UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 93-106
ISSN: 1815-0640

A função logarítmica obtida por simetria da função exponencial: explorando visualização

José Carlos Leivas; Maria Tereza Carneiro Soares

Resumo

Este artigo apresenta uma forma de construir o conceito da função logarítmica a partir da modelagem de um problema que conduza à função exponencial. Distingue e utiliza representação de gráficos de funções definidas em conjuntos discretos e contínuos para, a partir de simetrias de funções inversas e respectivas representações, obter a representação da função inversa da exponencial, chamada logarítmica.

Abstract

This article presents a way to build the concept of the logarithmic function from the modeling of a problem that leads to the exponential function. Distinguishes and uses graphical representation of functions defined on sets discrete and continuos, obtaining the representation of the inverse function of the exponential, that is logarithmic function, from the symmetries of inverse functions and their representations.

Resumen

Este artículo presenta una forma de construir el concepto de la función logarítmica a partir de la modelización de un problema que conduzca a la función exponencial. Distingue y utiliza representación de gráficos de funciones definidas en conjuntos discretos y continuos para, a partir de simetrías de funciones inversas y respectivas representaciones, obtener la representación de la función inversa de la exponencial, llamada logarítmica.

1. Introducción

Considerações iniciais

A partir da elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), os quais constituem um referencial que favorece e orienta construções de práticas que promovam a construção de conhecimentos, não somente matemáticos, mas que insiram os estudantes no meio social e do trabalho, algumas inovações na apresentação de conteúdos matemáticos tradicionais urgem por serem implantadas a fim de "superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula." (ibid, p. 59).

Os PCN apontam, ainda, que a organização dos conteúdos, muitas e na maioria das vezes, são apresentados no ambiente escolar de forma demasiadamente hierarquizada, bem como são tratados isoladamente. Entende-se que a conexão entre conteúdos, tradicionalmente abordados em momentos distintos na escola, pode vir a ser um elemento motivador tanto para o professor ao desenvolvê-lo, quanto ao aluno ao construir seu conhecimento. Dessa forma, entende-se que o conhecimento matemático deva ser desenvolvido a partir da escola básica por meio de metodologias que enfatizem novas estratégias, como a que se sugere neste trabalho, rompendo um ciclo tradicional, em que primeiro se faz o estudo e, posteriormente, abordam-se as diversas funções, dentre as quais, a exponencial e a logarítmica, nessa sequência.

No que diz respeito aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 1998b, p. 9) "A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações", sendo esse o caso da função logarítmica que permite compreender problemas relacionados a crescimento populacional, aplicações financeiras e movimentação de placas tectônicas, por exemplo.

O *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM (2008) ao elaborar e divulgar Princípios e Normas para a Matemática escolar indica que "os processos de raciocínio, demonstração, resolução de problemas e representação são utilizados em todas as áreas do conteúdo." (p. 33). Nesse mesmo documento, a Matemática Discreta está incluída, não como uma norma específica a exemplo do que foi introduzido pelo *Curriculum and Evaluation Standards for School Matehematics* de 1989, sendo tratada em todos os anos desde o pré-escolar. Cita, por exemplo, o caso da álgebra na compreensão de padrões, relações e funções, os quais se revelam naturais e interessantes para as crianças em experiências bem precoces. "Do 3º ao 5º ano, poderão começar a usar variáveis e expressões algébricas para descrever e ampliar padrões. No final do secundário, deverão já possuir um à-vontade na utilização da notação das funções para descrever relações." (ibid, p. 40)

Para Vinner e Dreyfus (1989, apud NCTM, 2008) muitos alunos universitários entendem o conceito de função apenas como uma regra ou fórmula, tal como "dado n, determine 2^n para n = 0, 1, 2 e 3".

Assim, na Licenciatura em Matemática, é importante que sejam trabalhados os números e suas dependências, como no caso de funções, em diversas formas de representação, uma vez que "uma das mais poderosas utilizações da matemática é a modelação matemática de fenômenos" (NCTM, 2008, p. 42), e a compreensão de variação é essencial a fim de que possa ser compreendido o conceito de função, uma vez que a variável pode estar num conjunto contínuo ou num conjunto discreto, o que, para muitos, não fica explícito, considerando-se apenas a lei que caracteriza a função, o que leva à representações errôneas do fenômeno, como é o caso apresentado neste artigo.

Frota (2009) afirma que um dos temas importantes da pesquisa em Educação Matemática consiste em investigações sobre estratégias que sejam eficazes para o ensino e para a aprendizagem de funções. A autora investiga e apresenta resultados de pesquisa que buscam verificar as potencialidades da utilização de processos visuais por meio de pensamento visual. Assim, visualização é um processo que, além de interpretação, também envolve representação.

Para Presmeg (1986), existem alunos visualizadores, aqueles que resolvem problemas utilizando métodos visuais e alunos não visualizadores, aqueles que não utilizam tais métodos. A autora afirma que, embora mais difíceis, os métodos visuais apresentam melhores resultados na formação de conceitos e, provavelmente, pela maior dificuldade de utilização desses métodos, estudantes o abandonam e partem para resolução de problema por métodos analíticos.

