UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 165-182
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar

Mosaicos modulares

José María Muñoz Escolano; Antonio M. Oller Marcén

Resumen

En este trabajo presentamos un procedimiento algorítmico para construir conjuntos de baldosas y, dado un entero *n*, asignar una baldosa a cada clase módulo *n*. Con esta asignación es posible construir mosaicos que, además de su valor estético, reflejan en su geometría algunas propiedades aritméticas del producto de enteros módulo *n*. La idea ha sido llevada a la práctica exitosamente con alumnos de bachillerato (16-18 años).

Abstract

In this work we present an algorithmic method to construct sets of tiles and, for every integer *n*, assign a tile to each class modulo *n*. With this assignment it is possible to construct tilings which, in addition to their esthetical value, reproduce in their geometrical structure some arithmetical properties of the multiplication modulo *n*. This idea has been successfully put into practice with high-school students (16-18 years old).

Resumo

Neste travalho apresentamos um método algorítmico para a construção de conjuntos de lajotas e, para cada inteiro *n*, atribuir uma lajota a cada classe módulo *n*. Com esta atribução, é possível construir mosaicos que, além de seu valor estético, refletem em sua estrutura geométrica algumas propriedades da multiplicação módulo *n*. A idéia foi posta em prática com sucesso com alunos do ensino médio (16-18 anos).

Dedicado a José María Gairín con motivo de su 60 cumpleaños

1. Introducción

La actividad desarrollada en este artículo se basa parcialmente en una sesión de trabajo con alumnos de 1º y 2º de Bachillerato (16-18 años) dirigida por los autores en el *Taller de Talento Matemático* (ver De la Cueva y Gil, (2007) o http://www.unizar.es/ttm), organizado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza; así como en una sesión de la *Semana de Inmersión en la Investigación* (http://ciencias.unizar.es/web/inmersionInvestigacion.do), actividad organizada por la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza para alumnos de 1º y 2º de Bachillerato (16-18 años) interesados en cursar estudios universitarios de Matemáticas. Según los Reales Decretos 1513/2006, 1631/2006 y 1467/2007, documentos legislativos vigentes por los que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (entre 6 y 12 años) y Secundaria (entre 12 y 18 años) en todo el Estado español, los contenidos propios del área de Matemáticas se organizan en distintos Bloques de contenidos. Tres de estos bloques presentes en casi todas las etapas educativas son el bloque de *Geometría*, el bloque de *Aritmética y números* y el bloque de *Álgebra*. No obstante, esta separación no es (o al menos no debería ser) sinónimo de aislamiento entre los distintos contenidos, conocimientos y destrezas que se deben desarrollar en las programaciones didácticas de forma interrelacionada. Por esto consideramos muy importante la existencia de actividades que relacionen contenidos provenientes de distintos bloques.

Por otro lado, la existencia de estas relaciones tampoco debería llevar a la absorción de uno de estos bloques por parte de otro. En este sentido, la enseñanza de la Geometría en la educación secundaria suele adolecer desde sus primeros cursos de un proceso de *aritmetización* que se traduce en una fuerte presencia de contenidos de *Geometría métrica*; mientras que en cursos posteriores con la introducción de la *Geometría analítica*, se produce un proceso de *algebrización*. De esta forma, gran parte de los problemas y actividades vinculadas al saber geométrico que aparecen en los textos escolares en la Educación Secundaria se resuelven realizando operaciones aritméticas para determinar la cantidad de magnitud de un determinado elemento geométrico como la longitud, el área, el volumen o la amplitud; o mediante la manipulación de expresiones algebraicas.

Es interesante, pues, diseñar actividades que vayan en el sentido contrario; esto es, que permitan interpretar desde un punto de vista geométrico distintas cuestiones y problemas de índole aritmética o algebraica. En concreto, la actividad que presentamos, pretende estudiar propiedades de operaciones aritméticas en términos de propiedades de ciertos objetos geométricos. Esto supone la profundización en los contenidos aritméticos y geométricos involucrados, la construcción y el estudio de un modelo geométrico apropiado y la traducción entre ambos contextos. El objeto fundamental de esta actividad es elaborar y estudiar desde un enfoque lúdico y ameno distintos mosaicos modulares; esto es, mosaicos creados empleando las tablas (o partes de ellas) de la suma y de la multiplicación de los residuos módulo *n*, un entero cualquiera.

La aritmética modular (a veces llamada aritmética del reloj) no está incluida como un contenido en el currículo oficial de la Educación Secundaria española. Sin embargo, este tipo de contenidos al nivel que se plantean no presenta una elevada dificultad conceptual para los alumnos participantes en estas sesiones y poseen un alto factor de motivación, puesto que estos perciben que están trabajando con contenidos “nuevos” y “diferentes” a los planteados en sus respectivos institutos. Además, la introducción de los conjuntos de números finitos y de su aritmética en el aula de educación secundaria es el primer paso que permite el posterior desarrollo de unidades didácticas y actividades de un tópico matemático de amplia repercusión social como es la Criptografía (Caballero y Bruno, 2004, 2007).

Al margen del interés didáctico de introducir estos contenidos de aritmética modular y de plantear actividades que permitan de algún modo *geometrizar* la aritmética, también la actividad permite relacionar dos áreas tan aparentemente alejadas como son las matemáticas y el arte (Kalajdzievski, 2008). Las conexiones entre estas dos áreas suponen una importante herramienta de trabajo en el aula de matemáticas. La relación entre ambas disciplinas se puede plantear desde dos vías distintas: mediante el análisis matemático de distintos elementos presentes en obras artísticas como cuadros, esculturas o producciones musicales; o mediante la creación de “obras artísticas” aprovechando algún motivo geométrico o topológico o siguiendo algún patrón, pauta o regularidad de naturaleza matemática. Esta primera vía, la de relacionar con finalidades didácticas la matemáticas con el arte analizando matemáticamente distintas obras artísticas, se ha sido explorada muy profusamente en multitud de trabajos, publicaciones y actividades de aula disponibles (ver por ejemplo en esta misma revista, los artículos de Pérez (2008), Meavilla (2006) o Mora (2007)). La actividad que aquí proponemos va en la otra dirección; esto es, aprovechar unos objetos matemáticos, en este caso, unos patrones numéricos particulares, para generar una producción artística como distintos mosaicos.

Este tipo de actividades no son ajenas al alumnado; por ejemplo, el coloreado de dibujos siguiendo patrones numéricos se observa en muchos pasatiempos infantiles tradicionales. Son ampliamente conocidas una gran cantidad de maneras en que objetos matemáticos se utilizan para la creación de obras artísticas: quizás unas de las más celebradas sean las composiciones y teselaciones del plano de M.C. Escher. Otro ejemplo algo más sofisticado del interés matemático que posee la creación mosaicos mediante el diseño de teselas y la aplicación de unos determinados patrones numéricos son las teselaciones de Truchet (Smith y Boucher (1987) o Pickover (1989)).

El uso de la aritmética modular como origen de patrones numéricos para la creación de mosaicos con fines educativos ha sido abordado con anterioridad por Forseth y Troutman (1974) y, más recientemente, por Burton (2002), dirigido a alumnado de Educación Secundaria y por Ruiz (2004), para maestros en formación. Nuestra propuesta, enfocada a alumnos de Bachillerato y futuros estudiantes del Grado de Matemáticas guarda muchas similitudes con éstas, pero también algunas especificidades y diferencias que se abordan en secciones posteriores.

