencia y propiedades de diversas herramientas y recursos para la actividad matemática, su alcance y sus limitaciones.</li> <li>• Usar de modo reflexivo tales recursos y herramientas.</li> </ul>

En nuestra investigación nos hemos centrado en estudiar las siguientes competencias matemáticas específicas: pensar matemáticamente (PR), plantear y resolver problemas matemáticos (PRPM), argumentar matemáticamente (ARG), representar entidades matemáticas (REP) y comunicarse en, con y sobre las matemáticas (COM).

### 3. Objetivo

Nuestro estudio pretende analizar la incidencia que tiene la aplicación de un programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas (cuya metodología difiere a la del programa tradicional) con alumnos de 4º de Educación Primaria, y el desarrollo de su competencia matemática.

El objetivo de la investigación que se muestra en este artículo es verificar si los alumnos que trabajan con el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas desarrollan las siguientes competencias matemáticas específicas: pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, argumentar matemáticamente, representar entidades matemáticas, y, comunicarse en, con y sobre las matemáticas.

## 4. Metodología

La presente investigación pretende evaluar los efectos de un programa de intervención educativa sobre invención-reconstrucción de situaciones problemáticas. Este programa constituye la variable independiente. Este programa no se aplicó a la totalidad de los alumnos que formaron parte de la muestra sino únicamente a los que formaron parte de los grupos experimentales; el resto de los alumnos conformaron los grupos control.

En la presente investigación se ha seguido un diseño cuasi-experimental comparativo, sobre un total de seis grupos de alumnos de Educación Primaria (4 grupos control y 2 experimentales). La muestra estuvo formada por 155 alumnos de cuatro CEIP de titularidad pública de la Comunidad de Madrid de los cuales 103 alumnos formaban parte de los 4 grupos experimentales y 52 alumnos conformaban los 2 grupos control. La selección de los grupos experimentales se llevó a cabo al azar, al igual que la de los sujetos que formaron parte de los mismos.

El hecho de que los sujetos de cada curso pertenecieran a dos estados de control subraya la característica pretest-postest. El conocimiento de los efectos de la aplicación del programa se apoya en la preintervención-postintervención, más concretamente, se trata de un diseño: pretest-intervención-postest. Esto permite llevar a cabo una inferencia correcta de las relaciones entre las variables dependientes e independiente, cuando comparamos los resultados de los grupos experimentales y control. El equipo investigador lo formaron los profesores tutores de los grupos que tuvieron la condición de experimentales.

Se planteó la siguiente hipótesis de estudio: Si se utiliza el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas con alumnos de 4º de Educación Primaria, entonces se desarrollan sus competencias matemáticas específicas siguientes: pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, argumentar matemáticamente, representar entidades matemáticas, y, comunicarse en, con y sobre las matemáticas.

La variable independiente en esta investigación ha sido el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas. Las variables dependientes estudiadas fueron: pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, argumentar matemáticamente, representar entidades matemáticas, y, comunicarse en, con y sobre las matemáticas. Los valores de la variable dependiente vinieron dados por la puntuación obtenida por cada alumno en la prueba (que se obtuvo sumando las puntuaciones asignadas a cada ejercicio) que se describe más adelante.

Los ejercicios se puntuaron siguiendo el siguiente criterio:

0: Respuesta incorrecta o sin respuesta

1: Respuesta parcialmente correcta.

2: Respuesta correcta.

De esta forma, el rango de valores enteros de cada una de las variables dependientes estudiadas fue el siguiente:

**Tabla 3. Recorrido de valores de las variables dependientes**

Variable dependiente	Rango de valores enteros
PR	0-16
PRPM	0-24
ARG	0-6
REP	0-6
COM	0-14

Las variables intervinientes que podían, a priori, estar sistemáticamente relacionadas con la variable independiente, y que podían afectar de forma diferencial a los valores de las variables dependientes que se consideraron fueron las siguientes: metodología empleada, dificultad en el aprendizaje de la matemática, asistencia a clase y nivel socio-cultural de la familia