Existe uma íntima relação entre imaginação, habilidade espacial, diagramas e representação para o desenvolvimento espacial, o que é tratado por diversos autores, tais como Gutierrez e Boero (1993, 2006), Bishop (1989), Dieudonné (1986), Presmeg (1986, 2006), Duval (1998), Hilbert (1932, 2003), Leivas (2009), sendo necessário compreender e investigar tão complexo tema, bem como seus efeitos no currículo, tanto na escola básica quanto no ensino superior.

Segundo Oliveira, Fernandes e Fermé (2007), o conceito de função evoluiu, estando diretamente relacionado aos modos de representação, os quais podem ser numéricos, gráficos ou algébricos, sendo fundamental que se inicie tal estudo utilizando-se das três formas de representação o que, de acordo com a experiência, não é feito, tendo a forma algébrica uma prioridade, especialmente na escola básica. Isso é corroborado por Ponte (1992, apud OLIVEIRA, FERNANDES E FERMÉ, 2007, p. 87) da seguinte forma:

> *Seria má interpretação da importância histórica das representações analíticas e geométricas de função permitir subestimar o papel dos aspectos numéricos na sua aprendizagem, pois nas situações do mundo real, valores numéricos concretos estão subjacentes às expressões analíticas e às curvas geométricas. A este facto acresce as dificuldades que os alunos demonstram em trabalhar com gráficos cartesianos e expressões algébricas, corroboradas por estudos que confirmam que os alunos, perante a necessidade de interpretar relações funcionais representadas graficamente, habitualmente recorrem a estratégias e processos de raciocínio numéricos.*

Dessa forma é que este artigo apresenta diversas maneiras de representação de uma mesma expressão analítica, definida em diversos campos numéricos, para representar funções com gráficos cartesianos.

Algumas pesquisas têm mostrado que o estudo de Geometria na escola básica ainda é centrado em utilização de fórmulas, não dando prioridade a outras dimensões para o seu ensino. Assim, uma das indicações que se faz, para o desenvolvimento de um pensamento geométrico, é apoiar o ensino de Geometria, dentre outros processos, na imaginação. A esse respeito, Hilbert (1932, p. iii), no prefácio de seu livro *Geometry and the Imagination*, indica:

> *Neste livro, é nosso objetivo dar uma apresentação da Geometria, tal como está hoje, em seus aspectos visual e intuitivo. Com a ajuda da imaginação visual, podemos iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração, sem necessariamente entrar em pormenores relacionados com a estrita definição de conceitos e com cálculos reais*.

Já Skemp (1993, p. 100), se reporta a essas características fazendo a seguinte consideração:

> *Nos anos 1880, Galton afirmou que as pessoas se diferenciavam por sua imaginação mental. Algumas, como ele mesmo, possuíam uma forte imaginação visual; outras, nada em absoluto, pensavam principalmente com*

> *palavras. Isto hoje é tão certo como fora então. Há também pessoas que dispõem das duas modalidades, porquanto, talvez, com uma preferência mais para uma do que para outra.*

Para o autor, os símbolos desempenham um papel fundamental na formação de esquemas como estruturas conceituais e um conceito de alguma coisa é puramente mental, e não pode ser audível ou visível.

Além disso, para Skemp (1993), é interessante observar as diferenças individuais de imaginação apontadas por Galton.

> *Se é correto que pensemos que imaginação visual é a mais favorável à integração de ideias; e se não é acidental que quando nos tornamos conscientes de como as ideias se relacionam umas a outras, nos referimos à experiência como insight, não como um ouvir interior; então podemos racionalmente estabelecer a hipótese de que as pessoas que têm sobressaído por sua contribuição matemática e científica usaram mais da imaginação visual do que a auditiva. (SKEMP, 1993, p. 118)*

Para Leivas (2009, p. 20):

> *Imaginação é uma forma de concepção mental de um conceito matemático, o qual pode vir a ser representado por um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação dos mesmos, com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito*.

A partir da imaginação pode-se verificar como um conceito poderá ser comunicado, particularmente, o conceito de função logarítmica e para tal, Leivas (2009, p. 22) define "visualização como sendo um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos".

O objetivo deste trabalho é apresentar uma sugestão para o ensino e construção do conceito de **função logarítmica** a partir da íntima relação entre imaginação, habilidade espacial, diagramas e representação gráfica da função exponencial.

A seguir, retoma-se o conceito de função, especialmente ao considerá-lo como uma tríade e não apenas a partir da lei que a caracteriza, bem como o conceito de gráfico de função, o que não é muito explorado na literatura, especialmente nos manuais didáticos existentes.

Funções e gráficos de funções

Chama-se função ou aplicação à terna constituída de:

- um conjunto A denominado de conjunto de partida ou domínio;
- um conjunto B denominado de conjunto de chegada ou contradomínio;
- uma lei f que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.

Usa-se a simbologia $y = f(x)$ para a função ou aplicação e $f(A)= \{y \in B | y = f(x)$ com $x \in A\}$ para o conjunto imagem dela. Quando o conjunto A é o conjunto dos números reais ou um subconjunto dele, deixa-se a denominação de aplicação e usa-se o termo função f, a qual é dita de variável real e, quando o conjunto B é o conjunto dos números reais ou um subconjunto dele, a função é dita função real.