1.1. El contexto

El contexto general en que se desarrolla esta actividad es el siguiente:

- En primer lugar, se señala que los alumnos participantes lo hacen de manera voluntaria, por lo que es un alumnado con un alto grado de implicación y participación en cada una de las sesiones lo que posibilitó que la tarea se realizara satisfactoriamente.
- En una sesión anterior se habían presentado a los alumnos algunos aspectos geométricos “clásicos” de los mosaicos y teselaciones del plano con polígonos regulares; sobre los movimientos del plano como las simetrías y la obra de M.C. Escher.
- En otra sesión se introdujeron los contenidos básicos y la notación típica de la aritmética modular, en esa ocasión enfocado al uso de estos cuerpos finitos en criptografía.

En este contexto surge la idea de conectar ambas sesiones mediante una actividad que relacione números y mosaicos.

1.2. Objetivos de la actividad

- Profundizar de una manera lúdica en el estudio de diferentes aspectos básicos de la aritmética modular, como son: Operaciones: multiplicación, suma, opuesto de…, propiedades de las operaciones (conmutatividad de la suma y del producto) y unidades y divisores de cero.

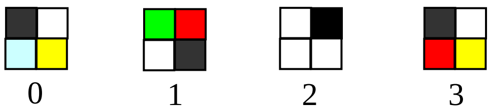
- Profundizar de una manera lúdica en el estudio de diferentes aspectos básicos de la geometría, como son: mosaicos y teselaciones, simetrías, figuras simétricas.
- Relacionar aspectos propios de la aritmética con otros propios de geometría.
- Elaborar mosaicos como aplicación de la aritmética modular.
- Analizar las simetrías presentes en los mosaicos modulares y relacionarlas con ciertas propiedades del producto de residuos.
- Aplicar conocimientos de combinatoria para la realización de recuentos.
- Realizar operaciones no conmutativas de entes no numéricos.
- Plantear un sistema de notación adecuado para comunicar resultados de manera eficiente y valorar su importancia.
- Apreciar que existen relaciones entre materias de naturaleza aparentemente distinta como son las matemáticas y el arte.
- Trabajar en equipo. Aportar ideas y criticar constructivamente las de los demás.

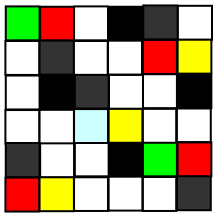
2. Planteamiento del problema

En los primeros minutos de la sesión se revisan rápidamente los contenidos de aritmética modular necesarios para realizar la actividad. Se recuerda el concepto de residuo módulo n, la suma y la multiplicación módulo n.

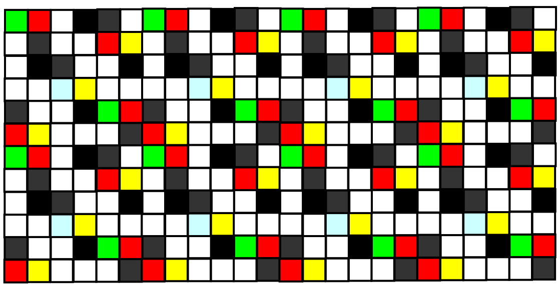
Posteriormente se presenta la noción de mosaico modular: Un *mosaico modular* es el mosaico formado cuando en una tabla o parte de una tabla de sumar o de multiplicar (suprimiendo en este caso la primera fila y la primera columna de ceros) se sustituyen cada uno de los números presentes por una baldosa diferente. Por ejemplo, en el caso de las congruencias módulo 4 y con unas baldosas como éstas:

×	0	1	2	3
0	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
1	~~0~~	1	2	3
2	~~0~~	2	0	2
3	~~0~~	3	2	1





Al repetir el mosaico modular elemental varias veces, obtenemos mosaicos modulares mucho más “atractivos” (ver figura siguiente):



Evidentemente, al margen de la distribución de los números en la tabla de multiplicar, el mosaico tendrá un mayor o menor valor estético y poseerá más o menos simetrías dependiendo del tipo de baldosas que se utilicen y de la forma en que las asignemos a los números.

El problema que se plantea es el siguiente:

> *¿Se puede encontrar una forma de diseñar y asignar baldosas que sea general para todas las tablas de multiplicar y que los mosaicos que aparezcan sean lo suficientemente "artísticos"?*

2.1. Criterios para las baldosas elementales

Es necesario fijar unos criterios tanto para diseñar baldosas adecuadas para la construcción de mosaicos modulares como para la asignación de las mismas a los distintos residuos. La elección de estos criterios puede ser consensuada en clase, aunque en este caso fueron indicados directamente por el profesor en el aula.

Se plantean 10 reglas que se deben seguir a la hora de diseñar y asignar las baldosas: las 5 primeras hacen referencia al proceso de diseño mientras que las 5 restantes se centran en las tareas de asignación de cada baldosa con su correspondiente residuo:

Reglas para diseñar

1. Las baldosas son cuadradas divididas a su vez en celdas cuadradas más pequeñas de dimensiones 2x2, 4x4, 8x8…
2. Las baldosas se colorearán pintando las celdas de blanco o de negro.
3. Las baldosas serán simétricas respecto las dos diagonales del cuadrado.
4. Siempre existirá una baldosa negra y una baldosa blanca.
5. Para el resto de baldosas, siempre ocurre que la mitad de las casillas de cada baldosa serán blancas y la otra mitad, negras.

Reglas para asignar

6. Cada número tendrá asignada una baldosa distinta a la de los demás.
7. Al número cero se le asignará siempre una baldosa completamente negra.
8. Si un mismo número es a la vez su opuesto (por ejemplo, 2 módulo 4 ó 4 módulo 8) se le asigna la baldosa blanca.
9. Las baldosas asignadas a dos números opuestos; esto es, aquellos en los que su suma sea cero (por ejemplo, 3 y 1 módulo 4), serán *baldosas complementarias*. Por baldosas complementarias entendemos que las casillas blancas de una son las casillas negras de la otra y viceversa.
10. Las baldosas asignadas a los divisores de cero serán además simétricas horizontal y verticalmente.

Las razones que motivan la elección de estos criterios, muchos de ellos ya presentes en el trabajo de Forseth y Troutman (1974), son variadas:

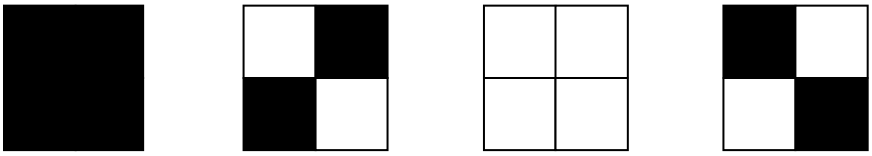
- Las condiciones 1 y 2 vienen motivadas para facilitar la implementación de la actividad en clase;
- Las condiciones 3, 4 y 5 están justificadas para que los mosaicos modulares resultantes sean lo suficientemente interesantes y se conserven las simetrías presentes en las tablas de multiplicar.

