UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XIV – Número 54 – Diciembre 2018
http://www.revistaunion.org

ÍNDICE

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 01-121

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene ahora una periodicidad quadrimestral, de modo que se publican três números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database***, está incluida en el catálogo ***Latindex, CAPES*** y otros.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 68-86

EDITORIAL

Estimados colegas y amigos:

Llegamos al número 54 de la revista Unión. Como siempre hay diferentes investigaciones y distintos temas de interés para la educación matemática en sus diferentes niveles. La calidad de los artículos se ha mantenido gracias a la evaluación rigurosa de los revisores. Para que la producción dignifique el área de la educación matemática iberoamericana contamos siempre con la colaboración de todos, tanto autores como revisores.

En este número en la sesión firma invitada aparece un artículo de **Ulises Alfonso Salinas Hernández** y **Luc Trouche** de título *“Uso de gestos- como recursos - mediador – por un profesor de bachillerato para enfrentar un desafío didáctico no previsto por el”.* En este artículo estos autores evaluaran cómo un profesor de bachillerato (niveles 10-12) usó gestos al enfrentarse a una situación en el aula no prevista por él. El uso de gestos ocurrió durante la interacción com tres estudiantes en torno al análisis del movimiento de un objeto en caída libre. El análisis de los resultados muestran que la coordinación de gestos es, por una parte, un recurso semiótico que debe considerarse relevante en el sistema de recursos de los profesores; y por otra parte, representan una manera de visualizar la estructura cognitiva que guia lãs acciones del profesor.

La revista Unión publica este artículo con gran honor y agradece a sus autores esta importante aportación al área de la educación matemática.

A continuación, los lectores pueden encontrar cinco artículos que tratan de modelos de análisis para la enseñanza; un estudio sobre la enseñanza de los cilindros; la habilidad de argumentar en el aula matemática; la polemización, y para finalizar un estudio sobre el teorema de Pítágoras.

Retana y **Muñoz** consideran que uno de los temas que más ha interesado a los investigadores en el campo de la didáctica de las matemáticas, ha sido valorar cuáles son los conocimientos necesarios que un profesor debe poseer para el desarrollo de la práctica de la enseñanza y con ello facilitar el aprendizaje a los alumnos.

Para **Salgado, Berciano** y **Gestal** el reconocimiento del espacio y de los objetos matemáticos clásicos que lo componen es una virtud que debe ser adquirida lo antes posible, a poder ser desde edades bien tempranas. En este artículo describen el diseño e implementación de una experiencia didáctica para trabajar nociones matemáticas asociadas a un cilindro con niños y niñas de 4 y 5 años de Educación Infantil.

En *"Condiciones que promueven la habilidad de argumentar en el aula matemática"* de una escuela municipal en Chile, **Jiménez** y **Díaz** analizan las condiciones que permiten a los docentes promover la habilidad dargumentar-comunicar en estudiantes de una escuela primaria.

Amigo, Blamos y **Lestón** introducen al lector en el concepto de la *Polemización* del saber escolar. Reconocen al saber matemático como algo relativo y dialéctico que la subjetividad del alumno puede crear y transformar, dándole un sentido interno y una significación personal, así como social.

El teorema de Pitágoras, un problema abierto, de **López** con el que finaliza este número, aborda su estudio desde el punto de vista histórico y su demostración como un problema abierto, accesible y motivante, mediante la utilización de recursos y materiales apropiados como son los puzles pitagóricos.

En la sección Reseña de este número la editora **Sonia Barbosa Camargo Igliori** presenta una reseña del libro *"Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources - Advances and Issues"* que está organizado en cuatro partes correspondentes a los temas del grupo Topic Study Groups 38 (TSG) sobre *Research on resources (textbooks, learning materials etc.)* do 13th International Congress on Matehematical Education - ICME realizado en Hamburgo/Alemania en julio de 2016.

En la sección de Problemas contamos, como en todos los números, con la valiosa contribución de **Uldarico Malaspina Jurado** de la Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM cuyo título es "*Sistemas lineales y "problemas inversos*"".

¡Buena lectura!

EDITORAS

Celina Abar e SoniaIgliori

EDITORIAL

Estimados colegas e amigos*:*

Chegamos ao número 54 da Revista UNION. Como sempre há diversas direções de pesquisa e com vários temas de interesse do ensino de matemática em seus diferentes níveis. A qualidade dos artigos tem sido mantida pela avaliação rigorosa de nossos pareceristas. Para que a produção dignifique a área da Educação Matemática Iberoamericana contamos sempre com a colaboração de todos autores e revisores.

Nesse número na sessão Firma Invitada temos o artigo de **Ulises Alfonso Salinas Hernández** e **Luc Trouche** de título *"Uso de gestos- como recursos - mediador – por un profesor de bachillerato para enfrentar un desafío didáctico no previsto por el".*

Neste artigo, esses autores avaliaram como um professor do ensino médio (níveis 10-12) usava gestos quando enfrentava uma situação na sala de aula não prevista por ele. O uso de gestos ocorreu durante a interação com três alunos em torno da análise do movimento de um objeto em queda livre. A análise dos resultados mostra que a coordenação dos gestos é, por um lado, um recurso semiótico que deve ser considerado relevante no sistema de recursos dos professores, e, por outro lado, representam, por si só, uma forma de visualizar a estrutura cognitiva que orienta as ações do professor.

A revista Unión publica este artigo com grande honra e agradece aos seus autores por esta importante contribuição para a área da educação matemática.

Os leitores podem, sem seguida, encontrar cinco artigos que tratam de modelos de análise para o ensino; um estudo sobre o ensino de cilindros; a habilidade de argumentar na sala de aula de matemática; a polemização e para terminar um estudo sobre o teorema de Pítágoras.

Retana e **Muñoz** consideram que um dos temas que mais interessam aos pesquisadores interessados no campo da didática da matemática, tem sido avaliar quais são os conhecimentos necessários que um professor deve possuir para o desenvolvimento da prática de ensino e, assim, facilitar a aprendizagem dos alunos.

Para **Salgado, Berciano** e **Gestal** o reconhecimento do espaço e dos objetos matemáticos clássicos que a compõem é uma virtude que deve ser adquirida o mais cedo possível, de idades muito precoces. Neste artigo, eles descrevem a concepção e implementação de uma experiência didática para trabalhar em conceitos matemáticos associados a um cilindro com crianças de 4 e 5 anos de educação infantil.

Em *"Condiciones que promueven la habilidad de argumentar en el aula matemática"* de uma escola municipal em Chile, **Jiménez** e **Díaz** analisam as condições que permitem aos professores incentivar a capacidade de argumentar-comunicar-se com alunos do ensino fundamental.

Amigo, Blamos e **Lestón** introduzem o leitor ao conceito de *Polemización* do saber escolar. Eles reconhecem o conhecimento matemático como algo relativo e dialético que a subjetividade do aluno pode criar e transformar, dando um sentido interno e um significado pessoal e social.

O teorema de Pitágoras, *um problema aberto,* de **López** termina esse número. No artigo, seu estudo é abordado do ponto de vista histórico e sua demonstração como um problema aberto, acessível e motivador, através do uso de recursos e materiais adequados, como os puzles pitagóricos.

Na seção Reseña deste número a editora **Sonia Barbosa Camargo Igliori** apresenta uma resenha do livro *"Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources - Advances and Issues"* que é organizado em quatro partes correspondentes aos temas do grupo Topic Study Groups 38 (TSG) sobre *Research on resources (textbooks, learning materials etc.)* do 13th Internayional Congress on Matehematical Education - ICME realizado em Hamburg/Alemanha em julho de 2016.

Na seção de Problemas contamos como em todos os números com a valiosa contribuição de **Uldarico Malaspina Jurado** da Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM com o título "*Sistemas lineales y "problemas inversos*"".

Boa leitura!

EDITORAS

Celina Abar e Sonia Igliori

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 06-24

Uso de gestos –como recurso-mediador– por un profesor de bachillerato para enfrentar un desafío didáctico no previsto por él

Ulises Alfonso Salinas-Hernández, Luc Trouche

Resumen

En este artículo se reporta cómo un profesor de bachillerato (niveles 10-12) usó gestos al enfrentarse a una situación en el aula no prevista por él. El uso de gestos ocurrió durante la interacción con tres estudiantes en torno al análisis del movimiento de un objeto en caída libre. Se llevó a cabo un análisis cualitativo de los datos a partir de un marco conceptual que coordina elementos de tres aproximaciones teóricas: aproximación documental de lo didáctico, la teoría de actividad y la epistemología histórica. La recopilación de datos se llevó a cabo mediante la videograbación de la interacción profesor-estudiantes al momento de tratar de dar significado al movimiento de un objeto en caída libre. Consideramos que el análisis de resultados muestra que la coordinación de gestos es, por una parte, un recurso semiótico que debe considerarse relevante en el sistema de recursos de los profesores; y por otra parte, representan, en sí mismo, una manera de visualizar la estructura cognitiva que guía las acciones del profesor.
Palabras clave: Recursos; gestos; artefactos; teoría de la actividad; mediación

Abstract

In this article, we report how a high school teacher (levels 10-12) used gestures when facing a classroom situation not foreseen by him. The use of gestures took place during the interaction with three students around the analysis of the movement of an object in free fall. A qualitative analysis of the data was carried out from a conceptual framework that coordinates elements of three theoretical approaches: documentational approach to didactics, activity theory and historical epistemology. The data collection was carried out by videotaping the teacher-student interaction while the meaning production process about the movement of an object in free fall took place. We consider that the analysis of results shows that the coordination of gestures is, on the one hand, a semiotic resource that should be considered relevant in the teachers' resources system; and on the other hand, represents in itself, a way of visualizing the cognitive structure that guides the actions of the teacher.
Keywords: Resources; gestures; artifacts; activity; mediations

Résumé

Dans cet article, nous montrons comment un professeur de lycée (grades 10-12) utilise des gestes pour faire face à une classe de situations inattendue pour lui. Ces gestes prennent place à l’occasion d’un échange avec trois étudiants pendant la description de la trajectoire d’un objet en chute libre. L’analyse qualitative des données est conduite à partir d’un cadre théorique qui coordonne trois approches: l’approche documentaire du didactique, la théorie de l’activité, et l’épistémologie historique. Les données sont recueillies à partir de vidéos capturées au cours du processus de construction de signification de la trajectoire d’un objet en chute libre. Nous considérons que l’analyse des

	résultats met en évidence que la coordination des gestes est, à la fois, une ressource sémiotique partie prenante du système de ressources des enseignants, et un moyen de visualiser la structure cognitive qui guide les actions du professeur. **Mots clés: Ressources, gestes, artefacts, activité, médiation**

1. Introducción y problema de investigación

En el terreno didáctico, trabajos sobre la práctica del profesor de matemáticas coinciden en la necesidad de poner atención en el *uso* de *recursos*; entender qué son y la manera en que funcionan como extensiones del profesor durante su práctica docente (Adler, 2000). Además, esta autora señala que los *recursos* no se restringen a objetos materiales. Ella los categoriza [a los *recursos*] en humanos (profesores, padres de familia, conocimiento del profesor, entre otros), materiales (libros de texto, calculadoras y objetos matemáticos como plano cartesiano, entre otros) y socio-culturales (lenguaje). Guzmán y Kieran (2013) señalan que la manera en que los *recursos* apoyan o no a los profesores en sus esfuerzos de resolver problemas en clase, claramente tienen un impacto en la experiencia de resolver problemas de los estudiantes. Se retoman las investigaciones sobre el *uso* de *recursos* en profesores de matemáticas para vincularlas con la necesidad de analizar el *uso* de *recursos* en la práctica de los profesores de física. Se parte del hecho de la estrecha relación de la física y las matemáticas como disciplinas científicas, tanto en el plano epistemológico como en el plano educativo. En el plano epistemológico, respecto de la relación entre física y matemáticas, como disciplinas científicas, Piaget señala:

> Desde el primer contacto con la epistemología física nos encontramos, pues, en presencia de la dificultad sumamente instructiva de delimitar los campos entre la física y la matemática: o reducimos los dos a uno solo, o nos empeñamos en distinguirlos, pero sin alcanzar una frontera estática. (Piaget, 1979, p. 9).

En el ámbito escolar del campo de la matemática educativa, las líneas de investigación referentes al papel de las matemáticas en las clases de física, o viceversa, son diversas (e.g. Karam, 2015; Kragh, 2015; Kjeldsen & Lützen, 2015). Por su parte, dentro del interés de la presente investigación sobre el *uso* de gestos por parte del profesor, se sigue la perspectiva epistemológica planteada por Radford (2009), quien señala, por una parte, que el pensamiento matemático no sólo está mediado por símbolos escritos, sino también por las acciones, gestos y otros tipos de señales. Y, por otra parte, que el pensamiento se produce también a través de una sofisticada coordinación semiótica de la voz, el cuerpo, los gestos, los símbolos y las herramientas[1]. Así, empleando el término *artefacto* para incluir a los *recursos* didácticos, Radford (2012) señala la importancia de investigar su *uso* y comprender su influencia en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. De manera particular,

[1] Esta perspectiva se asocia con el paradigma multimodal, el cual cuestiona la hegemonía de la representación y la comunicación a través del código escrito para el aprendizaje y destaca el papel de otros sistemas semióticos para construir significados (Haquin, 2012).

Radford (2006) expone que –a diferencia de las aproximaciones racionalistas en las cuales el pensamiento corresponde a una actividad mental en el que la mente no necesita la asistencia de los sentidos ni de la experiencia para alcanzar las verdades matemáticas– el pensamiento es una práctica social en el sentido de Wartofsky (1979). En palabras de Radford (2006): “[E]l pensamiento es considerado una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos” (p. 107).

Así, a partir, por un lado, de la importancia en analizar el *uso* de *recursos* por los profesores en el salón de clase cuando resuelven problemas; y por otro lado, siguiendo una concepción no mentalista del pensamiento, en este artículo pretendemos responder las siguientes preguntas de investigación: (1) ¿cómo son utilizados los gestos por parte del profesor, como *recursos* y como modos de representación [*artefactos*] para que un estudiante interprete el movimiento de un objeto en caída libre en función del *sistema de referencia*? (2) ¿qué se puede inferir sobre el conocimiento del profesor –en torno a la descripción de la caída libre de objetos– a partir de sus gestos?

El artículo se divide en seis secciones. Después de haber presentado la introducción y el problema de investigación (§ 1), se define el marco conceptual en el que se integra la teoría de la actividad (Engeström, 2001), el *uso* de *recursos* (Gueudet & Trouche, 2009, 2012) y la producción de *artefactos* (Wartofsky, 1979) (§ 2). Se continúa con un análisis *a priori* del contenido matemático-físico que se presenta en el artículo (§ 3); seguido por la metodología (§ 4) y el análisis de resultados (§ 5). Las conclusiones y reflexiones finales se presentan en la última sección del artículo (§ 6).

2. Marco conceptual

En esta sección se presenta el encuadre teórico del artículo, el cual tiene como objetivo atender tanto la dimensión didáctica, como la dimensión epistemológica de las preguntas de investigación (§ 1). La dimensión didáctica, que se atiende a través de la *Aproximación documental de lo didáctico* (ADD) (Gueudet & Trouche, 2009, 2012), se asocia con el *uso* de gestos por parte del profesor para afrontar la situación pedagógica que se le presenta –a partir de sus conocimientos y de la manera en que tiene integrado el *uso* de gestos en su *sistema de recursos*–. Mientras que la dimensión epistemológica, que se atiende con la noción de *artefactos* de Wartofsky (1979), se relaciona con la manera en que el conocimiento del profesor es representado a través de los gestos. Lo que conlleva, a su vez, en analizar la componente epistemológica de los gestos. Las aproximaciones antes señaladas se coordinan a través de la teoría de la actividad (TA) (Engeström, 2001). En el caso particular de las investigaciones sobre la práctica del profesor, trabajar conjuntamente con diferentes aproximaciones teóricas ayuda a ser consciente tanto de los aspectos que puedan faltar en tales aproximaciónes, como también de los beneficios que puedan aportar cada una con el objetivo de tener una mejor comprensión de la práctica del profesor (Trouche, Gitirana, Miyakawa, Pepin, & Wang, Online first).

Gueudet y Trouche (2009; 2012) proponen un enfoque teórico cercano, en la conceptualización de *recursos*, de la propuesta de Adler (2000). Por ejemplo, no concebir a los *recursos* sólo como los provenientes de objetos materiales, sino a todos aquellos que intervienen en la comprensión y resolución de problemas. En su propuesta, estos autores hacen la diferencia entre *recursos* y documentos. Así, los documentos son desarrollados a través de lo que denominan *génesis documental*. El *trabajo documental* es el núcleo de la actividad de los profesores y de su desarrollo profesional. Gueudet y Trouche (2009; 2012) utilizan el término *recurso* para dar énfasis a la variedad de *artefactos* que consideran y en donde a su vez un *artefacto* (físico o psicológico) es un medio cultural y social provisto por la actividad humana (e.g., computadoras y lenguaje); producidos con propósitos específicos (e.g., resolver problemas).

En la *génesis documental*, los documentos son creados a partir de un proceso en el cual los profesores construyen esquemas de utilización de los *recursos* para situaciones dentro de una variedad de contextos, proceso que se ejemplifica por la ecuación: *Documento* = *recursos* + *esquemas* de utilización (Gueudet & Trouche, 2009, p. 205). Los mismos autores mencionan que los esquemas de utilización supone una parte observable y otra invisible. Los *usos*–las reglas particulares de acción– corresponden a la parte observable del esquema, que ocurre durante las acciones del profesor en el transcurso de la actividad. Mientras que las invariantes operatorias corresponden a la estructura cognitiva que guía las acciones del profesor. Así, los esquemas sólo son observables a través de las acciones [*usos*] que lleva a cabo el sujeto al trabajar con los *recursos*. En palabras de Gueudet y Trouche (2009): “Entonces, el investigador puede tratar de inferir invariantes operatorias de los *usos* (p. 209; traducción libre). Se tiene así una segunda relación: *Documento=Recursos+Usos+Invariantes operatorias*.

Durante la actividad del sujeto con el *uso* de los *artefactos* se dan dos procesos: instrumentación e instrumentalización; el primero tiene que ver con la influencia del *artefacto* en las acciones [actividad] del sujeto. Mientras que la instrumentalización ocurre cuando el sujeto se apropia del *artefacto* y determina la manera en que se usa. Es importante resaltar que es durante la instrumentalización que el sujeto [e.g., el profesor] adapta y modifica los *artefactos* [*recursos*] de acuerdo a la variedad de situaciones que se le presentan. Así, es durante este proceso que se desarrolla la componente creativa-didáctica del profesor para enfrentar un problema.

En síntesis, al estudiar el desarrollo de la *génesis documental* de los profesores se obtienen evidencias de la manera en que ellos articulan los diferentes documentos. Así, para dar cuenta de la variedad y del diseño de documentos y la manera en que los profesores los articulan en una variedad de situaciones, los documentos se estructuran en un *sistema de documentación*, en donde el *sistema de recursos* del profesor constituye la parte del “*recurso*” del *sistema de documentación* –sin considerar la parte del esquema del documento– (Gueudet & Trouche, 2012).

Wartofsky (1979) desarrolló su aproximación teórica, la cual denominó Epistemología histórica (EH), con la intención de mostrar cómo los modos más evolucionados de representación que ha logrado el ser humano (e.g., las teorías científicas) tienen su génesis en los modos de representación que surgen simultáneamente con nuestra práctica productiva, social y lingüística primaria. Para él la característica fundamental de la práctica cognitiva humana es la habilidad para crear representaciones; además los seres humanos crean los medios de su propia cognición: los *artefactos*. El *artefacto* para Wartofsky (1979) es tanto un medio cognitivo como un modo de representación. Es decir, representan el modo de actividad en el que fueron producidos y son además un medio de transmitir y lograr conocimiento. Así, además de considerar al lenguaje, Wartofsky (1979) introduce las formas de organización e interacción social, las técnicas de producción, y la adquisición de habilidades, como *artefactos*. De manera que, al producir *artefactos* [medios cognitivos] para su *uso*, se producen representaciones. Las teorías científicas, los sistemas lógicos y las matemáticas (además de las formas de representación en literatura y el arte) son los modos más evolucionados de representación que ha logrado el ser humano. Y es a través de las representaciones como el ser humano logra el conocimiento. De manera que el *uso* y la creación de *artefactos* es una forma de acción [*praxis*] distintivamente humana.

Se observa que tanto en la ADD como en la HE un elemento esencial es conceptualizar las prácticas humanas como una práctica social orientada por objetivos. De manera que se combinan ambas aproximaciones teóricas a través de la teoría de la actividad (TA) en la forma desarrollada por Engeström (2001). Lo cual nos permite integrarlas en marco conceptual común. Engeström (2001) extendió el planteamiento de Vygotsky sobre la mediación a través de los signos y herramientas y el de Leont'ev (1978) sobre la labor para presentar, como unidad de análisis, al menos dos *sistemas de actividad* interactuando entre sí.

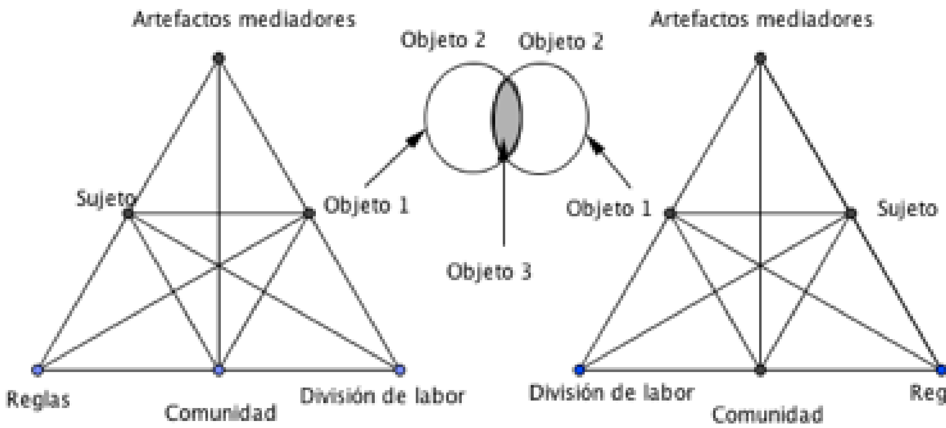


Figura 2.1. Representación de Engeström sobre el *sistema de actividad*, basado en la mediación y en el trabajo de Leont'ev.

La Figura 2.1 presenta los principios centrales que sintetizan la aproximación: (1) Un *sistema de actividad* colectiva, mediado por *artefactos* y orientado a objetos es la unidad de análisis principal. (2) Hay una variedad de voces en los *sistemas de actividad*. Así, un sistema de actividad es siempre una comunidad con diferentes puntos de vista, tradiciones e intereses. Además, la división de labor en una actividad crea diferentes posiciones para los participantes. (3) Existe una historicidad en los *sistemas de actividad*. Estos toman forma y son transformados durante grandes periodos. (4) Las contradicciones tienen un rol importante en el cambio y desarrollo de los *sistemas de actividad*. (5) Existe la posibilidad de transformaciones expansivas en los *sistemas de actividad*. Ellos se mueven a través de ciclos relativamente largos de transformaciones cualitativas.

A partir de lo presentado en el marco conceptual, se señala que la práctica docente es, además de una práctica pedagógica guiada por el *trabajo documental* del profesor y el *uso* de *recursos*, una actividad social de significación llevada a cabo por medio de signos y *artefactos* [e.g., gestos] que alteran de manera fundamental la forma como pensamos y actuamos. De manera que el análisis de datos va encaminado en determinar las componentes didáctica y epistemológica de los gestos dentro de los *sistemas de actividad* que se desarrollan durante la discusión del profesor con un estudiante; a partir, por un lado, de su *uso* como *recurso*; y por el otro lado, como signos y *artefactos* que representan el modo de actividad del profesor, esto es, su conocimiento.

3. Metodología

Este estudio es de carácter cualitativo y se llevó a cabo en un laboratorio de física de un bachillerato (nivel 10-12) de la ciudad de México. Participaron: el profesor, quien imparte la asignatura de física desde hace más de 30 años y 11 estudiantes (16-18 años). Los datos analizados en la presente investigación fueron recabados durante la recopilación de datos de otra investigación (Salinas-Hernández & Miranda, 2018), en la cual no fueron analizados e incorporados. En la investigación de Salinas-Hernández y Miranda (2018), se diseñaron cinco tareas para que fueran llevadas a cabo por los estudiantes en equipos de 3 y 4 integrantes. Las tareas fueron diseñadas por los investigadores y mostradas al profesor antes de ser implementadas, con el objetivo de que el profesor tuviera conocimiento sobre lo que estaban por realizar sus estudiantes. El papel del profesor consistió en supervisar el trabajo de los estudiantes mientras resolvían las tareas y aclarar algunas dudas que pudieran surgir.

En conjunto, las tareas tuvieron el propósito de analizar en los estudiantes el proceso de interpretación de gráficas cartesianas obtenidas por ellos a partir de un software [sensor virtual de movimiento], y que estaban relacionadas con un experimento de la caída de una pelota por un plano inclinado. Así, las tareas se dividieron en dos partes: las primeras dos corresponden a la implementación del experimento –de la caída de una pelota por un plano inclinado– por parte de los estudiantes; mientras que las tareas 3, 4 y 5 correspondieron a preguntas (en hojas de trabajo) para indagar la comprensión de los estudiantes entorno al fenómeno físico de la caída de un móvil por un plano inclinado y la relación con las gráficas cartesianas generadas por dicho movimiento. Durante el periodo de recolección de datos todos los participantes fueron videograbados con dos cámaras, éstas se enfocaron principalmente a los estudiantes mientras llevaban a caba cada una de las tareas.

Para los propósitos de este artículo se presenta el análisis de un extracto de video de 10:38 minutos de duración, el cual fue tomado mientras un equipo de tres estudiantes resolvía la Tarea 4 (Figura 3.1). En este extracto de video surge una pregunta (la cual no aparecía en ninguna de las tareas) en un estudiante [E1] relacionada con el concepto de aceleración negativa. El análisis de datos está enfocado en la manera en que el profesor [Prof.] trata de resolver la duda de los estudiantes a través del *uso* de gestos y establece un diálogo con uno de los estudiantes de ese equipo a quien se denominó Pedro.

Se deja fijo un plano inclinado (Figura 10) y se baja la altura del otro plano inclinado hasta una altura de 60 *cm* (Figura 11).

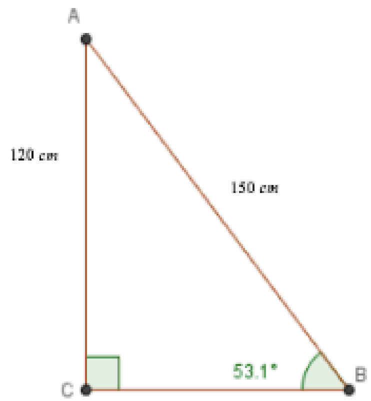


Figura 10: Plano inclinado P1

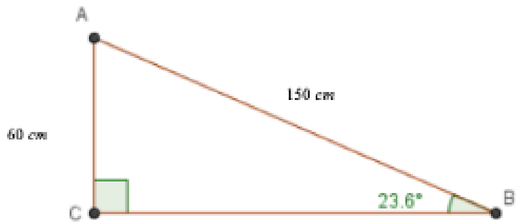


Figura 11: Plano inclinado P4

PREGUNTAS:

1. ¿Desde qué plano inclinado crees que llegue primero la pelota al suelo? Argumenta tu respuesta.

Figura 3.1. Tarea (4) que se encontraban realizando los estudiantes que aparecen en el extracto analizado.

4. Contenido conceptual-didáctico de la investigación y análisis *a priori*

La presente sección se divide en dos partes. En la primera parte se presenta el contenido conceptual-didáctico (físico-matemático) de la investigación. En la segunda, se lleva a cabo un análisis *a priori* de dicho contenido considerando 3 niveles: (1) epistemológico, (2) didáctico-curricular y (3) relacionado con el *uso* de *recursos*.

4.1. Contenido conceptual-didáctico de la investigación

Para dar respuesta a las preguntas de investigación de este artículo (§ 1) es necesario dar cuenta de los dos conceptos principales que están en juego en el proceso de significación del movimiento de caída libre que ocurre durante el diálogo profesor-estudiante. Estos conceptos son el *sistema de coordenadas cartesianas* y el concepto físico de *sistema de referencia*.

4.1.1. *Sistema de coordenadas cartesianas*

El *sistema de coordenadas cartesianas* (SCC) (Figura 4.1.) se forma por dos ejes ortogonales denominados habitualmente: eje X (eje horizontal o de las abscisas) y eje Y (eje vertical o de las ordenadas). Esta representación es una manera de identificar la posición de cualquier punto «par ordenado con coordenadas (x,y)» con respecto del origen de coordenadas (punto de intersección de los ejes). Se divide en cuatro cuadrantes y los valores (positivos o negativos) tanto de las abscisas como de las ordenadas se determinan de acuerdo con su posición respecto del origen de coordenadas. Así, en el eje X las abscisas toman valores positivos a la derecha del origen de coordenadas y negativos a la izquierda del mismo. Mientras que en el eje Y, las ordenadas toman valores positivos hacia arriba del origen de coordenadas y negativos hacia abajo del mismo punto.

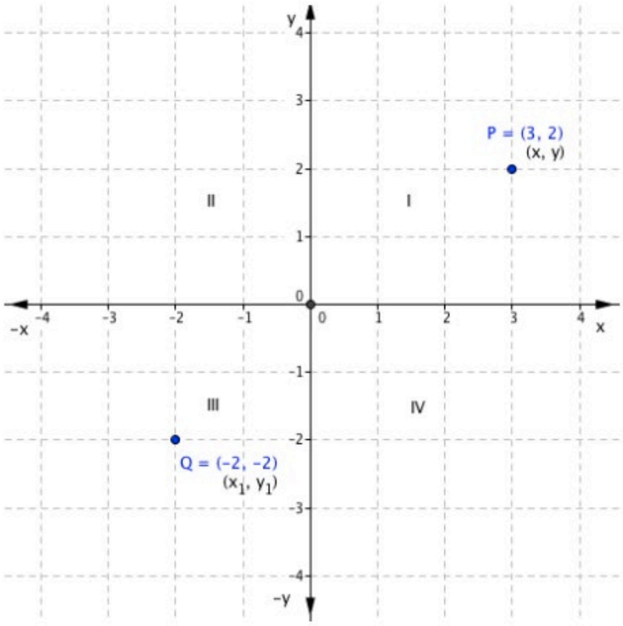


Figura 4.1. Representación del *sistema de coordenadas cartesianas*.

4.1.2. *Sistema de referencia*

En física, y en particular en mecánica newtoniana, se entiende como *sistema de referencia* (SR) o *marco de referencia* al conjunto de convenciones usadas por un observador (respecto del cual se realizan las mediciones) para poder medir magnitudes físicas de un sistema físico (e.g., posición, velocidad, aceleración, distancia) y en el cual, a su vez, se cumplen las tres leyes de Newton. En un texto clásico, para los primeros ciclos universitarios en México, se puntualiza que los observadores en los diferentes *sistemas de referencia* pueden obtener distintos valores numéricos de las cantidades físicas medidas, pero las relaciones entre las cantidades [las leyes de la física], son las mismas para todos los observadores (Resnick & Halliday, 1970). Sobre su importancia, los mismos autores dicen: “Por consiguiente, es importante que el estudiante siempre se dé cuenta de cuál es su marco de referencia en un determinado problema.” (p. 30).

4.2. Análisis *a priori* de los conceptos: *sistema de coordenadas cartesiano* y *sistema de referencia*

Se lleva a cabo ahora el análisis *a priori* de los dos conceptos (SCC y SR) considerando 3 niveles: (1) epistemológico, (2) didáctico-curricular y (3) relacionado con el *uso* de *recursos*. El nivel epistemológico considera lo expuesto anteriormente, por un lado, sobre la estrecha relación entre física y matemáticas como prácticas científicas (§ 1), y por otro lado, sobre el contenido conceptual-didáctico de la investigación (§ 4.1), para señalar que, en particular, existe una estrecha relación epistemológica entre el significado físico del SR y el significado matemático del SCC. Incluso, en el terreno epistemológico-didáctico, los SR suelen ser representados gráficamente a partir del SCC, y las gráficas que se generan para interpretar el movimiento de objetos, suelen ser denominadas: gráficas cartesianas. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la representación gráfica de un SR no es un SCC. Los significados de ambos conceptos fueron ya señalados (§ 4.1.1 y § 4.1.2). Es aquí en donde se puede presentar un obstáculo epistemológico al asociar el significado del *sistema de referencia* con la representación del *sistema de coordenadas cartesianas* (Figura 4.1). El nivel didáctico-curricular, toma en cuenta que el SCC y el SR forman parte de los contenidos curriculares esenciales para ser abordados por parte de los profesores en las asignaturas de matemáticas y física, respectivamente (Figura 4.2).