Dessa forma, quando A e B forem o conjunto dos reais ou subconjunto dele, tem-se função real de variável real e, nesse caso, faz sentido falar em valores da função para os respectivos f(x).

O gráfico cartesiano de uma função é um conjunto de pontos (x, f(x)) do plano cartesiano, correspondentes aos pares ordenados em que a primeira componente, corresponde os valores que x assume no campo de definição da função, ou seja, seu domínio, e as segundas componentes são os respectivos valores das imagens desses. As figuras abaixo mostram gráficos de três funções diferentes, expressas pela mesma lei f, porém com conjuntos domínios diferentes. Esse tipo de consideração, muitas vezes, não é feito, nem na escola básica e nem no ensino superior, em disciplinas ditas de fundamentos matemáticos.

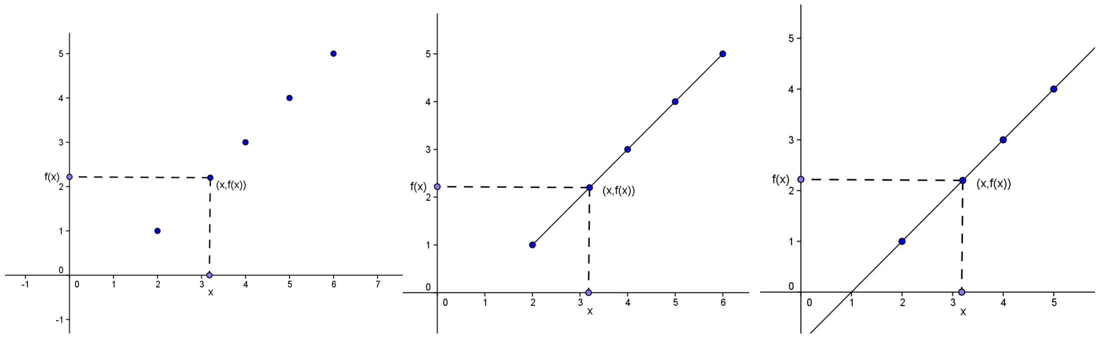

Figura 1. Gráficos de funções expressas por uma mesma lei em domínios distintos.

O primeiro dos gráficos corresponde a uma função cujo domínio é o conjunto discreto {2,3,4,5,6}. No segundo, o domínio é dado pelo intervalo de números reais [2,6], enquanto que no terceiro, o domínio é o conjunto dos números reais. Assim, para a mesma lei $y = f(x) = x - 1$, há três representações gráficas distintas. Não é raro, ao perguntar a professores e estudantes de graduação, "qual é o gráfico de uma função do primeiro grau, tal como $y = x - 1$?", e se obter a resposta – é uma linha reta, o que não é uma verdade, como pode ser percebido por meio da figura 1, podendo ser: pontos isolados, segmentos de retas ou retas, além de outros. Esses exemplos parecem esclarecer indicações feitas no NCTM (2008), corroborando os indicativos ali apontados por Viner e Dreyfus (1989), Oliveira, Fernandes e Fermé (2007) e Ponte (1992) bem como por Frota (2009), além de outros.

Considera-se ser relevante para a aprendizagem matemática que os aspectos visuais sejam levados em consideração no estudo e análise de funções como, por exemplo, no estudo da função quadrática $f: R \rightarrow R$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e b, c reais quaisquer, cujo gráfico é denominado parábola. Algumas propriedades geométricas são importantes de serem destacadas, como é o caso de verificar que a parábola separa o plano em duas regiões, sendo uma convexa e outra não convexa (côncava). Uma região do plano é dita convexa se, unindo dois quaisquer de seus pontos, o segmento de reta os unindo está totalmente contido nessa região. Dessa forma, a primeira das figuras abaixo (Figura 2) apresenta uma região com a concavidade voltada para baixo, enquanto que a segunda apresenta uma região com a concavidade voltada para cima.

Outra característica que é fundamental de ser analisada nos gráficos de funções é a existência de simetrias, ou seja, diz-se que o gráfico de uma função y = f(x), no sistema cartesiano plano, apresenta uma simetria em relação a um eixo paralelo ao eixo vertical, por exemplo, como nas figuras abaixo (Figura 2), se os valores da função são iguais, em pontos simétricos, a um dado ponto do domínio dessa função.

No caso da função quadrática, estudar as simetrias do gráfico da função pode levar a uma compreensão do que seja um ponto de máximo ou de mínimo da função, ou um vértice da parábola e, isso permite que as coordenadas do vértice possam ser determinadas de forma elementar, sem recursos das ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral tais como o operador derivação, explorando os aspectos visuais. Entretanto, uma conexão dessa forma, feita nos cursos de formação de professores, pode ser um dos indicativos de melhoria do ensino básico. Atrelando-se um comparativo com os coeficientes da lei que define a função quadrática, o auxilio visual pode permitir uma conceituação adequada pelos estudantes, de vértice e obtenção de suas coordenadas.