- Las condiciones 7, 8 y 9 de “complementación” indican de una manera gráfica que la suma de los dos números opuestos es cero mediante la superposición de las baldosas;
- La condición 10 obedece al hecho de enriquecer el trabajo introduciendo el concepto de divisor de cero; esto es, aquel número cuyo producto por otro número no nulo sea cero. Destacamos que la existencia de divisores de cero en conjuntos numéricos es novedosa para la mayoría de los alumnos y en este caso tendrán un especial protagonismo puesto que se identificarán visualmente al contemplar las baldosas.

3. Búsqueda de casos particulares

En primer lugar se plantea encontrar las baldosas de tamaño 2×2 que cumplan los criterios indicados anteriormente.

Para ello, un primer paso es la búsqueda de todas las baldosas posibles de tamaño 2×2 y acordar entre todo el grupo una manera sistemática para ir obteniendo cada una de ellas. Resulta relativamente sencillo hallar las 16 baldosas 2×2, de las cuales sólo 4 de ellas satisfacen lo requerido:

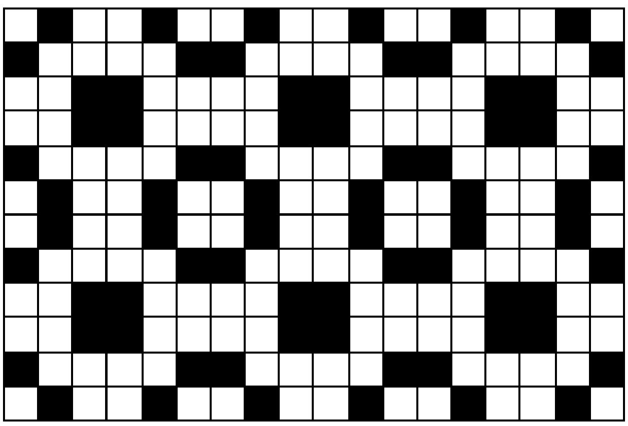


3.1. Mosaicos modulares módulo 4

Con estas cuatro baldosas básicas podemos realizar una asignación con cada uno de los residuos módulo 4 de manera obvia, tal y como están ordenadas en el gráfico anterior:

- 0, baldosa negra
- 2, baldosa blanca
- 1 y 3, con las otras dos baldosas.

De esta manera, el mosaico modular (módulo 4) quedaría como en la figura adjunta:

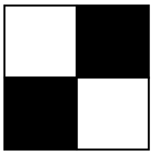


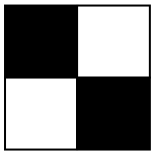
Notemos que la asignación de baldosas con el 1 y el 3 no es única, puesto que podríamos haberlas asignado de manera contraria, de forma que el mosaico modular resultante sería distinto.

3.2. Mosaicos modulares módulo 3

También podemos aprovechar las baldosas elementales construidas para realizar el mosaico modular módulo 3, con la siguiente asignación de baldosas:

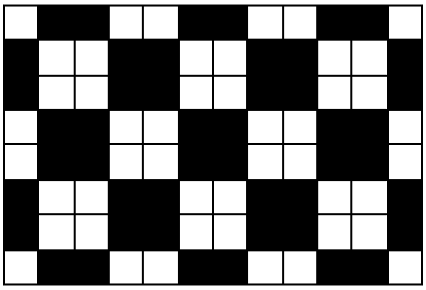

0 (mód 3)


1 (mód 3)


2 (mód 3)

Cuyo mosaico modular módulo 3 es el siguiente:

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1



4. Generalizando

Después de haber trabajado los dos casos particulares anteriores parece natural tratar de extender la idea a módulos mayores que 4. La primera dificultad que se observa es obvia, no tenemos suficientes baldosas de tamaño 2x2 que cumplan las condiciones con las que trabajar por lo que debemos aumentar el tamaño de las mismas para que aparezca una mayor variedad de diseños. Por lo tanto, hemos de construir baldosas de tamaño 4x4 (y posteriormente 8x8, etc…) que satisfagan las condiciones de la Sección 2.1. Esta necesidad conlleva tres problemas principalmente:

1. El primer problema surge respecto a cómo se construyen estas baldosas. En este caso no podemos pintarlas todas y posteriormente seleccionar las que cumplen las condiciones exigidas puesto que un rápido cálculo nos muestra que existen 216 baldosas diferentes de tamaño 4x4, lo que hace inviable esta tarea. Este primer problema se solucionará definiendo una manera de “multiplicar” baldosas, esto nos permitirá obtener nuevos conjuntos de baldosas a partir de los ya construidos.
2. El segundo problema es el de la ordenación y la notación. Al tener un mayor número de baldosas a nuestra disposición parece conveniente fijar un sistema de representación adecuado que nos permita referirnos a una baldosa concreta sin necesidad de dibujarla y, a ser posible, que permitan dotar al conjunto considerado de un orden.
3. Finalmente, el tercer problema al que nos enfrentamos es el de la asignación de una baldosa a cada residuo módulo *n*. En los ejemplos anteriores ha habido siempre un ligero grado de arbitrariedad, pero al aumentar el número de baldosas los grados de libertad a la hora de efectuar la asignación aumentan

mucho. Sería pues deseable fijar un método para asignar a cada baldosa un residuo de forma mecánica.

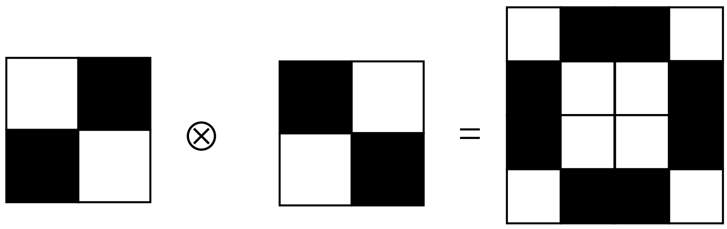
Las siguientes secciones mostrarán una posible manera de afrontar y, en gran medida, superar estas dificultades.

4.1. Operando con baldosas

Aunque en un principio sólo aplicaremos esta operación a las baldosas de tamaño 2×2 que tenemos ya construidas, es útil para el desarrollo posterior presentarla en la forma más general posible. Denotamos esta operación mediante el signo ⊗ y se define de la manera siguiente:

> Supongamos que se tienen dos baldosas *A* y *B* de tamaños cualesquiera (por ejemplo $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente), entonces se obtiene una nueva baldosa $A \otimes B$ de tamaño $mn \times mn$ mediante el siguiente procedimiento:
> - Cada celda negra de *A* se sustituye por una copia de *B*, y
> - Cada celda blanca de *A* se sustituye por una copia de la complementaria de *B*.

