UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 145-151
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

El hacer matemático en el aula.

Rosa Martínez; María Victoria Pistonesi

1. Introducción

La matemática se ha configurado a lo largo de la historia ante la necesidad de resolver problemas de distinta naturaleza. La actividad involucrada en la resolución de problemas da lugar a la producción de conocimientos por parte de quién lo resuelve. Buscar un procedimiento que lo resuelva lleva a recuperar conocimientos, a desechar los que no resultan prósperos para lograr una estrategia, a cometer errores, a revisar el camino andado, retomar otra vía, … todas tareas vinculadas al quehacer matemático. En esta oportunidad presentamos un problema con la intención de involucrar a los estudiantes- de la escuela media- en una verdadera actividad de producción de conocimiento. Propiciar un ambiente que aliente a los alumnos a ensayar y producir diferentes soluciones conlleva a que el docente pueda organizar una clase en la que se discuta sobre la validez, precisión, claridad, generalidad, alcance, etc., de lo que se produce.

La actividad que proponemos en esta ocasión favorece la necesidad de buscar una fórmula cuadrática que modelice la situación. La riqueza de este tipo de actividades está en la posible diversidad de producciones de los alumnos. Las distintas escrituras que aparezcan en el aula permiten trabajar sobre la noción de equivalencia de distintas expresiones sobre las transformaciones algebraicas y sobre la idea de variación y dependencia.

2. Actividad propuesta" Los manzanos"

"Un productor tiene una hectárea plantada con 40 manzanos; cada uno de ellos produce 500 manzanas al año, desea conocer cuál será la evolución de su producción si decide aumentar la cantidad de plantas en esa parcela. Para ello encarga el estudio a un ingeniero agrónomo. El profesional concluye que por cada planta que se incorpore, la producción de cada manzano disminuirá en 5 unidades dado que los nutrientes del suelo tienen un potencial limitado.
a) *¿Es posible que la producción se anule en algún momento*?
b) *¿Cuántas plantas se deberán agregar para obtener la máxima producción*?"

Para plantear una expresión matemática que facilite estudiar las relaciones entre las magnitudes en juego se propicia un análisis de la variación y dependencia entre las magnitudes involucradas.

Para estudiar si "la producción se anula o no" es necesario vincular la producción de cada una de las plantas con la producción total. Es decir, vincular la disminución de la producción por planta en función de la cantidad de plantas que se agregan, luego obtener la producción total. Esta tarea requiere, necesariamente, un fuerte trabajo en reconocer la variación y dependencia entre las magnitudes involucradas. Se deben estudiar regularidades numéricas y traducirlas en un lenguaje simbólico ya que los números en juego dificultan otro tipo de procedimiento posible. Es importante destacar que la fórmula aparece como una necesidad para resolver, pues en ningún momento se pide su hallazgo.

En particular este problema podría dar lugar a la resignificación de la ecuación de la función cuadrática, en este caso las coordenadas del vértice y el concepto de raíz o ceros de la función. En un principio los alumnos podrían plantear una tabla para estudiar la variación entre la cantidad de plantas y su producción por planta, que se corresponde con un modelo lineal.

Para resolver el ítem a), podrían encontrar para qué valor, la función se hace 0. Para el ítem b), es necesario estudiar la variación de la producción en función de la cantidad de plantas. Los números elegidos no favorecen hacer cálculos apoyados en una tabla, por lo que se hace necesario plantear la fórmula de una ecuación cuadrática y encontrar el vértice de la parábola:

- Llamando *n* al número de de plantas y *P* a la producción obtenida, se obtendría:

$$P(n)= 5n^2 – 700n$$

- O bien, llamando *x* al números de plantas que se agregan y *P* a la producción obtenida, quedaría:

$$P(x): 5(x-30)^2 – 22500$$

Dependiendo de cómo se definan las variables independientes habrá que interpretar los resultados, es decir:

- En el primer procedimiento, el vértice de la parábola es (70;22 500). 70 responde directamente a la pregunta del problema, es decir, la máxima producción se obtiene con 70 plantas.
- En el segundo, el vértice de la parábola es (30;22 500). Es necesario interpretar que 30 es la cantidad de plantas que conviene agregar para obtener la máxima producción.