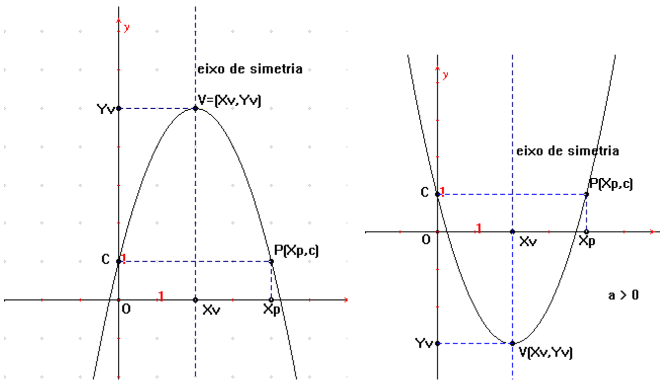

Figura 2. Gráficos de funções quadráticas e relação com um eixo de simetria.

a < 0 (concavidade para baixo – vértice é ponto de máximo) Figura 2 – esquerda.

a > 0 (concavidade para cima – vértice é ponto de mínimo) Figura 2 – direita.

Em geral, não é analisado no estudo da função quadrática o significado geométrico que possui a constante real c, na lei que define a função quadrática, pelo fato de que esse estudo, usualmente, se limita a processo algorítmico e não ao que se denomina uma geometrização do currículo matemático. Assim, c denota a ordenada do ponto em que o gráfico da função corta o eixo vertical (variável dependente), e corresponde no gráfico da função a um ponto P = (x_p, c), o que facilita a visualização e consequente representação gráfica. Calculando-se abscissa do ponto que corresponde à ordenada c, isto é:

$f(x) = ax^2 + bx + c = c \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b)= 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\Leftrightarrow ax + b= 0$ e como $a \neq 0$ vem que $x_p = -\frac{b}{a}$. Mas a parábola é simétrica em relação a um eixo que passa pelo vértice. Assim, a abscissa do vértice corresponde ao ponto médio entre (0 , c) e P = (x_p, c), ou seja:

$$x_V = \frac{-b}{2a}.$$

Busca-se, a partir disso, a ordenada desse vértice, isto é, o valor da função f correspondente ao valor x_V. Calculando-se:

$$f(x_V) = f(\frac{-b}{2a}) = a.(\frac{-b}{2a})^2 + b.(\frac{-b}{2a}) + c = \frac{b^2}{4a} + \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = y_V$$

As coordenadas do vértice são dadas por: V = $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right)$

Uma conexão entre aspectos algébricos e geométricos pode ser feita por meio dos zeros da função quadrática, os quais são, exatamente, os valores das abscissas dos pontos em que o gráfico da função corta o eixo horizontal (variável independente), ou seja, são os pontos (x, 0). Logo, para obtê-los, basta igualar f(x) = 0 e resolver a equação.

A função exponencial a partir de uma modelagem

Supondo que o crescimento de um cachorro esteja sendo analisado por um pesquisador. No início da pesquisa, o cão pesa 30 kg. No mês seguinte o peso aumentou em 10%. Na terceira medição aumentou novamente 10% e assim sucessivamente por um período de um ano de observação.

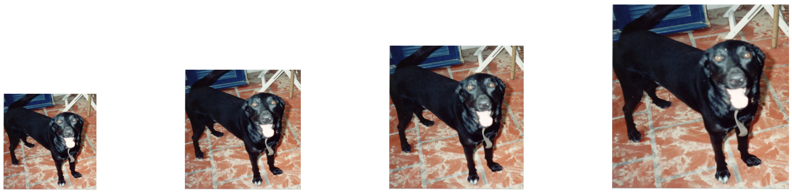

Figura 3. Crescimento de um cão.

Na resolução de tal situação-problema, uma tabela pode ser montada, em que a cada mês o acréscimo de peso, considerado em 10% ao mês, é acrescido ao peso do mês anterior. Os dados podem ser escritos em uma forma de produto. Assim, o terceiro termo pode ser escrito a partir do segundo e conseqüentemente a partir do termo inicial, gerando o que se denomina uma sequência. Assim, se pode escrever a sequência (1º , 2º , 3º , ..., 10º , ..., x-ésimo termo):

Quadro 1 – Dados do crescimento mensal de um cão.

Período (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Peso (kg)	30	33											

Pode-se pensar, assim, que existe uma função f: {0,1,2,3,....} $\rightarrow$ **R** que é denominada sequência de números reais.

Portanto, $f(0) = 30$

$$f(1) = 30 + 0{,}1x30 = 30(1 + \frac{10}{100})$$

$$f(2) = 30(1 + \frac{10}{100}) + 0{,}1[30(1 + \frac{10}{100})] = 30(1 + \frac{10}{100})(1 + \frac{10}{100}) = 30(1 + \frac{10}{100})^2,$$

e, assim sucessivamente.

Generalizando tem-se a seguinte lei: $f(x) = x_0(1 + \frac{p}{100})^x$, em que x denota a variação em meses, x_0 denota o peso inicial e p a taxa de crescimento. A partir disso, é possível esboçar o gráfico dessa função, isto é, representar os pontos (x, f(x)) do gráfico dessa função da seguinte forma:

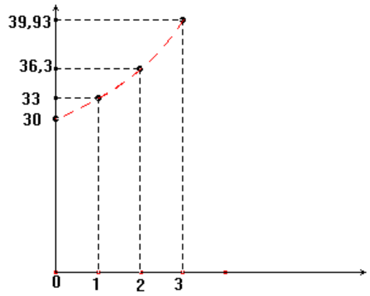

Figura 4. Gráfico do crescimento exponencial.