#### **4.1. Prueba**

Se decidió emplear una prueba que estuviese elaborada por expertos en la materia y que no se aplicara en la comunidad de Madrid donde se eligió la muestra para la investigación. La prueba utilizada para medir las variables dependientes fue la prueba de diagnóstico de la competencia matemática que utilizó el Ministerio de Educación en las pruebas de diagnóstico del año 2010 con alumnos de 4º de Educación Primaria en la Ciudad Autónoma de Ceuta. Consta de un total de 33 preguntas de las que 18 son de opción múltiple y el resto son abiertas o de respuesta construida semiabiertas. Las preguntas contenían situaciones problemáticas de tipo personal (relacionadas con el yo, la familia y el grupo de compañeros), educacionales (situaciones relacionadas con la vida escolar), públicas (situaciones de la comunidad local y la sociedad) y científicas (situaciones que se refieren a estructuras, símbolos y objetos matemáticos). Los bloques de contenido considerados en esta prueba son los que establece el currículo de enseñanzas mínimas para esta materia (MEC, 2006), díganse: números y operaciones, la medida: estimación y cálculo de magnitudes, geometría, tratamiento de la información, azar y probabilidad. Los alumnos dispusieron de 50 minutos para su realización. Para su aplicación se siguieron escrupulosamente todas las instrucciones dictadas por el Ministerio de Educación. A través de un meticuloso estudio preliminar llevado a cabo por todos los miembros del equipo investigador asesorados por expertos en la materia, se indicó cuál es la competencia matemática específica en el sentido de Niss (1999) que más se ha de usar en la resolución de cada pregunta (anexo I). En este proceso se utilizaron como criterio de selección las capacidades que aparecen en las tablas 1 y 2.

#### **4.2. Procedimiento**

La fase pretest tuvo lugar en el mes de septiembre de 2010 y en ella los alumnos de 4º de Educación Primaria cumplimentaron, en su aula habitual y de forma simultánea, la prueba para medir el grado de desarrollo de la competencia matemática antes descrita. La corrección de la prueba se llevó a cabo de forma consensuada entre todos los miembros del equipo investigador y ningún profesor participante corrigió las pruebas de sus alumnos. La fase de intervención se llevó a cabo durante un periodo de ocho meses dentro del curso escolar 2010/11 y en ella se aplicó el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas a los cuatro grupos experimentales. Los principales agentes fueron los alumnos de

estos grupos y el equipo investigador. Este programa se desarrolló en sesiones semanales, dentro del horario lectivo y en el aula correspondiente. El horario fijado coincidió en todos los cursos. Las sesiones se estructuraron como “unidades de actuación cerradas”. Cada unidad de actuación cerrada se compuso de cinco fases concretas con representación independiente, tanto por el contenido formal, como por el orden de aparición. Fueron las siguientes:

- Apertura: Se le planteó al alumno el desafío. Se le explicó con claridad, asegurándonos de que había comprendido perfectamente lo que había que hacer.
- Ejecución: Fase en la que se realizó la propuesta. La ejecución pudo realizarse: en gran grupo o grupo-clase, a partir de un diálogo en común; en parejas de alumnos; o, de forma individual.
- Contrastación: Fase en la que se contrastaron las ideas mediante el diálogo. Si la fase anterior se había realizado de forma individual, esta fase se llevó a cabo por parejas. Si la ejecución se llevó a cabo por parejas, esta fase se realizó por parejas. Si en la fase anterior había intervenido el grupo-clase, la fase en la que estamos ahora formó parte de la anterior.
- Exposición: Fase en la que intervino el grupo-clase con la libre participación de todos y cada uno de los alumnos que quisieron exponer sus ideas. Mediante el diálogo en gran grupo y las preguntas del profesor, se canalizaron las ideas y se recogieron las estrategias matemáticas que se habían reconocido como válidas.
- Finalización: Se escribieron y anotaron las conclusiones que se obtuvieron: conceptuales, procedimentales, etc.

El seguimiento del programa se concluyó con 22 sesiones a lo largo del curso escolar, una sesión por semana de dos horas de duración. El equipo investigador se había formado, previamente, mediante seminarios de grupo para la aplicación práctica del programa de intervención que tuvieron lugar durante el curso escolar 2009/10. Como material para el alumno, se elaboró un cuaderno de trabajo con 60 situaciones problemáticas, seleccionadas o adaptadas de Fernández Bravo (2010, p. 96-188). En cada sesión se realizaron dos problemas por término medio, con la finalidad de tener tiempo para generar un debate en el que fluyeran las ideas.