LÍNEAS TEMÁTICAS
Eje 4: Geometría Analítica. Sistema de coordenadas. Plano Cartesiano. Estudio analítico de problemas de corte euclidiano y de lugares geométricos.
Eje 5: Funciones y Plano Cartesiano. Concepto de función y sus elementos. Diversos tipos de variación, estudio de sus comportamientos. Relación parámetro- gráfica- variación.

TEMÁTICA
1. Primera Ley de Newton • Inercia, sistema de referencia y reposo. • Interacciones y fuerzas, aspecto cualitativo. • Fuerza resultante cero, (vectores desde un punto de vista operativo, diferencia entre vector y escalar), 1ª Ley de Newton y Movimiento Rectilíneo Uniforme.

Figura 4.2. Contenidos curriculares del bachillerato en el que trabaja el profesor de este estudio: SCC en matemáticas (izquierda) y SR en física (derecha).

El nivel sobre el *uso* de *recursos* asocia el SCC y el SR con los posibles *recursos* para ser movilizados por parte del profesor para enfrentar el desafío didáctico, esto es, la pregunta de un estudiante sobre la aceleración negativa (§ 3). Así, se consideran como posibles *recursos* el *uso*: del pizarrón, en el cual el profesor pueda hacer gráficos (e.g. usar el propio SCC); usar otro ejemplo que se relacione con la pregunta del estudiante y gestos. El *uso* de *recursos* está dirigido a relacionar el significado de la aceleración negativa con el *uso*, a su vez, de un SR (elegido arbitrariamente).

5. Análisis de resultados

A continuación se presenta el análisis del extracto del video de 10:38 minutos de duración. Se analiza el diálogo que ocurre entre el profesor y los estudiantes a partir de la interacción de 3 *sistemas de actividad*. Cada *sistema de actividad* está integrado por los mismos sujetos (el equipo de 3 estudiantes y el profesor), pero orientado, cada uno, a objetivos particulares distintos. El primer *sistema de actividad* (SA1, analizado en Salinas-Hernández & Miranda, 2018) está orientado a resolver la Tarea 4 por parte de los estudiantes. Este objetivo surge a partir de los intereses de la investigación de Salinas-Hernández y Miranda (2018). El segundo *sistema de actividad* (SA2) surge a partir de la pregunta de E1, es decir, el objetivo (determinado por los estudiantes) es saber la diferencia entre aceleración negativa y desaceleración. El tercer *sistema de actividad* (SA3) se determina a partir del interés del profesor por hacer, a partir de la pregunta de E1, que los estudiantes interpreten el movimiento de caída libre de un objeto en términos de un SR elegido arbitrariamente. Sin embargo existe un objetivo común (e.g., Objeto 3 de la Figura 2.1), el cual está dado por el papel que juega el SR en la interpretación del movimiento de objetos (y por tanto se dé significado a conceptos de posición, velocidad y aceleración).

De esta manera, el análisis está enfocado en determinar de qué manera el profesor relaciona los tres *sistemas de actividad*, a través del *uso* de gestos. Este análisis, a su vez, permite determinar cómo está integrado el *uso* de gestos y los conceptos de SCC y SR en el sistema de *recursos* del profesor. Así, el video se divide, para su análisis, en tres momentos que están determinados por el desarrollo de SA2 (§ 5.1), de SA3 (§ 5.2) y la integración (por parte del profesor) de los tres *sistemas de actividad* (5.3).

5.1. Inicio de la discusión: *segundo sistema de actividad*

El SA2 tiene lugar cuando a los estudiantes, quienes se encontraban en el SA1 atendiendo los objetivos de otros sujetos (Salinas-Hernández & Miranda, 2018), les surge un interés particular (objetivo del SA2): conocer el significado de la aceleración negativa. Y es cuando inicia el diálogo con el profesor.

L1 E1: ¿Cuál sería un ejemplo de aceleración negativa, profe?

L2 Pedro: Es que desaceleración es dejar de acelerar, o sea, que un móvil se vaya deteniendo poco a poco.

L3 E1: ¿Cuál sería un ejemplo de aceleración negativa? [*Dirigiéndose al profesor*].

L4 Prof.: Nada más se le llama desaceleración hasta el momento en que llegas a cero.

L5 Pedro: ¡Ah! Ok.

L6 Prof.: ¿Si?, estás desacelerando hasta llegar a cero. Que está asociado con la aceleración negativa. Nada más que la aceleración negativa no para, no cesa ahí. Continúa, ¿no? Por ejemplo, cuando tú avientas un objeto, desacelera.

L7 E1: Y ya va a tener una aceleración negativa, si pasas del cero.

L8 Prof.: Siempre tiene una aceleración negativa, siempre tiene una aceleración negativa nada más que la desaceleración tú terminas cuando se para [*se detiene*]. Y aquí sigue actuando de modo que ahora [*es interrumpido por E1 que dice: "nos da negativo"*]. Entonces, va el cuerpo para arriba, pero nuestra aceleración, negativa. Entonces, frena [*cuando llega a su punto más alto*], pero como la aceleración continúa, baja [*se refiere a que el cuerpo cambia de dirección, respecto de la inicial*].

El SA2 se desarrolla entre L1 y L8. Da inicio cuando E1 plantea una pregunta al profesor relativa a lo que es la aceleración negativa (L1). Aquí, el profesor retoma en L4 y L6 lo dicho por P. [Pedro] previamente (L2). Él [Pedro] trató de relacionar la aceleración negativa [concepto] con un fenómeno físico conocido y producto de su experiencia; sin embargo, el profesor no es claro en su explicación de la relación que existe entre la desaceleración y la aceleración negativa, no obstante que dice: "Que está asociado con" (L6). La relación que hace el profesor es la siguiente: cuando el profesor dice en L6 "estás desacelerando hasta llegar a cero" hace referencia al momento en que el móvil se detiene, es decir, al fenómeno; y al decir "Nada más que la aceleración negativa no para, no cesa ahí. Continua…" hace referencia a la aceleración negativa [concepto] que se obtiene a partir de un SR.

El profesor no deja claro cómo un concepto (como el de aceleración negativa) se puede emplear para analizar un fenómeno (desaceleración). En su discurso, el profesor argumenta (implícitamente) que la dirección del objeto ocurre hacia donde se ha determinado (a partir de un SR) que la aceleración tiene signo negativo. Pero pueden ocurrir aceleraciones con signo positivo (aceleraciones positivas) y que aún así un móvil está desacelerando (frenando), dependiendo del SR elegido por el observador. De ahí la importancia de la elección de un SR adecuado para analizar un determinado movimiento de objetos. En un libro de texto (Giancoli, 2006), que se utiliza como apoyo durante el desarrollo de los cursos de este nivel escolar, se manifiesta el cuidado que se debe de poner al no concebir que desaceleración significa necesariamente que la aceleración sea negativa. "Cuando un objeto frena, a veces se dice que está desacelerando. Pero hay que ser cautelosos: desaceleración no significa necesariamente que la aceleración sea negativa." (p. 25). Más bien, significa que la magnitud de la velocidad disminuye. Posteriormente, el profesor da un ejemplo y dice: "cuando tú avientas un objeto, desacelera". Aquí, el profesor no explicita si hace referencia al tiro vertical, o bien se infiere que se trata de dicho movimiento cuando dice: "Entonces va el cuerpo para arriba […]. Entonces, frena, pero como la aceleración continúa, baja". El ejemplo del profesor corresponde ahora a un movimiento que tiene un comportamiento en dos direcciones (cuando sube y cuando baja), pero en donde la orientación del SR que indica aceleración negativa hacia abajo es constante. Tampoco vincula la desaceleración con los cambios de velocidad del objeto. A partir de este momento, el profesor tiene como objetivo que los estudiantes comprendan cómo se establece el signo (positivo o negativo) de las cantidades físicas (e.g., aceleración), para lo cual hará *uso*, en particular, de dos *recursos*: el concepto de *sistema de referencia* y gestos; los cuales hasta este momento no han sido usados por el profesor. Para hacer *uso* de estos *recursos* (SR y gestos) el profesor retoma el experimento realizado por los estudiantes del plano inclinado (SA1) pero con otro objetivo, que da lugar al SA3.

5.2. Cambio hacia otro *sistema de actividad*: tercer *sistema de actividad*

El SA3 tiene lugar de L9 a L20, cuando el profesor orienta la discusión hacia otro sistema de actividad (SA3).

L9 Prof.: En el plano inclinado [*Refiriéndose al experimento que realizaron los estudiantes*], ¿para dónde tomaron lo positivo? [*Pedro pregunta: "¿cómo?*], ¿para dónde tomaron lo positivo en el plano inclinado? [*Los estudiantes se ponen nerviosos*] Sí, pusieron positivo y negativo, ¿no? [*Pedro responde: "sí"*] ¿Para dónde estaba lo positivo?

L10 Pedro: Este…positivo, bueno, yo lo que logré entender, fue que positivo se tomó desde, bueno desde la parte, ¿cómo se dice?, desde la longitud más arriba, bueno los centímetros que había de la distancia del suelo hasta los ciento veinte centímetros que nos venía en la práctica. Y desde ese punto hasta el suelo, bueno a donde terminaba el riel [*refiriéndose al plano inclinado*] era, este, el plano.

En L9, evidencia el cambio entre *sistemas de actividad*. Al ponerse nerviosos (lo cual se observó en el video) los estudiantes dan muestra que la pregunta del profesor (L9) los tomó por sorpresa. Ellos no esperaban que fuera ahora el profesor quien les hiciera preguntas a ellos, cambiando la posición en este nuevo *sistema de actividad* respecto al anterior (SA2). Inclusive, a partir de este momento, dos estudiantes del equipo se desentienden del diálogo con el profesor.

En SA2, el profesor usa el concepto físico de SR como *recurso* (conceptual) para interpretar el fenómeno físico. Sin embargo, lo usa implícitamente (no les dice a los estudiantes que se va a usar el SR) y de manera poco clara. El SR conlleva una dirección (orientación) y un origen matemático (que puede coincidir o no con el origen fenomenológico). Aquí, el profesor se refiere solamente a la dirección al preguntar "¿para dónde?" (L9). Pero Pedro parece referirse al origen (matemático) del SR, que a su vez lo asocia con el origen fenomenológico, al decir: "desde la parte". Esta falta de entendimiento entre el profesor y Pedro puede deberse a la manera tan espontánea y de manera no explícita, con la que el profesor introduce el concepto del SR. Esto da cuenta de su *trabajo documental* en la manera en que usa el *recurso*. Además, el profesor no da alguna razón del porqué de su pregunta, así como tampoco menciona "*sistema de referencia*" en ningún momento; no obstante que su objetivo es utilizar dicho *recurso* para que Pedro comprenda cómo se establece el signo de la aceleración. Se debe poner atención cuando Pedro dice: "yo lo que logré entender" (L10), ya que Pedro se refiere a la manera en que se llevó a cabo el experimento (SA1); mientras que el profesor pretende llevar a cabo un análisis conceptual y que es lo que guiará el resto de la discusión con Pedro. La discusión continúa:

L11 Prof.: ¿Para dónde tomaste lo positivo? [*Después de que Pedro se queda pensando, el profesor continúa*] las orientaciones, positiva, negativa son arbitrarias, ¿si? Y si tú tomas lo positivo para arriba, no quiere decir que la pelota suba. Y si tomas lo positivo para abajo, no quiere decir que la pelota suba. Y si tomas lo positivo en diagonal, no quiere decir que la pelota suba. La pelota hace su comportamiento y punto [*Pedro dice: "sí"*] ¿No? La otra es la interpretación [*Pedro dice: "Ah, ok."*] ¿Sí?, ¿para dónde tomas tú lo positivo?

L12 Pedro: Pues, este, en el momento en que baja la pelota.

El profesor, usando *recurso* de SR, centra la atención en el observador (al decir: "son arbitrarias") quien es el que elige las convenciones para medir [interpretar] el fenómeno físico (plano inclinado), pero no es explícito que en el experimento, el observador sea el estudiante. Por su parte, Pedro ahora centra su atención en el movimiento del objeto, y comienza a vincularlo con la toma de datos. Sin embargo, no percibe la relación del experimento (movimiento real de la pelota) con el SR. Es aquí cuando el profesor incorpora otro *recurso* de tipo cultural-semiótico: gestos; i.e., un *recurso* utilizado intencionalmente por el profesor para lograr un objetivo (Gueudet & Trouche, 2009) y que a su vez utiliza en un proceso social de creación de significado a través de las acciones del profesor en un tiempo y espacio determinado (Arzarello, Paola, Robutti & Sabena, 2009; Radford 2008). El *uso* de gestos se produce a partir de L13.

L13 Prof.: ¿Para dónde tomas tú lo positivo? No en qué momento, ¿para dónde? [*Pedro le susurra a E1: "¡Ayúdame!" véase Figura 5.1*] Suelto esto [*toma un objeto (mousepad) y lo coloca a una distancia por encima de la mesa; Figura 2a*], ¿qué le va a pasar? [*Pedro dice: "se va a caer"*] [*Prof. Suelta el objeto; véase Figura 5.2b*] ¿Para dónde tomas tú lo positivo? [*Pedro piensa*] Entonces te ayudo. Yo tomo lo positivo para abajo. Entonces, este cuerpo [*refiriéndose al objeto que al mismo tiempo levanta y deja caer*] ¿aumentó su distancia o la disminuyó? [*Pedro no contesta*].

Figura 5.1. Pedro pide ayuda de un compañero.

En L13, se observa la dimensión social del momento en que está ocurriendo más allá que una negociación de significados (Radford, 2008) sobre el *recurso* que utiliza el profesor. Pedro se siente nervioso e inseguro al decir: "¡Ayúdame!" (Véase Figura 5.1). Después de que Pedro había respondido lo que él concebía como SR cuando dijo "Lo que yo logré entender" (L10), se encontró en un momento en que no lograba responder lo que el profesor preguntaba. Por lo que la interacción, entre Pedro y el profesor, juega un papel decisivo para reconocer mutuamente los significados institucionales que se están abordando. Esta interacción social que afecta a los individuos es determinante en el proceso de aprendizaje (Radford, 2008) para Pedro y de la manera en que transmite los conocimientos el profesor.

Posteriormente, el *recurso* del gesto es utilizado por el profesor para representar el fenómeno físico y espera que Pedro logre comprender el concepto de SR. En los gestos usados por el profesor, sólo aparece la representación del fenómeno físico (figuras 5.2a y 5.2b) y mediante el lenguaje hace referencia al concepto SR cuando dice: "Yo tomo lo positivo para abajo" (L13). Sin embargo, Pedro parece solamente observar el gesto sin darle significado. Lo que Pedro observa es solamente el movimiento de caída del objeto, la parte visible del *recurso* (Adler, 2000). Cuando el profesor dice: "Yo tomo lo positivo para abajo" en su gesto no hay algún elemento ni de la orientación ni del origen del SR. Por lo que al preguntar si la distancia aumenta o disminuye, el profesor no se da cuenta de que se necesita un origen, respecto del cual aumenta la distancia el objeto. En L14, el profesor modifica –a partir de su reflexión– su *recurso*.

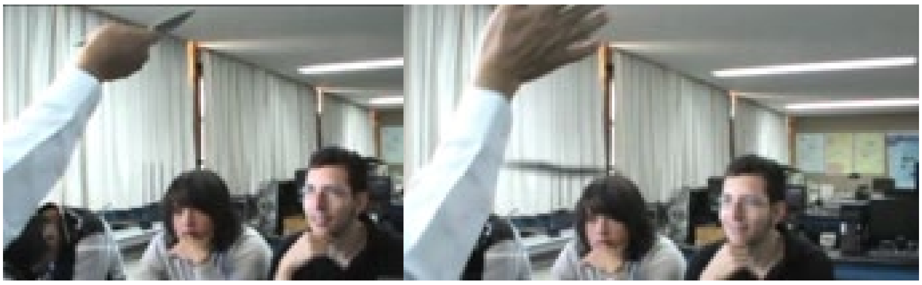


Figura 5.2. Gestos como *recursos* utilizados por el profesor en dos momentos (5.2a, izquierda), (5.2b, derecha).

L14 Prof.: ¿A qué distancia está? [*Mientras vuelve a levantar el objeto; Figura 5.2a*] [*Pedro dice: "Este…a equis centímetros"*] Cero, ok. Cero. ¿A qué distancia está? [*Baja el objeto un poco, respecto del punto más alto del que lo había colocado; véase Figura 5.3a*] Aquí estaba el cero [*señala con su dedo dónde se encontraba el objeto en un inicio; véase Figura 5.3b*].

L15 Pedro: Sí, este…podríamos ponerle menos uno o algo así.

L16 Prof.: No, no le puedo poner menos uno. (…) Para abajo es lo positivo [mientras vuelve a colocar el objeto donde lo había colocado en un inicio y lo deja caer], yo digo, arbitrariamente. ¿A qué distancia está? [*Coloca el objeto por debajo del punto inicial (cero para el profesor; véase Figura 5.3c*].

Figura 5.3. Gestos como *recursos* utilizados por el profesor en tres momentos (5.3a, izquierda), (5.3b, centro) y (5.3c, derecha).

Mediante la reflexión, referente al *recurso* que utiliza, el profesor (Gueudet & Trouche, 2009) se da cuenta de que necesita un origen respecto del cual se pueda medir la distancia, por lo que incorpora un nuevo gesto (Figura 5.3b) que representa el origen del SR y lo utiliza en dos momentos: cuando dice en L14: "Cero, ok. Cero" y al afirmar "Aquí estaba el cero". Se infiere, la reflexión del profesor sobre el movimiento del objeto, a partir del desarrollo de su discurso usado con los estudiantes, al tratar de explicar el significado del signo de la aceleración. Previamente, no había usado el gesto para representar el origen del SR, pero conforme evoluciona el discurso y la acción del profesor apareció un nuevo gesto (*recurso*). Después de que baja el objeto y pregunta: "¿A qué distancia está?" (Véase Figura 5.3a) es cuando aparece el gesto para hacer referencia al origen del SR (véase Figura 5.3b). Es importante resaltar que el primer momento también indica que el origen del SR (origen matemático) coincide con el origen fenomenológico (inicio del movimiento), pero el profesor no lo dice ni lo hace explícito. El diálogo continúa:

L17 Pedro: Hacia abajo. [*El profesor pregunta nuevamente: "¿a qué distancia está?" haciendo referencia a la Figura 5.3c*] ¡Ay!, no sé.

L18 Prof.: Pues, más o menos calcúlale [*uno de los investigadores de este artículo hace la siguiente intervención: "¿qué distancia hay de su dedo a lo que está sosteniendo?"*].

L19 Pedro: […] Es que ya me puse nervioso, a ver, pongámosle que unos diez centímetros. [*El profesor baja el objeto (lo acerca a la mesa); véase Figura 5.4a*] Como veinticinco. [*El profesor baja aún más el objeto (lo acerca más a la mesa)*] Como treintaicinco, cuarenta, pongámosle cuarenta. [*El profesor sube el objeto y lo coloca por encima de su dedo (origen); véase Figura 5.4b y 5.4c*] Como a diez.

L20 Prof.: Menos diez. [*Al mismo tiempo Pedro dice: "¡ah!, buen punto, menos diez"*].

Figura 5.4. Gestos como *recursos* utilizados por el profesor en tres momentos para colocar el objeto: a una distancia positiva del origen del SR (5.4a, izquierda) y a una distancia negativa del origen del SR (5.4b, centro) y (5.4c, derecha).

Pedro no comprende el porqué del gesto del profesor (Figura 5.3b) ni a qué hace referencia. Él sigue haciendo referencia al movimiento que sigue el objeto (fenómeno físico), al decir: "Hacia abajo". Y es hasta que otro integrante de otro equipo le pregunta explícitamente por la distancia que hay del dedo del profesor al objeto, que Pedro logra entender y seguir respondiendo conforme el profesor aleja el objeto de su dedo. Una vez que el profesor determina el SR con su origen hace un nuevo gesto (Figura 5.4b y 5.4c) para tratar de que Pedro se dé cuenta (sin éxito) del papel que juega la orientación; que aquí se representa por el valor negativo [de la aceleración] que tendría el objeto al colocarlo por encima del origen del SR. Es aquí cuando Pedro vuelve a centrarse solamente en la distancia entre el dedo y el objeto (véase Figura 5.4c) sin relacionarla con el concepto de SR.

A continuación, la conclusión de la discusión entre el profesor y Pedro.

5.3. Integración de los tres *sistemas de actividad*

El diálogo entre el profesor y Pedro termina cuando el profesor intenta concluir con algunas preguntas a Pedro con el objetivo de determinar si comprendió su explicación previa. En esta última parte (L21-L28) lo que se determina es que Pedro intenta integrar los tres *sistemas de actividad* previos, al relacionarlos sobre el concepto de SR.

L21 Prof.: ¿Sí? [*sobre el valor de menos diez como distancia en la Figura 5.4c*], ¿por qué?

L22 Pedro: Porque lo positivo lo está tomando hacia abajo.

L23 Prof.: ¿Y eso quiere decir que esto [*refiriéndose al objeto*] se suba? [*Pedro dice: "no"*]. Pues no. ¿Aumentó la distancia o disminuyó?

L24 Pedro: No, ninguna de las dos.

L25 Prof.: ¿Cómo no?, a ver [*levanta el objeto al punto de inicio (origen) y lo deja caer*] No está en el mismo lugar [*Pedro dice: "Buen punto"*]. ¿Aumenta la distancia o disminuye? [*Vuelve a levantar y dejar caer el objeto*].

L26 Pedro: Disminuye.

L27 Prof.: ¡Aumenta! ¿No dijimos que para abajo es lo positivo?

L28 Pedro: ¡Sí es cierto!

En L22 Pedro responde correctamente a partir de la convención utilizada por el profesor (hacia abajo positivo). Sin embargo, cuando en L23 el profesor le pregunta: "¿Aumentó la distancia o disminuyó?", Pedro vuelve a confundirse. Esta confusión, por parte de Pedro, es causada por la pregunta del profesor, pues el hecho de que el profesor haya movido su mano por arriba del origen del SR (Figuras 5.4b y 5.4c), no implica que las distancias entre dos puntos deben disminuir. En física, se pueden obtener valores negativos de las cantidades. Pero, por ejemplo un valor de –10 cm será mayor que –5 cm. Así, aquí el Profesor se sale, de alguna, manera del objetivo central: observar el papel del SR como un conjunto de convenciones para poder obtener medidas de cantidades físicas. De manera que el objetivo común de los tres *sistemas de actividad*: que el análisis del movimiento de objetos, en particular de caída libre, se lleva a cabo a través de las mediciones de cantidades físicas (e.g., posición y distancia) en un SR.

6. Conclusiones y reflexiones finales

En este artículo se analizó la manera en que un profesor de física usó gestos como un *recurso* didáctico para atender la duda de un estudiante (E1); y también, como un *artefacto* para representar un concepto: el *sistema de referencia*, el cual a su vez es un *artefacto* en el sentido de Wartofsky (1979). Es un modo de representar la actividad en el cual fue producido, esto es, en el análisis sobre el movimiento de objetos. Esta característica del SR permitió que este concepto pudiera ser el elemento principal sobre el cual se vincularon –por parte del profesor– tres *sistemas de actividad*.

Así, respecto de la primera pregunta de investigación, el profesor representó a través del *uso* de gestos: el origen de un SR y cómo varían las unidades de la distancia cuando un objeto se mueve en ese SR. Así se pudo observar y resaltar la componente didáctica de los gestos. Respecto de la segunda pregunta de investigación, el análisis del *uso* de gestos en el profesor permitió dar cuenta del conocimiento que él tiene sobre el concepto de SR. Se observó que identifica los elementos esenciales del SR: la necesidad de un origen matemático, de un observador quien lleva a cabo las mediciones, y la posibilidad de cambiar las orientaciones de medición (positiva y negativo) de un SR. Así, se resalta la componente epistemológica y cognitiva de los gestos.

Es importante señalar que, de acuerdo al encuadre teórico utilizado (§ 2), no se analizó la estructura cognitiva [conocimiento] del profesor a través de las invariantes operatorias del *uso* de gestos; sino que considerando a los gestos como un medio cognitivo y un modo de representación, se pudo así inferir el conocimiento del profesor. Esto, debido a la componente semiótica de los gestos como portadores de significados. Así, este estudio sirve como argumento para manifestar el hecho de que los gestos deben ser considerados como parte importante del *sistema de recursos* de los profesores.

De manera que futuras investigaciones estarían encaminadas en analizar la manera en que los gestos se integran al *sistema de recursos* del profesor y en cómo se desarrollan a través de la *génesis documental* para determinar, por ejemplo, el papel de los gestos en el desarrollo de una lección. Para esto, sería necesario incorporar tanto en el diseño de las investigaciones como en el análisis: entrevistas a los profesores y la manera en que los gestos se integran con otros *recursos* y en variedad de situaciones.

Bibliografía

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(3), 205-224.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 97-109.

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, *14*(1), 133-156. https://doi.org/10.1080/13639080020028747

Giancoli, D. (2006). *Física. Principios con aplicaciones.* México: Pearson Educación.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation system for mathematics Teachers? *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 199-218.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2012). Teachers´work with resources: Documentational geneses and professional geneses. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From text to ´lived´resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (pp.189-213). New York: Springer.

Guzmán, J., & Kieran, C. (2013). Becoming aware of mathematical gaps in new curricular materials: A resource-based analysis of teaching practice. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 163-190.

Haquin, D. M. (2012). La perspectiva multimodal sobre la comunicación: desafíos y aportes para la enseñanza en el aula. *Diálogos educativos*, 11(22), 3-14.

Leont'ev, A. N. (1978). Activity, consciousness, and personality. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Karam, R. (2015). Introduction of the Thematic Issue on the Interplay of Physics and Mathematics. *Science & Education*, *24*(56), 487-494.

Kjeldsen, T. H., & Lützen, J. (2015). Interactions Between Mathematics and Physics: The History of the Concept of Function—Teaching with and About Nature of Mathematics. *Science & Education*, *24*(5-6), 543-559.
Kragh, H. (2015). Mathematics and physics: The idea of a pre-established harmony. *Science & Education*, *24*(5-6), 515-527.
Piaget, J. (1979). *Introducción a la epistemología genética: El pensamiento físico*. Argentina: Paidós.
Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(Extraordinario 1), 103-129.
Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.
Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(3), 111-126.
Radford, L. (2012). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche, (Eds.), *From text to ´lived´resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 238-288). New York: Springer.
Resnick, R., & Halliday, D. (1970). *Física*: Vol. 1. México: CECSA.
Salinas-Hernández, U., & Miranda, I. (2018). Relating Computational Cartesian Graphs to a Real Motion: An Analysis of High School Students' Activity. In N. Presmeg, L. Radford, W.M. Roth, & G. Kadunz G. (Eds.), *Signs of Signification* (pp. 55-71). ICME-13 Monographs. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70287-2_4
Trouche, L., Gitirana, V., Miyakawa, T., Pepin, B., & Wang, C. (Online first). Studying mathematics teachers interactions with curriculum materials through different lenses: towards a deeper understanding of the processes at stake. In J. Choppin (Ed.), special issue Curriculum ergonomics, *International Journal of Educational Research*, available at https://doi.org/10.1016/j.ijer.2018.09.002
Wartofsky M. (1979). *Models: representation and the scientific understanding*. Boston studies in the philosophy of science, vol. XLVIII. Boston (MA): Reidel Publishing Company.

Ulises Alfonso Salinas-Hernández

Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por el Cinvestav-IPN Zacatenco, México. Profesor de asignatura en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM, México. Interesado en analizar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y de la ciencia como una práctica social, histórica y culturalmente mediada. Profesor visitante en *L'École des sciences de l'éducation de l'Université Laurentienne* en 2015, en donde trabajó con el profesor Luis Radford. Realizó una estancia doctoral en *The French Institute of Education, École Normale Supérieure de Lyon, France* en 2018, bajo la supervisión del profesor Luc Trouche. Ha participado en diversos congresos internacionales en el ámbito de la matemática educativa. E-mail: asalinas@cinvestav.mx

Luc Trouche

Luc Trouche is professor of didactics of mathematics in the French Institute of Education, École Normale Supérieure de Lyon, France. Interested in studying the role of tools in the learning of mathematics (Monaghan, Trouche & Borwein, 2016), he has contributed to develop the notion of instrumental orchestration (Trouche & Drijvers, 2014) for modeling the management, by a teacher, of available tools in the classroom. He focuses now on resource use/design and teacher professional development in the time of digitalization. This has led him to contribute to develop the documentational approach to didactics (Gueudet, Pepin & Trouche, 2012). In this perspective, the notion of teacher resource system appears crucial in order to understand teacher (developing) knowledge and the coherence of his/her activity. Studying the interactions between individual and collective teachers' resource systems gives means for understanding the dynamics of these collectives, and for rethinking the way of supporting teacher development at a time of the 'metamorphosis' of teaching environments. E-mail: luc.trouche@ens-lyon.fr

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 25-45

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Modelos de análisis del conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de los profesores

Juan Francisco Gonzalez Retana, Daniel Eudave Muñoz

Fecha de recepción: 08/09/2017
Fecha de aceptación: 20/12/2018

Resumen	Uno de los temas que más ha interesado a los investigadores en el campo de la didáctica de las matemáticas, ha sido valorar cuáles son los conocimientos necesarios que un profesor debe poseer para el desarrollo de la práctica de la enseñanza y con ello favorecer el aprendizaje a los alumnos. En este texto se presenta una revisión de los modelos teóricos más empleados como marcos de referencia para el análisis de dichos conocimientos. Aunque la mayoría de los modelos que se presentan a continuación tienen su origen en el campo de la didáctica de las matemáticas, se considera que pueden ayudar al análisis de los conocimientos disciplinares y didácticos en otras áreas. **Palabras clave:** conocimiento del profesor, formación de profesores, didáctica de las matemáticas.
Abstract	One of the topics that has most interested researchers in the field of didactics of mathematics, has been to assess what are the necessary knowledge that a teacher should possess for the development of teaching practice and thereby to favor learning to the students. This paper presents a review of the theoretical models most used as frames of reference for the analysis of such knowledge. Although most of the models presented below have their origin in the field of didactics of mathematics, it is considered that they can help the analysis of the disciplinary and didactic knowledge in other areas. **Key words:** teacher knowledge, teacher training, mathematics didactics.

Resumo	Um dos tópicos que os pesquisadores têm se interessado, no campo da didática da matemática, é o de avaliar os conhecimentos necessários que um professor deve possuir para o desenvolvimento da prática docente e, assim, favorecer a aprendizagem os alunos. Este artigo apresenta uma revisão dos modelos teóricos mais utilizados como quadros de referência para a análise de tais conhecimentos. Embora a maioria dos modelos apresentados tenha sua origem no campo da didática da matemática, considera-se que eles podem ajudar a analisar o conhecimento disciplinar e didático em outras áreas. **Palavras-chave:** conhecimento do professor, treinamento de professores, didática de matemática.

1. Introducción

La investigación acerca de la formación de profesores es uno de los campos que más ha interesado a los investigadores en los últimos años. A nivel internacional, desde la aparición de los primeros textos acerca de la investigación sobre la enseñanza y los profesores, estuvo presente la investigación en educación matemática. Hoy en día existen una gran cantidad de publicaciones al respecto (por ejemplo, el Handbook of Mathematics Education, el Handbook of Mathematics Teacher Education o el Journal of Mathematics Teacher Education), con una multiplicidad de temáticas. Además, de manera regular se realizan una serie de eventos, seminarios y congresos, entre los que sobresalen los organizados por la National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) o el Psychology of Mathematics Education Group (PME) (Krainer y Llinares, 2010) en donde la formación matemática de los profesores es una temática que está presente.

Un tema que ha interesado a los investigadores en el campo de la formación de profesores ha sido valorar cuáles son los conocimientos que un docente debe poseer para enseñar matemáticas. A lo largo del tiempo han surgido varias propuestas encaminadas a dicho propósito (Shulman, 1986, 1987; Ball, 2000, 2003; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Godino, 2009; Rowland & Ruthven, 2011, entre otros más). En este texto presentamos un análisis de algunas propuestas empleadas como marcos de referência para el estudio de dichos conocimientos

Los objetivos del análisis se centran en:

a) Ofrecer un panorama acerca de propuestas que se interesan por el estudio de los conocimientos que debe poseer un profesor para enseñar matemáticas.
b) Comparar las propuestas para analizar las semejanzas y diferencias que existen entre ellas.

Como bien comentan Pino-Fan & Godino (2015), las diversas propuestas existentes ofrecen maneras diferentes de caracterizar los componentes del conocimiento matemático y didáctico con que deben contar los profesores. Los modelos teóricos que se presentan se centran en profesores que dedican toda su actividad profesional a la enseñanza de las matemáticas. Aun así, cada modelo puede contribuir al análisis de los conocimientos de un profesor que imparte todas las asignaturas, como en el caso de la educación primaria en México y otros países. Además, consideramos que, aunque muchos de los modelos que se presentan tienen su origen en el campo de la didáctica de las matemáticas, pueden ayudar al análisis en otras áreas.