Como o animal não cresce por etapas em tempos isolados depois de cada mês, é preciso generalizar o que foi feito anteriormente, com sequências, para a função obtida. Assim, o domínio de tal função pode ser modificado, reduzido ou ampliado. Observando que não faria sentido um problema de crescimento a uma taxa nula, a função f dada acima pode ser definida por:

$$f : R \to R \quad por \quad f(x) = m.a^x,$$

em que m e a são números reais fixos e a > 0. Note que se fosse a = 0 ou a = -1 teríamos

$0^{-1} = \frac{1}{0}$ *que não é uma operação definida nos reais.*

$(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ *que também não é operação definida nos reais.*

A função, assim definida, é denominada função exponencial.

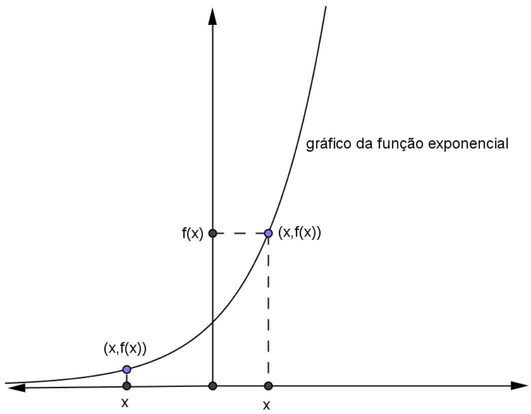

Figura 5 – Gráfico da função exponencial definida em R.

O gráfico acima representa a função exponencial no seu domínio **R**, podendo-se observar sua aproximação, assintoticamente, ao eixo horizontal, quando x é infinitamente pequeno e crescendo também ao infinito, quando x é infinitamente grande.

Uma função f: A $\to$ B dada por y = f(x) é dita bijetora quando:

(i) a todo elemento x $\in$ A corresponde um e somente um elemento y $\in$ B tal que f(x) = y;

(ii) de modo recíproco, todo elemento y $\in$ B é imagem de pelo menos um x $\in$ A pela lei f.

A parte (i) diz que a função é injetora e a (ii), que é sobrejetora. Assim, a cada elemento de A corresponde um único elemento de B (definição de função de A em B) e vice-versa, isto é, a cada elemento de B corresponde um único elemento de A (definição de função de B em A). A função f^{-1}: B $\rightarrow$ A, dada por $f^{-1}(y) = x$ tal que f(x) = y, é denominada função inversa de f.

Exemplificando:

f: R $\rightarrow$ R dada por f(x) = 2x tem por inversa $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

g: R $\rightarrow$ R dada por g(x) = x^3 tem por inversa $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Para obter a lei que define a função inversa de uma determinada função, em geral, o livro didático do Ensino Médio segue a seguinte sequência de raciocínio:

- troque x (variável independente do domínio) por y (variável dependente do contradomínio), pois a nova função tem por domínio o conjunto imagem da primeira e por conjunto imagem o domínio da primeira;
- Isole a nova variável dependente (novo y) para poder expressar uma lei y = g(x). Com isto você estará mostrando que a função inicial é injetiva e que está bem definida.

Um detalhe importante de salientar é que se a função inicial não for sobrejetiva, basta redefini-la, colocando no lugar do contradomínio de f o conjunto imagem f(A), que passará a ser o domínio da nova função. Portanto, o essencial para uma função admitir uma função inversa é que ela seja injetiva. Muitas vezes, o significado geométrico nessa situação não é levado em consideração, ficando, como em tantas outras situações, unicamente, a exploração algorítmica.

Considerando-se os dois exemplos acima, temos:

- f: **R** $\rightarrow$ **R** dada por f(x) = 2x. Nota-se que f(**R**) = **R** e, portanto, a função é sobrejetora, seu contradomínio coincide com seu conjunto imagem.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2\,x_1 = 2\,x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow \text{f é injetiva.}$$

Para a verificação de que a função é sobrejetora, é necessário considerar um valor qualquer y $\in$ **R**, do conjunto de chegada e determinar se existe um valor x $\in$ **R,** do domínio, que tenha y por imagem. Então, toma-se y = f(x) = 2x e determina-se $\frac{y}{2} = x$. Na determinação da inversa, o x da primeira função corresponde ao y da segunda função e vice versa. Assim, $g(x) = \frac{x}{2}$ é a função inversa de f(x) = 2x.

Em geral, nos livros didáticos, isso aparece da seguinte forma: dada uma função y = f(x), para determinar sua inversa se substitui y por x e vice versa. Isola-se a nova variável y, obtendo-se a lei da inversa, não sendo atribuído significado ao algoritmo.

- g: **R** $\rightarrow$ **R** dada por g(x) = x^3. Nota-se novamente que g(**R**) = **R** e, portanto, a função é sobrejetora, seu contradomínio coincide com seu conjunto imagem.

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow (x_1)^3 = (x_2)^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow$ f é injetiva.