Con una periodicidad quincenal se llevaron a cabo reuniones en las que participaron los miembros del equipo investigador y en ellas se presentaron de forma abierta tanto los avances percibidos como las dificultades encontradas y se compartieron experiencias particulares de cada aula.

La fase postest se llevó a cabo durante el mes de junio de 2011 y en ella se les aplicó a los alumnos el mismo instrumento de evaluación que se les había aplicado en la fase pretest. La corrección de las pruebas siguió el mismo procedimiento descrito en la fase pretest.

## **5. Resultados del estudio**

Para llevar a cabo el análisis estadístico de los datos recogidos se utilizó el programa Statistical Package for the Social Sciences (SPSS), versión 15.0. Los análisis llevados a cabo para el tratamiento estadístico de los datos fueron los siguientes:

a) Análisis descriptivos y gráficos, a partir los cuales pudimos observar las puntuaciones medias de cada grupo (Experimental pretest “1”; Control pretest “2”; Experimentales postest “3”; Control postest “4”), su desviación típica, el error típico y el intervalo de confianza para la media, al 95%.

b) Tests no paramétricos que nos sirvieron para determinar hasta qué punto los datos muestrales se ajustan a una distribución teórica. Este estudio lo realizamos con todos los datos, tanto de la fase pretest como postest. Se aplicó la prueba de Kolmogorov-Smirnov.

c) Análisis paramétrico unifactorial de la varianza para el contraste de las hipótesis estadísticas. Con este análisis se comprobó si el cambio pretest-postest en cada una de las variables estudiadas difirió en cada una de las aulas, respecto a la utilización, o no, del programa de intervención (variable independiente). También estudiamos si los cambios habían sido significativos y si estos se habían debido a la utilización del programa, verificando su repercusión en los grupos experimentales. Se analizó el estadístico F y su significación (Sig F) para los 6 niveles de grupos. Si la F global del análisis de la varianza es significativa ( $p < 0.05$ ), sólo podemos concluir que, por lo menos, dos niveles de la variable producen distintos efectos en la variable dependiente. Para investigar en qué niveles se dan esas diferencias significativas, establecimos comparaciones múltiples, mediante la prueba T de Student. El contraste de hipótesis estadísticas lo basamos en un contraste de igualdad de medias de dos poblaciones normales de varianzas desconocidas que verifican que el número de sujetos del grupo experimental más el número de sujetos del grupo control es mayor que 30. El contraste se realizó con las medias de los grupos experimentales pretest y postest por un lado, y de los grupos control pretest y postest, por otro. El contraste fue bilateral considerando como hipótesis nula que las medias obtenidas por un grupo, antes y después, son iguales. La hipótesis alternativa fue la existencia de diferencias en las medias obtenidas. La existencia de diferencias significativas nos haría rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa. En la fase pretest, se estudió mediante un análisis de la varianza si existían diferencias estadísticamente significativas ( $p < 0.05$ ) en las variables evaluadas en la fase pretest, obteniéndose respuesta negativa en todos los casos.

Con la finalidad de comparar los cambios producidos por la utilización del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas en los grupos experimentales se realizó un análisis de varianza múltiple en relación con todas las variables evaluadas, investigando, también, la repercusión del citado programa en los valores de las variables intervinientes. Se estudió la existencia o no de diferencias significativas respecto a la ocupación de los padres, la situación familiar, la asistencia a clase, el nivel de estudios de los padres y la dificultad para las matemáticas, obteniéndose respuesta negativa en todos los casos.

**Tabla 4. Resultados del ANOVA realizado comparando los grupos experimental y control**

VARIABLE	Razón F	Sig. de F
Pensar matemáticamente	12.6586	.04
Plantear y resolver problemas matemáticos	10.4532	.003
Argumentar matemáticamente	6.8466	.002
Representar entidades matemáticas	7.6318	.28
Comunicarse en, con y sobre las matemáticas	8.5642	.17

Como podemos observar en la tabla 4, la razón F indicó que los cambios pretest-postest en los grupos experimentales fueron:

- Estadísticamente significativos al 100% en las variables: plantear y resolver problemas matemáticos y argumentar matemáticamente.
- Estadísticamente significativos al 96% en la variable pensar matemáticamente.