2. Metodología

Los modelos que se presentan se localizaron a partir del análisis de diversos textos cuyo propósito se centró en el estudio de los conocimientos que los profesores requieren para enseñar matemáticas.

Para realizar la revisión de los modelos nos apoyamos en la propuesta de Okoli (2015) quien sugiere ocho pasos para la revisión de literatura. La secuencia de pasos se describe a continuación:

1. *Identificación del propósito de la revisión.* En el apartado anterior se especificó que el propósito de la presente revisión es ofrecer un panorama acerca de algunas propuestas que se interesan por el estudio de los conocimientos que debe poseer un profesor para enseñar matemáticas, así como en la comparación de éstas.
2. *Elaboración de un protocolo de búsqueda.* Implica contar con una guía clara del procedimiento a seguir para llevar a cabo la revisión. Tomando en cuenta lo anterior, la búsqueda se realizó a partir de los resultados que Sánchez (2011) presenta sobre las tendencias de investigación en el campo de la formación de profesores de matemáticas. Este autor menciona que los intereses de los investigadores pueden ser agrupados en tres categorías:

   a) *Las preocupaciones o áreas prioritarias de los investigadores*; incluye temas tales como: creencias, percepciones y concepciones de los profesores; prácticas de los docentes; conocimientos y habilidades de los profesores; relaciones entre teoría y práctica; práctica reflexiva.
   b) *Los conceptos teóricos que son más empleados*; como el Conocimiento Pedagógico del Contenido (Pedagogical Content Knowledge) y otros conocimientos; reflexión en la acción y reflexión sobre la acción; comunidades de práctica.
   c) *Los objetos de estudio emergentes*. Por ejemplo, formación *online*; el diseño y el rol de las tareas educativas; educación y desarrollo de la formación de profesores de matemáticas; justicia social en la investigación sobre formación de profesores de matemáticas.

   Las dos primeras categorías proporcionaron información acerca de términos que sirvieron para localizar los modelos que se analizan en este texto. Por ejemplo, en el primer grupo de investigaciones Sánchez (2011) menciona que existen un conjunto de estudios que se interesan por analizar los conocimientos y las habilidades de los profesores de matemáticas. Al revisarlos se encontraron conceptos como, por ejemplo: *conocimiento matemático para la* *enseñanza o conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. En la segunda categoría, el autor identifica "conceptos teóricos con una notable influencia en la comunidad investigadora" (p. 136), tales como *Conocimiento Pedagógico del Contenido* y *Conocimiento del Contenido Matemático*. Resalta que en este grupo de investigaciones aparecen citados, de manera recurrente, autores como Shulman y Ball.

3. *Selección para la inclusión.* Respecto a este paso Okoli (2015) menciona que se debe ser completamente explícito acerca de qué estudios se consideraron para la revisión. Así, se consideraron estudios que, con base en los resultados presentados por Sánchez (2011), se interesaran por analizar los conocimientos y las habilidades de los profesores de matemáticas en los que además se emplearan conceptos como conocimiento matemático para la enseñanza, conocimiento especializado del profesor de matemáticas, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento del contenido matemático.
4. *Búsqueda de la literatura.* Con base en los términos y autores presentes en la revisión que realizó Sánchez (2011) se realizó una búsqueda en índices de revistas especializadas como por ejemplo: Redalyc, Dialnet, Eric, Springer, Scielo, Google académico, entre otras. También se revisaron algunos sitios web de los autores encontrados en la búsqueda que se hizo en los índices. En total se revisaron 75 textos. En la tabla 1 se presenta la cantidad de textos encontrados por índice revisado.

Tabla 1- *Cantidad de textos por índice revisado*

Índice	Cantidad de textos
Google académico	25
Springer	12
Dialnet	9
ERIC	6
Redalyc	6
Latindex	4
Scielo	4
Web del autor	4
SAGE Journals	3
ProQuest	2

Se analizaron principalmente artículos de investigación, aunque también se encontraron otros tipos de texto como capítulos de libro y tesis de doctorado. La tabla 2 muestra la cantidad por tipos de texto revisados.

Tabla 2 - *Tipos y número de textos revisados*

Tipo de texto revisado	Cantidad
Artículos de investigación	62
Capítulos de libro	5
Tesis	5
Conferencias	1
Otros	2

5. *Extracción (obtención) de los datos.* En este paso es necesario que se establezcan los criterios que se emplearán durante el análisis de los textos encontrados (Okoli, 2015). De tal forma que, se consideraron ─como se observa en la tabla 2─ en su mayoría artículos de investigación cuya estructura mostrara la forma en que se empleó cada modelo para el análisis de los conocimientos matemáticos de los profesores.
6. *Valoración de la calidad.* En este paso Okoli (2015) platea que se deben especificar los criterios que se utilizan para juzgar qué documentos se excluirán por calidad insuficiente. De tal forma que, para la revisión que ahora se presenta se incorporaron:

    a) Textos publicados en revistas científicas incluidas en diversos índices académicos. Con ello se pretendió tener certeza de un rigor editorial sólido.
    b) Investigación cuyos resultados fueran interpretados bajo la óptica de alguno de los modelos de análisis del conocimiento matemático que aquí se presenta.
    c) Investigaciones realizadas por investigadores reconocidos en el campo de la didáctica de las matemáticas y, sobre todo, en la formación de profesores.

En las referencias sólo se presentan los textos más representativos.

7. *Síntesis de los estudios.* Como más adelante se muestra, la descripción de los modelos no sigue un orden en particular, aunque se puede decir que se parte de una propuesta teórica que marcó un punto importante en el interés por el análisis de conocimiento para la enseñanza de los profesores, es decir las ideas presentadas por Shulman (1986, 1987).
8. *Redacción de la revisión.* Este paso involucra la redacción de la revisión. Se sugiere que para ello se sigan los criterios estándar que demanda la escritura de artículos de investigación.

3. Modelos para el análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores

La propuesta de Shulman (1986, 1987) aparece en prácticamente todos los textos analizados; éstos señalan que fue este autor quien, en principio, expuso la necesidad de que un profesor contara con diversos tipos de conocimientos para la enseñanza. Es por eso que en este análisis se incluyen las ideas de este autor. En el caso del análisis de los conocimientos de los profesores de matemáticas, es a la propuesta de Ball (2000, 2003) a la que se hace mayor referencia, sobre todo en investigaciones publicadas en inglés. Algunos de los modelos, como el que presentan Carrillo, Climent, & Muñoz-Catalán (2012) surgen como una propuesta que pretende complementar el trabajo de Ball. En la tabla 3 se presentan la cantidad de textos en los que se aborda alguno de los modelos que se analizan en la siguiente sección (en las referencias sólo se mencionan los más representativos).

Tabla 3 - *Cantidad de textos por modelo analizado*

Modelo	**Cantidad de textos**
Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball y colaboradores)	46
Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (EOS) (Díaz-Godino)	16
Mathematical Teacher´s Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo y colaboradores)	9
Conocimiento base para la enseñanza (Shulman)	3
Teoría de la Proficiencia (Schoenfeld y Kilpatrick)	1

No está de más señalar que estos modelos no son los únicos que pretenden explicar la naturaleza de los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores de matemáticas, y que si nos limitamos a ellos es por su importancia y trascendencia en el campo de la investigación en educación matemática. También hay que señalar que algunos modelos, como el de Carrillo y colaboradores y el de Díaz-Godino y Pino-Fan, al ser más recientes, aún es mucho lo que puede aportar y es esperable que en los próximos años se publiquen más trabajos sustentados en dichos modelos.

En 1986 Shulman propuso uno de los modelos que más impacto ha tenido en el estudio del pensamiento del profesor; planteó tres categorías que, desde su perspectiva, conforman el conocimiento del profesor:

a) *Conocimiento del Contenido*. Que se refiere a la organización mental que tiene el profesor acerca de los contenidos que va a enseñar.
b) *Conocimiento Pedagógico del Contenido.* Un tipo de conocimiento que va más allá del conocimiento de la materia a enseñar; que se orienta hacia la

comprensión de lo que facilita o dificulta el aprendizaje de temas específicos de la materia que se imparte.

c) *Conocimiento del Currículo*. Que se centra en el conocimiento acerca del programa curricular del nivel educativo en el que se trabaja, así como la variedad de materiales (como los libros de texto) que se disponen para la enseñanza. (Shulman, 1986).

La categoría del *Conocimiento Pedagógico del Contenido* (Pedagogical Content Knowledge o PCK, por sus siglas en inglés) despertó un fuerte interés en el terreno de la investigación en educación matemática. Fue tanto el interés en torno a este concepto que después de la publicación del artículo de Shulman (1986) se realizaron una serie de estudios con el propósito de examinar este conocimiento en profesores en servicio. En específico, el PCK es un conocimiento que "incluye las formas usuales para representar las ideas, analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, en otras palabras, los caminos para representar y formular un contenido matemático y hacerlo más comprensibles a los demás" (Shulman, 1986, p. 9).

En otro trabajo, el propio Shulman (1987) desarrolla aún más sus ideas y señala que los profesores necesitan poseer un *conocimiento base* para la enseñanza, el cual incluye:

1. *Conocimiento del contenido*. El dominio de los temas que serán enseñados.
2. *Conocimiento pedagógico en general*, que hace referencia a una serie de principios y estrategias para la gestión y organización del trabajo en el aula, independientemente de la asignatura de que se trate.
3. *Conocimiento del currículo*, esto es, la comprensión de los materiales y los programas de la asignatura que imparte.
4. *Conocimiento pedagógico del contenido*, comprende la integración del contenido a estudiar y la manera en que este puede ser acercado (enseñado) a los alumnos.
5. *Conocimiento de los estudiantes* y de sus características tanto afectivas como cognitivas.
6. *Conocimiento de los contextos educativos*, que comprende desde el entendimiento del trabajo en clase, la organización de las instituciones escolares, hasta las características de las comunidades.
7. *Conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación*, así como sus fundamentos filosóficos e históricos. (Shulman, 1987, p. 8)

Desde la publicación de los escritos de Shulman (1987) sobre el Conocimiento Base para la Enseñanza, muchos investigadores del campo han desarrollado, ampliado e integrado otros elementos al conocimiento necesario para enseñar, con el fin de contribuir a la comprensión de este fenómeno.

Bajo los supuestos de Shulman, los trabajos realizados por Ball (2000 y 2003), Hill, Schilling, y Ball (2004) Hill, Rowan y Ball (2005), Ball, Thames y Phelps (2008) así como el de Hill, Ball y Schilling (2008) constituyen una línea de investigación en la que se analiza el conocimiento matemático y pedagógico de los profesores. Estos trabajos retoman la idea de Shulman en cuanto al PCK, es decir consideran como elemento importante el conocimiento del profesor acerca de lo que favorece o dificulta el aprendizaje de las matemáticas.

Ball (2000 y 2003) propone un modelo que denomina *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (*Mathematical Knowledge for Teaching* o *MKT*, por sus siglas en inglés). El MKT incluye el conocimiento matemático, las habilidades y hábitos mentales que son empleados para el trabajo de enseñanza. En otras palabras, es el conocimiento matemático utilizado para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas. El trabajo de enseñanza son todas aquellas tareas y responsabilidades que tienen los profesores para enseñar las matemáticas, tanto dentro y fuera del aula (Ball et al., 2006).

En el MKT se clasifican los tipos de conocimiento matemático en: *Conocimiento del Contenido* y *Conocimiento Pedagógico del Contenido Matemático*, cada uno conformado por tipos distintos de conocimiento denominados subdominios (ver figura 1)

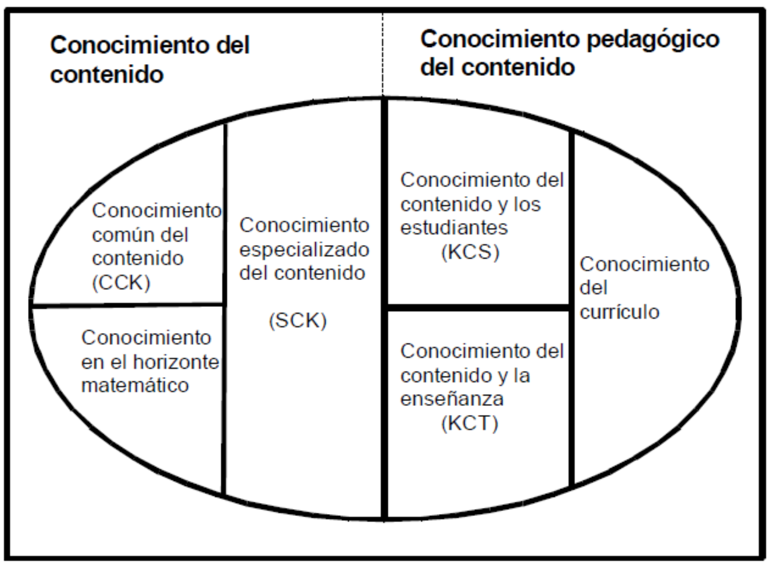


Figura 1. Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)
Fuente: Hill, Ball y Schilling (2008, p. 377)

El *Conocimiento del contenido* se refiere a los conocimientos matemáticos que se supone posee una persona que se dedica a la enseñanza de las matemáticas, como producto de su paso por la escuela básica y de su formación en docencia. Se conforma por tres subdominios:

1. *Conocimiento Común del Contenido* (*CCK*, por sus siglas en inglés), definido como los conocimientos y las habilidades que son empleados no solo en la enseñanza de las matemáticas sino en una variedad de entornos (Hill, Ball & Schilling, 2008). Cuando se habla de conocimiento común no se debe entender que cualquier persona tiene este conocimiento; más bien se refiere a un conocimiento matemático que es utilizado en diferentes entornos, es decir, no es exclusivo de la enseñanza.

2. *Conocimiento Especializado del Contenido* (*SKC*), es aquel que se compone de los conocimientos y las habilidades necesarias para el desarrollo del trabajo en el área de matemáticas. Normalmente no se necesita para fines distintos de la enseñanza. Es un tipo de conocimiento matemático que los maestros deben poseer porque la enseñanza implica hacer que las características de un contenido particular sean visibles y aprendibles por los estudiantes.(Hill et al., 2008).
3. *Conocimiento en el Horizonte Matemático,* hace referencia al conocimiento para poder establecer las relaciones entre contenidos matemáticos de diferentes niveles educativos: lo que se conoce como una relación vertical o articulación entre contenidos (de educación primaria con los de educación secundaria, por ejemplo). También hace referencia a las relaciones de los contenidos matemáticos entre sí o con otra asignatura de un mismo nivel o grado educativo, entendidas como relaciones horizontales. Este conocimiento "incluye las habilidades que tienen los profesores para saber la importancia que tiene un determinado contenido matemático durante su trayectoria curricular" (Sosa, 2011, p. 31).

El *Conocimiento Pedagógico del Contenido* (*PCK*) se concibe como los conocimientos fundamentales para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Está integrado por los siguientes subdominios:

1. *Conocimiento del Contenido y los Estudiantes* (*KCS*), que implica reconocer los procesos que siguen los estudiantes durante el aprendizaje de las matemáticas, así como la manera de corregir los errores que cometen.
2. *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza* (*KCT*) que involucra conocer diversas maneras de acercar algún contenido matemático a los alumnos, esto es, cuáles son las ventajas de utilizar o seguir una determinada estrategia al estudiar un tema con los estudiantes.
3. *Conocimiento del Currículo* que supone el conocimiento de la composición y estructura curricular. El profesor tiene el conocimiento de la manera en que está organizado el currículo del nivel y el grado educativo donde se desempeña. Lo que le permite la planificación de las actividades para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes (Ball, Thames & Phelps, 2008).

Otra propuesta es el aporte que hacen Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán (2012), mismo que es fruto del refinamiento del MKT. Estos autores mencionan que las ideas de Deborah Ball y sus colaboradores acerca del Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza presentan ciertas dificultades, específicamente las fronteras entre los subdominios Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) y Conocimiento Común del Contenido (CCK). Los problemas radican, según Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán, en:

a) Decidir cuando el Conocimiento Común del Contenido termina y en qué momento comienza el Conocimiento Especializado del Contenido. Argumentan que, dado que el MKT se basa en la observación, es complicado decidir en qué momento el conocimiento de un profesor se corresponde con el Conocimiento Común o no, pues es necesario compararlo con un conocimiento hipotético de un nivel de educación también hipotético, sin saber de verdad cuál es el conocimiento matemático común de esa persona.

b) Demarcar los límites entre el Conocimiento Especializado del Contenido y el Conocimiento en el Horizonte Matemático. La definición del primero apunta a un conocimiento acerca de las matemáticas cuando se enseña un tema, lo que hace difícil determinar, al momento de observar, en qué momento un tema se relaciona con otro, es decir cuándo se recurre al Conocimiento del Horizonte Matemático.

Considerando lo anterior, Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán (2012) redefinen el MKT dando origen al Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge, MTSK). El modelo se presenta en la figura 2.

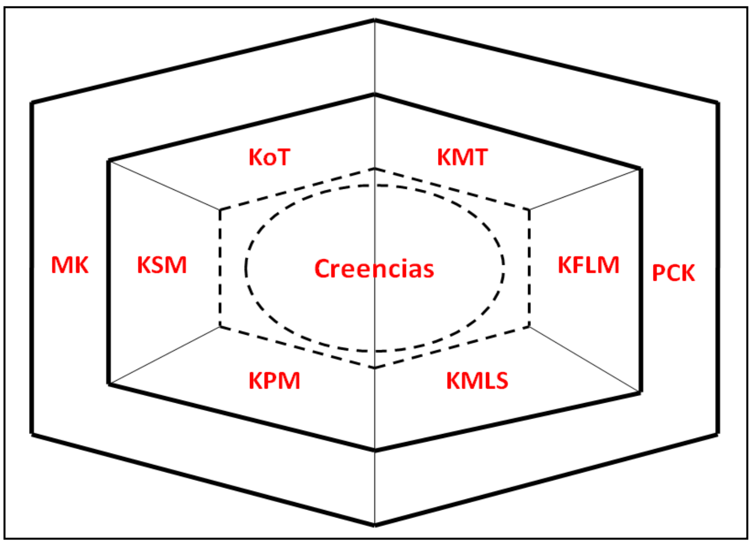


Figura 2. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MSTK)[1]
Fuente: Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán (2012)

El MTSK conserva dos grandes tipos de conocimiento el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)[2]. En el centro del modelo se sitúan las creencias respecto a ambos tipos de conocimientos.

El Conocimiento Matemático (MK) está compuesto por tres subdominios:

a) El *Conocimiento de los Temas* (KoT, *Knowledge of Topics*). "Es el conocimiento de los conceptos y procedimientos matemáticos" (Rojas, Flores y Carrillo, 2015, p. 147). Se refiere al contenido disciplinar de las matemáticas (Aguilar González et al., 2013).

[1] Los autores presentan su Modelo con las siglas en inglés.
[2] Conviene señalar que estos autores llaman Conocimiento Didáctico del Contenido al Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK).

b) *Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas* (KSM, *Knowledge of the Structure of Mathematics*). Incluye una visión de conjunto de la matemática, en donde se considera la conexión (interconceptual y temporal) y la complejidad del conocimiento matemático. La conexión interconceptual se refiere al enlace "entre ideas o conceptos matemáticos distintos, siendo los conectores las ideas matemáticas que vinculan representaciones de un concepto con el de otros" (Rojas, Flores y Carrillo, 2015, p. 148). La conexión temporal hace alusión a la relación entre el conocimiento del profesor y el contenido de enseñanza, lo que permite emplear un concepto o procedimiento en una situación nueva o más compleja. La idea de complejidad radica en que el docente debe analizar los contenidos matemáticos para saber cuáles se conectan.

a) El *Conocimiento de la Práctica Matemática* (*KPM, Knowledge of the Practice of Mathematics*). Se refiere al conocimiento de las formas de conocer, crear y producir matemáticas, es decir, la manera de proceder en matemáticas. Por ejemplo, saber definir y usar definiciones, elegir representaciones, argumentar, generalizar, etc. (Rojas, Flores y Carrillo, 2015).

El Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) está integrado por los siguientes subdominios:

a) El *Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas* (*KMT, Knowledge of Mathematics Teaching*). Es el conocimiento de un profesor que le ayuda a elegir un material, ejemplo o tarea determinado para la enseñanza de un concepto o procedimiento. Incluye el conocimiento de teorías de la enseñanza de las matemáticas.
b) El *Conocimiento de las características del Aprendizaje de las Matemáticas* (*KFLM, Knowledge of Features of Mathematics Learning*). Es un conocimiento que permite al profesor conocer la manera en que piensan los estudiantes sobre las matemáticas que, en otras palabras, comprende "todo lo relacionado con generar aprendizaje de las matemáticas" (Rojas, Flores y Carrillo, 2015, p. 149)
c) El *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje* (*KMLS, Knowledge of Mathematics Learning Standards*). Implica conocer la información que se ofrece en el currículo oficial; es decir, los contenidos, objetivos, orientaciones de enseñanza, materiales o recursos. Aunque este conocimiento puede extenderse a las recomendaciones de expertos en la materia.

Conviene resaltar el papel que juegan las creencias de los profesores en este modelo, pues sin ser propiamente un tipo de conocimiento, si pueden influir y aún determinar las concepciones y el actuar de los docentes al enfrentar las tareas de enseñanza. Las creencias, además pueden ser más estables y con raíces más profundas que los conocimientos.

Otro modelo muy completo es la llamada Teoría de la *Proficiencia*[3] en la enseñanza de las matemáticas de Schoenfeld y Kilpatrick (2008) quienes proponen un marco de competencia para la enseñanza de las matemáticas, compuesto por las siguientes dimensiones:

1. *Conocer las matemáticas escolares en profundidad y amplitud*. Significa que los profesores deben contar con diversas maneras de conceptualizar un contenido matemático dependiendo del grado escolar o nivel educativo en el que se desempeñen. Además, deben ser capaces de representarlo en formas variadas, comprender sus aspectos claves y establecer relaciones con otros temas del mismo nivel. Este conocimiento permite al docente priorizar y organizar los contenidos para mostrar a los estudiantes “las grandes ideas” y ayudar a que no se pierdan en una gran cantidad de datos. Además, permite al profesor responder con flexibilidad a las interrogantes que le plateen los estudiantes.
2. *Reconocer a los estudiantes como personas que piensan*. Implica ser sensibles respecto a la manera en la que los alumnos conciben las matemáticas y cómo pueden llegar a construir sus conocimientos.
3. *Reconocer a los estudiantes como personas que aprenden*. Esta dimensión se relaciona de manera directa con la anterior, pero incluye otras cuestiones como por ejemplo ser consciente de la teoría del aprendizaje que se sigue para el desarrollo de las actividades en la clase y de las implicaciones que tiene en la interacción con los estudiantes.
4. *Diseñar y gestionar ambientes de aprendizaje*. Se refiere a la creación de entornos productivos de aprendizaje más que el solo hecho de gestionar la clase.
5. *Desarrollar normas para apoyar el discurso en el aula como parte de la “enseñanza para la comprensión”*. Implica el seguimiento de ciertas normas durante la clase. Entre las que destacan la explicación de las soluciones encontradas, así como el hecho de contraponer argumentos ante proposiciones de otros estudiantes o del profesor.
6. *Construir relaciones que favorezcan el aprendizaje*. Favorecer las relaciones al organizar la clase de manera que los estudiantes interactúen no solo con el contenido a aprender sino también con sus compañeros.
7. *Reflexionar sobre la propia práctica*. Pensar reflexivamente acerca de los problemas que se enfrentan y la manera en que pueden ser resueltos. (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008, p. 322).

Estos autores destacan el hecho de que su propuesta es apenas el inicio de la Teoría de la *Proficiecia* y que obviamente aún necesita ciertos ajustes.

El Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor diseñado por Godino (2009) es otra propuesta que intenta explorar qué es necesario que un profesor

[3] El término *proficiencia* (del inglés *proficiency*) no existe en español, pero puede ser traducido como *competencia en, habilidad en, capacidad en* o *dominio de*. Así una posible traducción de la propuesta de Schoenfeld & Kilpatrick (2008) puede ser: Un marco de competencia para la enseñanza de las matemáticas.

sepa para realizar el trabajo de enseñar matemáticas. Esta propuesta tiene soporte teórico en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)[4]; está compuesto por seis facetas y cuatro niveles que se pueden entender como las categorías o componentes del conocimiento del profesor. Cabe resaltar que Godino emplea el término *Conocimiento Didáctico-Matemático* del profesor a fin de concatenar tanto los conocimientos matemáticos como los relativos a la didáctica de las matemáticas, y que es lo que Ball (2000) denomina como *Conocimiento del Contenido* y *Conocimiento Pedagógico del Contenido*. La figura 3 muestra la organización de las facetas y los niveles que conforman el Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor, según el modelo propuesto por Godino.

Figura 3. *Conocimiento base para enseñanza*
Fuente: Godino (2009, p. 21)

Como se observa en el esquema, se trata de un modelo en forma de prisma hexagonal en donde la base representa "las facetas a tener en cuenta en un proceso de estudio y el alzado indica cuatro niveles de análisis sobre los cuales se puede fijar la atención" (Godino, 2009, p. 21)[5].

Posteriormente Pino-Fan y Godino (2015) realizan una valoración de este modelo y proponen, empleando las mismas facetas y niveles, tres dimensiones para el análisis del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor (CDM) (figura 4).

[4] El EOS "es un marco teórico que propone articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje" (Godino, 2009, p. 20)
[5] Cada una de las facetas y niveles se describen en el modelo siguiente (Pino-Fan y Godino, 2015) pues son retomadas para su planteamiento.

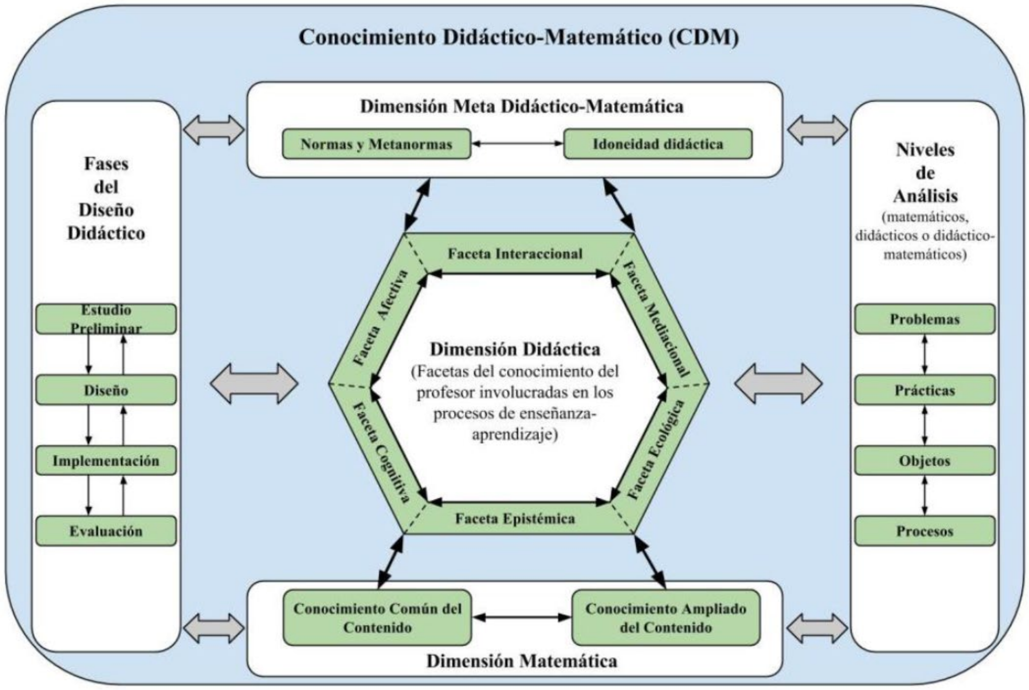


Figura 4. *Dimensiones y componentes del CDM*
Fuente: Pino-Fan y Godino (2015, p. 103)

La *Dimensión Matemática* incluye el *Conocimiento Común del Contenido* (CCC) y el *Conocimiento Ampliado del Contenido* (CAC). El CCC es “aquel conocimiento, sobre un objeto matemático concreto que se considera suficiente para resolver problemas o tareas propuestas en el currículo de matemáticas (…) y en los libros de texto de un nivel educativo” (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 97). El CAC se refiere al conocimiento que tiene un profesor acerca de “las nociones matemáticas que, tomando como referencia a la noción matemática que se está estudiando (…) están más adelante en el currículo del nivel educativo en cuestión o en un nivel siguiente” (p. 97).

La *Dimensión Didáctica* se compone de las siguientes categorías o facetas:

1. *Epistémica*. Incluye un conocimiento para la enseñanza, esto es, un profesor debe ser capaz de resolver una tarea siguiendo diversos procedimientos y acciones, lo que implica contar con varias maneras de representar un objeto matemático; además, debe disponer de distintos argumentos y justificaciones al momento de resolver una tarea matemática.
2. *Cognitiva*. Es el conocimiento acerca de las características y las formas de pensar, conocer y actuar de los estudiantes en relación con el estudio de las matemáticas. Permite a los profesores planificar la enseñanza considerando los conocimientos previos de los alumnos infiriendo su zona de desarrollo próximo. Ayuda, durante el transcurso de la clase, a aprovechar los errores o conflictos para resolución de un problema.

3. *Afectiva*. Se refiere “a los conocimientos necesarios para comprender y tratar los estados de ánimo de los estudiantes, los aspectos que motivan o no a resolver un problema determinado” (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 100)
4. *Interaccional*. Son los conocimientos indispensables para establecer, realizar y valorar las interacciones entre los agentes implicados en el proceso de aprendizaje matemático, incluyen relaciones de profesor-alumno, alumno-alumno, alumnos-contenido a estudiar y profesor-alumno-contenido. En esta faceta también se incluyen las normas (explicación, argumentación y fundamentación de las soluciones propuestas) que regulan la gestión de la clase.
5. *Mediacional*. Incluye los conocimientos de un docente para prever, emplear y valorar los diversos recursos, materiales o tecnológicos, con que cuenta con el fin de favorecer el logro del aprendizaje. Considera, además, la gestión del tiempo para las actividades en la clase.
6. *Ecológica*. Condensa los conocimientos del profesor acerca del currículo del nivel educativo en el que se desempeña, incluye las relaciones que se puedan establecer con otros currículos y también con aspectos sociales, políticos y económicos que condicionan tanto la enseñanza como el aprendizaje matemático. (Pino-Fan y Godino, 2015)

La *Dimensión Meta Didáctico-Matemática* se compone de los conocimientos referidos a las normas y metanormas, restricciones contextuales, la reflexión sobre la práctica y al análisis y valoración de la idoneidad didáctica. En Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006); Godino (2011); Godino, Rivas, Castro y Konic (2012); Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013) pueden encontrarse elementos para el análisis de la idoneidad didáctica.

Como aparece en la figura 3, cada una de estas dimensiones puede ayudar a la valoración de los conocimientos de los profesores en diferentes etapas o fases del diseño didáctico: estudio preliminar, diseño, implementación o evaluación. Además, se pueden emplear para el estudio de los diferentes niveles de análisis (matemáticos, didácticos o didáctico-matemáticos) enfocados a problemas, prácticas, objetos o procesos.

4. Análisis de los distintos modelos del conocimiento del profesor: una comparación de semejanzas y diferencias

La tabla 4 es una propuesta para resumir y comparar las diferentes categorías y dimensiones de los modelos presentados. Muchas de estas categorías podrían superponerse o quizás aparecer en varias categorías de otros modelos. Por ejemplo, lo que Shulman (1987) denomina *Conocimiento Pedagógico del Contenido* podría incluirse también en la *Faceta mediacional* en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático de Pino-Fan y Godino (2015). A continuación, se presenta un análisis de las coincidencias y semejanzas entre las propuestas.

4.1 Semejanzas

Consideramos importante resaltar, aunque resulte obvio, que la principal coincidencia en todas las propuestas radica en que para enseñar matemáticas es necesario contar con un repertorio de conocimientos que van más allá de un manejo de las reglas, teoremas, proposiciones y algoritmos. Es preciso un conocimiento matemático amplio y estructurado, lo mismo que un conocimiento didáctico que involucra las metodologías existentes. Lo anterior permite al profesor no solo contribuir al logro de los aprendizajes sino dotar de sentido y significado a su práctica. Esto es lo que se espera de un profesor, en especial en la educación básica en México: “Sin duda (enseñar matemáticas) reclama un conocimiento profundo de la didáctica de la asignatura que ‘se hace al andar’, poco a poco, pero es lo que puede convertir (una) clase es un espacio social de construcción del conocimiento” (Secretaría de Educación Pública, 2011, p. 350).