Por ejemplo, se tiene que:

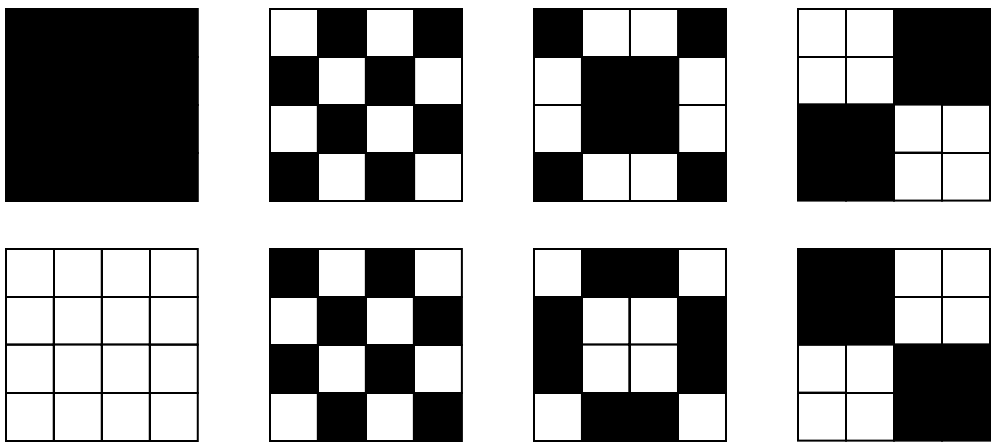


4.2. Las baldosas de tamaño 4×4. Necesidad de ordenación y notación

Empleando la operación que acabamos de presentar buscamos las distintas baldosas de tamaño 4×4 que se obtienen al multiplicar de todas las formas posibles dos de las baldosas de tamaño 2×2 que hemos construido antes.
Algunas observaciones interesantes sobre este proceso y las baldosas que aparecen:

1. Aparecen 8 baldosas distintas, cada una de ellas repetida 2 veces.
2. Las baldosas que se obtienen cumplen los requisitos que hemos fijado en el planteamiento.
3. Se observa que el producto no es conmutativo.

Las baldosas obtenidas en el proceso son las siguientes:

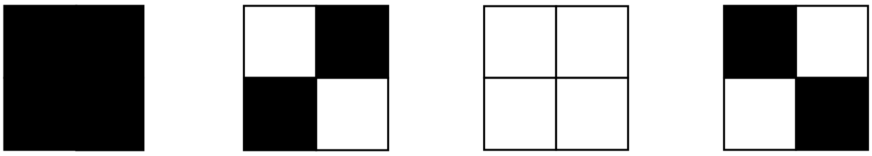


Puesto que son 8 las baldosas obtenidas (y que exactamente 4 de ellas deben corresponder a divisores de 0) surge de manera natural la idea de utilizarlas para trabajar módulo 8, pero para hacer esto es necesario asignar a cada una de las baldosas la clase de un entero módulo 8. Sabemos que a la baldosa negra le corresponde la clase del 0 y a la blanca la clase del 4. A la hora de asignar las otras seis baldosas y pese a los criterios que hemos fijado antes, existe una cierta arbitrariedad a la hora de llevar a cabo dicha asignación. Para solucionar esta dificultad hemos de fijar un procedimiento para la construcción de las baldosas que nos las proporcione ya ordenadas de forma adecuada. Además, junto con esto surge también la necesidad de encontrar una notación adecuada para referirnos a ellas.

4.3. Fijando la notación

Denotaremos cada baldosa mediante un par ordenado. La primera componente indicará el tamaño de la baldosa, en concreto el número de casillas que tiene en cada lado. La segunda componente corresponderá con el orden en que dicha baldosa aparece en el proceso de construcción (comenzando en el 0).

Con estas indicaciones las baldosas básicas (las de tamaño 2×2) se denotan del siguiente modo:



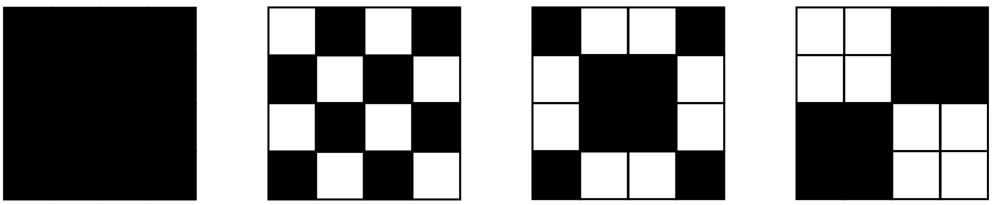
(2,0) (2,1) (2,2) (2,3)

4.4. El algoritmo de construcción y ordenación de las baldosas

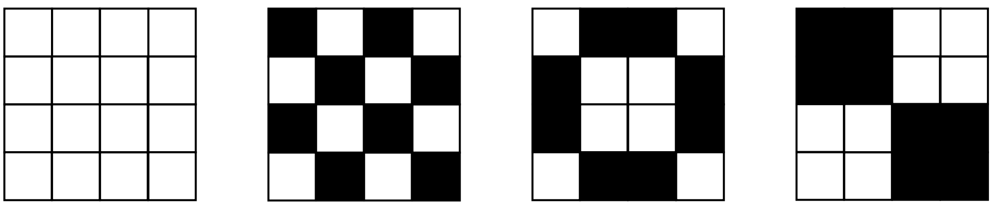
Comenzaremos describiendo explícitamente el primer paso del algoritmo. En este paso se construyen las 8 baldosas de tamaño 4×4. Se tiene que:

(4,0)=(2,0)⊗(2,0)	(4,4)=complementaria de (4,0)
(4,1)=(2,0)⊗(2,1)	(4,5)=complementaria de (4,3)
(4,2)=(2,1)⊗(2,1)	(4,6)=complementaria de (4,2)
(4,3)=(2,1)⊗(2,0)	(4,7)=complementaria de (4,1)

En concreto, y recordando cuáles eran las baldosas de tamaño 4×4, la asignación es esta:



(4,0) (4,1) (4,2) (4,3)

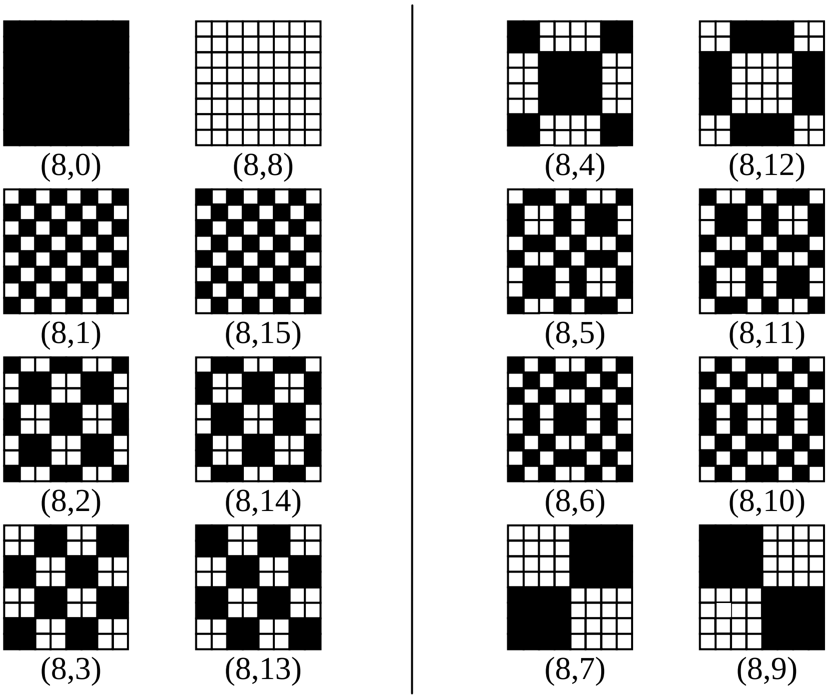


(4,4) (4,7) (4,6) (4,5)

En general, supongamos que hemos construido y ordenado las baldosas de tamaño $k{\times}k$. Entonces para construir las de tamaño $2k{\times}2k$ se procede del siguiente modo:

1. Tomamos la primera mitad de las baldosas de tamaño $k{\times}k$ en orden creciente y las multiplicamos por la izquierda con la baldosa (2,0). Esto nos proporciona la primera cuarta parte de las baldosas de tamaño $2k{\times}2k$.
2. A continuación tomamos de nuevo la primera mitad de las baldosas de tamaño $k{\times}k$, esta vez en orden decreciente, y las multiplicamos por la izquierda con la baldosa (2,1). De esta manera habremos obtenido la segunda cuarta parte de las baldosas de tamaño $2k{\times}2k$.
3. Finalmente se construyen las baldosas complementarias de las que acabamos de obtener. Para ordenarlas se tiene en cuenta que a la baldosa blanca debe corresponderle la clase de $2k$ módulo $4k$ y que a baldosas complementarias les corresponden clases opuestas módulo $4k$.