Los cambios producidos en los grupos experimentales de la fase postest fueron significativos respecto a todos y cada uno de los otros grupos en las tres variables mencionadas. Esto evidencia que el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas desarrolló significativamente en los alumnos de 4º de Educación Primaria, y para la muestra utilizada, las siguientes competencias matemáticas específicas: plantear y resolver problemas matemáticos, argumentar matemáticamente, y, pensar matemáticamente. No podemos afirmar que el programa de invención sirva para desarrollar las competencias de “representar entidades matemáticas” y “comunicarse e, con y sobre las matemáticas”, al no observarse diferencias estadísticamente significativas entre los grupos experimentales y control.

## **6. Consideraciones finales**

La resolución de problemas matemáticos es una fuente inagotable de conocimiento matemático que, a nuestro juicio, debería trabajarse en el aula haciendo más protagonista al alumno de sus aciertos y sus errores. Las situaciones problemáticas abiertas fomentan en el alumno el desarrollo de su creatividad haciéndolo más competente en la sociedad actual. Con este estudio hemos comprobado empíricamente que un programa basado en la invención y reconstrucción de situaciones problemáticas desarrolla de forma efectiva las siguientes competencias matemáticas específicas: pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos y argumentar matemáticamente. Como futuros trabajos, sugerimos confirmar estadísticamente estos resultados tanto en otros centros de titularidad privada, concertada, de entorno no urbano, así como en otras etapas educativas. Consideramos que habría que apoyarse en otros programas de intervención o ampliar el que hemos usado con otras actividades, para lograr un desarrollo de las competencias matemáticas específicas: representar entidades matemáticas y comunicarse, en, con y sobre las matemáticas.

Aumentar el nivel competencial de nuestros alumnos es, en la actualidad, un objetivo importante de nuestro sistema educativo. Para conseguir ese fin, sugerimos que se incluya de forma efectiva en el currículo de Matemáticas de Educación Primaria el uso de programas basados en la invención.

## **Bibliografía**

- Ausubel, D.P. (1976). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Barbarán, J. J. (2010). *Investigación evaluativa sobre la resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en alumnos de educación secundaria obligatoria, mediante la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas. Estudio de caso*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, España.
- Bernardo, A. (1999). Overcoming obstacles to understanding and solving word problems in mathematics. *Educational Psychology*, 19 (2), 149-163.

- Cardoso, E. & Cerecedo, M. (2008). El desarrollo de las competencias matemáticas en la primera infancia. *Revista Iberoamericana de Educación*, 47 (5), 1-11.
- Doyle, W. (1977). Learning the classroom environment: An ecological analysis. *Journal of Teacher Education*, 28 (6), 51-56.
- Doyle, W. (1979). Classroom tasks and students' abilities. En P.L. Peterson, H.J. Walberg (Eds.) *Research on teaching. Concepts, findings and implications*. Berkeley: McCutchan.
- Doyle, W. (1986a). Classroom organization and management. En M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching*. Nueva York: Macmillan.
- Doyle, W. (1986b). Content representation in teachers' definitions of academic work. *Journal of Curriculum Studies*, 18 (4), 365-379.
- Doyle, W. (1995). Los procesos del currículum en la enseñanza efectiva y responsable. *Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, 4 (6), 3-11.
- Doyle, W. & Carter, K. (1984). Academic tasks in classrooms. *Curriculum Inquiry*, 14 (2), 129-149.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- English, L. (1998). Children's problem solving within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (1), 83-106.
- Escamilla, A. (2008). *Las competencias básicas. Claves y propuestas para su desarrollo en los centros*. Barcelona: Editorial Graó.
- Fernández Bravo, J. A. (2010). *La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños*. Madrid: Grupo Mayéutica.
- Goñi, J. (2008). *3<sup>2</sup>-2 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.
- Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM Standards. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, D. Schifter & National Council of Teachers of Mathematics (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 5-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Juidías, J. & Rodríguez, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 342, 257-286.
- Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age.
- MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. BOE N<sup>o</sup>. 293, del 8/12/2006.
- Murillo, G. & Marcos, G. (2009). Un modelo para potenciar y analizar las competencias geométricas y comunicativas en un entorno interactivo de aprendizaje. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 27 (2), 241-256.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, Virginia: NCTM.
- Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise*, 9, 21-29.
- Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project*. Recuperado el 22 de febrero de 2012, de [http://http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa\\_niss.pdf](http://http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf)