En todos los aportes se percibe al profesor con un rol activo que conoce no solo las matemáticas que enseña sino a sus alumnos y diversas maneras de hacer aprendibles las matemáticas. Un profesor sobre quien recae la responsabilidad del diseño y coordinación de las situaciones de aprendizaje. Lo anterior implica una participación activa del profesor y que tenga control de la actividad didáctica y del conocimiento matemático que se construye (Alanis et al, 2008).

Todas las propuestas contemplan que el profesor debe tener un conocimiento de los temas que enseña. Es decir que sea capaz de resolver los problemas y ejercicios que se plantean en el curso donde enseña, en otras palabras, resolver los problemas que plantea sus alumnos. Para Shulman (1987) es el Conocimiento del contenido; para Ball (2000, 2003) es el Conocimiento común del contenido; Carrillo, Climent y Muñoz Catalán (2012) lo llaman Conocimiento de los temas; Schoenfeld y Kilpatrick (2008) lo denominan Conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud; para Pino-Fan y Godino (2015) son el Conocimiento común del contenido y el Conocimiento ampliado del contenido.

Salvo Shulman (1987) en todas las propuestas se admite la necesidad de contar un conocimiento especializado del contenido matemático. Es decir, un conocimiento propio de los profesores que implica, entre otras tareas, el saber las razones por las que funcionan ciertos procedimientos matemático (Hill, Ball y Schilling, 2008); es un conocimiento que no se necesita en contextos distintos a la enseñanza (Ball, Thames y Phelps 2008). Para Carrillo, Climent y Muñoz Catalán (2012) se trata del conocimiento de la estructura de las matemáticas y también del conocimiento de la práctica matemática, lo que es la Faceta Epistémica para Pino-Fan y Godino (2015) y el Conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud en Schoenfeld y Kilpatrick (2008).

Un componente importante, presente en todos los aportes, es el conocimiento de los estudiantes, con diversos énfasis. Aunque como se verá más adelante, hay ciertos factores con respecto a los estudiantes, que no son tomados en cuenta en todos los modelos.

4.2 Diferencias

Son tres la diferencias que podemos resaltar. Aunque el conocimiento de los estudiantes está presente en todos los modelos, encontramos pequeños contrastes. Shulman (1986, 1987), Ball (2000, 2003) y Carrillo, Climent y Muñoz Catalán (2012) priorizan el conocimiento de los estudiantes desde una perspectiva cognitiva. Esto es, un profesor deber tener un conocimiento acerca de lo que saben, cómo piensan y cómo pueden aprender matemáticas los alumnos. Por su parte, Schoenfeld y Kilpatrick (2008) mencionan que un profesor deber ser consciente que los estudiantes son personas que piensan (con todo lo que ello implica: tener sentimientos, valores, actitudes, necesidades, afectos que muchas veces condicionan el aprendizaje de las matemáticas). Algo similar aparece en Pino-Fan y Godino pues no solo consideran una faceta cognitiva, sino que contemplan una afectiva, donde se concibe a los alumnos como sujetos que presentan diferentes "estados de estados de ánimo, poseedores de aspectos que motivan o no al resolver un problema" (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 100).

Shulman, Ball y Carrillo, Climent y Muñoz Catalán no hacen explicita la necesidad de la gestión de las relaciones entre el profesor, los alumnos y el contenido matemático que es estudiado. Mientras que en Pino-Fan y Godino esto se encuentra en la faceta interaccional, y para Schoenfeld y Kilpatrick se ubican en la dimensión donde proponen que un profesor debe ser capaz de construir relaciones que apoyen el aprendizaje.

Finalmente, salvo en Schoenfeld y Kilpatrick, todos los modelos convergen en que es necesario que un profesor tenga un conocimiento del currículo, acerca de cómo está constituido y de los diversos materiales de apoyo (libros de texto de los alumnos, libros de apoyo al docente, etc.). Tal vez para estos autores lo anterior se encuentra implícito en la dimensión que llaman "conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud".

En general, son más las coincidencias entre los modelos, cuestión que no es de sorprender pues con ellos se aspira a explicar un mismo fenómeno. También existen categorías en algunas de las propuestas que no pueden ser comparadas de manera directa con otras pertenecientes a un modelo diferente. Por ejemplo, Schoenfeld y Kilpatrick (2008) proponen una categoría específica para la *Reflexión sobre la propia práctica*, la cual no aparece, al menos de forma explícita, en ninguno de los otros modelos.

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 25-45
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Tabla 4. Comparación de las dimensiones de los distintos Modelos del conocimiento del Profesor

Conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 1987)	Mathematical Knowledge Teaching (Ball, 2000 y 2003)	Mathematical Teacher's Specialized Knowledge (Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán 2012)	Teoría de la Proficiencia (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008)	Conocimiento Didáctico-Matemático (Pino-Fan y Godino, 2015)
Conocimiento del contenido	Conocimiento común del contenido	Conocimiento de los temas	Conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud.	Conocimiento común del contenido. Conocimiento ampliado del contenido.
	Conocimiento especializado del contenido. Conocimiento del horizonte matemático.	Conocimiento de la estructura de las matemáticas. Conocimiento de la práctica matemática.		Faceta Epistémica.
Conocimiento de los estudiantes y sus características.	Conocimiento del contenido y los estudiantes.	Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas.	Conocimiento de los estudiantes como personas que piensan.	Faceta Cognitiva Faceta Afectiva
Conocimiento pedagógico general.				
Conocimiento pedagógico del contenido.	Conocimiento del contenido y la enseñanza.	Conocimiento Didáctico del Contenido Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas.	Diseñar y gestionar entornos de aprendizaje	Dimensión didáctica que involucra las diferentes facetas
			Construir relaciones que apoyen el aprendizaje.	Faceta Interaccional.
			Desarrollar normas de la clase como parte de la "enseñanza para la comprensión".	Faceta Mediacional.
Conocimiento curricular Conocimiento de contextos educativos. Conocimientos de los fines, propósitos y valores de la educación.	Conocimiento del currículo.	Conocimiento de los estándares de aprendizaje.		Faceta Ecológica.

Fuente: Construcción propia a partir de (Pino-Fan y Godino, 2015)

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 25-45
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

5. Conclusiones

La finalidad de este breve recorrido por algunos de los modelos que analizan el conocimiento que debe poseer un profesor para enseñar matemáticas es analizar las características generales de aquellas propuestas más empleadas en la investigación en didáctica de las matemáticas. Es evidente que el trabajo no es exhaustivo, pero con lo anterior puede tenerse una visión panorámica de los modelos que se han propuesto.

Como se apuntaba ya, todos tienen un fin común: analizar el conocimiento necesario para la enseñanza de matemáticas[6]. Los modelos concurren en que el conocimiento que necesitan los profesores para enseñar matemáticas debe estar formado por dos grandes bloques de conocimientos: uno propiamente matemático y otro didáctico.

En general encontramos más coincidencias que diferencias. Este recorrido proporciona elementos que esperamos motiven a profundizar en alguna de las propuestas a fin de contribuir en su desarrollo o aportar ideas para su mejora. De lo que estamos seguro es que los modelos que se analizan, aun con sus diferencias, constituyen una especie de carta de navegación para pensar, planear y llevar a cabo la formación, capacitación y actualización de los profesores de matemáticas.

Referencias

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A. & Rodríguez, R. (2008). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Editorial Trillas

Aguilar González, Á., Carreño, E., Carrillo Yáñez, J., Climent Rodríguez, N., González, C., Carlos, L. & Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. Recuperado a partir de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/8268

Ball, D. L. (2000). Bridging Practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241–247.

Ball, D. (2003). What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics. *Secretary's Summit on Mathematics, US Department of Education*. Recuperado a partir de http://www.erusd.k12.ca.us/projectalphaweb/index_files/MP/BallMathSummitFeb03.pdf

[6] Con excepción del Conocimiento Base para la Enseñanza de Shulman (1987). Sin embargo, este se consideró pues fue un punto de partida para los que aquí se analizan.

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Carrillo, J., Climent, N. & Muñoz-Catalán, M. (2012). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. *PROCEEDINGS OF CERME*. Recuperado a partir de http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/wg17_papers.html

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13–31.

Godino, J. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Conferencia presentada en la XIII CIAEM-IACME*. Recuperado a partir de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J., Batanero, C., Rivas, H. & Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *Revemat: revista eletrônica de educação matemática*, *8*(1). https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46

Godino, J., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *XXVII*(2), 221–252.

Godino, J., Rivas, M., Castro, W. F. & Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 1–21.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372–400.

Hill, H., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371–406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Hill, H., Schilling, S. & Ball, D. (2004). Developing measure of teachers Mathematics Knowledge for Teaching. *The elementary School Journal*, *105*. Recuperado a partir de https://www.google.com.mx/?gws_rd=ssl#q=Hill%2C+Ball+y+Schilling+(2008)

Krainer, K. & Llinares, S. (2010). Mathematics teacher education. *International Encyclopedia of Education* (Vol. 7, pp. 702–705). United States of America: Elsevier.

Okoli, C. (2015). A Guide to Conducting a Standalone Systematic Literature Review. Communications of the Association for Information Systems, 37, 879–910.

Pino-Fan, L. & Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *XXXVI*(1), 87–109.

Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Boletim de Educação Matemática*, *20*(51), 143–166.

Rowland, T. & Ruthven, K. (Eds.). (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching*. Dordrecht: Springer. Recuperado a partir de http://link.springer.com/10.1007/978-90-481-9766-8

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, *5*(4), 129–145.

Schoenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (Primera, Vol. 2). Sense publishers. Recuperado a partir de http://vocserve.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/Schoenfeld_Teaching_Proficiency.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011. Guia para el maestro. Educación básica. Primaria. Cuarto grado* (Primera Edición Electrónica). México, D.F.: Secretaría de Educación Pública (SEP).

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. (1987). Knowlendge and Teaching Fundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *52*(1). Recuperado a partir de http://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos.* (Tesis de Doctorado). España: Universidad de Huelva. Recuperada de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/4509.

Autores:
Juan Francisco Gonzalez Retana: Doctor en Investigación Educativa, por la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México. Líneas de investigación: Formación matemática de profesores, Educación Matemática.
juanfranciscogonzalezretana@gmail.com

Daniel Eudave Muñoz: Doctor en Educación, por la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México. Líneas de investigación: Educación Matemática, Formación en estadística.
deudave@correo.uaa.mx

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 46-59

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Iniciación a los objetos tridimensionales y sus propiedades en el aula de educación infantil: una experiencia de aula con cilindros

María Salgado, Ainhoa Berciano, Clara Jiménez-Gestal

Fecha de recepción: 11/08/2018
Fecha de aceptación: 20/12/2018

Resumen	El reconocimiento del espacio y de los objetos matemáticos clásicos que lo componen es una virtud que debe ser adquirida lo antes posible, a poder ser desde edades bien tempranas. En este sentido, en este artículo describimos el diseño e implementación de una experiencia didáctica que, basada en la resolución de un problema en contexto y en las etapas de aprendizaje de Van Hiele, fomenta trabajar nociones matemáticas asociadas a un cilindro con niños y niñas de 4 y 5 años de Educación Infantil. Finalmente, mostramos como la intervención de la maestra es fundamental para que todos los niños y niñas puedan entender algunas propiedades de este objeto. **Palabras clave**: Objetos tridimensionales, etapas de Aprendizaje de Van Hiele, Problemas en contexto, Educación matemática Infantil.
Abstract	The recognition of space and the classical mathematical objects that compose it is a virtue that must be acquired as soon as possible, preferably from very early ages. In this sense, in this article we describe the design and implementation of a didactic experience that, based on the resolution of a problem in context and in the learning stages of Van Hiele, promotes the work of mathematical notions associated with a cylinder with children of 4 and 5 years of Early Childhood Education. Finally, we show how the teacher's intervention is fundamental for all children to understand some of the properties of this object. **Keywords**: Three-dimensional objects, Van Hiele Learning stages, Problems in context, Early Childhood Mathematics Education.
Resumo	O reconhecimento do espaço e dos objetos matemáticos clássicos que o compõem é uma virtude que deve ser adquirida o mais rápido possível, para poder ser desde muito cedo. Neste sentido, neste artigo descrevemos a concepção e implementação de uma experiência didática que, com base na resolução de um problema em contexto e nos estágios de aprendizagem de Van Hiele, promove noções matemáticas de trabalho associadas a um cilindro com crianças de 4 e 5 anos de Educação Infantil. Por fim, mostramos como a intervenção do professor é fundamental para que todas as crianças possam entender algumas propriedades desse objeto. **Palavras-chave:** Objetos tridimensionais, estágios de Aprendizagem de Van Hiele, Problemas no contexto, Educação matemática infantil.

1. Introducción y Marco Teórico

En la construcción de nuevos conocimientos matemáticos formales en las primeras edades, cada vez están más presentes en las aulas nuevas metodologías, y se toman como punto de partida conocimientos informales existentes en las y los niños. Los conocimientos informales adquiridos en el entorno vital del niño o niña, es decir fuera del aula, son importantísimos y deben utilizarse.

En el fondo, esto no dista mucho del hecho incuestionable de que la realidad nos enfrenta a problemas que debemos resolver. Las matemáticas así introducidas se definen como un conjunto de estrategias y destrezas que permiten dar solución a problemas cotidianos aplicables a circunstancias reales. Ahora bien, los currículos de matemáticas han introducido los problemas, pero raramente hacen hincapié en cómo ha de proceder el niño o niña en la resolución de los mismos.

La resolución de problemas obliga a que los niños y las niñas usen estrategias; estrategias que, en menor o mayor medida, deben ser experimentadas y encontradas por ellas y ellos; aún así, como ni todas las estrategias se adquieren de modo natural ni todo el alumnado tiene el mismo ritmo de aprendizaje, muchas veces para adquirir estrategias nuevas, éstas deben ser guiadas por la labor docente, esto es, deben ser transmitidas y practicadas por las y los docentes, para que el alumnado las ponga en práctica, las interiorice y sea capaz de usarlas en un futuro. Por tanto, es claro que el manejo y gestión por parte del docente de las mismas son la clave para poder dar lugar a un aprendizaje significativo en el aula.

El matemático húngaro Polya en su obra *Cómo plantear y resolver problemas* (Polya, 1965), explica que el arte de la resolución de problemas utiliza la heurística moderna; o, en otras palabras, la búsqueda de estrategias de resolución a través del pensamiento lateral o divergente. Concibe al ser humano como aquel ser dotado de la capacidad de buscar opciones creativas y cambiar sus conductas, en pos de soluciones útiles y novedosas, en su experiencia de resolver problemas y ver como otros lo hacen. La manipulación, el aprendizaje entre iguales, los errores y descubrimientos subyacentes, por ejemplo, estarían en la base de la construcción del conocimiento matemático.

¿Pero desde qué edad deben tratarse los problemas en el aula de matemáticas?

No hay una respuesta fácil a esta pregunta, dado que ningún documento oficial establece una edad a partir de la cuál se pueden trabajar los problemas y no antes. Aún así, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) plantea la necesidad de tratar los problemas en el aula en todas las etapas educativas, siempre adecuados a la edad y desarrollo cognitivos del alumnado en cuestión. Es más, afirma que para que se produzca un aprendizaje significativo, la actividad planteada debe fomentar: i) la construcción de nuevo conocimiento matemático, ii) el planteamiento de problemas matemáticos o de otros contextos; iii) que se puedan aplicar y adaptar estrategias variadas. Además, el profesorado debe pedir a su alumnado que reflexione sobre sus respuestas, las expliquen y justifiquen para que se pueda producir un proceso de “razonamiento y demostración” y, además, la actividad debe dar lugar a: i) formular e investigar conjeturas matemáticas; ii) desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticos y iii) elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración (NCTM, 2000: 59).

Para el caso de Educación Infantil, el NCTM (2000: 120-123) especifica que la resolución de problemas forma parte del quehacer diario de los niños y las niñas, dado que continuamente se enfrentan a situaciones novedosas que les resultan un desafío, y, por tanto, en el aula de educación infantil se deben plantear retos que fomenten su curiosidad para resolver problemas que les animen a usar las matemáticas que van aprendiendo para desarrollar nuevas estrategias de resolución, fomentando en todo momento la reflexión sobre las soluciones alcanzadas. Así, la resolución de problemas debe: 1) contemplar una variedad de contextos amplia, partiendo tanto de rutinas diarias como de situaciones cotidianas, 2) dar oportunidades para usar los conocimientos previos acerca de todos los contenidos matemáticos.

Igualmente, para trabajar el razonamiento y demostración en edades tan tempranas, los y las docentes deben promover que las niñas y los niños desarrollen la habilidad de razonar de modo sistemático, estimulándoles en todo momento a hacer conjeturas, buscar pruebas que las confirmen o las refuten y justificar y explicar sus ideas. Para tal fin, es importante plantear situaciones que lleven a usar métodos empíricos, como realizar comparación de conjuntos, buscar patrones en conjuntos, buscar diferencias o similitudes acerca de propiedades de algunos objetos, ... Por tanto, la labor del profesorado es crear ambientes de aprendizaje que animen al alumnado a reconocer la valía de la matemática y que pueden y deben comprenderla. Así, se sugiere que estas actividades se basen en gran medida en dar oportunidades donde las niñas y los niños puedan manipular objetos, identificar lo que tienen igual o diferente; para, finalmente, plantear generalizaciones sobre ellos (NCTM, 2000: 126-129).

En este sentido, en este trabajo centramos nuestro interés de investigación en ver cómo se pueden diseñar actividades significativas que se basen en un problema en contexto y que ayuden a los niños y niñas de 4 y 5 años a aprender propiedades y conceptos matemáticos relacionados con un objeto tridimensional cotidiano, el cilindro; en concreto, pretendemos ver la construcción y abstracción de este nuevo concepto matemático en Educación Infantil, pasando así de lo concreto, característico de esta etapa, a lo abstracto, donde se ubica el conocimiento formal.

La elección de este objeto matemático está justificada en que los contenidos geométricos están presentes en el currículo de infantil y, al igual que otros conceptos matemáticos de la etapa, su correcta comprensión es necesaria para evitar errores posteriores en la edad adulta. De hecho, el currículo de educación infantil (MEC, 2007, p. 1025) describe como contenido la "situación de sí mismo y de los objetos en el espacio. Posiciones relativas. Identificación de formas planas y tridimensionales en elementos del entorno. Exploración de algunos cuerpos geométricos elementales" y el NCTM (2000, p.100) destaca la importancia en que los niños y niñas sean capaces de "reconocer formas y estructuras geométricas en el entorno […]".

Además, cuando tratamos con problemas matemáticos dentro del ámbito de la geometría, el NCTM establece que se debe capacitar al alumnado para que sea capaz de (extraído de Berciano Alcaraz, Jiménez-Gestal, Salgado-Somoza, 2016):

- Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas;

- Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación;
- Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas;
- Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas".

Todo esto manifiesta la necesidad de la programación de actividades, en especial para trabajar los conceptos geométricos, como reflejan Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado (2017) siguiendo estudios de Duval, pero debido a la necesidad de la abstracción de los conceptos la labor de programación y diseño de prácticas por parte del docente resulta laboriosa. Además del diseño de las actividades, en todo momento las docentes y los docentes deben tener en cuenta que para esta etapa educativa no hay un marco teórico consensuado a nivel internacional para la enseñanza-aprendizaje de la geometría. Sin embargo, además de las directrices descritas de la NCTM, Van Hiele establece unos niveles de razonamiento geométricos (Gutiérrez, 2012) que, aunque se plantean como niveles de aprendizaje no ligados a la edad cronológica de las personas, en la mayoría de los casos los niños y las niñas de educación infantil sólo alcanzan el nivel 1, pero se consideran alcanzables los niveles 1 y 2. Tal como se explicita en Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado (2017), estos niveles se definen como:

- En el Nivel 1 se considera que la persona es capaz de reconocer las figuras geométricas por su forma globalmente, pero no diferencia partes de ellas ni es capaz de explicar propiedades determinantes de las figuras. Hace descripciones visuales, táctiles, etc. y es capaz de compararlas con objetos de su entorno.

- En el Nivel 2 la persona ya es capaz de reconocer y analizar las partes y propiedades de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas. El establecimiento de las propiedades se produce de forma empírica, a través de la manipulación y la experimentación.

Por otro lado, las docentes y los docentes también deben fomentar un aprendizaje progresivo, que, acorde a la teoría de Van-Hiele (Gutiérrez, 2012), debe estar secuenciado según las siguientes etapas de aprendizaje: 1) plantear actividades que sirvan como toma de contacto y favorezcan la identificación de conocimientos y formas de razonamiento (información); 2) poner ejemplos, construir con distintos materiales,…(orientación dirigida); 3) explicar los resultados obtenidos y justificar las afirmaciones hechas (explicitación); 4) profundizar en los conceptos aprendidos con actividades más abiertas, más generales, … (orientación libre); 5) integrar los conceptos aprendidos con otros anteriores, favoreciendo el establecimiento de conexiones/relaciones entre ellos (integración).

2. Objetivos

Los dos objetivos fundamentales de este trabajo son:

1. Describir el diseño de una actividad para trabajar el cilindro en educación infantil, haciendo especial hincapié en las distintas fases docentes de la maestra.
2. Analizar los avances de los niños y niñas a lo largo de la implementación de la propuesta didáctica.

3. Metodología

Tras el diseño de la tarea, la implementación ha tenido lugar con niños y niñas de 4 y 5 años que cursan 5º y 6º de Educación Infantil en un CEIP público de la Comunidad Autónoma de Galicia. En total, han participado 15 estudiantes.

Con el consentimiento expreso de las personas tutoras de las niñas y niños y de las maestras de las aulas, se ha procedido a grabar las sesiones en vídeo, para su posterior análisis, con el fin de determinar los momentos clave de la intervención docente y los avances y dificultades de las niñas y niños.

3.1. Diseño teórico de las actividades

Como ya hemos mencionado en la introducción, la tarea tiene como finalidad avanzar en el concepto de cilindro y tratar de analizar sus características y propiedades más notables.

Uno de los pilares del diseño teórico es la Educación Matemática Realista (EMR), la cual Alsina, Novo y Moreno (2016), siguiendo estudios de Heuvel-Panhuizen, De Corte, Greer y Verschaffel, caracterizan como propuestas didácticas basadas en problemas contextuales que a través de la modelización van mediando entre lo abstracto y lo concreto, avanzando en la construcción de conocimientos formales, dejando atrás los informales. Se apoya en la actividad del propio niño o niña y en las interacciones con el o la maestra, siendo esta una guía en el proceso y, por último, destacando que sea el alumnado quien, a partir de su actividad, descubra y construya los nuevos conocimientos.

Para la etapa de educación infantil, Alsina (2011) concreta que en primer lugar es esencial la motivación, en un segundo lugar la necesidad de ver las matemáticas útiles, que sirven en su contexto, en su medio, y que ese contexto provoque acciones que medien entre lo concreto y lo abstracto y que permitan la construcción y abstracción de nuevos conceptos.

En este sentido, el problema en contexto para nuestro alumnado de educación infantil se titula “Importancia social de la rueda: ¿por qué algunos objetos ruedan y otros no?”.

Con este título, se pretende realizar un acercamiento comprensivo al concepto de cilindro, sus características y propiedades a través de la construcción de este partiendo de su desarrollo plano, esto es, un rectángulo.

3.2. Secuenciación de la jornada

La jornada se divide en tres fases didácticas, acordes con la EMR; correspondientes con: 1) el trabajo previo en el aula, 2) el trabajo en contexto y 3) el posterior trabajo en el aula (ver, por ejemplo, Berciano Alcaraz, Jiménez-Gestal y Salgado (2016)). A continuación, se describen con el fin de entender mejor el objetivo de cada una de ellas y de las actividades que las conforman:

- Fase 1. Motivación. La finalidad es introducir el problema, motivar la curiosidad y realizar una evaluación inicial de qué saben los niñas y niñas de estas edades.
- Fase 2. Exploración. La finalidad es avanzar en la construcción de nuevos conceptos, a través de la manipulación y fomentando la imaginación.
- Fase 3. Evaluación. La finalidad es realizar una evaluación final de la propuesta didáctica a través de conversaciones con el alumnado que permitan por un lado la reflexión y por otro la retroalimentación.

Estas tres fases didácticas van en paralelo con las tres etapas docentes llevadas a cabo por la maestra. Esto es, tanto en la fase de motivación, exploración como en la de evaluación de la actividad, la maestra llevará a cabo las 3 etapas de aprendizaje de Van Hiele (Gutiérrez, 2012), aunque de un modo gradual distinto. Así, por ejemplo, en la fase de motivación se hará un mayor énfasis en las etapas 1 y 2, mostrando y planteando actividades relevantes para el alumnado (etapa 1 docente de aprendizaje, información), al igual que fomentando la exploración, en la que la maestra dirige al alumnado hacia la búsqueda de ejemplos cercanos relacionados con el cilindro y le anima a justificar sus respuestas.

Finalmente, como hemos comentado en el marco teórico, esta actividad pretende satisfacer las condiciones descritas por el NCTM (2000) necesarias para fomentar acciones relacionadas con la resolución de problemas y razonamiento y demostración a través de conversaciones semi-guiadas con la maestra.

En la siguiente tabla, se describen las actividades asociadas a cada fase didáctica:

Secuenciación y descripción de las actividades	
Fase 1. **Motivación**	1. Vídeo: La pantera rosa. El objetivo es motivar al estudio del concepto “cilindro”. 2. Asamblea: ¿Qué es un cilindro? El objetivo es conocer los conocimientos previos del alumnado y sus creencias sobre propiedades de este cuerpo geométrico.
Fase 2. **Exploración**	3. Construcción cilindro. A partir de una hoja de papel (figura plana-rectángulo) se propone al alumnado manipular, explorar y construir un cilindro. 4. Carrera Mix. Se propone al alumnado a través del soplo una carrera con los cilindros construidos.
Fase 3. **Evaluación**	5. Entrevista individual. Las investigadoras realizan a cada alumno una entrevista que consta de las siguientes preguntas: ✓ ¿Cómo son estos cilindros?, ¿son distintos?

	✓ ¿Cómo es el tuyo respecto a los demás? ✓ ¿Los cilindros se pueden apilar?, ¿y poner de pie? ✓ ¿Cuál es el más rápido?, ¿por qué? ✓ ¿Conoces propiedades de los cilindros? ✓ ¿Conoces cosas que tengan cilindros?

Tabla 1. Secuencia y descripción actividades

3.3. Análisis de la implementación de las fases y resultados

La parte experimental se lleva a cabo en una jornada y tiene una duración aproximada de tres sesiones. En este apartado describimos la implementación de cada una de las fases y las características más importantes que extraemos de ellas.

3.3.1. Fase 1: Motivación

En la fase 1 se proponen dos actividades, donde la finalizad de la primera es motivar a través de un vídeo mudo que trata el concepto de cilindro. Esta peculiaridad de *mudo*, protagonizado por la pantera rosa, provoca una mayor atención por parte del alumnado, dando lugar a una mayor observación en las acciones de la pantera rosa, en las que, a través de ensayo-error, intenta construir una rueda para un medio de transporte. Se pretende que las niñas y los niños usen a la pantera como ejemplo, imiten su estrategia y actúen como ella, explorando y manipulando, en el desarrollo de la Fase 2.

La segunda actividad se plantea en formato asamblea, para poder realizar una evaluación inicial de qué saben los niños y niñas, qué han entendido del vídeo; a la vez que fomentar un aprendizaje inter-iguales, en la que ellos mismos a través de sus compañeros y compañeras vean qué saben y qué no, siempre a través del diálogo, y fomentando una retroalimentación.

Para ilustrar la asamblea, a continuación se muestra una parte de la transcripción del desarrollo de la misma (P=profesora, E1, E2,… estudiantes interviniendo en la conversación):

P: ¿Qué es un cilindro? ¿Alguien sabe lo que es un cilindro? ¿O qué creéis que es un cilindro?

E1: Es una cosa muy redonda.

P: Una cosa muy redonda es un cilindro. A ver, más ideas. Vamos a pensar qué será un cilindro, ¿algo de comer? ¿algo para leer?

E2: Algo que tiene papel.

P: Algo que tiene papel, tiene papel el cilindro. A ver E3 ¿tú qué crees que es un cilindro?

E3: No lo sé.

P: ¿No lo sabes? A ver E4 ¿tú qué crees que es un cilindro?

E4: Es una cosa cuadrada. Verde

P: Una cosa cuadrada es un cilindro.

E1: ¡Nooo! ¡Es redondo!

P: E1 dice que el cilindro es redondo, que no es cuadrado. ¿Y E5 qué opina?

E5: Que tiene garras.

P: A lo mejor un cilindro tiene garras. ¿Y E6, qué cree que tiene un cilindro?

E6: No lo sé.

P: ¿Nunca habías escuchado la palabra cilindro?

E6: No.

En el análisis de la anterior transcripción se ponen de manifiesto varios aspectos que debemos destacar:

- La maestra dirige la asamblea hacia el mundo matemático, mediante la realización de la pregunta clave "¿qué es un cilindro?".
- Los niños y niñas no tienen conocimientos previos sobre el "cilindro", concepto a estudiar, como se puede ver en la respuesta de E6. Algunos, como es el caso del ejemplo 1 y 4, lo asocian a un aspecto matemático, figuras planas, aunque no sea correcto; mientras que la mayoría le ocurre como a los ejemplos 2, 3, 5 y 6, que bien niegan conocer el concepto, o dan una respuesta que nada tiene que ver, un absurdo en cualquier caso.

Tras varias preguntas, y guiados por una de las maestras, comienzan a aparecer nuevas respuestas, encaminadas a la definición del concepto en cuestión. Se puede ver cómo este aspecto se manifiesta en el extracto que se recoge a continuación.

P: Un cuadrado, muy bien. Dime, esas son formas planas. O triángulo. Esas son formas planas. Pero un cilindro no es plano.

E1: Nooo.

E2: No, es gordo.

P: El cilindro es gordo.

E1: Tiene muchos redondos.

P: Tiene muchos redondos. Cuéntame E1, ¿tiene muchos redondos? Como es eso, cuéntame.

E1: Bueno, los cilindros que tienen papel de cocina normalmente tienen muchos redondos.

P: ¿Y si no es de papel de cocina? ¿Tiene menos redondos o tiene más redondos, como es eso?

E1: Si es papel higiénico tiene menos redondos.

De nuevo, si analizamos la actuación de la maestra concluimos que:

- Encamina la conversación a hacer hincapié en la diferencia entre objetos bidimensionales y tridimensionales: "Un cuadrado, muy bien. Dime, esas son formas planas. O triángulo. Esas son formas planas. Pero un cilindro no es plano".

- Plantea la búsqueda de objetos cotidianos que sean cilindros: "¿Y si no es de papel de cocina? ¿Tiene menos redondos o tiene más redondos, como es eso?".

3.3.2. Fase 2. Exploración.

En esta fase se desarrollan dos actividades: construcción del cilindro y carrera mix.

La primera actividad, construcción del cilindro, es individual. En ella, cada niño tiene que construir un cilindro a partir de un folio con forma plana. Primeramente, se fomenta la exploración libre y no se da ninguna indicación, salvo la de realizar un cilindro con la hoja verde que tiene cada uno.

En esta actividad aparecen dos tipos de construcciones, unas con volumen (imagen1) en las que las niñas y los niños enrollan el papel sobre sí mismo, y otras planas (imagen 2) en las que las niñas y los niños intentan realizar una ilustración como técnica.

Imagen 1. Construcción cilindro Ej.1   Imagen 2. Construcción cilindro Ej.2

A continuación, se extrae una transcripción del desarrollo de construcción de los cilindros, en los que se manifiesta como los niños experimentan y actúan según sus creencias, y como a partir del ensayo-error, y guiados por la intervención de la maestra a través de preguntas, intentan llegar al objetivo de la actividad.

P: Ya, pero entonces... coge el lápiz, ponte en esa mesa y hazlo. E4 dice que hay que hacer un círculo y ya construye el cilindro. Pero mirad, va a hacerlo (dibuja un círculo en el papel) ¿eso rueda E4? Ooooo, no rueda ¿a que no chicos?

E10: Porque está dibujado, y si está dibujado no rueda.

P: Porque está plano. Pero os he dicho que con ese folio verde tenéis que construir un cilindro ¿cómo lo podéis hacer? ¿Quién lo sabe?

E1: Con muchos círculos dibujados.

P: Pues coge el lápiz y ponte a dibujaros, a ver si sabes. A ver quien más me dice alguna idea. Mira E3 que bien lo está haciendo. ¿Qué estás haciendo?

La actividad, aunque es realizada de forma individual, se hace en grupo, por lo que unos niños observan a otros y este hecho permite que algunos, que en un primer momento no saben cómo abordar el problema, puedan imitar a otros y así lograr alguna solución a la actividad en cuestión (tal como muestran las imágenes 1 y 2, algunos niños deciden enrollar el papel para construir el cilindro, mientras que otros se dedican a dibujarlo sobre el papel).

