UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 155-160
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Hacia la creación de problemas

Problema

Llamamos "Dúo" a cualquier conjunto formado por dos números naturales consecutivos. Hay varios dúos que cumplen la condición que la suma de sus respectivos números menores es 27. Añadir una condición para que solamente haya dos dúos que cumplan ambas condiciones

Este problema fue propuesto en una clase del curso "*Razonamiento lógico matemático*" a 32 alumnos del primer ciclo de estudios universitarios para ser profesor(a) del nivel primario o inicial[1]. La intención fue estimular la competencia de crear problemas; en este caso se da una situación inicial y se pide crear una condición complementaria a ésta para obtener determinado objetivo. Ciertamente, no fue propuesto tal como está enunciado líneas arriba, sino a través de diversas fases, con el propósito que los estudiantes se familiaricen con la situación y fortalezcan su capacidad de relacionar la información que se da con la información que deben crear para cumplir con el objetivo. Soy un convencido de la importancia de crear problemas como parte del aprendizaje de matemáticas y como parte de la tarea docente al enseñar matemáticas y considero que la experiencia tenida fue muy valiosa y puede ser útil como referencia para otras experiencias con objetivos similares o afines. A continuación describo resumidamente las diversas fases desarrolladas, en un ambiente característico de las clases en este curso, que es de buena participación espontánea de los alumnos, no solo respondiendo preguntas del profesor sino también haciendo preguntas, comentarios, propuestas, etc.

Una **primera fase** fue presentar una definición de "Dúo" e inducir a la comprensión de tal definición, pidiendo que den ejemplos de dúos. Así, escribí la siguiente definición:

> *Llamamos "Dúo" a cualquier conjunto formado por dos números naturales consecutivos.*

Les pedí que la lean con atención y den ejemplos de dúos. Pronto dieron ejemplos como

$$\{2; 3\},\quad \{20; 21\},\quad \{14, 15\}$$

Una **segunda fase** fue inducir al uso de símbolos para expresar la definición dada de dúo.

[1] Estos niveles educativos comprenden a niños menores de 12 años

Inicialmente propusieron D = {x; y}, con y = x + 1.

Ante mi pedido de precisar más, se llegó a que

"D es un dúo si D = {x; y}, con $x \in N$, $y \in N$, $y = x + 1$"

Y finalmente a que

"D es un dúo si D = {x; y}, con $x \in N$, $y = x + 1$"

Se suprimió la condición $y \in N$, pues alguien afirmó que:

si $x \in N$ entonces $(x + 1) \in N$.

Una **tercera fase** fue pedirles que hagan afirmaciones respecto a los dúos y analizar juntos si tales afirmaciones son verdaderas o falsas. Aunque se repitió la indicación, no parecía entenderse lo que se pedía, entonces di un ejemplo:

Afirmación:

"La suma de los números de un dúo es un número primo"

Me preguntaron si "siempre" tenía que ser un número primo. Aclaré que esa es la idea en este tipo de afirmaciones, con el carácter general de "un"; sin embargo, que para mayor claridad se puede usar la palabra "siempre", o "todos". Así, se trataba de analizar la verdad o falsedad de la afirmación:

"En todo dúo, la suma de sus números es un número primo"

Varios afirmaron enfáticamente que es verdadera y una alumna afirmó enfáticamente que es falsa. La alumna dio como razón:

"Por ejemplo el dúo con 6 y 7, su suma es 13"

Ante esta afirmación, varios dijeron inmediatamente

"¡Y 13 es primo!"

A lo cual la alumna respondió:

*"Perdón, me confundí, pero en el dúo con 7 y 8, su suma es 15 y 15 **no** es número primo."*

Ante esto, hubo silencio y aceptación en el aula de que la afirmación hecha es falsa. Aproveché para explicar que la alumna había dado un *contraejemplo* para la afirmación dada y que eso era suficiente para demostrar su falsedad, aunque tengamos varios casos en los que se cumple. Espontáneamente comentaron que se cumple con 1 y 2, porque su suma (3) es primo; con 2 y 3, porque su suma (5) es primo; con 3 y 4, porque su suma (7) es primo; pero ya no se cumple con 4 y 5 porque suma (9) no es primo. Así obtuvimos otro contraejemplo y el convencimiento de que la afirmación hecha es falsa.