El docente podría intervenir, en un principio, para interpretar adecuadamente el enunciado. También podría sugerir que organicen la información en tablas como así efectuar puestas en común parciales, con el fin de explicitar los avances que se van obteniendo y hacer explícitas las variaciones y dependencia en el contexto del problema.

Lo interesante en este caso, es que a través del estudio de las magnitudes en juego se da sentido a funciones compuestas. Surge en una primera instancia una relación lineal cuando se interpreta la dependencia entre variables; luego, a partir de dicha relación aparece, la relación cuadrática.

Es decir, a partir de indagar la vinculación entre cantidad de plantas y producción de manzanas, cuestión que podría realizarse a través de armar una tabla, como ya lo dijimos, surge alguna de las siguientes expresiones:

$$(700 - 5n) \quad \text{o} \quad (40 - n).$$

Luego para relacionar la cantidad plantas con la producción total surge:

$$n\,.\,(700 - 5n) \qquad \text{o} \qquad (40 - n)(500 - 5n)$$

quedando:

$$700n - 5n^2 \qquad o \qquad 20000 + 300n - 5n^2$$

3. Procedimientos de los alumnos[1] de 5º año

A continuación mostramos distintos procedimientos utilizados por alumnos en el transcurso de una clase.

3.1. Procedimiento A

Los alumnos analizaron la relación que hay entre el aumento de la cantidad de plantas y la disminución de la producción por planta, pensando en la relación numérica.

Pudieron encontrar cuál era la máxima producción, pero este método no les sirvió para encontrar cuándo la producción se anula. Tomaron como producción nula el hecho de que no hubiesen plantas, perdiendo de este modo de vista el contexto del problema y quedándose solamente con lo numérico. No utilizaron una fórmula para poder responder sobre la máxima producción, nuevamente, sólo tuvieron en cuenta la relación numérica entre las variables. Para pensar que la producción se anule consideraron que uno de los factores sea cero, se presenta el trabajo de un alumno a continuación:.

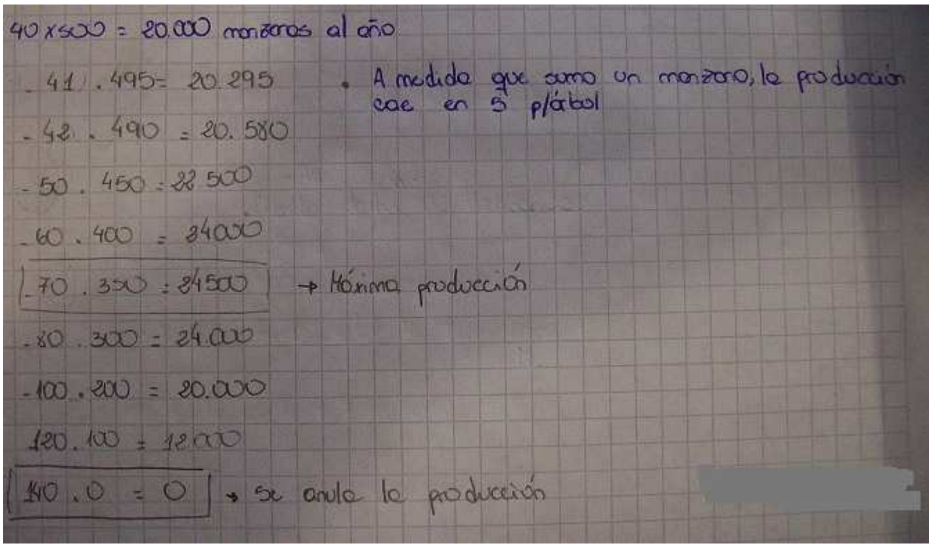

Figura 1: Procedimiento A

[1] Este problema fue implementado con alumnos de 5º año de una escuela secundaria de la ciudad de Gral Roca, cuya gestión estuvo a cargo de la Prof. M. Victoria Pistonesi y Prof. Susana Fantini

Aún cuando estos alumnos hicieron un tratamiento aritmético, el registro deja ver, por la disposición y organización del procedimiento, que ellos otorgan un status genérico a las expresiones numéricas. Es decir, expresan los cálculos intermedios, dejan indicados las cuentas realizadas (cuándo se trata de cálculos simples), esto nos indicaría que el tratamiento que ellos hacen, se asemejaría al que se le puede dar a una expresión general.