La segunda actividad, la carrera mix, es una actividad grupal en la que se propone una competición de cilindros a través del soplo (imagen 3). De esta carrera, salen dos cilindros ganadores: “el cilindro más rápido” y “el cilindro más lento”.

El objetivo de establecer dos premios con estas características es provocar en el alumnado la observación y discriminación de ambos, para poder definir propiedades de los cilindros, esto es, se pretende que indaguen sobre la influencia que ha podido tener la construcción de los cilindros en la velocidad alcanzada por estos, con el fin de que planteen cuestiones sobre el grosor, la longitud del cilindro o cualquier otra propiedad que les parezca relevante.

Imagen 3. Proceso desarrollo carrera mix.

3.3.3. Fase 3. Evaluación.

En esta fase, a través de preguntas por parte de la maestra, se pretenden recoger las creencias y argumentaciones que los niños y las niñas tienen después de la implementación de la sesión, y poder describir a posteriori las diferencias y hacer un análisis de las mismas.

Para ello, se colocan varios cilindros juntos, realizados por los distintos niños y niñas de la clase y se realiza una pequeña entrevista guiada individual (imagen 4).

Figura 4. Proceso desarrollo entrevista individual

A la hora de responder, la niña o niño tiene completa libertad, pudiendo utilizar la acción, la manipulación y/o el discurso para sus respuestas.

A pesar de las diferencias encontradas en los niños y niñas en el desarrollo de las entrevistas, en las que algunos mostraban distintos niveles de aprendizaje, se muestra a continuación un ejemplo de entrevista, de la que se detallan algunos aspectos relevantes que coinciden en varias.

P: ¿Cómo has construido tu cilindro?

E4: Haciendo un redondel.

P: ¿Un redondel?, ¿y dónde hacías un redondel?

E4: En un papel.

P: ¿Si?, ¿y cómo es tu cilindro?, ¿qué propiedades tiene?

E4: Rueda.

P: Vale. ¿Y tú crees que los cilindros se pueden poner uno encima de otro?

E4: No.

P: ¿No, por qué?

E4: Porque los que están abajo se caen. Y los de arriba después se ponen en el sitio, en el sitio donde estaba el que se escapó de su sitio.

P: Una pregunta ¿has ganado la carrera?

E4: Si.

P: ¿Y por qué crees que tu cilindro ha ganado la carrera?

E4: Porque era muy redondo.

P: Ah, y por eso rodaba muy bien. Mira, ¿Conoces cosas que rueden?

E4: Si, las ruedas.

P: ¿Qué más?

E4: mmmm

En este extracto se observan varios aspectos relevantes:

- Se ha producido una modificación en el pensamiento del niño E4 de la fase 1 a la fase 3. En un primer momento el niño relaciona el cilindro con un contenido matemático, aunque no correcto; de hecho, lo identifica con un cuadrado, mientras que en la fase 3, aparece el término "redondel" para definir la construcción de cilindro.
- La maestra en todo momento le realiza preguntas con el fin de buscar una justificación a las respuestas dadas ("¿No, por qué?"), con el fin de encontrar objetos cotidianos identificables con el objeto o propiedad matemática ("¿Conoces cosas que rueden?"), o planteándole problemas nuevos "¿Y tú crees que los cilindros se pueden poner uno encima de otro?"
- El niño E4 es capaz de responder correctamente a todas las preguntas, aunque sea con respuestas simples. Para todas tiene una respuesta, llegando a justificar alguna, aunque su discurso sea básico; por ejemplo, ante la pregunta de por qué ganó la carrera, simplemente responde resaltando el tamaño del diámetro del cilindro.

4. Conclusiones

Como hemos visto a lo largo del texto, la experiencia descrita se ha planificado y descrito en base a tres pilares fundamentales: 1) se ha planteado un problema en contexto basado en la Educación Matemática Realista (EMR); 2) la secuenciación de la actividad en todo momento ha dado lugar a la construcción de nuevo conocimiento matemático en el que se puedan aplicar y adaptar estrategias variadas, acorde al NCTM; 3) la actividad de la maestra ha seguido las 3 etapas del aprendizaje de la geometría según Van Hiele, destacando la explicitación, en la que ha pedido a su alumnado que reflexione sobre sus respuestas, las explique y justifique para que se pueda producir un proceso de "razonamiento y demostración".

En particular, debemos destacar varias características relevantes de la actividad llevada a cabo:

- El punto de partida es un problema, en torno al cual, a través de la acción, la manipulación y la reflexión sobre su propio aprendizaje, los niños y las niñas avanzan en la construcción del concepto matemático asociado al problema de partida, fomentando así el paso de lo concreto a la abstracción, tan necesaria en las siguientes etapas educativas.
- El aprendizaje es situacional, esto es, se plantea desde un contexto problemático y conocido en el que los niños y las niñas puedan tener nexos de unión con la realidad. Además, el material utilizado, una hoja de papel, da herramientas básicas a los niños y niñas a plantear estrategias con objetos cercanos, dando la posibilidad a estos a pasar a un nivel referencial, trasladando el concepto geométrico a otros objetos y situaciones.

- Se fomenta el diálogo entre iguales, que permite la retroalimentación constante, y el aprendizaje por parte de los niños y las niñas.

Además, debemos destacar la labor de la docente, en sus distintas intervenciones:

- En todo momento, adecua su conversación al nivel de razonamiento de las niñas y los niños.
- Guía la argumentación y justificación de las niñas y niños a través de preguntas.
- Reconduce a nuevos problemas o contextos cercanos de los niños y las niñas a través de preguntas.
- En ningún caso, la maestra es la transmisora del conocimiento, sino una guía que fomenta la curiosidad y la indagación y sus preguntas son transmisoras de información con la finalidad de que sean los propios niños y niñas, a través del ensayo-error y de la observación, quienes avancen y construyan el nuevo conocimiento.

Finalmente, creemos que la actividad aquí detallada, junto con las intervenciones docentes más relevantes de la maestra, dan lugar a un diseño metodológico de enseñanza-aprendizaje de conceptos tridimensionales que debe ser tenido en cuenta como modelo para trabajar la geometría en el aula de Educación Infantil. En este sentido, es claro que este modelo requiere de una adaptación a los objetos matemáticos que se quieran trabajar, con un análisis exhaustivo previo por parte de las y los docentes sobre los conceptos que se pueden trabajar, pero independientemente del conocimiento previo de los niños y las niñas, este modo de enseñanza ayuda a fomentar la construcción de un puente entre lo concreto y lo abstracto, abriendo nuevos mundos de exploración en los niños y niñas de esta etapa educativa, con el fin de facilitarles el paso a la abstracción matemática en un futuro cercano.

Bibliografía

Alsina, A. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años*. Barcelona: ICE/ Horsori.

Alsina, A., Novo, M.L. y Moreno, A. (2016). *Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *5*(1), 1- 20. Recuperado el 15 de mayo de 2018, de http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/9

Berciano Alcaraz, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado Somoza, M. (2016). *Tratamiento de la Orientación Espacial en el Aula de Educación Infantil desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista. Números*, *93*, 31-44. Recuperado el 15 de mayo de 2018, de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/93/Articulos_03.pdf

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2017). *Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-*

Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 147-156). Zaragoza: SEIEM.

Gutiérrez, A. (2012). Investigar es evolucionar. Un ejemplo de investigación en procesos de razonamiento. En N. Planas (ed.); *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Barcelona: Graó.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics. Reston: National Council of Teachers of Mathematics (Trad. Castellana, Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).

MEC (2007). Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Infantil.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Reeujwik, M.V. (1997). *Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *12*, 9-16.

Autoras:

Salgado, María: Maestra de Educación Infantil en CEIP de Sigüeiro (Oroso). Profesora asociada de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Santiago de Compostela. Diplomada en Maestra de Educación Musical. Licenciada en Matemáticas. Doctora en Didáctica de la Matemática. Líneas de investigación: Educación matemática infantil y Pensamiento numérico. Email: maria.salgadosomoza@hotmail.com

Berciano, Ainhoa: Profesora Contratada Doctora del Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea. Sus líneas de investigación se centran en la enseñanza-aprendizaje de la matemática en Educación Infantil y Educación Primaria y en la formación de profesorado. Email: ainhoa.berciano@ehu.eus

Jiménez-Gestal, Clara: Profesora de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja. Actualmente, sus líneas de investigación están relacionadas con la formación de profesorado de Matemáticas y el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. Email: clara.jimenez@unirioja.es

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 60-77

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Condiciones que promueven la habilidad de argumentar en el aula matemática de una escuela municipal en Chile

Andrés Ortiz Jiménez, Carolina Carreño Díaz

Fecha de recepción: 21/09/2018
Fecha de aceptación: 20/12/2018

Resumen	Esta investigación tuvo como objetivo analizar las condiciones que permiten a los docentes promover la habilidad argumentar- comunicar en estudiantes de una escuela primaria. La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, utilizando estudio de casos, en un contexto situacional específico y para ello se examinaron las prácticas de seis docentes que enseñan matemática desde 1er (6 años) a 8vo grado (13 años). Los resultados obtenidos proporcionan información respecto del análisis de prácticas pedagógicas cuando se promueve argumentación y también respecto a elementos esenciales en la gestión del docente para la promoción de dicha habilidad. **Palabras clave**: argumentación, condiciones para la argumentación, episodios argumentativos, tarea matemática.
Abstract	The objective of this research was to analyze the conditions that allow teachers to promote the ability to argue-communicate in students of a primary school. The research is framed in a qualitative approach, using case studies, in a specific situational context and for this the practices of six teachers who teach mathematics from 1st (6 years) to 8th grade (13 years) were examined. The results obtained provide information regarding the analysis of pedagogical practices when argumentation is promoted and also with regard to essential elements in the management of the teacher for the promotion of said mathematical ability **Keywords:** argumentation, conditions for argumentation, argumentative episodes, mathematical task.
Resumo	O objetivo desta pesquisa foi analisar as condições que permitem aos professores promover a capacidade de argumentar-comunicar com alunos de uma escola primária. A pesquisa é enquadrada em uma abordagem qualitativa, utilizando estudos de caso em um contexto situacional específico, e, para isso foram analisadas as práticas de seis professores que ensinam matemática de 1 (6 anos) a 8 ª série (13 anos). Os resultados obtidos fornecem informações sobre a análise das práticas pedagógicas quando a argumentação é promovida e também sobre os elementos essenciais na gestão do professor para a promoção dessa habilidade. **Palavras-chave:** argumentação, condições para argumentação, episódios argumentativos, tarefa matemática.

1. Introducción

El currículo de matemática en Chile plantea que aprender matemática se logra haciendo matemática y para ello promueve el desarrollo de las siguientes cuatro habilidades: resolver problemas, representar, modelar y argumentar comunicar, entendiendo esta última como “tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos” (MINEDUC, 2012, p. 89) y para promoverla en el aula es necesario cautelar ciertas condiciones (Solar y Deulofeu, 2016). La investigación reportada en este artículo tiene como propósito analizar las condiciones que permiten promover la habilidad argumentar-comunicar en el aula matemática de los niveles 1º (6 años) hasta 8º básico (13 años) de un establecimiento municipal[1] de la comuna de Talca, ciudad ubicada 260 km al sur de Santiago de Chile, en donde la mayoría de sus docentes están bien evaluados según el Sistema de Evaluación del Desempeño Profesional Docente[2].

2. Antecedentes del Problema

Las interrelaciones son importantes para desarrollar la comunicación y argumentación en el aula matemática, ya que el lenguaje juega un papel fundamental en el desarrollo de la comprensión e incide en los aprendizajes de los estudiantes. (Jiménez, Suárez y Galindo, 2010). Para promover la argumentación en el aula matemática, el docente debe propiciar las interacciones comunicativas entre estudiantes y también planificar la gestión de la clase donde se promueve. Al respecto, Solar, Azcárate y Deulofeu (2010) señalan que es necesario que la “argumentación tenga una función didáctica puesto que la caracterización de sus componentes es una estructura útil tanto para la planificación de una secuencia didáctica, como para el desarrollo de la argumentación en el aula” (p.150), y por tanto, es útil conocer sus componentes y las condiciones que la promueven. Respecto a cómo planificarla y considerando que convencer a otros requiere de posturas antagónicas, se hace necesario promover actividades donde los estudiantes refuten las conclusiones o explicaciones de sus pares. En este mismo sentido, un factor importante en la gestión de la argumentación en el aula, es el debate, la discusión y la forma de plantear las ideas matemáticas entre los estudiantes, quienes participan activamente planteando sus argumentos y tratando de defenderlos ante sus pares. En este sentido, es importante que el “docente plantee actividades más dinámicas y utilice estrategias de comunicación; es decir, que docente y estudiante tengan la misma oportunidad de participar, interactuar, opinar, discutir, justificar, explicar y convencer”. (Jiménez y Pineda, 2013, p.111). Por ello es preciso señalar la importancia de estrategias comunicativas en el aula matemática y en la gestión de la

---

[1] En Chile, los establecimientos educaciones de enseñanza primaria y secundaria están categorizados en municipalizados, particular subvencionados y particular pagado.

[2] Evaluación Docente es una evaluación obligatoria para los y las docentes de aula que se desempeñan en establecimientos municipales a lo largo del país. Su objetivo es fortalecer la profesión docente y contribuir a mejorar la calidad de la educación.

argumentación, ya que es una parte fundamental a la hora de promover en los estudiantes el desarrollo de la habilidad de argumentación matemática.

En la clase de matemática se debe considerar la comunicación, ya que permite a los estudiantes señalar sus aprendizajes, los cuales pueden ser orales o escritos, si comprenden las afirmaciones expresadas por otras personas (OCDE, 2016) donde es necesario tener en cuenta que la capacidad de comunicar matemáticamente se va adquiriendo de forma gradual y va entrelazada con la capacidad que tenga el estudiante de poder convencer a un par o profesor de que su afirmación matemática es la correcta. Solar y Deulofeu (2016) plantean que para promover el desarrollo de la argumentación en el aula matemática, se deben tener presente ciertas condiciones, las cuales tienen relación con: estrategias de comunicación para promover la argumentación, donde se generen oportunidades de participación de todos los estudiantes, el profesor gestione el error y establezca preguntas abiertas; tareas matemáticas abiertas, las cuales permitan diferentes procedimientos, respuestas abiertas y posturas diferentes y, por último, una planificación con una gestión orientada al desarrollo de la habilidad argumentar. De acuerdo a las clases analizadas en este reporte, se observó que hay tres estrategias que se van repitiendo y que están impactando en el desarrollo de la argumentación: oportunidades de participación, gestión del error y tipo de preguntas.

Es importante señalar que sólo la utilización de las estrategias comunicativas, no aseguran que se promueva eficazmente la argumentación, ya que podría suceder que los estudiantes no comprendan la tarea matemática o que los docentes no gestionen adecuadamente la promoción de dicha habilidad y por ello la planificación de una gestión argumentativa pasa a ser relevante. En este sentido, Solar y Deulofeu (2016), plantean que con el diseño del plan de clase, el docente puede anticipar los procesos argumentativos de sus estudiantes, describiendo los tipos de preguntas que utilizará para cada proceso en clases, con el fin de gestionar de forma efectiva la tarea matemática escogida, entendiendo dicha tarea como situaciones en que no existe sólo una respuesta correcta o una única estrategia de solución, es decir tareas abiertas y cuya adecuada gestión da mayores posibilidades que sus estudiantes desarrollen procesos argumentativos, con mayor facilidad, ya que la tarea matemática abierta permite diferentes procedimientos y respuestas.

Es por ello la importancia de investigar las condiciones para promover la argumentación en un colegio municipal con buenos resultados en matemática, ya que en la actualidad existe poca evidencia teórica o empírica que estudie y analice la argumentación matemática en el aula especialmente en Chile. En la actualidad, este estudio adquiere importancia ya que diversas investigaciones nacionales e internacionales muestran que las habilidades de argumentación se encuentran débilmente desarrolladas hasta edades avanzadas. (Larraín, Freire y Olivos, 2014)

3. Marco teórico

3.1. Argumentar

Argumentar en el aula matemática es un proceso que el docente debe desarrollar, promoviendo la creación de un ambiente de debate y gestionando ciertas condiciones para promoverla. Sarda (2003), plantea que cuando debemos elegir, justificar o refutar diferentes opciones o explicaciones y lo hacemos fundamentadamente defendiendo los puntos de vista, entonces estamos en presencia de la argumentación. En dicho proceso, los estudiantes desarrollan la capacidad de escuchar, produciéndose de forma progresiva la reformulación del pensamiento matemático y con ello la capacidad de argumentar- comunicar siendo “claros y convincentes” en sus enunciados, convencen a sus pares, escuchan los argumentos de los demás y pueden ser precisos en la utilización del lenguaje matemático. Godino (2003). En este mismo sentido, el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) el año 2012 incorpora la habilidad argumentar-comunicar en el marco curricular, señalando que “La habilidad de argumentar se aplica al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos. (MINEDUC, 2012, pp. 89)

3.2. Estructura de Toulmin para reconocer una Argumentación

Buitrago, Mejía y Hernández (2013) plantean que “La argumentación está estrechamente relacionada con la justificación de una tesis, es necesario producir argumentos o razones que se originen en la explicación, y también es esencial descripción ordenada de los hechos o datos”. (pp. 28-29). En este sentido, la Estructura de Toulmin (1958) permite hacer un análisis ordenado de las interacciones comunicativas presentes en el aula. Cuando se ha señalado un dato (D), existen una gran variedad de conclusiones (C), pero esta idea denominada Garantía (G) puede ser justificada (F) pero alguien puede refutar (R), pero un calificador modal (M) puede atenuar lo planteado por la garantía y a través de la persona que realiza la refutación, la contraparte puede reformular sus argumentos, para justificar su postura. A continuación, se señalan los elementos fundamentales de la Estructura de Toulmin:

- Los Datos (D) son hechos, evidencias que se invocan para justificar y validar; son de orden empírico o factual, y permiten la emergencia de una conclusión. Es el punto de partida de quien argumenta y puede ser un hecho o una afirmación. Es el soporte que se provee para apoyar y validar la conclusión.
- Las Conclusiones (C) son las demandas o alegatos que se buscan; la conclusión de un argumento es una afirmación cuya validez se requiere establecer.
- Las Justificaciones o Garantías (G) son el principio general. La premisa mayor, la norma tácita, o bien, los enunciados generales, de naturaleza formal, que permiten el paso de los datos a las conclusiones. Es un conjunto de afirmaciones o razones, que busca establecer la relación entre el dato y la conclusión.
- Los Fundamentos o Respaldos (F) corresponden al cuerpo de contenidos desde donde emanan las garantías, que pueden ser investigaciones, textos, códigos o supuestos sociales. Es el conocimiento básico (definiciones, propiedades, teoremas) que permite asegurar la garantía, describiéndola matemáticamente, es decir es un soporte de la garantía.

- Los Calificadores modales (M) son construcciones lingüísticas que permiten atenuar una demanda. Señala la certeza con la cual se establece la conclusión, la cual es subjetiva. ("estoy seguro/ no estoy muy seguro") o bien sobre la garantía o el calificador ("siempre ocurre/ ocurre excepto en estos casos").
- Los Refutadores (R) son excepciones a la reclamación; descripción y refutación de contraejemplos y contraargumentos.

3.3. Condiciones para promover la argumentación

De acuerdo con lo planteado por Solar y Deulofeu (2016) existen tres condiciones relevantes para promover el desarrollo de la argumentación en el aula matemática: estrategias comunicativas, tarea matemática y plan de clases. A continuación, se caracterizarán cada una de ellas.

3.3.1. Estrategias comunicativas para promover argumentación

Las estrategias de comunicación matemática son sugerencias de acciones a realizar por los profesores, para abordar adecuadamente el desarrollo de la habilidad comunicar. Según Lee (2010) existen 10 estrategias para promover la comunicación en el aula de clases que permiten incrementar la participación de los alumnos en el discurso matemático involucrándose en su proceso de aprendizaje, y reconociendo en el profesor un apoyo o guía y no como la única persona que posee el conocimiento. Considerando parte del trabajo de Lee (2010) los investigadores Solar y Deulofeu (2016) plantean tres estrategias especializadas para promover la argumentación: oportunidades de participación, gestión de error y tipo de pregunta.

Respecto a Oportunidades de Participación, esta tiene la finalidad de asegurar que todos los estudiantes tengan la oportunidad de aportar y el profesor debe realizar algunas de las siguientes acciones para promoverla:

- No validar las respuestas de los alumnos, ni en la pizarra, ni puesto por puesto antes de la socialización de algunas de ellas.
- Gestionar con flexibilidad el hecho de que los alumnos puedan interrumpir al profesor, Incluir, en las actividades, preguntas que favorezcan la descripción y explicación de procedimientos e ideas.
- No invalidar los errores; en su socialización de los errores, retomar al niño/a que originó la discusión, y pedir su opinión sobre lo planteado por sus compañeros.

La estrategia Gestión del Error, tiene la finalidad de asegurar a los estudiantes que sus ideas/respuestas equivocadas son importantes para construir el conocimiento matemático y el profesor debe realizar alguna de las siguientes acciones para promoverla:

- Gestionar el error socializando de manera colectiva los conocimientos matemáticos que van mejorando la respuesta inicial.
- No revisar en forma anticipada los errores, sino hasta después que los alumnos se han dado cuenta del error.
- Promover que alumnos con respuestas correctas e incorrectas salgan a exponer, sin validar antes la calidad de éstas.
- Gestionar el error, con foco en las explicaciones incorrectas, y no en las respuestas incorrectas.

La estrategia Tipos de Pregunta pone el foco en la formulación de preguntas adecuadas por parte del docente y el profesor debe realizar alguna de las siguientes acciones para promoverla:

- Realizar preguntas que favorezcan la explicación por sobre un sí o no.
- No hacer preguntas retoricas, es decir hacer la pregunta y responder inmediatamente.
- Realizar contra-preguntas a los estudiantes a partir de las respuestas dadas por ellos.
- Plantear preguntas que no cambien de un foco a otro muy rápidamente; tratar que las preguntas promuevan que las ideas evolucionen.

3.3.2. Tarea matemática para promover la argumentación

Herbst (2012) plantea que una tarea es una representación de la actividad matemática, encarnada en las interacciones entre personas e instrumentos culturales. Tareas que involucran a los estudiantes en calcular, definir, conjeturar, representar, y demostrar son importantes, porque proveen a los estudiantes acceso a experiencias personales en el quehacer matemático. En el presente reporte la tarea matemática será una actividad, en donde los estudiantes deben identificar, fundamentar, calcular, representar, evidenciando el conocimiento y quehacer matemático de acuerdo con el contexto en que se está empleando.

Para Solar y Deulofeu (2016) la tarea matemática es la actividad que se realizará en la clase y las preguntas que se harán a los estudiantes dándoles la oportunidad que mediante un trabajo autónomo sean capaces de generar diferentes procedimientos para una situación problemática dada. El profesor para promover la argumentación puede proponer tareas con: diferentes procedimientos, respuestas abiertas y posturas diferentes. Al respecto de ellas, Solar y Deulofeu (2016) las definen como:

- Diferentes procedimientos: Tarea matemática que presenta la posibilidad de realizarla o resolverla con variados procedimientos para encontrar la respuesta. El docente escoge para cada una de sus clases, actividades en donde cada una de ella requiera o dejen espacio a diferentes procedimientos para llegar a las respuestas más adecuadas y correctas.

- Respuestas abiertas: Tarea matemática que presenta la posibilidad que los estudiantes puedan dar variado tipo de respuestas, (varias respuestas correctas) para solucionar la problemática que se plantea.
- Posturas diferentes: Tarea matemática que da la posibilidad que en ella se inserte variadas posturas o deje la duda de la forma de determinar cuál es la respuesta más certera para la problemática.

3.3.3. Plan de clases para promover la argumentación

El plan de clases es un instrumento o herramienta que utiliza el docente para organizar, programar y evaluar los procesos que se van a desarrollar con los estudiantes, en donde se deja evidencia que aprendizaje se quiere que logren los estudiantes, situaciones de aprendizajes, recursos a utilizar, y la evaluación cualitativa o procesual que se realizará. (MINEDUC, 2012). Los investigadores Solar y Deulofeu (2016) señalan que el plan de clases debe considerar:

- Anticipación de respuestas, procedimientos y posturas de estudiantes: La planificación contiene las posibles respuestas correctas e incorrectas que puedan proporcionar los estudiantes, los diferentes procedimientos que puedan utilizar, o también las diferentes posturas que puedan adoptar dada una situación, explicitándolas claramente en la planificación.
- Anticipar procesos argumentativos de los estudiantes: La planificación plantea de forma secuenciada los pasos a seguir en la intervención pedagógica de esa clase, anticipando los procesos argumentativos de los estudiantes.
- Acciones docentes para promover la argumentación: La planificación explicita de qué manera o forma gestionará las diferentes respuestas y postura de los estudiantes.

3. Metodología

El propósito de esta investigación es analizar las condiciones que promueven la argumentación matemática en docentes de una escuela municipal de la comuna de Talca, este estudio tiene un carácter cualitativo (Hernández, Fernández y Batista; 2010), pues busca comprender los procesos argumentativos en el aula matemática asociados a las interacciones comunicativas entre profesores y estudiantes como también entre estudiantes, para profundizar los significados que los docentes atribuyen a la habilidad argumentar. Considerando lo anterior, el diseño investigativo empleado fue el estudio de caso (Bisquerra, 2014) ya que se espera comprender en profundidad el fenómeno estudiado relacionado con las condiciones de que promueven la argumentación en el aula matemática.

Los participantes de la investigación fueron profesores de educación básica pertenecientes a un establecimiento educativo municipal de la ciudad de Talca. Los profesores seleccionados fueron seis, los cuales tienen más de dos años de experiencia en docencia entre los grados 1º (6 años) al 8º (13 años) y han sido evaluados como destacados y competentes. Tres profesores que realizan docencia en los grados 1º al 4º y tres profesores en los grados 5° al 8°.

Para la recolección de datos se utilizaron las técnicas observación no participante, entrevista semiestructurada y análisis documental (Hernández et al., 2010). La primera técnica se caracteriza por que el investigador no interviene el contexto analizado, ya que no se realizaron intervenciones en las clases analizadas; la segunda técnica, entrevista semiestructurada, tuvo la finalidad de conocer el plan de clases que gestionan los docentes en el aula matemática y otros antecedentes que pudiesen proporcionar información adicional sobre su quehacer pedagógico diario. La tercera técnica utilizada fue el análisis documental de doce planes de clases observadas analizando la presencia o ausencia de anticipación de respuestas, procedimientos o posturas de los estudiantes, anticipación de procesos argumentativos de los estudiantes y acciones para promover la argumentación en el aula matemática.

4. Análisis de datos

En cada uno de los casos, la forma en que se analizaron los datos fue primero hacer un análisis de la entrevista semiestructurada realizada a los profesores participantes, segundo analizar la presencia o ausencia se episodios argumentativos en las clases observadas considerando la estructura de toulmin (Toulmin, 1958). Posteriormente, se determinó en que minuto de las grabaciones se visualizaron los indicadores respecto a las condiciones para promover la argumentación: estrategias comunicativas, tarea matemática y plan de clases (Solar y Deulofeu, 2016). En cuarto lugar en cada caso se realizó un análisis de los planes de clases respecto a la anticipación de respuestas, procedimientos y posturas de estudiantes, determinando la presencia o ausencia y analizando elementos del plan de clases en el inicio, desarrollo y cierre de cada clase.

4.1. Análisis de la entrevista respecto a argumentación

Respecto a las preguntas realizadas en la entrevista semiestructurada y haciendo una reducción de la información, respecto a lo que entienden por argumentar en el aula los docentes, la siguiente tabla muestra que

	caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6
Reconoce la habilidad argumentar en el currículum	si	no	no	si	si	si
Relaciona la habilidad argumentar con el proceso de convencer a otros	no	si	no	no	no	si
Relaciona argumentar con explicar	si	no	si	si	si	no
Planifica clases para promover la argumentación	no	no	no	no	no	si

Tabla 1. Conocimiento de la habilidad argumentar.

Al observar las transcripciones de las entrevistas en la tabla 2, más del 50% de los casos reconoce que la habilidad argumentar-comunicar está presente en el marco curricular desde el año 2012, sin embargo solo dos de ellos entienden uno de los aspectos principales de dicha habilidad, referente a que se aplica al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos (casos 2 y 6) el resto lo entiende como una explicación bien fundamentada (casos 1, 3, 4 y 5).

Casos	Transcripción de la entrevista
caso 1	Para poder argumentar la niña tiene que analizar, leer bien, entender la problemática, analizarlo, calcularlo y luego exponer su punto de vista, como resolver esa situación, problema u operatoria, usar palabras que indiquen que entendió la matemática
caso 2	Las niñas tienen que demostrar, busquen lo que han aprendido, como lo van aprendiendo, ya sea por medio de preguntas, por trabajo con sus pares, explicando sus estrategias, explicar a las compañeras, que ella se dé cuenta que ese es el mejor paso para llegar a la solución. Argumentar es más profundo, es casi convencer al otro de lo que hizo está bien
caso 3	Tiene que haber una comprensión de contenido, es fundamental, al momento de argumentar la niña tiene que dar las razones los motivos, porque piensa porque ella cree en método que utilizo o el resultado que ella alcanzó, como lo logró, lo importante de argumentar es decirle al resto como lo hizo y cuál fue la herramienta que está utilizando
caso 4	Que un estudiante me de argumentos sobre la matemática, que me de experiencias, que me lo plasme de su realidad, que es lo que entendió desde él, y ahí complementando con datos matemáticos
caso 5	Argumentar significa, que la estudiante sea capaz de explicar el porqué de algo y fundamentar no basta con decirme que está bien, si ella lo cree correcto, por qué está bien
caso 6	La argumentación no se da por sí sola, puede ser a partir de un desafío de una pregunta planteada en relación con un cálculo o un desafío en sí, acá la niña argumenta o sea defiende su forma de pensar o su respuesta e incluso cuando está errónea. Es una manera de sociabilizar los conocimientos, aunque sean erróneos o verdaderos. Argumentar para mi es defender su idea su punto de vista, aunque este equivocada

Tabla 2. Transcripciones de la entrevista respecto al conocimiento de la habilidad argumentar.

4.2. Análisis de los videos de clases: episodios argumentativos

Ahora respecto a las clases observadas, la tabla 3 muestra aquellos casos en donde hubo presencia de episodios argumentativos, en alguna de las dos clases observadas. Es fácil observar que en los casos estudiados no es evidente encontrar clases con episodios argumentativos. Además en la figura 1 se visualiza la estructura argumentativa del caso 5.

Episodios	caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6
Episodio argumentativo básico: datos, garantía, refutador, conclusión	ausencia	presencia clase 1	ausencia	presencia clase 2	presencia clase 1	presencia clase 2
Episodio argumentativo complejo: datos, garantía, respaldo, calificador modal, refutador y conclusión	ausencia	ausencia	ausencia	ausencia	ausencia	ausencia

Tabla 3. Episodios argumentativos en las clases observadas.