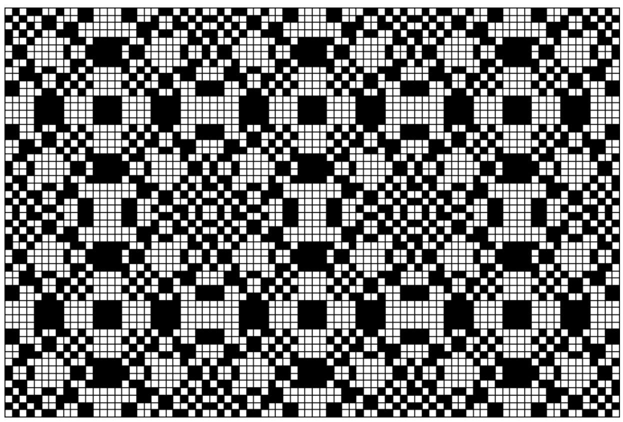
Siguiendo el procedimiento anterior, las baldosas de tamaño 8×8 son las siguientes:



4.5. Mosaicos modulares módulo 8.

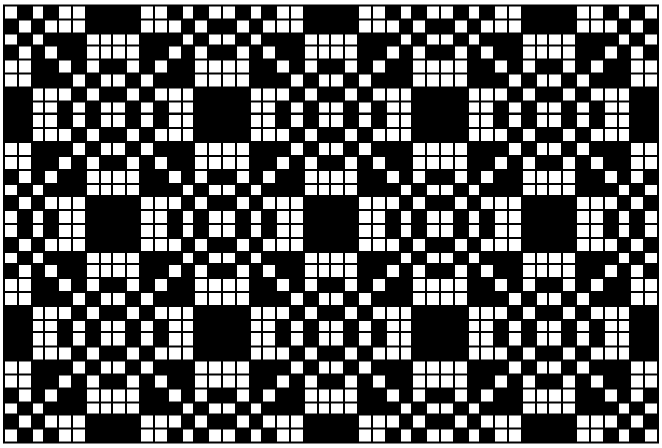
Una vez que hemos construido las baldosas de tamaño 4×4 podemos emplearlas para construir el mosaico modular módulo 8. Queda así:

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1



También podemos plantearnos estudiar el mosaico resultante al considerar únicamente el conjunto de las unidades módulo 8:

×	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1



4.6. Trabajando con módulos cualesquiera

Una vez que tenemos un procedimiento para construir conjuntos de baldosas arbitrariamente grandes estamos en disposición de poder construir los mosaicos modulares correspondientes a módulos que no sean una potencia de 2. Como queremos utilizar baldosas provenientes de nuestro proceso de fabricación, tendremos que determinar en función del módulo n el tamaño que tendrán las baldosas a utilizar. Fijado n, denotaremos mediante $\varphi(n)$ el número de unidades módulo n (esta conocida función recibe el nombre de *phi de Euler*), en consecuencia, el número de divisores de cero será $n-\varphi(n)$.

Una primera condición, fruto del hecho de que en cada paso del algoritmo obtenemos $2k$ baldosas, es que deberá cumplirse la desigualdad $n\leq 2k$. Ahora bien, de esas $2k$ baldosas, k corresponden por su forma a divisores de cero; por lo que deberá verificarse que $n-\varphi(n)\leq k$. Como además las k restantes deben corresponder a unidades, también se tendrá que cumplir la condición $\varphi(n)\leq k$.

Si juntamos todo lo anterior concluimos que el k buscado será la menor potencia de 2 que cumpla:

$$\boxed{n-k\leq\varphi(n)\leq k}$$

y entonces las baldosas necesarias para construir el mosaico modular módulo n serán las de tamaño $k\times k$.

La siguiente cuestión a solventar es la de cómo asignar ahora las clases módulo n con las baldosas. Para ello seguimos el siguiente proceso:

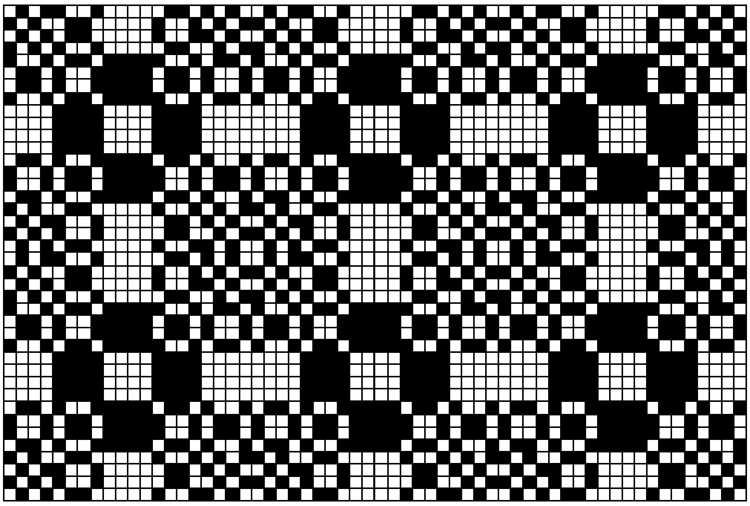
1. A la clase del 0 le corresponderá la baldosa negra y, si n es par, a la clase de $n/2$ le corresponderá la baldosa blanca.
2. Tomamos las unidades menores que $n/2$ y les asignamos las baldosas “admisibles” en orden de aparición.
3. Tomamos los divisores de cero menores que $n/2$ y les asignamos las baldosas que puedan corresponder a divisores de cero también en orden de aparición.
4. A las clases mayores que $n/2$ se les asigna la baldosa complementaria de la correspondiente a la clase opuesta.

Veamos un ejemplo. Queremos construir el mosaico modular módulo 6, si determinamos k con la fórmula anterior se obtiene que k=4 y, por lo tanto, hemos de trabajar con las baldosas de tamaño 4×4. Además, siguiendo las instrucciones anteriores la asignación de baldosas es la siguiente:

(4,0) ↔ 0 (mód 6)	(4,4) ↔ 3 (mód 6)
(4,1) ↔ 1 (mód 6)	(4,6) ↔ 4 (mód 6)
(4,2) ↔ 2 (mód 6)	(4,7) ↔ 5 (mód 6)

Una vez realizada la asignación entre baldosas y clases módulo 6 estamos ya en disposición de elaborar el mosaico modular correspondiente a la tabla de multiplicar módulo 6:

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1



5. Estudiando las simetrías de los mosaicos

Una vez obtenido el mosaico modular correspondiente a la tabla de multiplicar modulo un entero *n*, puede ser interesante estudiar su geometría algo más detenidamente. En particular nos vamos a concentrar en la búsqueda de ejes de simetría y de centros de giro. Además trataremos de descubrir el origen de dichas simetrías; algunas tendrán su origen en las simetrías existentes en la tabla de multiplicar módulo *n* y otras en la elección que hemos hecho de las baldosas.