En la puesta en común con todos los grupos, estos alumnos lograron asociar rápidamente su trabajo con la fórmula.

3.2. Procedimiento B:

El desarrollo realizado por este grupo pone de manifiesto un trabajo con la relación numérica entre las variables, luego lograron desprenderse de las mismas y hallar una expresión matemática. Ellos plantearon la fórmula resolvente, pero en un principio no lograron interpretar los resultados en términos del problema. Finalmente, una intervención docente en la que se trató de que vinculen los valores calculados y el contexto del problema, hizo posible que los alumnos pudieran concluir de manera correcta.

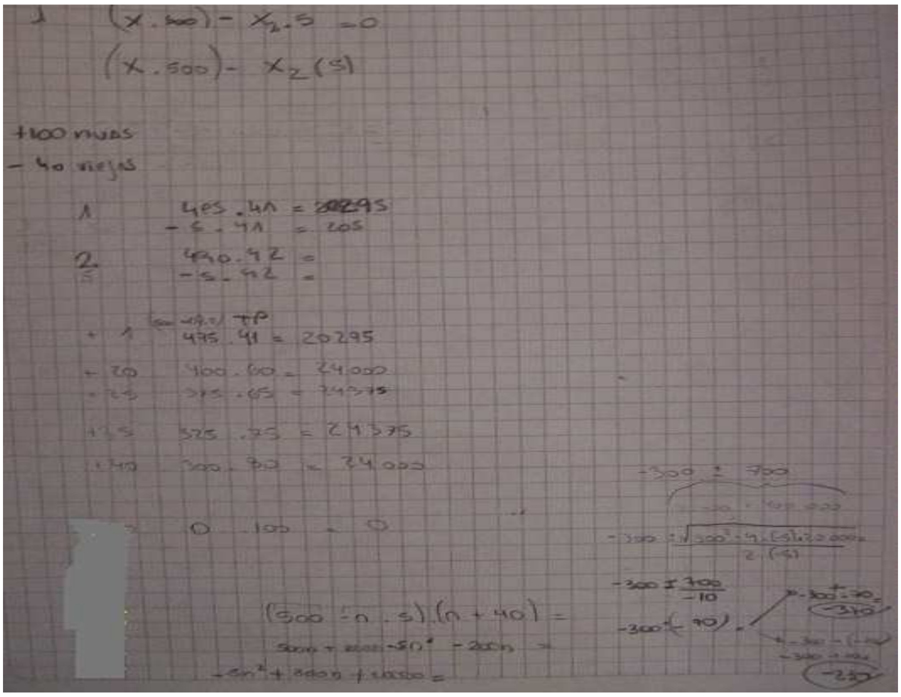

Figura 2: Procedimiento B

3.3. Procedimiento C

Este grupo de alumnos lograron encontrar directamente una fórmula que relaciona las variables en cuestión. Pueden interpretar la misma en el contexto del problema. Cabe aclarar que para hallar la máxima producción y la nulidad prueban con valores sin involucrar el vértice ni las raíces de la función cuadrática.