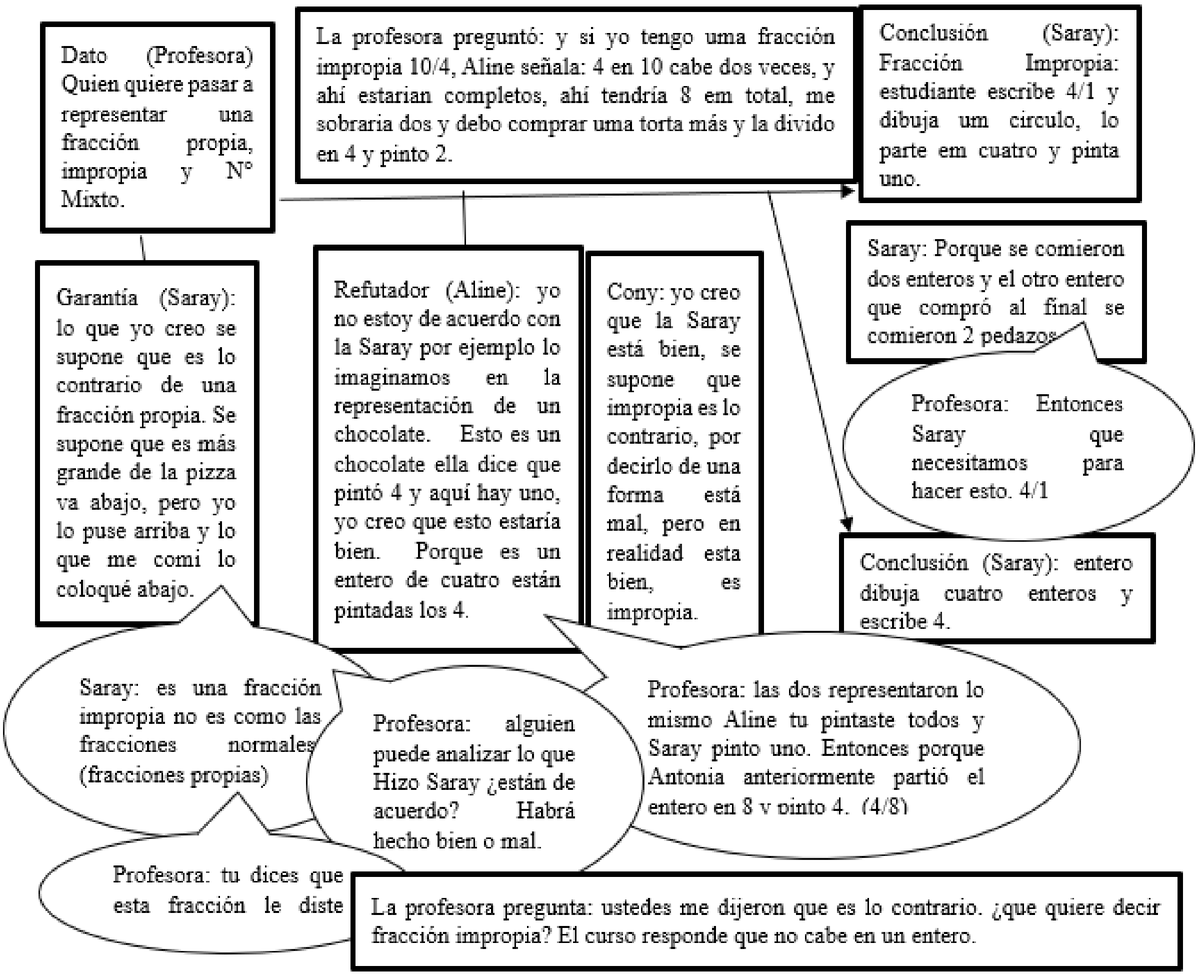


Figura 1. Estructura argumentativa caso 5, clase 1

Dentro de las doce clases analizadas, en solo cuatro de estas se reconocen episodios argumentativas en algún momentos de la clase, ya sea en el inicio, desarrollo o cierre. Por ejemplo, en el caso 1, la docente en ningún momento genera discusión o confrontación de posturas y además escucha una respuesta y valida inmediatamente a la estudiante, desechando la posibilidad de generar un debate con sus estudiantes. Respecto al caso 3 el profesor no gestiona el desarrollo de la argumentación en el aula matemática, a pesar de que durante sus clases se aprecia que estudiantes comenten de forma constante errores, no lo gestiona de forma de promover la habilidad de argumentar aunque las tareas matemáticas escogidas, proporcionan una apertura para que las estudiantes puedan desarrollarlo con diferentes procedimientos, respuestas abiertas y la posibilidad de generar posturas diferentes. Los casos 4, 5 y 6 son diferentes, pues las docentes en al menos una de las dos clases se promueven interacciones argumentativas promoviendo el debate pues al analizar con la estructura de Toulmin están presentes al menos los elementos dato, conclusión, garantía y refutación; específicamente en el caso 5 desarrolla preguntas que van apoyando el debate entre sus estudiantes, en ningún momento las valida, hace que interactúen entre todas y con ello se percaten de sus propios errores y los va gestionando de forma progresiva.

4.3. Condiciones de argumentación

4.3.1. Estrategias de Comunicación: oportunidades de participación

Al observar en la tabla 3, se hace evidente que los casos en donde se analizaron las condiciones de argumentación son el 2, 4, 5 y 6 ya que en sus clases se presentaron episodios argumentativos. Considerando la condición oportunidades de participación, esta estrategia tiene la finalidad de asegurar que todos los estudiantes tengan la oportunidad de aportar. El análisis del video de la clase 1 en el caso 2 nos evidencia que los estudiantes en dicha clase tuvieron pocas oportunidades de participación en comparación por ejemplo con las estudiantes del caso 4, 5 o 6

Indicadores	caso 2: clase 1	caso 4: clase 2	caso 5: clase 1	caso 6: clase 2
No valida las respuestas de los estudiantes antes de la socialización con los estudiantes	La profesora consulta la respuesta que obtuvo cada grupo, sin validarlas en el inicio	No valida las respuestas de las estudiantes, cuando opinan al inicio de la actividad	La profesora no valida respuestas, sino que realiza otra pregunta para indagar más	No se alcanza a socializar las respuestas de las estudiantes, cada una luego pasa a la pizarra
Promueve el debate de procedimientos distintos que permiten resolver una misma situación.	No presente	Promueve el debate de los procedimientos, conceptos e ideas erróneas	Promueve el debate de las distintas formas de representación de una fracción	Las estudiantes debaten en relación con los procedimientos erróneos
Promueve la socialización simultánea de producciones de las estudiantes	Las estudiantes que pasan a la pizarra lo hacen en tiempos diferentes	3 estudiantes pasen adelante y discutan sus posturas respecto a una pregunta	2 estudiantes socializan al mismo tiempo la explicación de fracción	4 estudiantes pasan a la pizarra para registra sus procedimientos
Los estudiantes socializan sus producciones	La profesora señala que si alguien quiere opinar o compartir su solución o duda lo haga.	Estudiantes durante toda la clase socializan sus soluciones	Estudiantes socializan sus soluciones.	Las estudiantes pasan a la pizarra a socializar sus soluciones.
Los estudiantes exponen sus ideas del problema y sus estrategias.	Exponen sus ideas y estrategias realizadas.	Estudiantes exponen sus ideas y estrategias.	Estudiantes exponen sus ideas de lo que significa cada una de las fracciones.	Estudiantes pasen a la pizarra a exponer sus ideas y estrategias.

Tabla 4. Análisis de la Estrategia Comunicativa: Oportunidad de Participación.

4.3.2. Estrategias de Comunicación: gestión del error

Considerando la condición gestión del error, esta estrategia tiene la finalidad de asegurar a los estudiantes que sus ideas/respuestas equivocadas son importantes para construir el conocimiento matemático. El análisis del video de la clase 1 en el caso 2 nos evidencia que los estudiantes no dispusieron de muchas oportunidades de construir conocimiento matemático a partir del error de participación en comparación por ejemplo con las estudiantes del caso 4, 5 o 6, en donde se puede apreciar en la tabla 5 que la gestión está centrada en las explicaciones incorrectas más que en las respuestas erróneas y para ello la anticipación de dichas respuestas es una acción que realizan las profesoras de los casos 4, 5 y 6.

Indicadores	caso 2: clase 1	caso 4: clase 2	caso 5: clase 1	caso 6: clase 2
Promueve que las estudiantes con respuestas correctas e incorrectas expongan	Las estudiantes con respuesta correctas e incorrectas exponen sus conclusiones	Las estudiantes exponen en la pizarra sus respuestas y la profesora no las valida.	Las estudiantes pasan a la pizarra a exponer y explicar lo que comprenden por fracción.	4 estudiantes salen a exponer a la pizarra a pesar de que sus procedimientos estaban errados.
Gestiona el error, con foco en las explicaciones incorrectas	No se presenta.	Gestiona el error con el foco de explicaciones incorrectas.	Gestiona el error a partir de las explicaciones y representaciones incorrectas.	Gestiona el error en base a explicaciones incorrectas unidas a respuesta incorrectas.
Anticipa las posibles respuestas incorrectas de sus estudiantes	No se presenta.	Escoge una actividad en donde deben tener conocimiento anterior de la diferencia entre cuerpo y figura geométrica.	Realiza preguntas abiertas, las cuales dan la posibilidad de generar errores en los estudiantes.	Anticipa alguna respuesta de las estudiantes y sabe a quién pasar a la pizarra.
No revisa en forma anticipada los errores, sino hasta después que los estudiantes se han dado cuenta del error.	Profesora finalizando la clase revisa cual grupo tuvo error.	No revisa los errores antes de la puesta en común de las respuestas	No revisa los errores de forma anticipada	En ningún momento revisa los errores de forma anticipada.
Promueve entre los estudiantes una discusión asertiva y constructiva sobre las respuestas incorrectas.	No se presenta.	Promueve una discusión entre alumnas, en relación con las respuestas incorrectas.	Estudiantes socializan errores y aciertos y las estudiantes respetan la opinión de sus compañeras.	Las 4 estudiantes discuten sobre las respuestas de cada una de acuerdo con sus conocimientos.

Utiliza el error como fuente para la solución de dudas.	Con los errores se resuelven dudas de cómo resolver problemas.	Gestiona el error apoyándose en el curso para solucionar dudas, sobre los cuerpos y las figuras.	Gestionar el error para solucionar dudas	Utiliza el error para solucionar dudas.

Tabla 5. Análisis de la Estrategia Comunicativa: Gestión del Error.

4.3.3. Estrategias de Comunicación: tipo de preguntas

Considerando la condición tipo de preguntas, esta estrategia pone el foco en la formulación de preguntas adecuadas por parte del docente. Al observar los datos de la tabla 6 es fácil ver que los casos 2, 4, 5 y 6 promovieron la estrategia señalada.

Indicadores	caso 2: clase 1	caso 4: clase 2	caso 5: clase 1	caso 6: clase 2
Realizar actividades con preguntas que favorezcan la explicación por sobre un sí o no.	No se presenta. Sólo preguntas que apuntan a la comprensión	La actividad inicial comprende preguntas que favorecen la explicación	Se plantea una actividad la cual genera gran cantidad de preguntas que promueven las explicaciones	¿Cuántos puede comprar con él vuelto?
No hacer preguntas retóricas, es decir hacer la pregunta y responder inmediatamente.	La profesora hace preguntas que responde inmediatamente	Al inicio de la clase hace muchas preguntas que no contesta inmediatamente	La mayoría de las preguntas realizadas no son retóricas	No realiza preguntas retóricas durante la clase.
Realizar contra-preguntas a los estudiantes a partir de las respuestas dadas por ellos.	No se presenta	Se presenta en toda la clase.	Se hacen contra preguntas para aclarar lo señalado por la estudiante**.**	La profesora a partir de una respuesta vuelve a pregunta. ¿Por qué restar al revés?
Plantear preguntas con distintos fines, según el rol de la actividad dentro de la clase.	Durante toda la clase la profesora planteó preguntas con distintos fines.	Plantea preguntas durante toda la clase, especialmente en el inicio y cierre. ¿no tiene volumen el cuerpo?	Durante toda la clase realiza preguntas para conducir el aprendizaje de las estudiantes.	¿por qué consideras tú que tu procedimiento es correcto entre el de Fernanda y Antonia?

Devolver buenas preguntas planteadas por estudiantes al resto del curso	No se presenta	¿Quién dijo lo de las figuras 2D y 3D?	No se presenta	No se presenta
Plantear preguntas que no cambien de un foco a otro muy rápidamente; tratar que las preguntas promuevan que las ideas evolucionen.	No se presenta	En el inicio planteó preguntas hiladas que nunca perdieron un foco	Desde el comienzo de la clase planteó una pregunta relacionada con el objetivo. (equivalencia) luego cambio la pregunta sin cambiar el foco, partiendo de lo básico. ¿Qué es una fracción?	No se presenta

Tabla 6. Análisis de la Estrategia Comunicativa: Tipo de Preguntas.

4.3.4. Tarea matemática

En los casos analizados, se puede observar en la tabla 7 que los docentes están utilizando tareas matemáticas que presentan la posibilidad de realizarla o resolverla con variados procedimientos para encontrar la respuesta, del tipo abiertas donde pueden presentarse más de una respuesta correcta y que los estudiantes puedan adoptar diferentes posturas.

Indicadores	**caso 2:** clase 1	**caso 4:** clase 2	**caso 5:** clase 1	**caso 6:** clase 2
Diferentes procedimientos	Presencia	Presencia	Presencia	Presencia
Respuestas abiertas	Ausencia.	Presencia	Presencia	Presencia
Posturas diferentes	Presencia	Presencia	Presencia	Presencia

Tabla 7. Análisis de la condición: Tarea matemática.

En relación con las tareas matemáticas que fueron escogidas por los profesores para promover la habilidad de argumentar-comunicar en el aula fueron tareas: diferentes procedimientos, respuestas abiertas, posturas diferentes, tareas desafiantes para los estudiantes, apropiados para el nivel educativo, relacionados con su interés, lenguaje cercano y comprensible para cada uno de sus estudiantes, y principalmente creación de la tarea.

4.3.4. Plan de clases

En los casos analizados, se puede observar en la tabla 8 que los docentes no planifican clases pensando una gestión argumentativa ya sea anticipando las respuestas o posturas de los estudiantes, como también los procesos argumentativos. Destaca el caso 6 que cumple dos de tres indicadores.

Indicadores	**caso 2:** clase 1	**caso 4:** clase 2	**caso 5:** clase 1	**caso 6:** clase 2
Anticipación de respuestas, procedimientos y posturas de estudiantes.	Ausencia	Ausencia	Ausencia	Presencia
Anticipar procesos argumentativos de los estudiantes.	Ausencia	Ausencia	Ausencia	Ausencia
Acciones docentes para promover la argumentación.	Ausencia	Ausencia	Presencia	Presencia

Tabla 8. Análisis de la condición: Plan de clases

5. Conclusiones

De acuerdo con la investigación realizada que busca indagar dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Qué condiciones para promover la habilidad argumentar-comunicar en el aula matemática de primer y segundo ciclo, se manifiestan en profesores de una escuela municipal con alto porcentaje de estudiantes en nivel de aprendizaje adecuado y elemental en pruebas SIMCE matemática? de la cual emanan preguntas específicas, las que serán abordadas a partir de los datos analizados.

Pregunta Especifica N° 1: ¿En la escuela municipal con alto porcentaje de estudiantes con nivel de aprendizaje adecuado y elemental se promueve la argumentación en el aula?

De acuerdo con la investigación realizada y el análisis de clases efectuado preciso señalar que solo algunos docentes promueven la argumentación en el aula matemática. En relación con el objetivo específico número 1: Reconocer episodios argumentativos en el aula matemática de 1° a 8° básico, es preciso señalar que dentro de las doce clases analizadas, en solo cuatro de estas se reconocen episodios argumentativas en algún momentos de la clase. Los profesores de 5º a 8º grado gestionan las condiciones planteadas por Solar y Deulofeu (2016) de forma adecuada y progresiva, evidenciándose al menos cuatro elementos de la estructura de toulmin.A saber, dato, conclusión, refutador, garantía.

Pregunta Especifica N° 2: ¿Qué tipos de estrategias de comunicación matemática utilizan los docentes para la gestión de la enseñanza en el aula matemática?

La estrategia comunicativa matemática que utilizó la mayoría de los docentes fue el tipo de pregunta, ya que desplegaron en todas las clases diferentes preguntas abiertas, las cuales iban gestionando de acuerdo con el momento que transcurría la clase, propiciando y promoviendo la opinión de las estudiantes. A su vez es preciso señalar que durante la observación de las clases se visualizaron otras estrategias comunicativas que propiciaron a que en alguna de las clases observadas se promovieron la argumentación en el aula matemática, dentro de las cuales destaca:

- Formulación de preguntas adecuadas: los docentes tienen la habilidad de formular preguntas adecuadas para el momento de la clase que se está desarrollando. Estas preguntas les permitían a las estudiantes desarrollar el razonamiento, pensamiento abstracto y cuestionar sus propios argumentos y el de las demás.
- Tener objetivos de la clase en común: los profesores involucraron a las estudiantes en el desarrollo del objetivo, hicieron explicito que la clase la construyen entre todos y que ellas son las que tienen mayor responsabilidad en participar para que construyan de forma progresiva su conocimiento matemático.
- Promoción de un lenguaje oral y no verbal comprensible para todos (lenguaje matemático): el lenguaje utilizado es comprensible por todos, va aumentando de complejidad cuando sus estudiantes van desarrollando conocimiento matemático, los cuales se utilizan de forma constante, favorece la construcción y el entrenamiento de un lenguaje matemático.
- Creación de un ambiente propicio para el aprendizaje: Profesor explica que debe existir un ambiente propicio para aprender, de respeto mutuo, con actitudes de compromiso por parte de todos a su vez de normas de convivencia escolar conocidas, consensuadas y comprensible para todas las estudiantes.
- Permitir que los estudiantes corrijan la redacción matemática de sus pares: los estudiantes corregían a sus pares, formulando mejor y mayor conocimiento matemático, donde al profesor lo utilizaba como mecanismo de evaluación.

Existe una relación cercana entre las condiciones que promueven la argumentación en el aula matemática y la gestión que desarrolla el docente en el aula. Los profesores que no promovieron la argumentación desarrollaron menos elementos de las subcategorías de las condiciones y por ende la gestión que desarrollaron en su clase no promovió el desarrollo de la habilidad argumentar- comunicar.

En cambio, los docentes que desarrollaron las condiciones investigadas por Solar y Deulofeu (2016) y otras anteriormente nombradas la gestión pedagógica fue efectiva y se pudo promover la habilidad investigada.

Profesores que permitieron que sus estudiantes participaran, opinaran, explicaran, apoyaran a sus compañeros, reformularan lo planteado por los otros, escucharan a los demás, cuestionaran sus conocimientos, donde el docente utilizó el error para desarrollar y guiar la clase, no valido sus preguntas ni respuestas, intervino son preguntas de acuerdo al momento de la discusión que se estaba desarrollando, promociona en los estudiantes la capacidad de razonamiento de cuestionamiento y de formulación de discurso, relatos convincentes y argumentos adecuados para convencer a sus compañeras de que sus posturas son las verdaderas y más adecuadas para la resolución de la problemática.

6. Bibliografía

Bisquerra, R. (2014). *Metodología de la investigación educativa*. (4ª Ed.) Editorial: La Muralla, S.A. Madrid, España.

Buitrago. A, Mejía, N. y Hernández, R. (2013) La argumentación: de la retórica a la enseñanza de las ciencias. *Innovación Educativa*, ISSN: 1665-2673 vol. 13, número 63: Colombia.

Godino, J. (2003) *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada. España.

Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de investigación en educación matemática*, (1), 1-22.

Hernández, R, Fernández, C, y Batista P. (2010). *Metodología de la investigación.* Editorial MacGraw-Hill. D. F, México.

Jiménez, A y Pineda, L. (2013). Comunicación y Argumentación en clases de matemática. *Revista Educación y Ciencias*. N° 16 Pág. 101-116.

Jiménez, A., Suárez, N. y Galindo, S. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, 1(2), 173-202

Jiménez, A. (2010). La naturaleza de la Matemática, sus concepciones y su influencia en el salón de clase. *Revista Educación y Ciencia*. Número 15. pp 135-150. Colombia.

Larraín, A., Freire, P. y Olivos, T. (2014). Habilidades de argumentación escrita: Una propuesta de medición para estudiantes de quinto básico. *Psicoperspectivas*, 13(1), 94- 107. Recuperado el 24 de julio de 2018 desde http://www.psicoperspectivas.cl doi:10.5027/PSICOPERSPECTIVAS-VOL13-ISSUE1-FULLTEXT-287

Lee, C. (2010). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Morata. Madrid:España

MINEDUC. (2012). *Bases curriculares. Matemática Educación Básica*. Chile: Ministerio de Educación.

OCDE (2016). PISA 2015 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I), PISA, OCDE.

Sardá, A. (2003) Argumentar: Proposar i validar models, en N. Sanmartí (coord.) Aprendre Ciencies tot aprenent a escriure ciencia (149- 168). Barcelona: Ediciones 62

Solar, H. y Deulofeu, J. (2016) Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemática. *Revista Bolema*, Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 1092 – 1112.

Solar, H., Azcárate, C. y Deulofeu, J. (2012). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias, 30(3), 0133-154.*

Toulmin, S. (1958). *Los usos de la argumentación*. Traducción de María Morrás y Victoria Pineda, Ed. Península Barcelona, 2007. pp. 29-31

Autores:

Ortiz Jiménez, Andrés Iván: Profesor de Matemática del Departamento de Didáctica de la Facultad de Educación. Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC). Chile. Magíster en Enseñanza de las Ciencias mención matemática. Universidad de Concepción. E-mail: aortiz@ucsc.cl

Carreño Díaz, Carolina Paz: Profesora de Educación Especial y Diferenciada en Escuela Balmaceda de la ciudad de Talca. Magíster en Didáctica de la Matemática. Universidad Católica de la Santísima Concepción. UCSC. Concepción, Chile. E-mail: cpcd.edues@gmail.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 78-91

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

POLEMIZACIÓN

Iván Vladimir Tomeo Amigo, Nicolás Blamos, Patricia Lestón

Fecha de recepción: 30/09/2018
Fecha de aceptación: 20/12/2018

Resumen	El presente artículo introduce al lector en el concepto de la polemización del saber escolar. Lo que se plantea en este trabajo muestra un reposicionamiento del rol docente frente a diversas situaciones de aula en las cuales se busca que el alumno logre transformarse en el responsable de la tarea de la validación del saber. Reconocemos al saber matemático como algo relativo y dialéctico que la subjetividad del alumno puede crear y transformar, dándole un sentido interno y una significación personal, así como social. En el camino del análisis planteado nos enmarcamos en una mirada de la teoría socioepistemológica, que nos permite revisar cuestiones relacionadas con el saber escolar, las comunidades de prácticas, la problematización y el empoderamiento, bases desde la cuales podemos pensar la polemización y los nuevos regímenes de verdad. **Palabras clave:** problematización, validación, empoderamiento, socioepistemología
Abstract	This article introduces the reader to the concept of the *polemicity* of school knowledge. In this paper we present a repositioning of the teacher's role when facing diverse classroom situations where the student is expected to become responsible of validating mathematical knowledge. We assume mathematical knowledge as something relative and dialectical, where the student's subjectivity is able to create and transform it, providing it with an internal significance and both a personal and a social meaning. In the course of the proposed analysis, we are framed in a *socioepistemological* perspective, which allows us to review issues related to school knowledge, communities of practice, problematization and empowerment, bases that allow us to think about *polemicity* and new regimes of truth. **Keywords:** problematization, validation, empowerment, socioepistemology
Resumo	Este artigo introduz o leitor ao conceito da polemização do saber escolar. Ele expõe um reposicionamento do papel docente diante de várias situações de sala de aula em que se busca que o aluno se torne responsável pela tarefa da validação do saber. Consideramos o saber matemático como algo relativo e dialético que a subjetividade do aluno pode criar e transformar, dando-lhe um sentido interno e uma significação pessoal, tanto assim como social. No caminho da proposta, enquadramo-nos numa perspectiva da teoria socioepistemológica, que nos permite rever questões relacionadas ao saber escolar, comunidades de práticas, problematização e empoderamento, bases a partir das quais podemos pensar a polemização e os novos regimes de verdade. **Palavras-chave:** problematização, validação, empoderamento, socioepistemologia

1. Escenas de la vida escolar

ESCENA I

En cualquier aula, en cualquier escuela.

Docente: *(Pasa por los bancos, los alumnos están resolviendo ejercicios. Se detiene en uno, y rápidamente le señala con el índice el recuadro que está haciéndole al resultado mientras le reprocha)* –En éste tiene algún error ¡revise bien!

Alumno: *(Sorprendido, levanta la cabeza, lo mira con las cejas arqueadas)* – ¿Cómo sabe?

Docente: *(Con total seguridad)* –Y, porque este ejercicio hace 10 años que da 35/4 ¡vamos, revise bien que hay un error!

ESCENA II

Escuela nocturna del conurbano de la Ciudad de Buenos Aires.

Docente: *(En el pizarrón, satisfecho, después de haber deducido algebraicamente la fórmula resolvente de ecuaciones cuadráticas; deja la tiza, se sacude la tiza de las manos, mira a los alumnos):* –¿Ven? Todo esto fue para que ustedes entiendan de dónde salen las cosas…

Alumnos: *(En silencio, lo miran, luego miran el pizarrón, miran al compañero de banco, lo vuelven a mirar, miran el techo, la ventana, intentan descifrar lo que han copiado en sus carpetas, escriben el banco, sacan sus celulares, se rascan la cabeza…)*

ESCENA III

Clase de Lengua en cualquier escuela de nivel medio.

Docente:

(Dando por sentado) –Cualquiera de nosotros si tuviera la posibilidad de visitar el oráculo y conocer su destino, iría.

Alumno:

(En total desacuerdo, levanta la mano) –Yo no iría, profe, no me gustaría saber mi destino.

2. Introducción

Las escenas anteriores son fácilmente reconocibles en cualquier contexto escolar. La clase de matemática que cierra preguntas de forma categórica, en donde el conocimiento no es discutible y las opiniones sólo se escuchan si se ajustan a un criterio de verdad que es propio de la clase, del docente y de la matemática que ahí se construye. **¿Por qué se admiten opiniones diversas en una clase de Lengua y no en una de matemática?** ¿Es el tipo de conocimiento el que condiciona las prácticas pedagógicas o son determinadas prácticas normalizadas y naturalizadas las que condicionan un conocimiento escolar? ¿Hay una sola verdad dentro de la matemática? ¿Cuál es el rol del alumno frente a su construcción del saber y su validación?

Estas son algunas de las preguntas que orientan el abordaje del concepto de polemización. Es necesario entender que lo que se plantea es un reposicionamiento del alumno en relación a la verdad en el aula de matemática. Estamos pensando en las tensiones que deberían darse entre los alumnos, generalmente opacados dentro del aula de matemática, y sus saberes, entendiendo que son sus realidades y racionalidades las que deberían determinar la manera en que los mismos se ponen en uso. La delimitación de los roles y las asimetrías han de dinamizarse en la búsqueda de una clase más democrática.

3. Polémicas en la historia ¿es la matemática o son las prácticas?

Para comenzar a vislumbrar algunos aspectos de nuestro enfoque daremos cuenta de ciertas situaciones de la historia de la matemática que produjeron una ruptura que permiten transparentar la naturaleza conflictiva del conocimiento y la verdad matemática.

Camina un hombre entre los fríos pasillos de la Universidad de Kazán, se mezclan miradas recelosas a su alrededor. El hombre es Nicolás Lobachevsky, quien hace algunos años ha publicado sus trabajos sobre geometría no euclideana. Según algunos autores, sus puntos de vista no convencionales le han valido intrigas y han puesto en jaque su cátedra en la Universidad.

En otro punto del globo, uno de los matemáticos más grandes de la historia, Carl Gauss, confía al silencio de su escritorio algunos trabajos sobre geometría, que cuestionan también el postulado de las paralelas. Decide no publicarlos, para algunos autores, por temor a hacer ridículo en la comunidad matemática.

Contemporáneamente, separado por algunos ríos y montañas, encontramos a otro joven de apellido Bolyai, a quien su padre hace un pedido solemne: “No debes intentar semejante aproximación a las paralelas. Conozco ese camino hasta el final. He atravesado esa noche insondable, que extinguió toda la luz y la alegría de mi vida. Te lo suplico, abandona la ciencia de las paralelas”. (Berlinsky, 2005, p. 137)

La invención de las geometrías no euclideanas no sólo muestra de manera paradigmática la naturaleza conflictiva y dialéctica de las matemáticas, sino algo quizá más valioso, que intentamos dejar traslucir en los párrafos anteriores: **el aliento del sujeto**. Es, precisamente, el carácter abierto, problemático y conjetural de las matemáticas el que permite vislumbrar la naturaleza de los sujetos y de las comunidades detrás de su desarrollo científico.

> Al dar el hecho histórico escueto de que Lobachevsky en 1826-9 y J. Bolyai en 1833 casi simultáneamente y con entera independencia publicaron detallados desarrollos de la geometría hiperbólica, hemos recordado una de las mayores revoluciones del pensamiento. [...] Al álgebra abstracta de 1830 y años siguientes, y a las atrevidas creaciones de Lobachevsky y de Bolyai se remonta al concepto actual (1945) de las matemáticas como creación arbitraria de los matemáticos. Exactamente de la misma manera que un novelista inventa personajes, diálogos y situaciones de las que es a la vez autor y señor, el matemático imagina a voluntad los postulados sobre los que basa sus sistemas matemáticos. Tanto el novelista como los matemáticos pueden estar condicionados por el medio ambiente por la condición y por la manera de tratar su material; pero ni unos ni otros se ven obligados por ninguna necesidad eterna y extra-humana a crear ciertos personajes o a inventar ciertos sistemas. (Bell, 2014, p. 342).

¿Qué nos llevó a ir desde las aulas del siglo XXI a tres sujetos de principios del siglo XIX? ¿Qué tiene que ver la “polemización” con el encuentro y desencuentro de las paralelas? Son las sensibilidades, los sujetos detrás de estas ideas, que con la particularidad de sus racionalidades crearon un registro de verdad impensado hasta ese momento. La matemática no se crea ni interpreta sola sino a través de un saber impregnado de individualidades y no exento de las disputas entre los sujetos: de sus enredos, acusaciones y polémicas. Podríamos proponer innumerables casos en la historia de las matemáticas que refuerzan estos argumentos (basta pensar en las laberínticas angustias que despertó durante décadas las paradojas de Russell), pero vamos a elegir un objeto próximo a lo escolar: *los números negativos.*

El historiador Eric Temple Bell (2014) menciona que matemáticos eminentes del Renacimiento como Stifes y Cardano llamaban a los números negativos “absurdos” y “ficticios”. Es más: destaca que, en todo ese período, el avance más significativo en cuanto a los números negativos se debió a Fibonacci, quien interpretó el número negativo como pérdida en un problema de dinero. Los números negativos fueron un concepto polémico en la historia de las matemáticas, hasta el punto que, según Bell, fueron aceptados después que los números complejos. ¿Cómo podemos entonces pretender que la noción de número entero no es problemática, si en todo un período histórico el logro más destacable es su interpretación como pérdida de dinero, algo que hoy en día no parece sólo modesto, si no baladí? La siguiente reflexión de Gauss nos parece interesante para discutir la cuestión presentada:

> A los números enteros se han agregado las fracciones; a las cantidades racionales, las irracionales; a las positivas, las negativas, y a las reales, las imaginarias. Este progreso, sin embargo, siempre se ha hecho al principio con pasos vacilantes y tímidos. Los primeros algebristas llamaron raíces falsas a las raíces negativas de las ecuaciones, y éste es, en realidad, el caso cuando el problema al cual se refieren ha sido enunciado de tal manera que el carácter de la cantidad buscada no admite lo contrario. Pero así como en la aritmética general nadie vacilaría en aceptar las fracciones, aunque hay tantas cosas contables para las cuales la fracción no tiene sentido, del mismo modo, no desconoceríamos a los números negativos los derechos acordados a los números positivos, por la sola razón de que hay innumerables cosas que no los admiten. (Gauss citado en Kasner y Newman, 1985, p. 103).

No es sino uno de los matemáticos más destacados de la historia el que da cuenta de la complejidad que se enfrentó en la construcción, aceptación y validación de un saber tan trivial para nuestra escuela como la idea de número negativo y de su carácter relativo a los usos y al contexto. Volvamos a la pregunta que abre estas reflexiones: **¿es la matemática o son las prácticas?** Evidentemente no es la matemática en su propia naturaleza la que impone un significado único. Deberíamos entonces sospechar de las prácticas escolares en relación a la verdad de la matemática y su uso. Hacia esos terrenos se dirige, no sin incertidumbre, la polemización.

4.¿Qué es eso de polemización?

La primera aproximación que intentamos da cuenta de que la polemización es una situación que se da **dentro del aula** en donde frente a una determinada actividad los alumnos presentan diversos posicionamientos - sostenidos por un saber escolar - sin que haya un método de validación que legitime unos por sobre los otros. Esto implica que en los argumentos que se despliegan en una polémica interviene necesariamente un saber matemático correctamente empleado.

Consideremos la siguiente situación como muestra del tipo de intercambio que queremos caracterizar (este problema aparecía en un listado de ejercicios de repaso de porcentaje en un aula de primer año de escuela secundaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires):

> *Quiero comprar un par de zapatos aprovechando las ofertas y encontré un par que me gusta en dos locales con el mismo precio de lista ($1000), en uno me descuentan el 35% y en el otro hay una promo de 2 x 1, ¿cuál me conviene?*

La mayoría de los alumnos frente a este problema respondió que lo más conveniente era ir al local donde se ofrece el 2 x 1. Sin embargo una alumna dijo que para ella era mejor el otro local: quería un par de zapatos y en ese, tenía que gastar menor cantidad de dinero. Ella mostró que con su opción iba a gastar $650, mientras que en el otro se iba a gastar $1000. El resto de los compañeros trató de convencerla: ellos se llevaban dos pares, así que cada uno costaba $500, que era menos que $650, pagar el 50% era mejor que pagar el 65%, pero ella mantenía que el desembolso de dinero era mayor en el caso del 2 x 1, y además, en el problema, decía **un par de zapatos**, entonces, ¿por qué iba a comprar dos pares? La discusión se extendió unos minutos en la misma línea, y se cerró cuando el grupo mayoritario aceptó esta opción como una respuesta posible y válida, aunque no cambiaban por eso la respuesta del resto: para ellos, lo mejor es comprar en 2 x 1.