Entonces volví a hacer el pedio de afirmaciones acerca de los dúos, para analizar entre todos si tales afirmaciones son verdaderas o falsas.

Una alumna propuso:

"La suma de los dos números de un dúo es un número impar"

Con la experiencia de la afirmación anterior, tomamos la idea y analizamos la afirmación:

"En todo dúo, la suma de sus números es un número impar"

Pronto se advirtió el consenso sobre la verdad de esta afirmación, ante lo cual yo me manifesté reacio a aceptar que se trataba de una afirmación verdadera. Algunos argumentos que dieron para convencerme fueron:

"Los números siempre van a ser uno par y otro impar"

"La suma de un par con un impar es un impar"

Se generó una discusión para convencernos todos de que estas dos afirmaciones son verdaderas.

No se pudieron encontrar contraejemplos para demostrar su falsedad y se llegó al convencimiento de la veracidad de la primera, observando que:

En $D = \{x; y\}$, con $x \in \mathbb{N}$, $y = x + 1$, se tiene dos posibilidades:

x es par ó x es impar.

Si x es par entonces $x = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$; en consecuencia:

$y = x + 1 = 2n + 1$, que es impar.

Si x es impar entonces $x = 2n + 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$; en consecuencia:

$y = x + 1 = (2n + 1) + 1 = 2n + 2 = 2(n +1)$, que es par.

En cuanto a la segunda afirmación observamos que la expresión general de la suma de un número par con un número impar es:

$$(2n) + (2m + 1), \text{ para } n, m \in \mathbb{N}.$$

Como $(2n) + (2m + 1) = 2(n +m) + 1$, vemos que siempre la suma de un par con un impar es un impar.

Otra afirmación respecto a los dúos, propuesta por un alumno, fue:

"En todo dúo, el producto de sus números es un número par"

Hubo consenso en la veracidad de la afirmación y quedó como ejercicio hacer la demostración formal.

Como **cuarta fase** propuse la siguiente situación:

Dos dúos son tales que la suma de sus respectivos números menores es 27.

y pedí que me ayuden a expresar esto con símbolos. Luego de dar algunos ejemplos concretos y examinar algunas propuestas, llegamos a lo siguiente:

$$D_1 = \{n_1; n_2\} \text{ y } D_2 = \{m_1; m_2\}, \text{ con } n_1 < n_2, \quad m_1 < m_2 \text{ y } n_1 + m_1 = 27$$

Seguidamente, pedí que voluntariamente y sin obligación de poner su nombre, en un pedazo de papel escriban – trabajando individualmente – una condición que añadida a la condición dada de los dúos (que la suma de sus respectivos números menores es 27) permita determinar dos únicos dúos que cumplan ambas condiciones.

Luego de pocos minutos comenzaron a entregarme los pedazos de papel. Una vez recibidos 17, ya no había más entregas, así que pasamos a analizar algunas de las propuestas. Yo escogí al azar un papel y leí la condición propuesta:

"n_1 impar y m_1 par"

Entonces, con participación de los alumnos, empecé a construir ejemplos de dúos que cumplan las condiciones:

$$n_1 + m_1 = 27\ ;$$

$$n_1 \ \text{impar} \ \text{y} \ m_1 \ \text{par}$$

Obtuvimos:

$$D_1 = \{7; 8\} \ \text{y} \ D_2 = \{20; 21\},$$

$$D_1 = \{11; 12\} \ \text{y} \ D_2 = \{16; 17\},$$

lo cual mostraba que no se obtenía un único par de dúos.

Entonces el autor de la propuesta manifestó que yo no había leído completamente su propuesta, pues él precisaba el intervalo en el que deben estar los números. Volví a mirar la hoja y efectivamente, no había advertido que además de "n_1 impar y m_1 par", estaba escrito más abajo "[12; 16]". Pedí que me aclare lo que eso significaba y el autor de la propuesta explicó que "todos los números deben estar en el intervalo [12; 16]". Aclaré que en tal caso la condición añadida habría sido mejor escribirla:

"n_1 impar, m_1 par y $n_1, n_2, m_1, m_2 \in [12; 16]$."