Novamente, nesse segundo exemplo, o que se procura é a verificação de que a função g é sobrejetora. Para tal, dado um y qualquer do conjunto de chegada, busca-se a existência de algum x do conjunto de partida que tenha por imagem esse y considerado. Assim, na lei $y = g(x) = x^3$, tem-se y dado e deve-se encontrar o x correspondente. Então, isola-se x, e segue que $\sqrt[3]{y} = x$. Então, para qualquer $y \in$ **R,** a operação está bem definida, isto é, existe um $x \in$ **R**, tal que f(x) = y. Portanto, tendo em vista que a variável independente é denotada, usualmente por x e a dependente por y, vem que $y = \sqrt[3]{x}$ é a lei da função inversa de $g(x) = x^3$.

Um exemplo em que a função h: **R** $\rightarrow$ **R** não é sobrejetora e, consequentemente, não admite inversa é $y = x^2$, definida para todo $x \in$ **R**. Para verificar isso, considere qualquer y pertencente o conjunto de chegada da função, **R**. Então, deve-se procurar um x de modo que sua imagem pela lei h corresponda a esse y considerado, suponhamos um número real negativo. Assim, de $y = x^2$ vem que $x = \sqrt{y}$ não está definido em **R**. Estes aspectos podem ser facilmente visualizados nas representações feitas nas figuras 2, anteriormente citadas, sendo que na primeira delas, basta tomar um $y>y_v$ e, na segunda, um $y<y_v$. Portanto, h não é sobrejetora e não existe a lei que define sua inversa. Veja que, sem uma análise como a que está sendo proposta, a lei seria determinada, embora a função inversa não exista nesse domínio.

Observando-se a representação dos gráficos de duas funções inversas, percebe-se, intuitivamente, a existência de um eixo de simetria, uma vez que o par (x, y) estando no gráfico de uma função f, o par (y, x) estará no gráfico de sua inversa e esses pares são simétricos em relação a um eixo que corresponde à bissetriz do primeiro quadrante.

Exemplo, para as funções f: **R** $\rightarrow$ **R** dada por f(x) = 2x e sua inversa g: **R** $\rightarrow$ **R** dada por $g(x) = \frac{x}{2}$, tem-se os pares A = (1, f(1) = 2) e A´ = (2, g(2) = 1) ou ainda B=$(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}) = 1)$ e B´ = (1, g(1) =, $\frac{1}{2}$), C = (-1, f(-1) = -2) e C´= (-2, g(-2) = -1) como se pode ver pelas suas representações a seguir, em que os pontos em azul correspondem ao gráfico da função f e os em vermelho ao gráfico de sua inversa.

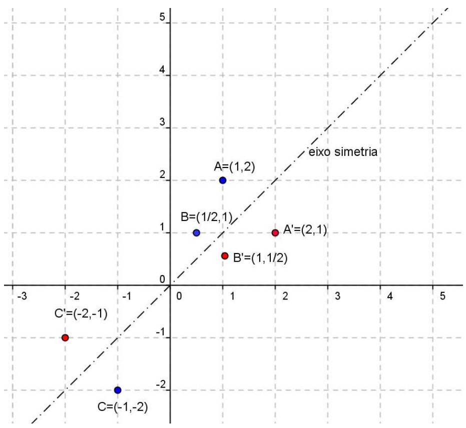

Figura 6. Pontos simétricos de duas funções inversas.

Desejando-se o esboço do gráfico das duas funções, obtém-se o gráfico da f em azul e o de sua inversa, a g, em vermelho, como na figura 7:

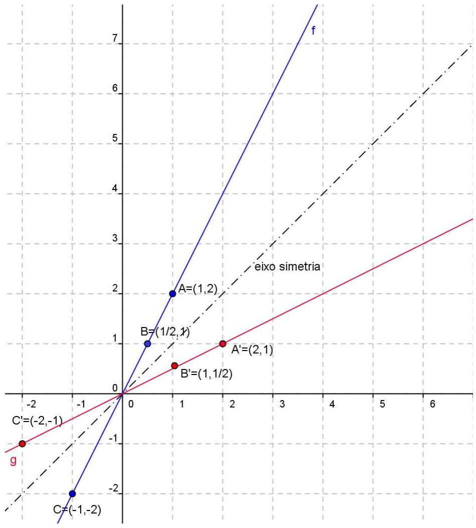

Figura 7. Simetria dos gráficos das duas funções inversas.

No que diz respeito ao segundo exemplo dado acima, ou seja, sendo $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a lei da função inversa de g(x) = x^3, temos os seguintes pontos e os respectivos simétricos:

A = (-1, g(-1) = -1) e A' = (-1, f(-1) = -1); B = (1, g(1) = 1) e B' = (1, f(1) = 1);

C = (2, g(2) = 8) e C' = (8, f(8) = 2), D = (1/8, ½) e D'= (½, 1/8)

e, (por exemplo, os quais podem ser representados na Figura 8, a seguir, em que os pontos assinalados em azul no formato em × pertencem ao gráfico da função g , enquanto os assinalados em vermelho no formato • pertencem ao gráfico da função f e, por fim, os representados no último formato, porém em preto, são comuns.