5.1. Simetrías provenientes de la tabla de multiplicar

A simple vista es fácil observar que la tabla de multiplicar módulo *n* es siempre simétrica respecto de sus dos diagonales. La simetría con respecto a la diagonal principal es debida a la conmutatividad del producto, mientras que la simetría respecto a la otra diagonal se debe al hecho de que el producto de dos enteros coincide con el de sus opuestos.

Como todas nuestras baldosas son, por construcción, simétricas respecto a ambas diagonales; estas simetrías se conservarán en nuestro mosaico. De este modo nuestros mosaicos tendrán siempre dos redes perpendiculares de ejes de simetría, correspondientes a las diagonales del mosaico modular fundamental.

Además, como siempre que se cortan dos ejes de simetría se obtiene un centro de giro de 180º, nuestros mosaicos poseerán también dichos centros de giro en todos los puntos en los que se corten los ejes de simetría antes mencionados.

5.2. Simetrías provenientes de la elección de las baldosas

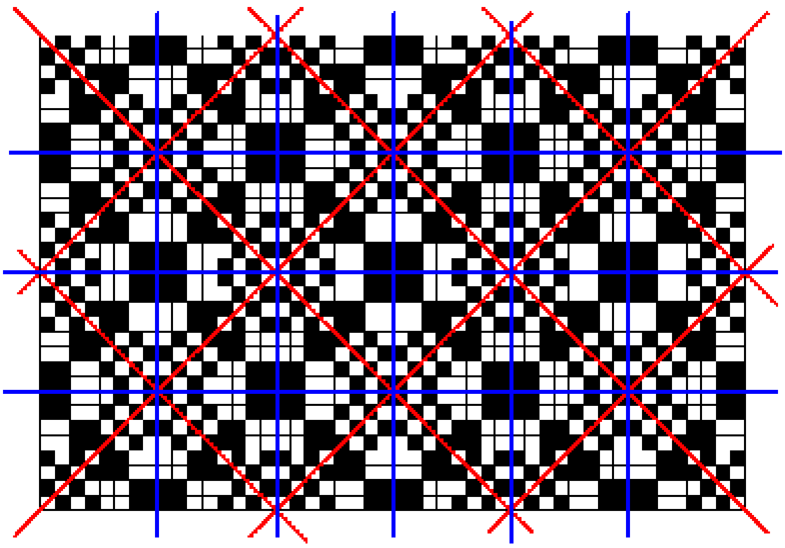
Recordemos que a clases opuestas les corresponden baldosas complementarias. Es fácil observar además que en el caso de nuestras baldosas (si no corresponden a divisores de cero) el hecho de ser complementarias implica el ser simétricas horizontal y verticalmente la una de la otra. Esto hace que, si en nuestra tabla de multiplicar no aparecen divisores de cero (o si sólo hay un divisor de cero no nulo, lo que sólo sucede módulo 4), tengamos también simetría horizontal y vertical en el mosaico modular fundamental. Esta simetría hace que, en nuestro mosaico, aparezcan otras dos redes perpendiculares de ejes de simetría; en este caso horizontales y verticales. Nuevamente en los puntos de intersección de estos ejes surgen centros de giro de 180º; sin embargo existen puntos en los que confluyen 4 ejes de simetría: las dos diagonales, el vertical y el horizontal. En esos puntos el centro de giro será de 90º.

Si en la tabla de multiplicar aparecen divisores de 0, como los opuestos no son simétricos entre sí (basta ver las baldosas correspondientes) perdemos los ejes horizontales y verticales. Sin embargo los centros de giro de 180º que aparecerían si existieran dichos ejes sí que aparecen.

5.3. Grupos de simetría de los mosaicos

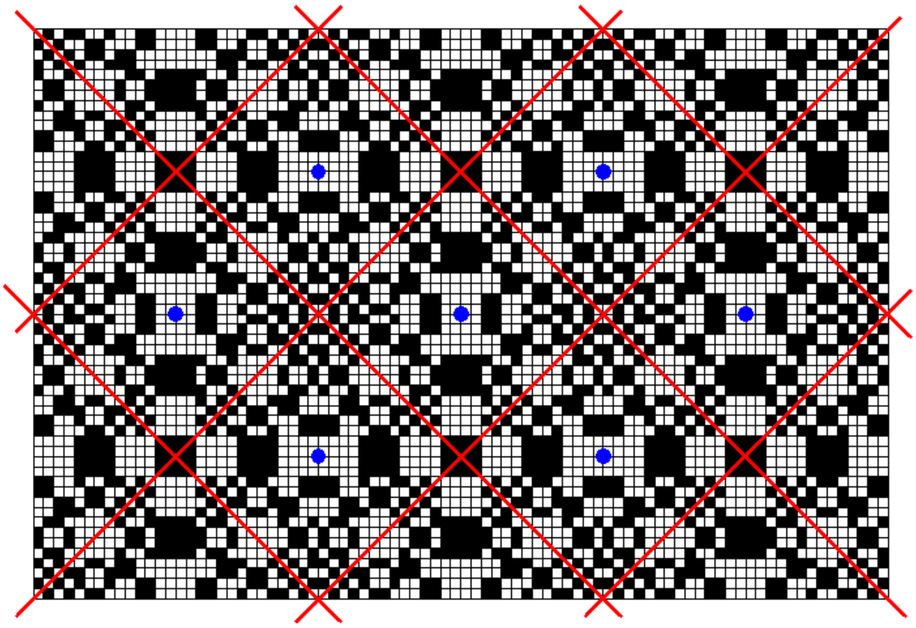
Recapitulando la información presentada en los párrafos anteriores, y siguiendo la nomenclatura estándar para denotar los distintos grupos cristalográficos planos, podemos indicar cuáles son los obtenidos en los mosaicos que hemos construido en esta actividad. En concreto son dos (de los 17 posibles):

- p4m: Obtenemos este grupo en los mosaicos construidos cuando no hay divisores de cero (por ejemplo, si *n* es primo o si sólo se consideran las unidades módulo *n*) o bien cuando *n*=4.
  En la siguiente figura, por ejemplo, se muestran los ejes de simetría del mosaico modular módulo 5. En este caso no existen divisores de cero no nulos. En rojo aparecen los ejes de simetría provenientes de la tabla de multiplicar y en azul los provenientes de la elección de las baldosas. Los centros de giro son los puntos de intersección de dos (giro de 180º) o cuatro (giro de 90º) de dichos ejes.