Luego pedí a los alumnos que examinen si hay solo un par de dúos que cumplen las condiciones

$$n_1 + m_1 = 27\ ;$$

$$n_1 \ \text{impar}, \ m_1 \ \text{par y} \ n_1, n_2, m_1, m_2 \in [12; 16].$$

Pronto indicaron los siguientes pares de dúos

$$D_1 = \{13; 14\} \ \text{y} \ D_2 = \{14; 15\}$$

$$D_1 = \{15; 16\} \ \text{y} \ D_2 = \{12; 13\}$$

Se concluyó entonces que con la condición añadida a la dada no se obtiene un único par de dúos. Una alumna comentó: "además, dando la condición n_1 impar ya resulta innecesario dar la condición m_1 par, porque se deduce de la anterior, ya que su suma es 27, que es un número impar."

Entonces una alumna pidió que se examine la condición que ella había propuesto. Le pregunté si había puesto nombre a su papel; me dijo que no; le pedí que se acerque para identificar el papel que me entregó; y me respondió "mejor la digo desde acá". Obviamente acepté y dijo: "la condición añadida es que n_1 sea par y que m_1 sea múltiplo de 7". Entonces nos pusimos a construir dúos que cumplan las condiciones:

$$n_1 + m_1 = 27;$$

$$n_1 \ \text{par} \ \text{y} \ m_1 \ \text{múltiplo de 7}$$

Advertimos que era preferible precisar con cuántos múltiplos de 7 (o sea valores de m_1) podíamos trabajar y empecé a escribirlos lentamente en la pizarra: 7, 14, 21, 28. Un alumno me interrumpió diciendo que el 28 no podía ser porque se pasa de 27. Una alumna añadió que el 14 tampoco podía ser, porque es par y la suma con n_1 – que se está exigiendo que sea par – debe ser 27, que es impar. Nos quedamos entonces con 7 y 21 y así construimos los siguientes pares de dúos:

$D_1 = \{20; 21\}$ y $D_2 = \{7; 8\}$ ($n_1 = 20$ y $m_1 = 7$ cumplen las condiciones dadas)

$D_1 = \{6; 7\}$ y $D_2 = \{21; 22\}$ ($n_1 = 6$ y $m_1 = 21$ cumplen las condiciones dadas)

Con esto quedó claro que la condición añadida no nos lleva a un único par de dúos.

Otra alumna pidió que analicemos su propuesta. Le pregunté cuál era y dijo inmediatamente: $n_2 = m_1$

Entonces, nos pusimos a encontrar dúos que cumplan con las condiciones:

$$n_1 + m_1 = 27 ;$$

$$n_2 = m_1$$

Solo encontramos

$$D_1 = \{13; 14\} \text{ y } D_2 = \{14; 15\} \quad (n_2 = m_1 = 14)$$

Afirmé: "¡Parece que ahora sí tenemos una condición que, junto con la que teníamos, nos conduce a un único par de dúos!" Se escuchó que a coro dijeron ¡Sí! Pude observar la alegría de la alumna que hizo la propuesta y también cierto escepticismo de algunos alumnos que seguían intentando encontrar otro par de dúos con las condiciones dadas. Me sumé al grupo de los escépticos y pregunté: "¿No será que simplemente hasta ahora no encontramos otro par de dúos que cumplen las condiciones, pero sí existe ese otro par?" La mayoría de alumnos respondió que no existe otro par y entonces repregunté: "¿Cómo podemos estar seguros de que existe un único par de dúos que cumplen las condiciones dadas?" Hubo silencio y alguien dijo un tanto tímidamente "Hay que demostrar…". Confirmé tal afirmación y pedí que buscáramos una relación lógica que nos lleve de las condiciones dadas a la unicidad del par de dúos. Hice notar que esto significaba demostrar la unicidad de n_1, n_2, m_1 y m_2.

En diálogo con los alumnos, concluimos que bastaba demostrar la unicidad de uno de estos números, pues a partir de él se deducirían los otros, también de manera única por la condición inicial dada ($n_1 + m_1 = 27$) y porque n_2 es el consecutivo de n_1, y m_2 es el consecutivo de m_1.