Este intercambio nos lleva a detectar algunos elementos que ayudan a definir, a nuestro entender, de qué hablamos cuando hablamos de polémica. En primer lugar podemos notar como rasgo de polemización que hay un saber matemático sobre porcentaje correctamente utilizado que le otorga consistencia a estos dos posicionamientos antagónicos. No hay polémica si la matemática que se emplea está afectada por una resolución errónea. Fácil hubiera sido para cualquiera de los estudiantes que intervino en esa situación decir “calculaste mal lo que hay que pagar”, pero esa posibilidad no estaba entre las opciones. Todos los cálculos, frente a las dos respuestas eran correctos, y sin embargo, la respuesta que se estaba construyendo admitía miradas opuestas.

Otro de los rasgos destacables en la polemización es la no resolución de la actividad jerarquizando una respuesta por sobre otra sino quedando validado un estado de coexistencia de las distintas posiciones planteadas. Esta postura no implica la no construcción de un saber, o la aceptación de una construcción errónea, simplemente lo que nos permitimos es pensar que en los problemas matemáticos, a veces, las respuestas pueden ser distintas porque las *racionalidades* que intervienen son distintas. En el ejemplo, la idea de “conveniencia” es una concepción social que en este caso, descansa sobre construcciones distintas en sujetos distintos: ¿es más conveniente pensar en el **precio unitario** o en el **gasto** que voy a tener que enfrentar? La matemática que hay atrás del problema no es la que tiene opciones distintas, el porcentaje, sea el que fuere, sobre $1000 es único, sin embargo **el contexto de uso y la propia concepción de conveniencia** abren el juego.

> En nuestra opinión, el proceso de difusión institucional del saber matemático no concluye con la impresión de las páginas de los textos sino que se prolonga al interior y al exterior del aula. Las interacciones entre alumnos y profesor normadas y reguladas por el discurso matemático escolar se conforman como el terreno propicio para la formación de consensos, pues un cierto proceso de selección jerárquica de las ideas opera al seno del aula donde se privilegian ciertos métodos por sobre otros, se prefieren algunas explicaciones en vez de otras, se eligen ejemplos y problemas con un cierto criterio que induce un cierto proceso de peyoración de las prácticas espontáneas de los estudiantes. Se jerarquiza, estructura, hegemoniza y se impone, una racionalidad o sistema de razón en el sentido sociológico de Pierre Bourdieu. (Cantoral, 2013, p. 64).

Precisamente lo que buscamos es desdibujar estas jerarquías tratando de construir un terreno propicio para un intercambio abierto a las diversas racionalidades sin que una se imponga en un sentido normativo por sobre las demás. Compartimos con Cantoral que es en el seno del aula donde se construyen consensos en relación con los saberes, pero entendemos que el docente debe tener un rol distinto al que tradicionalmente se le ha asignado, haciendo que la validación de la verdad surja como resultado de esos consensos de la comunidad de alumnos.

5. Problematización y alumnos, condiciones necesarias de polemización

Ahora bien para que un profesor admita o fomente en su clase situaciones como la del ejemplo anterior debe haber transitado por un proceso que le haya permitido pensar al conocimiento matemático como un saber problematizable (Cantoral, 2013). Si la concepción de la matemática que tengo es la de un saber transparente, entonces el rol del alumno queda delimitado a la asimilación de objetos no susceptibles a ser cuestionados. En síntesis, la epistemología de un profesor hará que pueda frente a determinada situación, permitir a sus estudiantes una discusión como la antes descripta; y permitirse a él mismo dejar que eso ocurra, de manera que la clase y las decisiones queden en manos de otros. Salir del centro de la validación, la institucionalización, la evaluación, implican un cambio de rol y de identidad tanto para el profesor como para el alumno. Eso no es menor, y en apartados posteriores nos adentraremos en ello.

Según Cantoral (2013)

> Para el análisis del saber, éste debe problematizarse (historizarse y dialectizarse). Específicamente, trata de la polifonía entre los procesos avanzados del pensamiento, la epistemología de las matemáticas y las prácticas humanas altamente especializadas. En este sentido, el saber matemático [el saber sobre algo], no puede reducirse a una mera definición formal, declarativa o relacional, a un conocimiento matemático [el conocimiento de algo], sino que habrá de ocuparse de su historización y dialectización como sus dos mecanismos fundamentales de constitución. Es por esto que el saber habrá de ser concebido como una construcción social (p. 53-54).

Lo que el autor describe es un **proceso centrado principalmente en el docente** en relación con el saber o con una serie de saberes matemáticos mediante los cuales este docente modifica su relación con el conocimiento matemático entendiendo a las prácticas sociales como antecesoras a este saber. Hasta acá lo que no se refleja es la participación del alumno en el proceso de construcción de saberes aunque dentro de la Socioepistemología sí se reconoce que es este último quien debe intervenir en él.

> Las situaciones de aprendizaje propuestas por la Socioepistemología, privilegian la diversidad de las argumentaciones y consideran a la matemática como la herramienta que ayuda a la toma de decisiones, en donde la respuesta depende de la interpretación y argumentación del estudiante, considerándose, todas como válidas si sus argumentaciones son coherentes con su racionalidad. Por tanto, se entiende que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo (contextual). (p. 161).

Lo que esto transparenta es la posibilidad de que se generen potenciales argumentaciones frente a la construcción de un saber pero no un régimen de validación excepto el que está centrado en el docente. *Considerándose todas como válidas…* es ahí donde queremos centrar la atención. ¿Quién las considera como válidas? Entendemos que esa tarea es del docente y es allí donde queremos mostrar una primera ruptura significativa. Lo que nosotros nos estamos planteando es que además de la existencia de múltiples respuestas y diversas argumentaciones exista un proceso de validación que esté dado por el colectivo de alumnos, en donde el rol del docente quede delineado por la vigilancia de un saber matemático de base correctamente empleado que permita que los argumentos sean consistentes para garantizar su viabilidad. En el caso de la oferta de zapatos los argumentos opuestos entre sí están sostenidos por el cálculo correcto de un porcentaje; si ese cálculo no hubiera sido correcto no hay polémica posible ya que existe un argumento invalidado por el propio saber. Será tarea del grupo garantizar la viabilidad de los argumentos, ya que es al mismo grupo al que se quiere “convencer” de algo. Y en caso de que la vigilancia de validez escape de la mirada del grupo, el docente tendrá que estar lo suficientemente atento para orientar la discusión de manera tal que el error no pase inadvertido. Estas últimas ideas suenan un poco a reglas, pero distan profundamente de ese propósito. Imposible sería que nos arrogáramos el derecho de organizar un manual de “polemización en el aula” ya que confrontaríamos con nuestra propia filosofía y marco teórico. Simplemente estamos empezando a caracterizar un accionar docente frente a un tipo de situación escolar a la que la Socioepistemología invita a pensar.

En conclusión reconocemos dos dimensiones centrales de la polemización por un lado una dimensión que requiere de un saber problematizado y por el otro, la referida a un sujeto que reconocemos como valioso y con la capacidad de validar un saber. El establecimiento de una situación polémica (como la del ejemplo) es el punto de ebullición, la faceta más visible y dramática de la polemización, pero no es la única. La polemización puede darse con distintos niveles de intensidad, matices, sutilezas, atendiendo a la diversidad de momentos y riqueza de un aula y a la heterogeneidad de los sujetos y del saber. Utilizamos la noción de polémica para darle intensidad figurativa a la idea de polemización, pero ahora pretendemos ensanchar un poco su naturaleza teórica, y entender a la polemización como un *posicionamiento* y una *actividad continua* frente a las relaciones de saber-poder- verdad dentro de un aula.

6. Polemización y roles

Queremos diferenciar a la polemización de la opinión, ya que si bien en la opinión el sujeto explaya algo propio, no necesariamente hay un saber escolar involucrado. Hemos dado evidencias acerca de la idea de polemización que presentamos, en la que hay ciertos límites, ciertos parámetros. Estos parámetros no deben ser interpretados como un yugo sino como condiciones de posibilidad para el enriquecimiento del sujeto y para brindarle un marco donde pueda desarrollar de manera más plena y transformadora su subjetividad.

Las relaciones de poder devienen necesariamente de los roles establecidos en el aula. Ahondar en estos roles va a colaborar en la caracterización de la polemización. Para esclarecer un poco esto, va a ser necesario hacer un análisis más detallado de los roles tanto de los alumnos como del saber y el docente. Vamos a considerar algunos modelos que pueden inscribirse en los diversos enfoques teóricos sobre educación matemática (Pochulu y Rodríguez, 2012).

Algunos modelos, generalmente los más tradicionales, proponen una relación entre el docente y el alumno mediada por el saber.

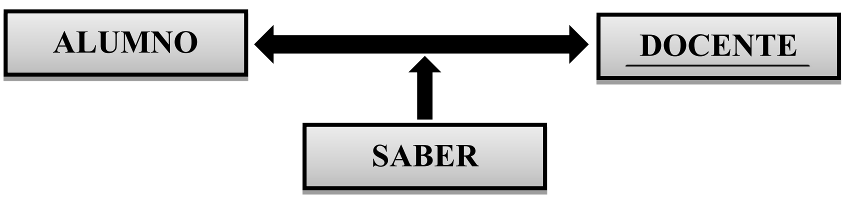


Figura 1. Modelo tradicional

Hay otros modelos posteriores, como el aproximativo, que promueve al docente como un mediador entre el saber y el alumno. Un esquema que podría ser apropiado sería el siguiente:

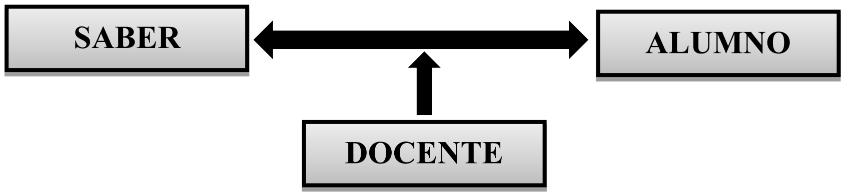


Figura 2. Modelo aproximativo

Con la polemización se quiere radicalizar el esquema, y proponer al saber como el mediador entre los alumnos. El docente, en ese caso, es el que media la mediación que está ejerciendo ese saber entre los alumnos, es decir, es el mediador de la mediación.

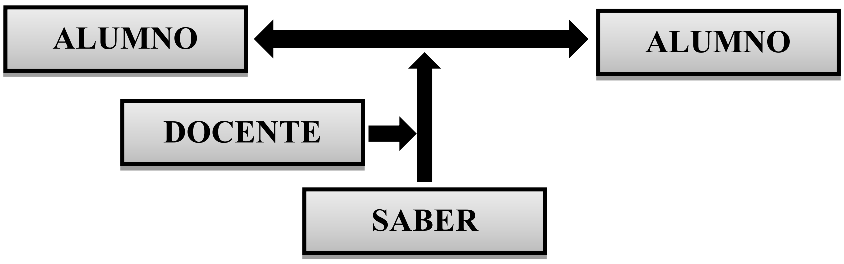


Figura 3. Modelo de polemización

Aquí se representa al docente mediando la mediación del saber entre los alumnos. Si el saber está mediando incorrectamente (por ejemplo, a través de un cálculo erróneo de porcentaje) el docente es el encargado de –por medio de la estrategia que crea más apropiada para el momento- restituir la mediación del saber para que la polémica no degenere en opinión.

Queremos destacar que, si bien el saber es un mediador, la polemización no necesariamente se centra explícitamente en ese saber. En el caso de los zapatos, lo central es la decisión, y si bien se hace un uso del saber, el cálculo de porcentajes no agota la situación, sino que la misma está sustentada por características propias de los sujetos que intervienen y su visión del mundo. Podemos decir entonces que con la polemización, más que construir el saber, los alumnos relativizan y subjetivan al saber.

A modo dialéctico, la dinamización que otorga la polemización dentro del aula conlleva a que nos preguntemos acerca de la validación y la gestión de la verdad.

7. Polemización y verdad

> La verdad es de este mundo, se produce en él gracias a múltiples coacciones. Y detenta en él efectos reguladores de poder. Cada régimen tiene su "política general" de la verdad: es decir, los tipos de discursos que acoge y hace funcionar como verdaderos o falsos, el modo como se sancionan unos a otros, las técnicas y los procedimientos que están valorizados para la obtención de la verdad; el estatuto de quienes están a cargo de decir lo que funciona como verdadero (Foucault, 2000, p. 11)

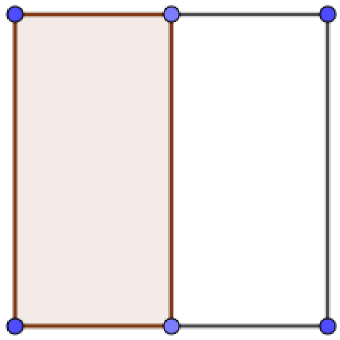
Citamos éste párrafo porque creemos necesario esclarecer qué nociones de verdad estamos manejando. Estamos pensando en este caso al aula como una sociedad con un régimen de verdad establecido. Utilizando el lenguaje de Foucault, creemos que actualmente el "estatuto" determina que el docente es el único autorizado para determinar qué funciona como verdadero y qué no. Éste régimen de verdad no es espontáneo: obedece a un modelo de educación sistemático y a un mandato social e histórico. Con la polemización estamos proponiendo un régimen de verdad alternativo donde los alumnos tienen un papel decisivo en la *gestión* de la verdad en el aula, y, bajo ciertos parámetros regidos por el saber, son ellos los responsables de determinar lo que funciona como verdadero.

Por eso recalcamos que la polemización no depende únicamente de la existencia de una situación polémica, sino que es un posicionamiento frente a las relaciones de saber-poder y verdad dentro del aula. Reafirmamos que, para permitir este juego, por un lado es necesario un saber problematizado, inacabado, dialéctico, donde el sujeto pueda encontrar intersticios, tensiones, tonalidades, donde pueda definir y definirse certezas, incertidumbres, problemáticas; y por otro lado también vemos la necesidad de que esa relación con el saber pueda materializarse, explayarse, en una sociedad que es el aula donde tenga la posibilidad de gestionar la verdad a través de su relación personal con el saber, de su propia síntesis.

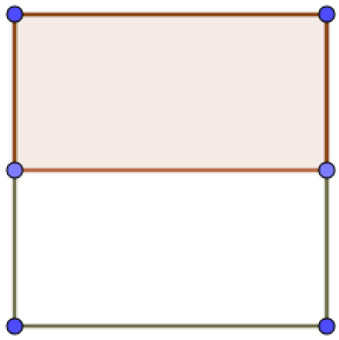
Así como la *problematización* es un posicionamiento y una actividad del docente frente al saber, la *polemización* es un posicionamiento y una actividad vinculada a la verdad en la relación del alumno y el saber.

8. A modo de cierre

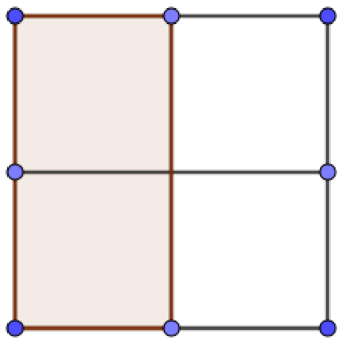
A partir de un cuadrado, representar de formas distintas a las ya hechas, la fracción 1/2. Justifique por qué su representación es distinta.



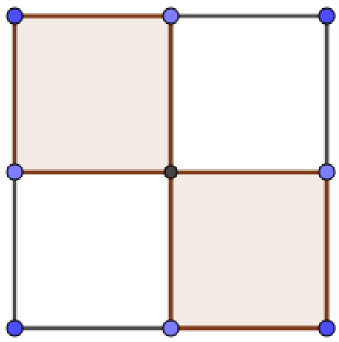
Cuadrado 1



Cuadrado 2



Cuadrado 3



Cuadrado 4

Los que mostramos aquí son 4 de todos los cuadrados que se pintaron en el pizarrón. Los alumnos pasaron a participar de a uno por vez, y una vez concluida la actividad, se suscita la discusión cuando tienen que copiar en sus carpetas las propuestas de todos.

Alumno 1: "El 1 y el 3 son iguales"

Alumno 2: "No son iguales… en el 1 el cuadrado está dividido en 2 partes, y el 3 está divido en 4 partes"

Alumno 1: "Pero es la misma posición"

Alumno 3: "El 1 y el 2 también son iguales, si girás el 1 llegás al 2"

Alumno 1: "No… no está girado"

La discusión continúa dentro de esos términos y queda a criterio de los alumnos copiar en sus cuadernos aquellos cuadrados que les parecía cumplían con lo pedido.

¿Por qué consideramos este ejemplo? Esta actividad se llevó a cabo con un grupo de alumnos de 6° grado de nivel primario. Reconocemos en lo que pasó en esa clase los rasgos propios de una polémica. En primer lugar, la corrección en el uso de un saber (el tema era fracciones equivalentes). En segundo lugar, la aparición de posicionamientos antagónicos entre estudiantes. En tercer lugar, la dimensión subjetiva que cada opinión permite translucir, pensando en la manera en que cada alumno dimensiona el espacio en el que dibuja. ¿Es un espacio abstracto euclídeo o es un espacio físico y concreto? Hay una racionalidad sostenida en referencias que pueden estar o no, que pueden sostenerse en lo posicional o en la cantidad de partes en que se divide el objeto. En este caso la *representación* de fracciones es lo que abre el juego a distintas racionalidades, así como en el primer ejemplo lo era la *conveniencia*. Es interesante señalar que el cuadrado 4 no generó discusión, todos lo aceptaron como una representación distinta, revelando de esta forma qué era lo que tensionaba en los casos anteriores. Por último, podemos señalar que el docente - al ver que el concepto de fracciones equivalentes estaba afianzado - permitió que sea ese saber el que mediara la discusión, sin intervenir en la definición sobre las diferencias o no de las distintas propuestas, no pretendiendo imponer una racionalidad en particular sobre las otras.

Los dos ejemplos compartidos refieren a situaciones polémicas, pero como dijimos anteriormente la polemización se define como un proceso continuo y consciente y no únicamente como un momento puntual o específico. Particularmente implica una movilización de los roles dentro de la clase, donde el docente acepta ceder su lugar como único gestor de la verdad en pos de que la misma sea compartida socialmente por el colectivo de estudiantes.

Entendemos que hablar de polemización implica necesariamente reconocer a un alumno como un sujeto con la capacidad de validar un saber escolar. Al reconocerlo y reconocerse en este nuevo esquema de roles, el alumno conquista al espacio del aula como propio y al saber como algo personal. Podemos hablar entonces en términos de *empoderamiento* en el sentido en que se entiende el empoderamiento docente (Reyes, 2016). El empoderamiento del estudiante puede resumirse entonces en esta capacidad de relativizar y subjetivar el saber, a través del proceso de gestionar verdades y de socializar su síntesis personal con el conocimiento, lo que reconfigura a la práctica escolar como práctica social, en el sentido de Cantoral, Montiel y Reyes (2015).

Bibliografía

Bell, E. T. (2014). *Historia de las matemáticas.* México: Fondo de Cultura Económica.

Berlinsky, D. (2005). *Ascenso infinito. Breve historia de la matemática*. Barcelona: Editorial Debate

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* México: Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 5-17.

Farfán, R. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente*. Barcelona, España: Gedisa.

Foucault, M. (2000). *Un diálogo sobre el poder y otras conversaciones*. Madrid: Alianza.

Kasner, E. y Newman, J. (1985). *Matemática e imaginación*. Madrid: Hyspamerica.

Lezama, J. y Mariscal, E. (2008). Docencia en matemáticas: hacia un modelo del profesor desde la perspectiva socioepistemológica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp. 889-900). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* Buenos Aires: Universidad Nacional General Sarmiento.

Reyes, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas.* México: Gedisa.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, México.

Silva–Crocci, H. y Cordero, F. (2012). Matemática Educativa, identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento matemático disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(3), 295–318

Autores:

Iván Vladimir Tomeo Amigo: Estudiante del Profesorado en Matemática del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (CABA, Argentina). Miembro del grupo Conjetura. Ha participado en congresos, y ha dictado talleres para estudiantes de profesorado. Autor de artículos del campo de la matemática educativa. Actualmente se desempeña como docente de nivel primario.
Nicolás Blamos: Estudiante del Profesorado en Matemática del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (CABA, Argentina). Miembro del grupo Conjetura. Ha participado en congresos, y ha dictado talleres para estudiantes de profesorado. Autor de artículos del campo de la matemática educativa. Actualmente se desempeña como docente de nivel secundario.
Patricia Lestón: Profesora de Matemática y Astronomía, Maestra y Doctora en Ciencias especialidad Matemática Educativa. Ha participado en congresos y reuniones de matemática educativa. Ha publicado en diversas revistas y Actas. Miembro de CLAME y SOAREM, así como del Grupo Conjetura. Actualmente se desempeña como Profesora de nivel secundario y superior del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (CABA, Argentina). patricialeston@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 92-112

El Teorema de Pitágoras, un problema abierto

Manuel Barrantes López, María Consuelo Barrantes Masot,
Victor Zamora Rodríguez, Álvaro Noé Mejía López

Fecha de recepción: 06/11/2018
Fecha de aceptación: 20/12/2018

Resumen	El Teorema de Pitágoras tiene un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. Dentro de sus muchas aplicaciones intentamos resaltar el interés didáctico de dicha proposición en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y en particular de la Geometría. Se aborda su estudio desde el punto de vista histórico y su demostración como un problema abierto, accesible y motivante, mediante la utilización de recursos y materiales apropiados como son los puzles pitagóricos. El estudio se completa con la utilización de software libre de geometría dinámica en la construcción de las demostraciones. Para ello presentamos un muestrario de construcciones dinámicas diseñadas con GeoGebra, que complementan la utilización de los puzles pitagóricos para la prueba de dicho teorema. **Palabras claves**: Pitágoras, demostración, problema abierto, geometría dinámica.
Abstract	The Pythagorean theorem has a fundamental role in the development of mathematics. Among its many applications we try to stand out the didactic interest of this proposition in the teaching and learning of mathematics, and in particular the geometry. Its study is approached from the historical point of view and its demonstration as an open, accessible and motivating problem, through the use of resources and appropriate materials such as Pythagorean puzzles. The study is completed with the use of free software of dynamic geometry in the construction of demonstrations. For this we present a sample of dynamic constructions designed with GeoGebra, which complement the use of Pythagorean puzzles for the proof of that theorem. **Key words**: Pythagoras, proof, open problem, Dynamic Geometry.
Resumo	O teorema de Pitágoras tem um papel fundamental no desenvolvimento da matemática. Entre muitas das suas aplicações, procuramos destacar o interesse didático dessa proposição no ensino e aprendizagem da matemática e, em particular, da geometria. O seu estudo é abordado numa perspectiva históricae a sua demonstração como um problema aberto, acessível e motivador, usando recursos e materiais apropriados, como os puzzles pitagóricos. Em suplemento ao estudo, apresenta-se um conjunto de demonstrações construídas através de um software livre de geometria dinâmica (GeoGebra), que complementa o uso dos puzzles pitagóricos para a prova deste teorema. **Palavras-chave:** Pitágoras, prova, problema aberto, geometria dinâmica.

Introducción

El Teorema de Pitágoras ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. Y, aunque muchas son sus aplicaciones, nuestro enfoque intenta resaltar el interés didáctico de dicha proposición en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, y en particular de la Geometría.

Por una parte, su estudio puede ser abordado desde el punto de vista histórico o puede ser tratado como un problema abierto, accesible a los alumnos y a la vez motivante, mediante la utilización de recursos y materiales apropiados como son los puzles pitagóricos. El teorema también se puede extender, con el uso de los puzles, a los casos en los que los lados del triángulo no son lados de cuadrados sino lados de otras figuras geométricas.

Por otra, ampliamos este estudio mediante la utilización de software libre de geometría dinámica. Para la prueba de dicho teorema, hemos elaborado un muestrario de construcciones dinámicas diseñadas con GeoGebra, que complementan la utilización de los puzles pitagóricos.

Los alumnos, mediante estas propuestas, no sólo profundizaran en el conocimiento de la proposición pitagórica, sino que, además, las actividades darán lugar a que tengan que realizar: reconocimiento de figuras geométricas, cálculos de áreas, semejanzas, lógica matemática, cálculos y desarrollos numéricos u otros contenidos que puedan surgir en la realización de las tareas; por ejemplo, en la última fase, los alumnos pueden adquirir un buen manejo de GeoGebra.

Las distintas sugerencias van dirigidas a profesores de Secundaria. Encontraremos actividades adecuadas para alumnos, en las que se puede tener un contacto con la proposición de manera empírica o informal; sugerimos demostraciones formales y resultados al alcance de los alumnos y otras actividades dirigidas a estudiantes para profesores y enseñantes en general, orientadas a reconocer la importancia que tiene dicha proposición no sólo en la Didáctica de la Geometría, sino en relación con otras áreas de las Matemáticas. Cada uno, como profesional de la enseñanza, deberá escoger lo más adecuado al nivel de su interés.

1- La proposición pitagórica y la historia.

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

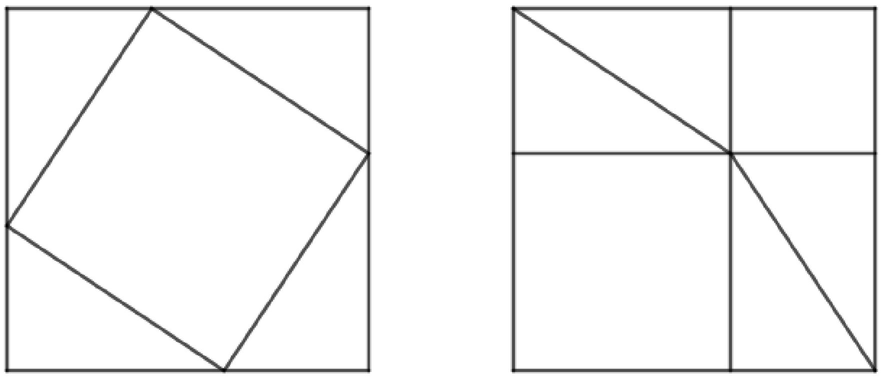
Esta celebre proposición, conocida como el Teorema de Pitágoras, la proposición pitagórica o la proposición 47 del primer libro de los Elementos de Euclides, ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. Y, aunque muchas son sus aplicaciones en este campo, nuestro trabajo va orientado principalmente a resaltar el interés didáctico de dicha proposición en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y en particular de la Geometría.

No es nada nuevo afirmar que la introducción de la historia de las matemáticas en las actividades del aula enriquece bastante la enseñanza de esta materia. Una directa aproximación al aprovechamiento matemático se puede conseguir proponiendo al alumnado diferentes demostraciones clásicas de la proposición o problemas relacionados con ella, transportando a éstos a la época en las que fueron realizadas. Para ello, además de comentar la biografía del autor, diferentes autores (Bergua, 1958; Clark, 1986; Laing, 1989; Nelsen, 1993; Rosenthal,1994; Schuré, 1995; Ericksen, Stasiuk, y Frank 1995; Savora, 1996; Caniff, 1997; Barrantes, 1998, Strathern, 1999; González, 2001, 2008) tratan de estudiar o conocer la vida de Pitágoras y los pitagóricos presentando diferentes demostraciones de la proposición a lo largo de la historia, que son curiosas o pertenecen a algún matemático conocido; así como las repercusiones y aplicaciones de dicha proposición para el avance de las Matemáticas.

También muchas otras demostraciones y pruebas pueden encontrarse en la extensa bibliografía que existe sobre este tema, de la que podríamos resaltar los artículos de Yanney y Calderhead (1896, 1897, 1898, 1899) y un número suficientes de páginas web que se indican en la webgrafía final. Sin embargo, Loomis (1968) es una fuente importante en las que podemos encontrar información acerca de las distintas demostraciones del Teorema de Pitágoras. En éste se presentan 370 pruebas o demostraciones con sus correspondientes figuras realizadas de forma artesanal y sus demostraciones formales.

Es bien destacado que la traducción de la tablilla de arcilla babilonia Plimpton 322 nos muestra que el teorema era bien conocido por los matemáticos babilonios muchos siglos antes de que naciera Pitágoras (Gillings, 1972,); similar afirmación realiza Eves (1976, p. 62), aunque matizando que ... *la primera prueba general podría deberse a Pitágoras*, prueba respecto a la cual, este autor, conjetura que podría ser del tipo de disección, similar a la de la figura 1.

Esta demostración es muy fácil de realizar, recortando y colocando las figuras de los dos cuadrados de los catetos y de la hipotenusa adecuadamente, para que los alumnos observen que se cumple la proposición pitagórica. Flores (1992) realiza esta demostración, de una manera más formal, mediante el cálculo de las áreas de las figuras correspondientes de los dos cuadrados e igualación de las áreas totales.



Figuras 1 y 2. ¿Demostración original de los pitagóricos?

Para ilustrar que la proposición era conocida por geómetras anteriores a los pitagóricos, sería estimulante que el profesor trabajara con la demostración atribuida al hindú Bhaskara que nos muestra Loomis (1968) con el número 353.Dicha demostración también está recogida en la relación de pruebas del teorema realizadas con puzles (ejemplo 3) y GeoGebra, de las que hablaremos más adelante.

Por último, citar a Meavilla (1989), que incluye la demostración del matemático árabe del siglo IX Thabit Ibn Qurra. Se ofrece una sucesión de figuras en las que determinados elementos cambian de forma, se dividen, se desplazan y dan lugar a nuevas configuraciones mediante las cuales el alumno descubre la proposición, como si estuviera viendo un comic sin palabras. La demostración de Thabit Ibn Qurra también la hemos realizado mediante un puzle de tres piezas y con GeoGebra, como veremos posteriormente.

2- El teorema de Pitágoras y la metodología de laboratorio.

De todos es sabido que los materiales didácticos representan un papel muy importante en la enseñanza/aprendizaje de la Geometría en todos los niveles. Su correcta utilización, así como las actividades adecuadas para cada nivel, posibilitan que los alumnos adquieran conceptos, establezcan relaciones y conozcan diferentes métodos geométricos de acuerdo con su evolución intelectual.

Los materiales y actividades que presentamos no están orientados solamente a los alumnos de Educación Secundaria, sino también a los estudiantes para profesores (EPPs). Creemos que, si nuestro objetivo es plantear una metodología activa en nuestras aulas y que los EPPs se conciencien de ello, los profesores debemos ser los primeros en asumir ese tipo de metodología. En esta línea, en Barrantes y Barrantes (2017) se presenta una forma distinta de trabajar la didáctica de la Geometría basada en la idea de laboratorio, entendida como la oportunidad de experimentar y forma de producción propiciadora de las actividades de investigación.

Sería conveniente analizar los problemas aburridos y estériles que planteamos a los alumnos, debido a la serie de restricciones que se imponen absurdamente a dichos problemas, con las que solamente se consigue delimitar sus posibilidades. En el caso de la propiedad pitagórica, las actividades de aula, muchas veces, quedan reducidas a: comprobar si varias ternas de cuadrados cumplen la propiedad; realizar la demostración cuadriculando los cuadrados de los catetos y la hipotenusa y a la aplicación o realización de ejercicios numéricos con unas técnicas de resolución prefijadas.

Sin embargo, el teorema de Pitágoras puede ser presentado y trabajado como una situación abierta que admite muchas más posibilidades y formas de trabajo que, a su vez, dan lugar a nuevas cuestiones que predisponen a los alumnos para conocer nuevos conceptos y concebir el teorema desde una perspectiva más amplia y enriquecedora.

Los puzles de madera son un material con el que se pueden hacer una serie de actividades que trabajan, de forma motivadora, la propiedad pitagórica como un problema abierto accesible a los alumnos y motivante, en el sentido de que todos quieren manipularlos para resolver el problema. Los puzles pueden ser de un grosor aproximado de un centímetro y, atendiendo a las actividades que podíamos realizar con ellos, se pueden clasificar en tres tipos diferentes:

- Puzles que proponen diferentes demostraciones de la propiedad pitagórica.

- Puzles que amplían el teorema de Pitágoras a casos en los que los lados del triángulo no son solamente lados de cuadrados.

- Puzles que verifican que la propiedad pitagórica se puede seguir cumpliendo incluso cuando el triángulo no sea rectángulo, bajo ciertas condiciones que hay que precisar.

Estos materiales se diseñan para que sean los alumnos quienes los descubran, identifiquen las relaciones entre las diferentes figuras, y construyan sus propias demostraciones.

Describimos a continuación algunos de estos puzles, así como las actividades que se pueden realizar con ellos.

3- Puzles que proponen diferentes demostraciones de la propiedad pitagórica.

De estos puzles describiremos tres que, atendiendo al número de piezas de las que constan los llamaremos puzles de seis piezas, puzles de cinco piezas y puzles de tres piezas. Sin embargo, los alumnos pueden construir sus propios puzles, para ello basta con que las piezas seccionadas en los cuadrados de los catetos encajen en el cuadrado de la hipotenusa (Barrantes, 1998)

3.1. Puzle de seis piezas.

Éste consta de seis piezas de madera (fig. 3) que son: un triángulo rectángulo, tres cuadrados de lados los catetos y la hipotenusa del triángulo respectivamente, un paralelogramo de lados el cateto menor y la hipotenusa, y un paralelogramo de lados el cateto mayor y la hipotenusa.