- cmm: Obtenemos este grupo siempre que existan al menos dos divisores de cero no nulos.
  Por ejemplo, en el caso del mosaico modular módulo 8 que aparece en la figura siguiente, en el que sí que aparecen divisores de cero, siguen observándose los

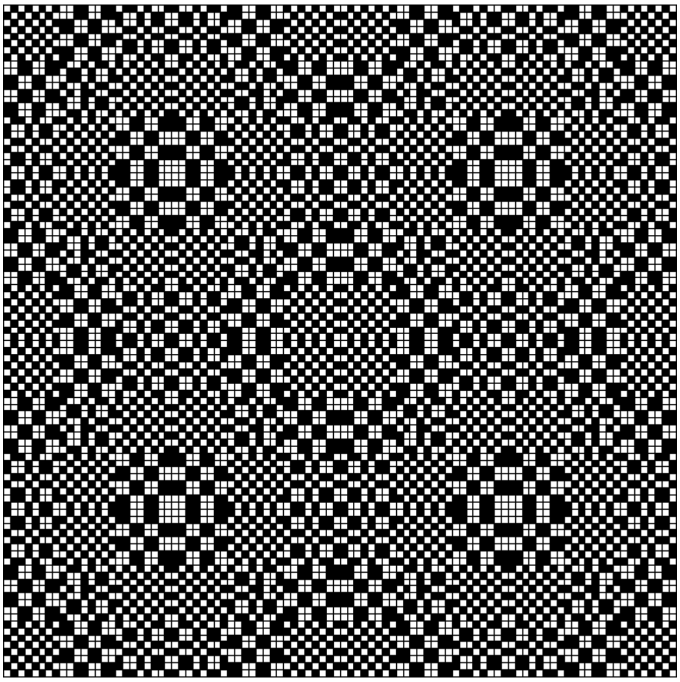
ejes de simetría (en color rojo) provenientes de la tabla de multiplicar junto con los centros de giro de 180º que aparecen en los puntos de intersección de dichos ejes. Además, y aunque los ejes horizontales y verticales han desaparecido, se mantienen centros de giro de 180º marcados en color azul.



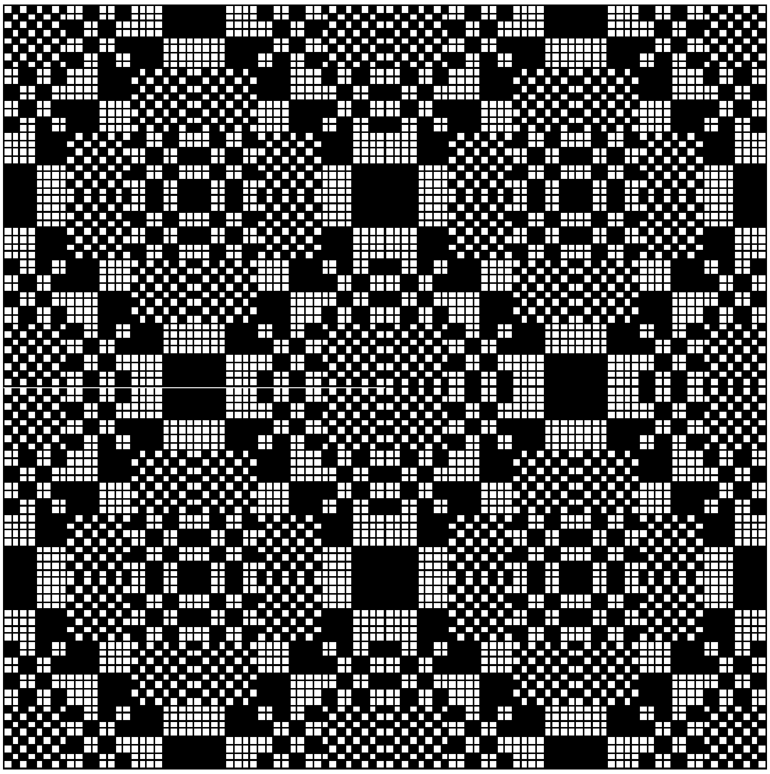
6. Ejemplos

En secciones anteriores hemos mostrado los mosaicos modulares asociados a las tablas de multiplicar módulo 3, módulo 4, módulo 5, módulo 6 y módulo 8; así como el correspondiente a la tabla de multiplicar de las unidades módulo 8. En esta sección vamos a presentar algunos ejemplos más.

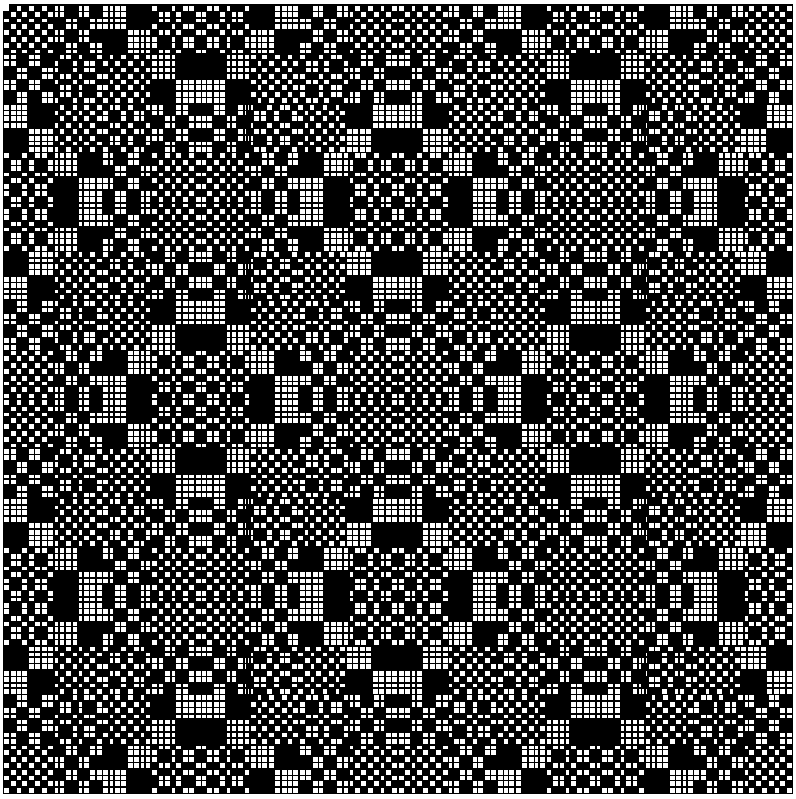
6.1. Módulo 7



6.2. Unidades módulo 9



6.3. Unidades módulo 16



7. Metodología y recursos

En este apartado se comentan brevemente aspectos acerca de la metodología seguida durante la implementación de la actividad así como los recursos y materiales empleados en la misma.

El propósito de la actividad es obtener la máxima participación posible y que todos los alumnos puedan intervenir y actuar independientemente del nivel de conocimientos que posean. En este sentido, se distinguen diversos niveles de dificultad en las tareas planteadas que permiten diversos tipos de implicación en las mismas:

- Existen tareas elementales de índole procedimental, como la búsqueda de las baldosas 2x2 y la construcción en papel de baldosas y mosaicos.
- Tareas de grado medio, como la elaboración de las tablas de multiplicar, la obtención de nuevas baldosas mediante el producto de dos de ellas o el estudio de las simetrías que aparecen en los mosaicos.
- Tareas de un nivel más elevado, como la discusión acerca de las razones de la existencia de esas simetrías, de la no conmutatividad del producto de baldosas, de los divisores de cero o la búsqueda de una notación adecuada para una generalización formal.