Así, de $n_1 + m_1 = 27$ y $n_2 = m_1$ pasamos a $n_1 + n_2 = 27$

Usando que $n_2 = n_1 + 1$ obtuvimos que $n_1 + (n_1 + 1) = 27$; luego

$$2n_1 + 1 = 27 \qquad 2n_1 = 26 \qquad \text{y finalmente } n_1 = 13.$$

Así, vimos claramente que no había otra posibilidad. Con las condiciones dadas, n_1 **tiene que ser** 13 y en consecuencia $n_2 = 14$; $m_1 = 14$; y $m_2 = 15$. Por consiguiente, el único par de dúos que cumplen las dos condiciones dadas es:

$$D_1 = \{13; 14\} \text{ y } D_2 = \{14; 15\},$$

como lo habíamos sospechado.

En los papeles que me dieron, encontré otras interesantes propuestas de los alumnos que conducen también a un único par de dúos:

i) $n_1 - m_1 = 5$ (Conduce a $D_1 = \{16; 17\}$ y $D_2 = \{11; 12\}$)

ii) $n_1 + n_2 = 33$

$m_1 + m_2 = 23$ (Conduce a $D_1 = \{16; 17\}$ y $D_2 = \{11; 12\}$)

iii) $n_1 = m_1 + 1$ (Conduce a $D_1 = \{14; 15\}$ y $D_2 = \{13; 14\}$)

iv) $m_1 + m_2 = 33$ (Conduce a $D_1 = \{11; 12\}$ y $D_2 = \{16; 17\}$)

Observemos que en la propuesta (ii), tal como está escrita – en dos líneas – no queda claro si el alumno está proponiendo las dos condiciones adicionales a la inicial o cualquiera de ellas. Lo cierto es que con cualquiera de ellas es suficiente, pues una se deduce de la otra, y en consecuencia es innecesario dar las dos condiciones.

Comentarios

1. Como lo dijimos en el artículo del número anterior de UNIÓN, consideramos que es fundamental estimular la competencia de crear problemas, tanto en alumnos como en profesores y hemos mostrado una experiencia en esa línea de trabajo, con futuros profesores de educación básica, que inician su formación. Cabe destacar que a pesar de que varios de los alumnos manifestaron en la primera clase – cuando se presentaron brevemente – que no les gustaba las matemáticas y que no habían tenido experiencias agradables en sus clases de este curso en la educción básica, participaron activamente, se involucraron en "el juego", dieron ejemplos e hicieron propuestas, comentarios y observaciones.
2. En la experiencia didáctica fueron surgiendo problemas que se fueron analizando y resolviendo, y el problema de crear un problema fue tomado con naturalidad y afrontado con entusiasmo. Esto confirma la gran relación que hay entre resolver y crear problemas.
3. El problema trabajado, creado para estimular la competencia de crear problemas, se ubica en un contexto intramatemático, introduciendo una definición nueva (la de dúo). Se va involucrando paulatinamente a los estudiantes en aspectos fundamentales del pensamiento matemático (simbolizar, generalizar, conjeturar, demostrar, encontrar contraejemplos, relacionar lógicamente dos o más proposiciones, resolver ecuaciones) que les dan bases para resolver y crear problemas. Será interesante crear otros problemas, con objetivo similar, en contextos explícitamente lúdicos o tomados de la realidad.
4. La creación de problemas no es una competencia en la que se ponga especial atención en las clases de matemáticas y nos agrada constatar que cinco futuros profesores de educación inicial o educación primaria, en su segunda clase de matemáticas en la Facultad de Educación, hayan hecho propuestas que responden exactamente a lo pedido en la cuarta fase de la experiencia didáctica; es decir, completar la información que se da ante una situación concreta – y nueva –, de modo que se obtenga un objetivo específico pedido. Hay ideas muy interesantes en las otras propuestas que ya no han sido comentadas en este artículo. Si bien no conducen a un único par de dúos, la mayoría de ellas pueden usarse para crear otros problemas relacionados con dúos.
5. Consideramos que la experiencia didáctica expuesta es una manera de estimular y desarrollar los procesos de *selección* y *comprensión* de información cuantitativa, que son algunos de los que se activan al crear problemas, como lo sostienen C. Christou, N. Mousoulides, M. Pittalis, D. Pitta-Pantazi y B. Sriraman en su artículo An Empirical Taxonomy of Problem Posing Processes (*ZDM* 2005, Vol 37 (3)), en el que proponen un modelo con cuatro procesos para describir el pensamiento de los jóvenes al proponer problemas.