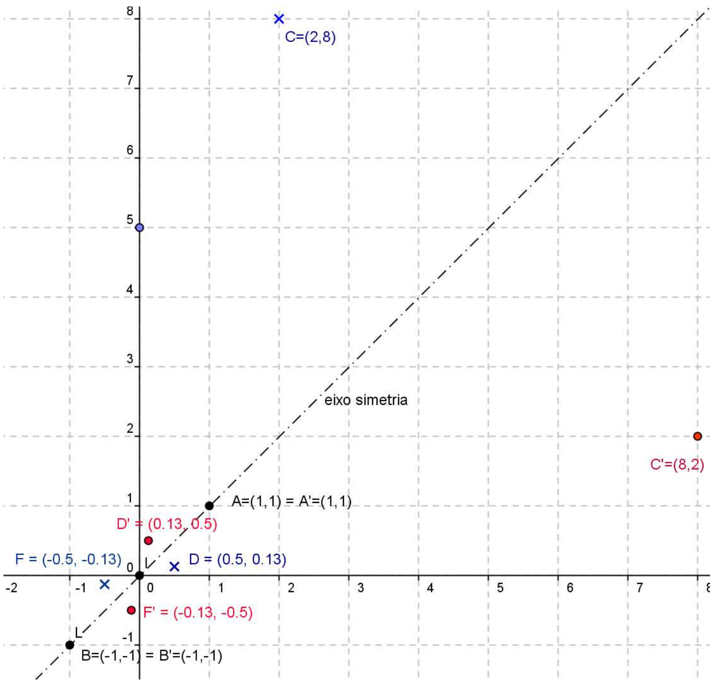

Figura 8. Pontos simétricos de duas funções inversas.

As duas funções definidas em seus domínios reais, têm por gráfico as seguintes representações cartesianas.

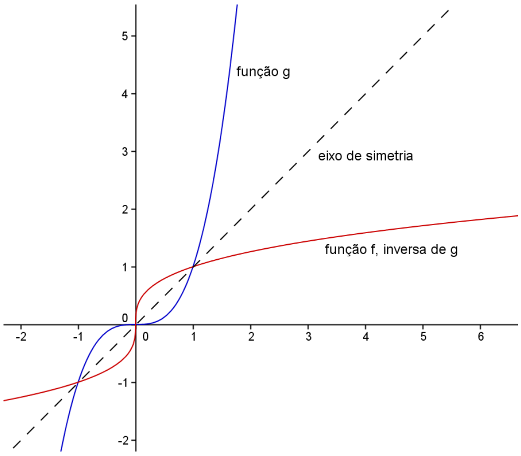

Figura 9. Representação de $g(x)=x^3$ e de sua inversa $f(x)=\sqrt[3]{x}$

A existência da inversa da função exponencial

A análise do gráfico da função exponencial (Figura 5) permite concluir que ela é estritamente crescente, tem domínio **R** e contra-domínio **R,** no qual não é sobrejetora – não há pontos no gráfico abaixo do eixo horizontal. Pode-se redefinir a função no seu conjunto imagem, f(**R**) = $\mathbf{R}^+$-{0}, no qual passa a ser tanto sobrejetora quanto injetora, logo admitindo inversa. A partir da representação (Figura 5) do gráfico da função exponencial, f:**R**$\rightarrow$ $\mathbf{R}^+$-{0}, dada por $f(x) = a^x$ ($a > 0$ e $a\neq 1$), pode-se considerar, pela bijeção e a consequente existência de uma inversa, um gráfico que represente essa inversa. Pela plotagem de pontos simétricos da primeira função, obtém-se a sequência dos pontos que constituem o gráfico da segunda função, como pode ser observado na construção dada pela figura 9, a seguir. Note que na medida em que os pontos do gráfico da primeira função se aproximam assintoticamente do eixo horizontal, os seus simétricos vão se aproximando assintoticamente do eixo vertical. De forma similar, quando os pontos do gráfico da primeira vão se afastando ao infinito, no sentido positivo, os seus simétricos vão se afastando também no sentido positivo.

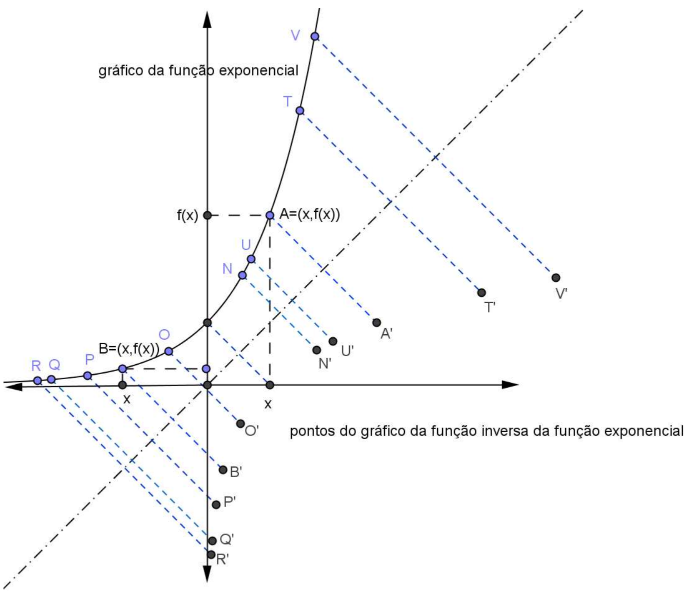

Figura 10 – Pontos do gráfico da função exponencial e de sua inversa

A união desses pontos obtidos permite a construção do gráfico da função f^{-1}: $\mathbf{R}^{+}-\{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, inversa da função exponencial, sendo dada por $f^{-1}(y) = x$ de tal forma que $y = f(x) = a^{x}$, cuja notação é: $y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^{y} = x$.