- OCDE (2006). *PISA marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. España: Santillana.
- OECD (2010). *PISA 2009 Results: Executive Summary*.
- Reigeluth, C.M., Merrill, M.D. & Bunderson, C.V. (1978). The structure of subject matter contents and its instructional design implications. *Instructional Science*, 7, 107-126.
- Reigeluth, C.M., Merrill, M.D., Wilson, B.G. & Spiller, R.T. (1978). The elaboration theory of instruction: a model for sequencing and synthesizing instruction. *Instructional Science*, 9, 195-219.
- Reigeluth, C.M. & Darwazeh, A.N. (1982). The elaboration theory's procedure for designing instruction: A conceptual approach. *Journal of Instructional Development*, 5 (3), 22-32.
- Rico, L. & Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Roig, A. & Llinares, S. (2006). Dimensiones de la competencia matemática al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria. Caracterización y análisis. En J. V. Aymerich & S. Macario Vives (Eds.), *Matemáticas para el siglo XXI* (pp.283-291). Castellón de la Plana: Publicaciones de la Universidad Jaime I.
- Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, 523-536.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Selden, J., Selden, A. & Mason, A. (1994). Even good students can't solve nonroutine problems. En J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning* (pp. 19-26). Washington D.C.: Mathematical Association of America.
- Tárraga, R. (2008). Relación entre rendimiento en solución de problemas y factores afectivo-emocionales en alumnos con y sin dificultades del aprendizaje. *Apuntes de Psicología*, 26 (1), 143-148.
- Törner, G., Schoenfeld, A. & Reiss, K. (2007). Problem solving around the world: summing up the state of art. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, 353.
- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making use of word problems*. Lisse, Holanda: Swets & Zeitlinger.
- Verschaffel, L., De Corte, E. & Vierstraete, H. (1999). Upper elementary school pupils' difficulties in modeling and solving nonstandard additive word problems involving ordinal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (3), 265-285.
- Vigotsky, L. (1973). *Psicología y pedagogía*. Madrid: Akal.

**José Antonio Fernández Bravo:** Profesor universitario del Centro de Enseñanza Superior "Don Bosco", adscrito a la Universidad Complutense de Madrid. Director de la Cátedra "Conchita Sánchez" de Investigación para la Educación Matemática, en la Universidad Camilo José Cela. Consultor en matemáticas y primera infancia de *Cerebrum* Centro de Neurociencias, Educación y Desarrollo Humano (OEA) Lima (Perú). Autor de 82 obras dirigidas al aprendizaje de la Matemática.

[ANTO1940@inicia.es](mailto:ANTO1940@inicia.es) ; <http://fernandezbravo.ning.com>

**Juan Jesús Barbarán Sánchez.** Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Málaga y Doctor por la UNED. Actualmente es profesor de Matemáticas en el IES "Almina" de Ceuta y profesor asociado en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada. [barbaran@ugr.es](mailto:barbaran@ugr.es)

## ANEXO I

Prueba de diagnóstico de la competencia matemática elaborada por el Ministerio de Educación y planteada a alumnos de 4º de Educación Primaria de Ceuta y Melilla (2010)

	PR	PRPM	ARG	REP	COM
Pregunta 1		X			
Pregunta 2	X				
Pregunta 3	X				
Pregunta 4		X			
Pregunta 5				X	
Pregunta 6				X	
Pregunta 7				X	
Pregunta 8					X
Pregunta 9					X
Pregunta 10		X			
Pregunta 11		X			
Pregunta 12		X			
Pregunta 13					X
Pregunta 14		X			
Pregunta 15		X			
Pregunta 16		X			
Pregunta 17					X
Pregunta 18			X		
Pregunta 19	X				
Pregunta 20			X		
Pregunta 21					X
Pregunta 22					X
Pregunta 23					X
Pregunta 24			X		
Pregunta 25	X				
Pregunta 26	X				
Pregunta 27	X				
Pregunta 28	X				
Pregunta 29		X			
Pregunta 30	X				
Pregunta 31		X			
Pregunta 32		X			
Pregunta 33		X			