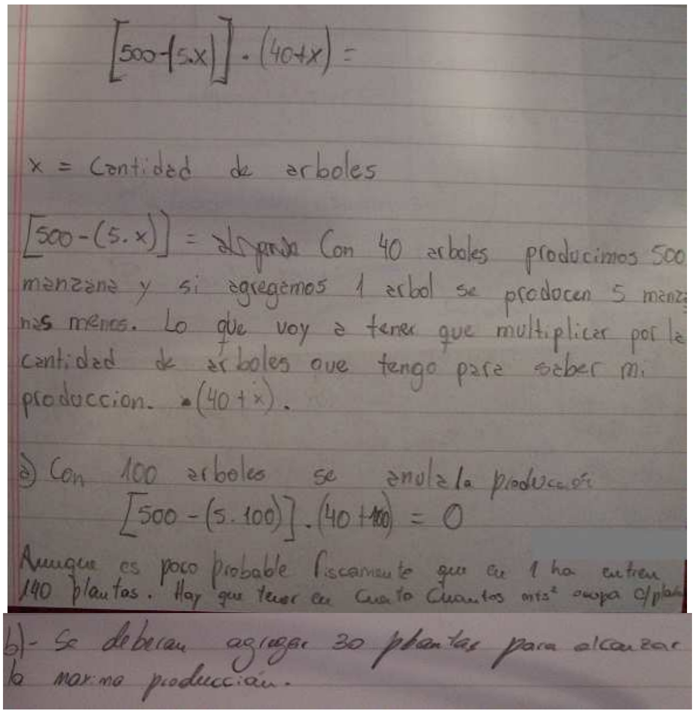

Figura 3: Procedimiento C

3.4. Procedimiento D

Este grupo parte de una gráfica de la situación para pensar en una función que se adecue a ella, teniendo en cuenta los distintos tipos de funciones analizadas en clase anteriores. Paralelamente a ello buscan una fórmula, en las distintas formas de escribir la misma y logran identificar que se trata de una función cuadrática cuando la expresan en forma polinómica. Según se pudo observar, una vez lograda la expresión de la ecuación recién colocan la palabra función.

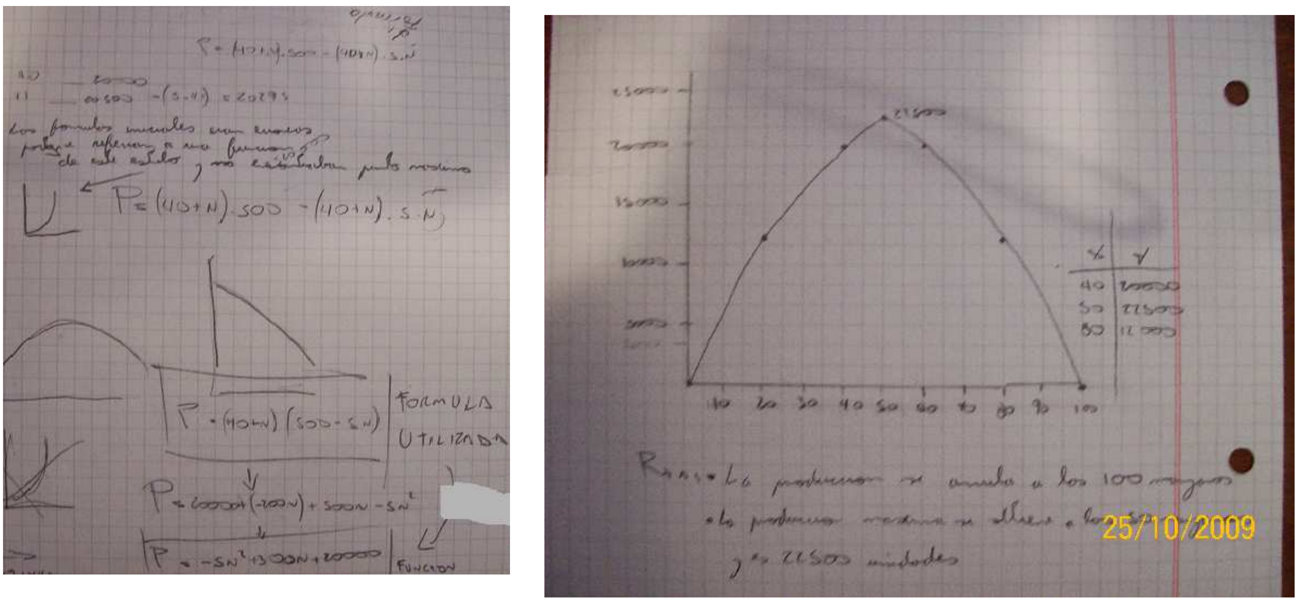

Figura 4: Procedimiento D

Se puede observar que hasta que no hallaron la relación entre gráfica y expresión polinómica, consideraban a la expresión como una fórmula.

Calcularon los elementos relevantes: vértice y raíces para responder a las preguntas. No relacionaron ambas representaciones, gráfica y analítica, para poder establecer una respuesta sólo se quedan con la gráfica hasta la puesta en común y recién con la intervención docente advierten que la respuesta es incorrecta porque se equivocaron en el gráfico de la función.