El aula se organizó en grupos de 3 y 4 alumnos. Las tareas se trabajaron en cada grupo y los profesores dirigieron la actividad mediante paulatinas puestas en común con el resto de la clase. Reseñar que los criterios de baldosas y la operación producto de las mismas son presentados por el profesor, mientras que la notación aplicada surge de forma natural al comunicar los resultados en las puestas en común. Los medios empleados para llevar a cabo esta actividad son, en primer lugar, hojas cuadriculadas para la elaboración por parte de los alumnos de las baldosas y mosaicos más sencillos, mientras que posteriormente se entrega a cada grupo una bolsa con diversas baldosas ya construidas en cartulina para facilitar el trabajo de realizar el producto de baldosas de mayor tamaño y la elaboración de mosaicos más complejos mediante pegado de las mismas sobre cartulinas pautadas de tamaño DINA3.

Por motivos organizativos no se emplearon medios informáticos o programas que permitieran la creación de baldosas y mosaicos en el aula. La opción *Autoforma* del procesador de textos *Microsoft Word* y el programa *Micrografx Draw* son los recursos que hemos empleado en la elaboración de las fichas ofrecidas a los alumnos y los gráficos que se adjuntan en este artículo.

También cabe destacar que existen en la red algunas aplicaciones Flash que permiten la creación de distintos mosaicos modulares como *Cayley Quilt Maker* (Lopez, 2010). Sin embargo, este applet no es eficiente en el diseño de nuestras baldosas, y además no se adecúa a la elaboración de los mosaicos generales a partir de una tabla de multiplicación que se proponen en nuestra actividad. Invitamos al lector a sugerir algún otro tipo de programa o software informático que permita la automatización de este proceso de diseño de mosaicos.

8. Conclusiones finales

Como se mencionó en la introducción, la creación de mosaicos modulares es un tópico que ha sido abordado con anterioridad en otras propuestas de aula. Sin embargo, en este trabajo hemos presentado un nuevo procedimiento para construir mosaicos a partir de las tablas de multiplicar módulo *n* que, a nuestro entender, posee ventajas frente a los antecedentes estudiados y se ajustan mejor al tipo de alumnado al que iba dirigido. En concreto:

- En esta actividad se llega a construir mosaicos para todo módulo y no solo para unos casos particulares, como en las anteriores.
- La construcción de mosaicos es simple y manipulable puesto que las baldosas básicas son muy elementales.
- Se emplean métodos o criterios fijos para la construcción de baldosas; esto es, se busca que el diseño de las baldosas no dependa únicamente del gusto estético del autor.
- Existe una sistematización; esto es, se muestra una forma de asignación generalizada entre baldosa y residuo.
- En los mosaicos resultantes aparecen distintas simetrías de manera natural, sin necesidad de girar el mosaico elemental cuando se aplica la repetición. Además muchas de las actividades de otras propuestas (principalmente la de Burton (2002)) están basadas en la tabla de sumar, con lo cual todos los mosaicos generados son esencialmente iguales. Todo esto supone una ventaja debido a que: el mosaico posee un mayor valor estético a mayor número de simetrías y que las simetrías del mosaico son claramente interpretables en términos de las propiedades del producto de residuos y de la elección de las baldosas.
- En la actividad, no solo se resuelven tareas directas de elaboración de mosaicos, sino que surgen otro tipo de problemas que el alumno debe abordar y decisiones que debe tomar. Por lo tanto, el alumno no adopta un papel de sujeto pasivo que simplemente contempla los mosaicos realizados o a lo sumo reproduce las baldosas indicadas en cartulina para formar el mosaico en el aula.

Finalmente y a modo de conclusión, indicamos que se alcanzaron en gran medida los objetivos planteados en el diseño de la actividad durante la implementación de esta sesión en el aula. Las distintas tareas fueron muy bien recibidas por parte de todos los alumnos, que se sintieron implicados en la creación de mosaicos mediante unos objetos matemáticos así como el debate suscitado en cuanto a la necesidad de generalizar los casos particulares, asignar baldosas a diferentes residuos y a la construcción de baldosas de mayor tamaño a partir de baldosas más pequeñas, explorando las propiedades del producto de baldosas.

Bibliografía

Burton, Laurie (2002): Math Art Posters. *The Oregon Mathematics Teacher*. September 2002, 31 – 36.

Caballero Gil, Pino; Bruno Castañeda, Carlos (2004): Educación Matemática a través de la Criptografía. *Revista UNO*, 36, 39 – 54 .

Caballero Gil, Pino; Bruno Castañeda, Carlos (2007): A cryptologic way of teaching mathematics. *Teaching Mathematics and its Applications*, 26, 2 – 16.

De la Cueva, Fernando; Gil, Elena (2007): Workshop of Mathematical Talent, a Wonderful Educational Experience. En Pugalee, Rogerson & Schinck (edts.) *Proceedings of the Ninth International Conference Mathematics Education in a Global Community,* The Mathematics Education into the 21st Century Project and The University of North Carolina Charlotte. 149 – 154.

Forseth, S; Troutman, A. (1974): Designs Exhibiting Mathematical Structure. *School Science and Mathematics*, 74.
Kalajdzievski, S. (2008): *Math and Art. An introduction to Visual Mathematics*. CRC Press. New York.
Lopez, Scott (2010): *Cayley Quilt Maker*. Aplicación Java-Scrip de creación de mosaicos modulares. Disponible en: http://www.wou.edu/~burtonl/flash/ca.html
Meavilla Seguí, Vicente (2006): Las Matemáticas como fuente de inspiración artística. *Revista UNIÓN*, 8, 51 – 61.
Mora Sánchez, José Antonio (2007): Geometría Dinámica para el análisis de obras de arte. *Revista UNIÓN*, 9, 83 – 99.
Pérez Gómez, Rafael (2008): Matemáticas para compartir la belleza. *Revista UNIÓN*, 16, 7 – 27.
Pickover, Clifford (1989): Picturing Randomness with Truchet Tiles. *J. Recr. Math.* 21, 256-259.
Ruiz, F (2004): Usos de nuevas tecnologías para enseñar Matemáticas con Arte. En Peñas, Moreno y Lupiáñez (edts.) *Investigación en el aula de matemáticas. Tecnologías de la información y la comunicación*. SAEM "THALES" y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
Smith, C. S.; Boucher, P. (1987): The Tiling Patterns of Sebastien Truchet and the Topology of Structural Hierarchy. *Leonardo* 20, 373-385.

José María Muñoz Escolano. Licenciado en Matemáticas y Doctor por la Universidad de Zaragoza. Área de investigación es el Álgebra (más concretamente, la *Teoría de grupos*). Ha publicado distintos trabajos en Educación Matemática y ha participado en distintos congresos. En este campo, sus líneas de investigación son *Juegos educativos matemáticos* y *Didáctica del número racional*. Participa en el Proyecto de cooperación en materia de investigación *Taller de talento matemático*, financiado por el Gobierno de Aragón. En la actualidad, es Profesor Ayudante Doctor en la Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación de Huesca, donde imparte clase en las titulaciones de Maestro. **jmescola@unizar.es**

Antonio M. Oller Marcén. Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Zaragoza.Área de investigación es la Didáctica de las Matemáticas, está realizando su Tesis Doctoral sobre la enseñanza de la Proporcionalidad y ha publicado artículos sobre Juegos educativos matemáticos y sobre enseñanza de la Geometría. Participa en el Proyecto de cooperación en materia de investigación *Taller de talento matemático*, financiado por el Gobierno de Aragón. En la actualidad, es Profesor Ayudante en la Facultad de Ciencias Sociales y Humanas de Teruel, donde imparte clase en las titulaciones de Maestro. **oller@unizar.es**