Essa função se chama **função logarítmica** e seu gráfico está representado na figura 11, a seguir.

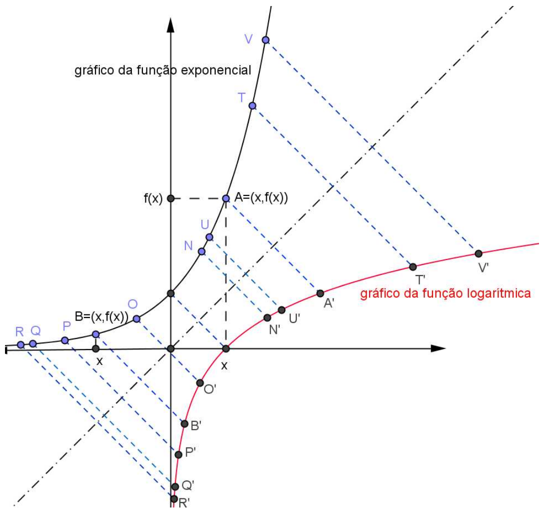

Figura 11 – Gráfico das funções exponencial e logarítmica.

Dessa forma, procurei exemplificar como é possível obter a função logarítmica a partir da função exponencial, utilizando a imaginação, a visualização e a simetria de pontos no sistema cartesiano, como uma forma de produzir conhecimento matemático, corroborando o apontado por Skemp (1993) ao afirmar de que imaginação visual é mais favorável à integração de ideias. Entendo assim que uma forma de inovar em Educação Matemática, em diversos níveis de escolaridade, é utilizar abordagens geométricas como método para compreender e representar visualmente conceitos de diversas áreas do conhecimento matemático e de outras ciências, como uma forma de atender ao preconizado nos PCN, de modo a que tais abordagens favoreçam e orientem a construção de conhecimentos. Portanto, Geometria pode ser vista como um método para representação visual de conceitos e processos de outras áreas da Matemática e de outras ciências, bem como uma forma de pensar e compreender o mundo matemático formal, não necessitando ser desenvolvida unicamente em disciplinas específicas dessa área do conhecimento matemático, de forma estritamente hierarquizada, como é usualmente apresentada, tratando os conteúdos isoladamente.

Bibliografía

Brasil (1998): *Parâmetros curriculares nacionais: matemática.* Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

(1998b): *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências Humanas e suas Tecnologias* Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, Parte III.

Bishop A. J. (1989): Review of research on visualization in mathematics education**.** Focus on Learning Problems in Mathematics, v. 11, n. 1-2, 7-16.

Dieudonné J., (1986): Debemos enseñar las *matematicas modernas*? In: Piaget, J.; Choquet, G.; Dieudonné, J.; Thom, R. e outros. *La enseñanza de las matemáticas modernas*. (p. 130-139). Madrid: Alianza Editorial.

Duval, R.(1998). Geometry from a cognitive point of view. In: Mammana, C.; Villani, V. (Eds). *Perpectives on the Teaching of Geometry for the 21st century*: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer.

Frota, M. (2009). Estratégias para o ensino-aprendizagem de funções com um foco no pensamento visual". In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - IV SIPEM. Anais. Brasília, (CD-ROM).

Gutiérrez, A.; Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future.* Rotterdam: Sense Publishers.

______ (1993): "Enseñanza de la matematica". In: G. Pérez, M. G Ozámiz. *Enseñanza de las ciencias y la matemática: tendencias e innovaciones*. (Biblioteca Virtual OEI. p. 62-89, http://www.oei.org.co/oeivirt/ciencias.pdf). Acesso em 03 de novembro, 2007.

Hilbert, D.; Cohn-Vossen, S. (1932). Geometry and the imagination. New York: Chelsea Publishing Company.

Hilbert, D. (2003). Fundamentos da geometria. Lisboa: Gradiva.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. Princípios e Normas para a Matemática Escolar. 2. ed. Lisboa: APM, 2008.

Olivera, R.; Fernandes, E.; Fermé, E. Proporcionalidade directa como função: da perfeição à realidade a bordo de um *robot*. Quadrante, vol. XVI, n. 1, p. 81-109, 2007.

Presmeg, N. (1986).Visualization and mathematical giftedness. Educational Studies in Mathematics. (V. 17, n. 3, p. 297-311).

______. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In: Gutierrez, A.; Boero, P. (Ed.). Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future. (p. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.

Skemp, R. (1993). Psicología del aprendizaje de las matemáticas. 2ª ed. Madrid: Edições Morata.

José Carlos Leivas. Doutor em Educação (Matemática) pela Universidade Federal do Paraná, mestre em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catariana, Especialista em Análise pela Universidade Federal de Pelotas e Licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas. Professor titular aposentado pela Universidade Federal de Rio Grande e professor adjunto da Universidade Luterana do Brasil. leivasjc@yahoo.com.br.

Maria Tereza Carneiro Soares. Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo, professora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná – PPGE-UFPR. marite@brturbo.com.br.