3.5. Procedimiento E

Este procedimiento muestra que los alumnos se dan cuenta que el problema involucra una función a partir de considerar la relación entre dos magnitudes. Siempre asocian el problema a un modelo lineal. En un primer momento lo piensan en forma creciente, luego en forma decreciente pero se olvidan del contexto y toman valores negativos para las manzanas. Dejan de lado los procedimientos anteriores, consideran que 20.000 manzanas sería la máxima producción y concluyen que agregando 4000 manzanos la producción se anula, lo que es totalmente imposible teniendo en cuenta que en una hectárea no puede haber 4.040 manzanos. En este caso perdieron de vista el contexto del problema. Fue necesario intervenir volviendo al problema, analizar los valores obtenidos de modo de evaluar la razonabilidad de los mismos.

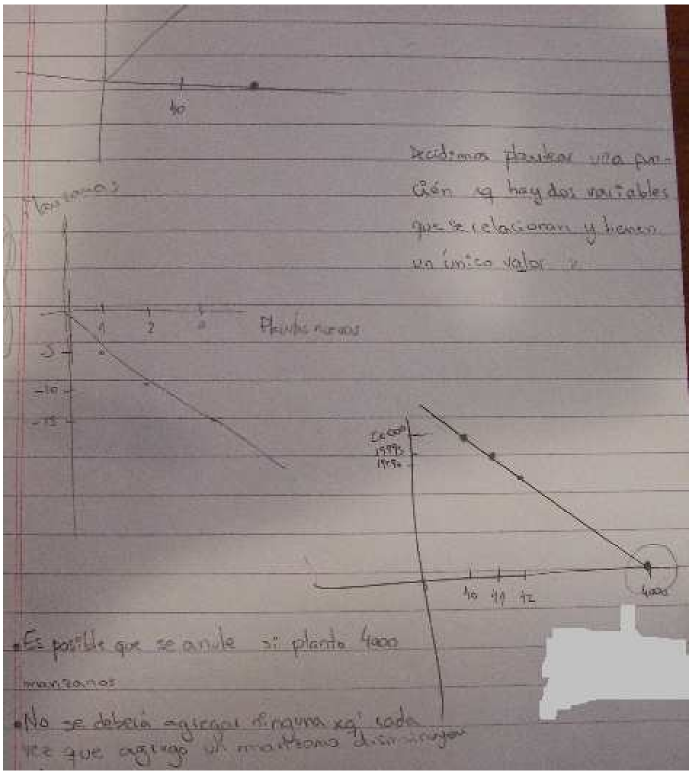

Figura 5: Procedimiento E

4. A modo de cierre

Todos los alumnos expusieron sus procedimientos en el pizarrón. Se analizaron y se descartaron los erróneos. A partir de la diversidad de expresiones obtenidas y atendiendo al sentido de esta secuencia de problemas, el docente propone las siguientes cuestiones a toda la clase:

- ¿Las expresiones son equivalentes, cómo podríamos verificarlo? ¿por qué las respuestas son diferentes?
- ¿Por qué les surgió la necesidad de graficar? ¿qué se puede interpretar del gráfico?
- Los alumnos que plantearon una fórmula desde un principio, ¿qué tuvieron en cuenta?

Bibliografía

Camuyrano, M.; Net, G.; Aragón, M. (2000). *Matemática I, Modelos Matemáticos para interpretar la realidad*. Ed. Estrada Polimodal.

Segal, S.; Giuliani, D. (2008) *Modelización Matemática en el aula*. Editorial Libros del Zorzal, Bs. As.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra.* Editorial Libros del Zorzal, Bs. As.

Tassara, A.; Porras, M.; Martínez, R. Pistonesi, V. y otros (2010). *Crónicas de las escuelas medias del Alto valle de Río Negro y Neuquén.* Facultad de Ciencias de la Educación. UNCo. (en prensa).

Rosa Martínez. Magíster en Educación en Ciencias, Orientación Matemática. Universidad Nacional del Comahue (U.N.Co.). Docente de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación. U.N.Co. Argentina. **rfmartin@uncoma.edu.a**

María Victoria Pistonesi. Profesora de Matemática, Universidad Nacional del Comahue. Docente de Didáctica de la Matemática en el Instituto de Formación Docente de Gral. Roca, y en el Colegio Domingo Savio, Gral. Roca, Río Negro, Argentina. **mariayaldo@hotmail.com**.