Figuras 3 y 4. Puzle de seis piezas

Las actividades van encaminadas a que el alumno observe que las áreas de los dos paralelogramos son iguales a las áreas de los dos cuadrados menores, con lo que la demostración es inmediata mediante las colocaciones siguientes:

A.1- Se colocan los tres cuadrados y el triángulo sobre la caja base (figura 4).

A.2- Se colocan los dos cuadrados mayores, el triángulo, y el paralelogramo menor en la caja base (figura 5).El alumno debe relacionar el área del paralelogramo y el del cuadrado menor.


Figuras 5 y 6. Puzle de seis piezas

A.3- Se coloca en la caja el triángulo, el cuadrado mayor, el cuadrado menor y el paralelogramo mayor. Igualmente, el alumno debe relacionar el área del paralelogramo mayor y del cuadrado mediano (figura 6).

A.4- Por último, se coloca en la caja el triángulo, los dos paralelogramos y los dos cuadrados pequeño y mediano y se debe relacionar el área de los dos paralelogramos con el área del cuadrado mayor (figura 7).

A.5- Así pues, la última actividad de los alumnos será extraer una conclusión general de las actividades anteriores que relacione las áreas de los tres cuadrados.

Figura 7. Puzle de seis piezas

Los alumnos deben llegar a la conclusión de que el área de cada paralelogramo coincide con las áreas de los cuadrados sobre los catetos y que como el área de los dos paralelogramos juntos coincide con la del cuadrado mayor se cumple el teorema de Pitágoras.

3.2. Puzle de cinco piezas.

Las cinco piezas de las que consta este puzles son dos triángulos rectángulos iguales y tres cuadrados de lados, respectivamente, iguales a los catetos y la hipotenusa de los triángulos rectángulos. Como base se utilizan dos cuadriláteros (fig.8) de lado mayor la suma de las diagonales de los dos cuadrados menores y los otros tres lados son iguales a los lados del triángulo rectángulo.

Figura 8. Puzle de cinco piezas

Figuras 9 y 10. Puzle de cinco piezas

La demostración con este puzle es más intuitiva que con el anterior pues consiste en cubrir primeramente la base con los dos triángulos y los dos cuadrados menores (catetos), y posteriormente con los dos triángulos y el cuadrado mayor (hipotenusa) (figuras 9 y 10). Como en las dos actividades cubrimos el misma área queda demostrado que la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos será igual al área del cuadrado de la hipotenusa.


Figuras 11 y 12. Puzle de tres piezas.

3.3. Puzle de tres piezas.

Las piezas de este puzle son dos triángulos rectángulos iguales y una pieza pentagonal (fig.11) que junto con los dos triángulos encajan perfectamente en una caja que equivale a los dos cuadrados de los catetos del triángulo rectángulo. En este caso, la demostración consiste en formar con las tres piezas primeramente los dos cuadrados de los catetos, es decir, colocar las piezas en la caja, y después, sacando las piezas de la caja, formar el cuadrado de la hipotenusa (figura 12).

Este puzle es atribuido por Meavilla (1989) a Thabit Ibn Qurra. Su principal curiosidad radica en que es el puzle de menor número de piezas que nos permite mostrar la propiedad pitagórica. Su demostración también aparece en el estudio posterior que veremos sobre las pruebas de teorema mediante GeoGebra.

4. Puzles que amplían el teorema de Pitágoras a casos en los que los lados del triángulo no son solamente lados de cuadrados.

Se puede ampliar la proposición a los casos en los que los lados del triángulo no son lados de cuadrados sino lados de otras figuras geométricas. Esto es, la propiedad pitagórica no es valida únicamente para los cuadrados de lados los catetos y la hipotenusa, sino para cualquier polígono construido sobre los lados del triángulo rectángulo, siempre que los tres polígonos, así construidos, sean semejantes entre sí. En efecto, como la relación de superficies entre figuras semejantes solo depende del cuadrado de uno de sus lados, las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los lados se van a poder expresar como kb^2, ka^2, kc^2, donde el valor de k va a depender de la forma de la figura.

Si las figuras son semejantes se va a verificar que

$$kb^2 + ka^2 = kc^2$$

donde a, b, y c son los catetos e hipotenusa, respectivamente, del triángulo rectángulo. Para mostrar esta generalización al caso de triángulos hemos construido unos puzles de tres piezas: un triángulo rectángulo y los dos triángulos que se obtienen al dividir el primero por la altura (fig. 13).

Figuras 13 y 14. Puzle triángulos para la generalización del teorema

Evidentemente los tres triángulos son semejantes (fig. 14) pues basta colocarlos en posición de Thales (dos lados de uno contienen respectivamente a dos lados del otro triángulo y el tercer lado del primero es paralelo al tercer lado del otro) y, además, superponiendo los dos pequeños (catetos) sobre el grande (hipotenusa), por construcción, la suma de las áreas de los dos menores es igual al área del mayor con lo que se cumple la generalización del teorema para dichos triángulos (fig. 15 y 16).

Figuras 15 y 16. Triángulos sobre los catetos y sobre la hipotenusa para la generalización del teorema.

Basándonos en esta generalización, en Barrantes (1998) se muestran diversos puzles (fig.17 a la fig. 20) donde los polígonos: triángulos, cuadrados, trapecios y octógonos construidos sobre los catetos han sido troceados en piezas. El alumno deberá trasladar estas piezas para comprobar que la suma de dichas áreas coincide con el área del polígono construido sobre la hipotenusa y viceversa, probando así la generalización.

Posteriormente, el alumno puede diseñar sus propios puzles sobre geoplanos, mallas cuadradas o triangulares, y construirlos después sobre cartón, madera fina o gruesa, obteniendo así sus particulares demostraciones de la generalización del teorema. Podemos hacerles observar que si nos fijamos solamente en los casos de los cuadrados obtenemos como caso particular el Teorema de Pitágoras conocido por todos (fig.18).

La generalización de la propiedad no es sólo para polígonos, sino para figuras cualesquiera que verifiquen la condición de semejanza. Así pues, los alumnos pueden comprobar que se verifica para semicírculos, cuartos de círculos, segmentos o sectores circulares.

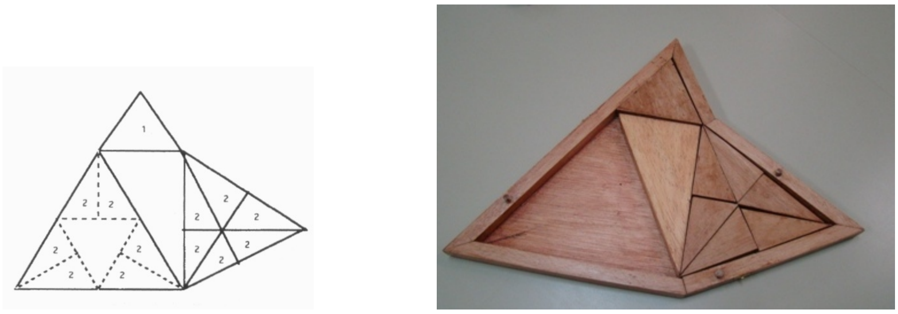


Figura 17. Puzle triangular

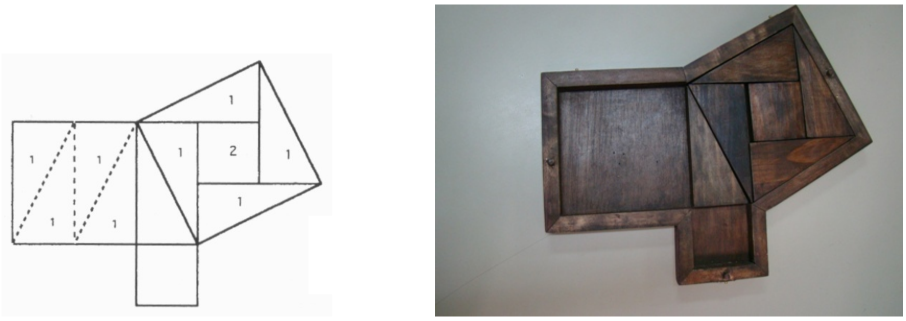


Figura 18. Puzle cuadrado

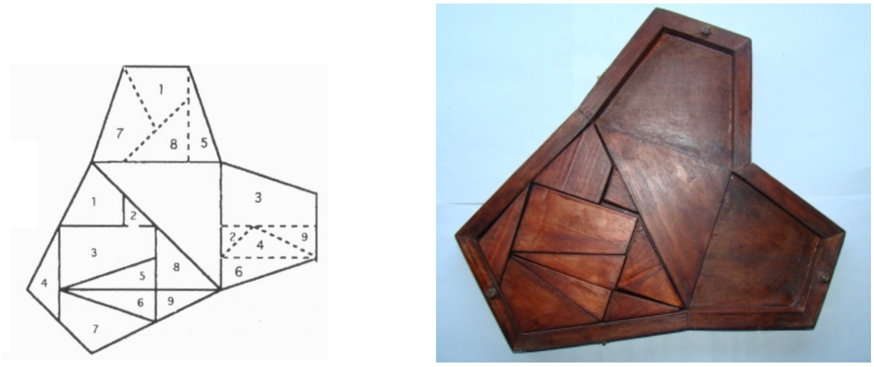


Figura I9. Puzle trapecios

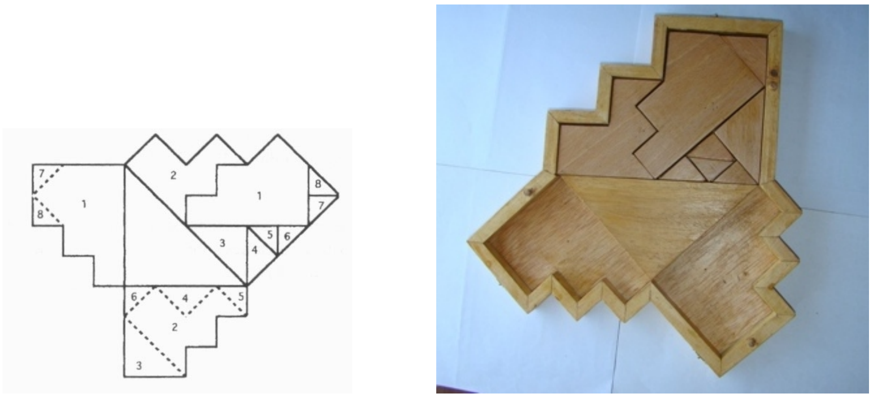
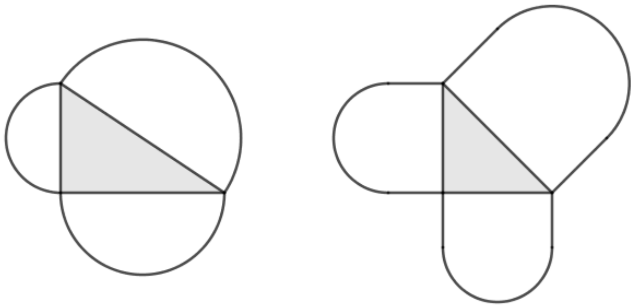


Figura 20. Puzle octógono irregular

En este caso, como el troceado en puzles ya no es posible, podemos calcular las áreas de dichas figuras derivadas del círculo. De esta forma, las actividades consistirían en construir estas figuras sobre los catetos y la hipotenusa, verificando bajo qué condiciones se sigue cumpliendo la propiedad pitagórica (fig. 21).

A partir de aquí, surge un tipo de actividades que llamamos de figuras mixtas en las que se conjugan formas poligonales con formas circulares. En este tipo de actividades, surgen figuras geométricas muy creativas y originales, sobre los lados del triángulo rectángulo, que amplían la propiedad pitagórica una vez más (fig. 22).



Figuras 21 y 22. Generalización a figuras con lados curvos

Cuando los alumnos han manejado suficientemente los materiales, podemos formalizar la generalización, como se hace en Zárate (1996) y Vasquez (2012) en donde se demuestra la ampliación a: triángulos equiláteros, semicírculos, rectángulos semejantes y el teorema general para toda terna de figuras semejantes trazadas sobre los lados de un triángulo rectángulo. Todas estas demostraciones son sencillas y adecuadas para los niveles de Secundaria.

5. Ampliación a triángulos no rectángulos

Otro camino posible a seguir es la generalización del teorema de Pitágoras a triángulos cualesquiera mediante el teorema de Pappus.

Dicho teorema afirma:

Dado un triángulo cualquiera (fig. 22), construimos dos paralelogramos p1 y p2 cualesquiera sobre los lados de un ángulo A que llama ángulo base. Consideramos el segmento H, cuyos extremos son el vértice A y la intersección de las rectas que contienen a los lados Ll y L2 de los paralelogramos pl y p2. Si construimos sobre el lado opuesto a A un paralelogramo p3 con lados paralelos y congruentes a H entonces la suma de las áreas de p1 y p2 es igual al área del paralelogramo p3, es decir:

área p1 + área p2 = área p3

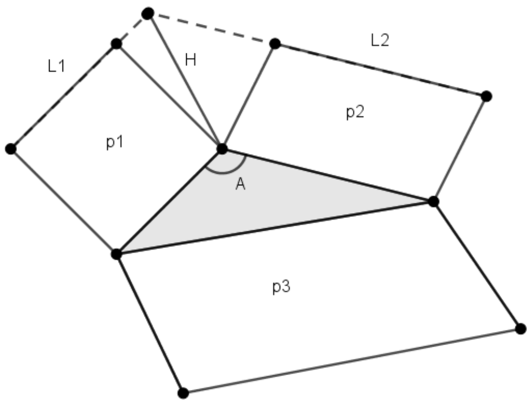


Figura 22. Teorema de Pappus

Para probar esta propiedad, se pueden construir puzles sobre mallas cuadradas teniendo en cuenta las hipótesis del teorema, o bien mostrar a los alumnos los puzles ya construidos (figuras 23 y 24) y que éstos extraigan las condiciones bajo las que se vuelve a verificar la propiedad pitagórica.

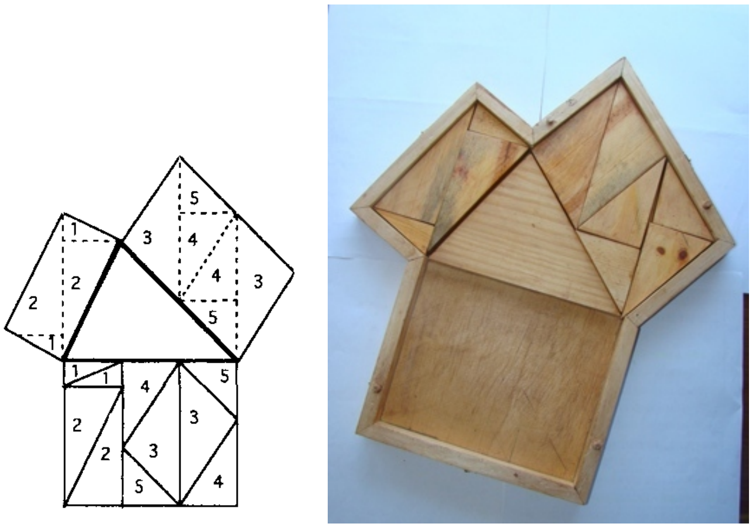
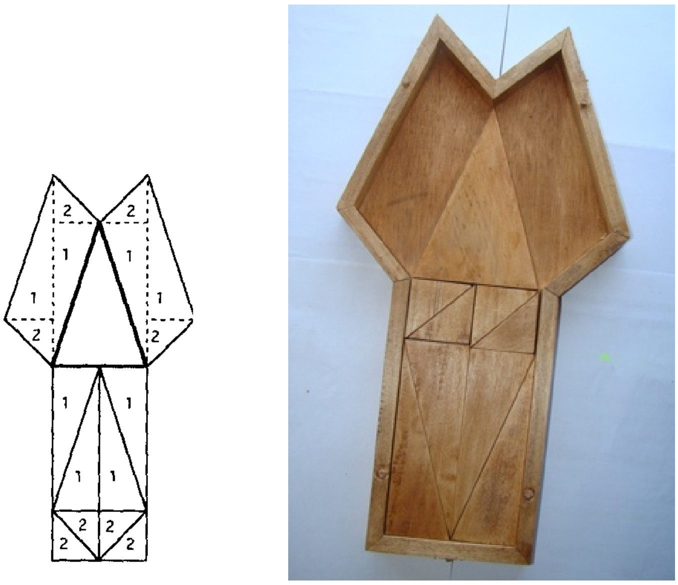


Figura 23. Puzle de Pappus



. **Figura 24. Puzle de Pappus**

La demostración formal de esta generalización aparece en Flores (1992) y en Loomis (1968) y está basada en congruencias de paralelogramos. Por su simplicidad puede ser, también, revisada por los alumnos de Secundaria.

Para concluir este apartado, es interesante resaltar que, con las actividades anteriormente mencionadas, el alumno no sólo trabaja la propiedad pitagórica, sino que además interioriza y refuerza otros contenidos geométricos como son: el conocimiento de las diferentes figuras geométricas que tiene que manejar, la noción o el cálculo de áreas, la semejanza y sus propiedades, y otros conceptos o nociones geométricas que pueden surgir en la realización de las actividades prácticas y teóricas.

6- El teorema de Pitágoras y el software de Geometría Dinámica

La geometría dinámica la entendemos como un ambiente computacional de construcción geométrica, basado en la geometría euclidiana. Este recurso se fundamenta en la tecnología y las herramientas que nos proporciona, ya que a través de ellas podemos movilizar las figuras geométricas para que adquieran dinamismo (Cabrera y Campistrous, 2007) como anteriormente hemos hecho con los puzles.

Así pues, las tecnologías proporcionan herramientas que pueden ayudar, potenciar y hacer evolucionar de un modo provocador la enseñanza de la geometría. Los procesadores geométricos han sido el primer paso en esa dirección (Costa, 2001). Un procesador de geometría dinámica es todo software que permite dibujar figuras en función de sus relaciones geométricas, y no de su apariencia. Sus construcciones son dinámicas, es decir, permiten interactuar (mover, modificar,) con las construcciones realizadas, haciendo que las relaciones geométricas se mantengan.

Con esta concepción de la enseñanza de la geometría, se evitan las figuras rígidas que se corresponden con una única forma de representación y se apuesta por que los alumnos se hagan una idea general de las figuras y que puedan comprender las propiedades geométricas, mediante un gran número de representaciones. Los softwares de geometría dinámica sirven de plataforma para que los profesores incursionen en este campo de las matemáticas y se potencian las posibilidades de representación y dinamismo (López, Alejo y Escalante, 2013). Con el paso del tiempo han surgido una gran variedad de procesadores con funcionalidades propias de la geometría clásica de los que nosotros hemos seleccionado GeoGebra.

GeoGebra es un software libre y de acceso abierto con una estética muy accesible y atractiva y un lenguaje adecuado para los dicentes. El uso de GeoGebra, a través de la guía del profesor y las experiencias de aprendizaje que suministra, permite generar experiencias de aprendizaje en las que los alumnos se pregunten el por qué, y el qué sucedería frente a ciertos hechos geométricos, aportando una oportunidad para que éstos tengan una completa apreciación de la naturaleza y el propósito de la demostración matemática.

Así pues, hemos realizado una investigación para implementar, las demostraciones del teorema de Pitágoras que hemos construido en los puzles (vistas anteriormente) y algunas más, mediante GeoGebra de forma que tengamos un recurso más para trabajar el Teorema de Pitágoras.

El proyecto se realizó en dos fases. La primera fase fue de revisión de demostraciones, además de las que teníamos, con la finalidad de buscar las adecuadas a los diferentes niveles educativos de la Secundaria. Para ello se revisaron textos, artículos y páginas de internet, algunas de las cuales se citan en las referencias y la webgrafía de este artículo. La segunda fase fue útil principalmente para realizar la selección definitiva de las demostraciones y para ir perfilando su clasificación. La formación de las variables (nivel educativo y tipo de demostración: geométrica y algebraica) fue un proceso que se sustentó en la revisión bibliográfica realizada, así como en los objetivos de la investigación.

Dentro de la extensa revisión, el texto de Loomis (1968) ha servido como guía principal junto a las demostraciones encontradas en Internet y en el repositorio de materiales de la página oficial de GeoGebra (ver webgrafía). Al igual que en la primera parte de este artículo, en este apartado también se han tenido en cuenta aquellas demostraciones de matemáticos famosos a lo largo de la historia, y que han causado un impacto en el campo de las matemáticas.

En esta parte de la investigación, la presentación se hace mediante una ficha en la que se incluye: imágenes de GeoGebra de la demostración correspondiente, el procedimiento generalizado utilizado para su construcción, una explicación justificativa y la demostración formal, como veremos posteriormente en los ejemplos.

La codificación de las construcciones dinámicas se realizó en base a las variables Así, los dígitos corresponden: El primero, enumeración de las pruebas en un orden ascendente. El segundo asigna un I o II si la prueba es geométrica o algebraica. El tercero es el nivel académico A, B y C para los contenidos de 1º, 2º y 4º de la ESO, respectivamente.

GEOMÉTRICAS		ALGEBRAICAS
1º ESO	2º ESO	4º ESO
1.Puzle1: Hipotenusa/cateto menor = 3	7.Euclides	19.Bashkara
2.Puzle 2: 30º ≤ A ≤60º y 30 º≤ B ≤ 60º	8.Liu Hui	20.Chou-Pei-Suan
3.Puzle 3: Cateto mayor/cateto menor = 2	9.Platón	21.Pappus
4.Puzle 4: Triángulo rectángulo isósceles	10.Dobriner	22.Vieta
5.Puzle 5: Lados 3, 4 y 5	11.Perigal	23.Garfield
6.Caso Particular (Loomis 4)	12.Ozanam	24.Leonardo da Vinci
	13.J. Adams	25.H. Boad
	14.Hoffmann	26.Loomis 108
	15.Loomis 2	27.Thâbit IbnQurra (a)
	16.Loomis 26	28.Thâbit IbnQurra (b)
	17.Poo-Sung-Park	
	18.A. G. Samosvat	

Cuadro 1. Demostraciones estudiadas del Teorema de Pitágoras

En el estudio general seleccionamos un total de 97 construcciones de las cuales hemos escogido 28 demostraciones del Teorema de Pitágoras, realizadas con GeoGebra, como podemos ver en el cuadro 1.

En dicho cuadro aparecen 6 pruebas dirigidas a 1º ESO (son básicamente pruebas puzles). Las 12 pruebas geométricas dirigidas a 2º ESO y las 10 pruebas algebraicas de 4º ESO, son pruebas realizadas por matemáticos célebres o personalidades de otros campos que han tenido la tentación de realizar una prueba de dicho teorema.

Como muestras para el lector, hemos seleccionado cuatro pruebas del cuadro 1 que se corresponden con los números 4, 20, 19 y 26, y que desarrollamos a continuación.

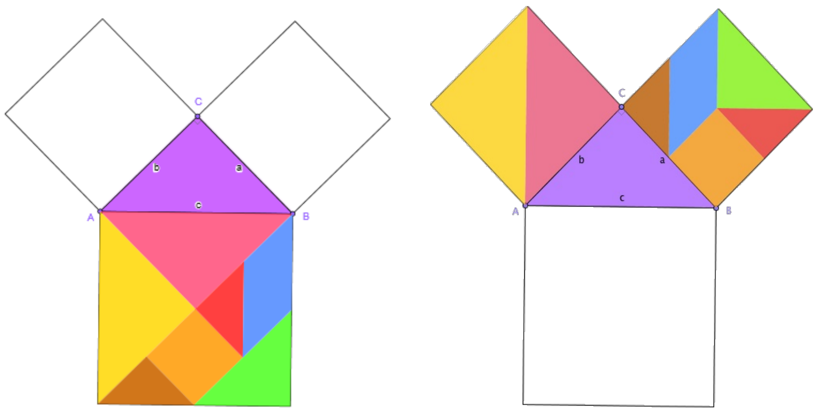
Si el lector está interesado, el resto de las pruebas clasificadas pueden ser consultadas de manera electrónica en el Libro de GeoGebra *Pruebas del Teorema de Pitágoras*, en la página web https://www.GeoGebra.org/m/j6wRRyxB.

7- Ejemplos de fichas de demostraciones del teorema.

A continuación, se muestran los ejemplos de las construcciones dinámicas construidas nombrados anteriormente, cada una en su propia ficha y explicada en base a su contenido.

Ejemplo 1: Triángulo rectángulo isósceles Código: 4.I. A

Momentos



Procedimiento:

Podemos observar que las piezas del cuadrado de la hipotenusa corresponden a un tangram cuadrado de siete piezas. Luego basta con construir las piezas del geoplano cuadrado tomando como lado del cuadrado la hipotenusa. El triángulo base, que aparece en morado, es la pieza, triángulos grandes del tangram. Así pues:

1. Se construye el triángulo rectángulo ABC (morado)

2. Se construyen un tangram cuadrado de siete piezas de lado la hipotenusa.

3. Podemos resolver a partir del cuadrado de la hipotenusa o a partir de los cuadrados de los catetos trasladando las piezas correspondientes.

Explicación: Esta demostración es válida solo en el caso de que el triángulo rectángulo inicial es isósceles por la construcción del tangram.

Demostración: Se puede hacer una demostración formal, hablando matemáticamente, pero en este caso hemos decidido hacer la prueba a partir de las propiedades del tangram.

La demostración es obvia mediante el traslado de las piezas del puzle; pero si queremos hacerla numéricamente basta con tomar como unidad de medida el triángulo pequeño rojo, podemos observar que el cuadrado, el paralelogramo y el triángulo mediano miden 2 unidades y los triángulos grandes 4 unidades. Luego el área del cuadrado sobre la hipotenusa sería 16 unidades. Tomando las medidas de los cuadrados sobre los catetos, en la segunda figura, obtenemos que miden, cada uno, 8 unidades, lo que demuestra el teorema.

Ejemplo 2: Chou Pei Suan Ching (Loomis 253) Código: 20. II.C

Chou Pei Suan Ching es una obra matemática de datación discutida, aunque se acepta mayoritariamente que fue escrita entre el 500 y el 300 a. C. Se cree que Pitágoras no conoció esta obra, aunque una demostración similar es atribuida a los pitágoricos por Eves (1976).

Procedimiento

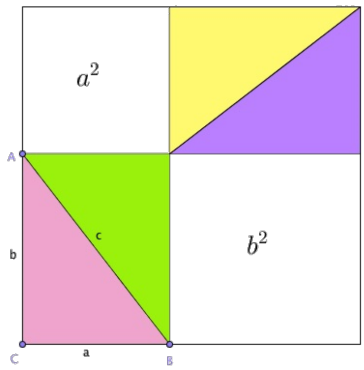
1. Se construye el triángulo rectángulo ABC (rosa)

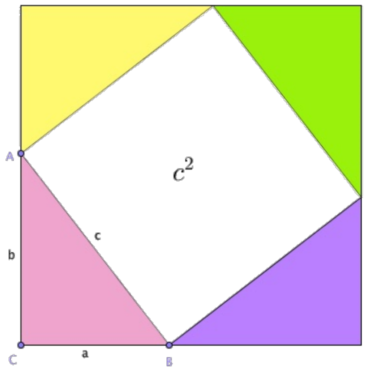
2. Se refleja con respecto a la hipotenusa obteniendo otro triángulo rectángulo (verde)

3. Se rota el rectángulo resultante 90º a la derecha y se traslada hacia arriba (amarillo, morado)

4. Así nos quedan construidos los cuadrados que se forman (blancos)

Momentos





Explicación

Después de que se reflejan, rotan y trasladan los triángulos rectángulos, se construyen 2 cuadrados blancos de lados igual a los catetos del triángulo ABC. En la segunda figura, después de trasladar todos los triángulos a las esquinas del cuadrilátero, se forma un cuadrado de lado igual a la hipotenusa del triángulo inicial. Por lo tanto, el área de este cuadrado va ser igual a la suma de los dos cuadrados formados al inicio. Es decir, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Demostración

Sean a y b los catetos del triángulo rectángulo ABC y c su hipotenusa, además, A1 es el área del primer cuadrado antes de hacer la traslación y A2 el área del segundo cuadrado, al obtener sus áreas se obtiene:

$A1 = 4\,(a\,.\,b\,/\,2) + a^2 + b^2$ $\qquad$ $A2 = c^2 + 4\,(a\,.\,b\,/\,2)$

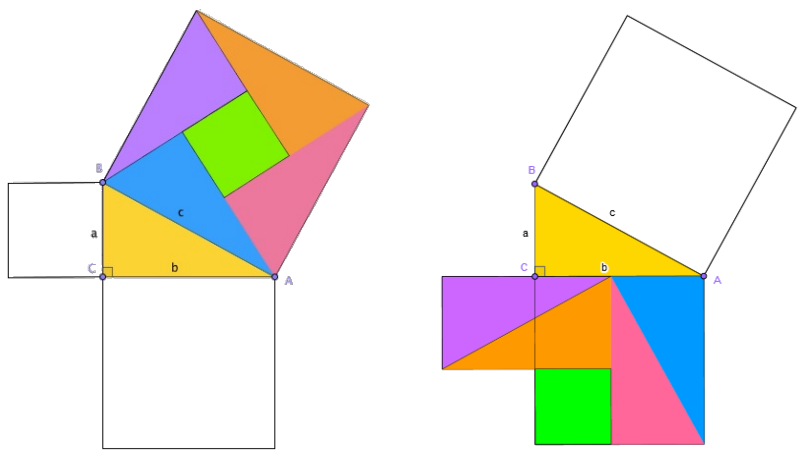
Como son el mismo cuadrado se obtiene que:

$4\,(a\,.\,b\,/\,2) + a^2 + b^2 = c^2 + 4\,(a\,.\,b\,/\,2) \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

Ejemplo 3: Demostración de Bashkara (Loomis 36). Código: 19. II. C

Es del tipo algebraica para 4º de la ESO. Bhaskara es también conocido como Bhaskara II o como Bhaskaracharya, que significa *Bhaskara el maestro*. Nació en 1114, y es probablemente el matemático hindú de la antigüedad mejor conocido. Era monje dedicado a las matemáticas y a la astronomía y aportó una demostración sencilla del Teorema de Pitágoras en su trabajo Bijaganita (cálculo de raíces).

Momentos



Procedimiento.

El cuadrado sobre la hipotenusa se divide, como indica la figura 11, en cuatro triángulos equivalentes al dado y un cuadrado de lado igual a la diferencia de los catetos.

Explicación.

Las piezas son reordenadas fácilmente para formar una figura que resulta ser la yuxtaposición de los cuadrados sobre los catetos. Esta prueba, también, puede ser utilizada en los primeros cursos de la ESO como una demostración geométrica del tipo partición de los cuadrados, como podemos ver en la figura 18.

Demostración.

Sean a y b los catetos del triángulo rectángulo ABC y c su hipotenusa, además, A1 (área total de los dos cuadrados) es el área de los 4 triángulos de lados a y b y el cuadrado (cuyo lado mide b-a) construidos inicialmente y A2 el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Al comparar sus áreas se obtiene:

$$A1 = 4\,(a\,.\,b\,/\,2) + (b - a)^2; \qquad A2 = c^2$$

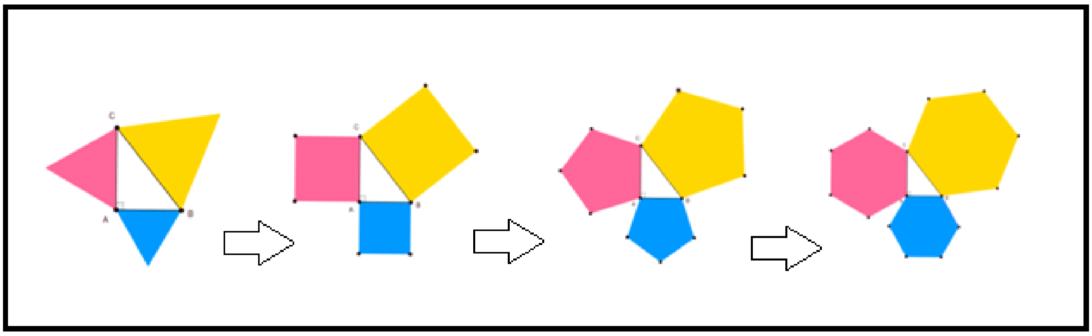
Como A1 = A2 por construcción, se tiene que:

$$4\ (a\ .\ b\ /\ 2) + (b - a)^2 = c^2 \ \Rightarrow\ c^2 = a^2 + b^2$$

Ejemplo 4: Prueba Loomis de ampliación del Teorema. Código: 26.II.C

Es una prueba de tipo algebraica y es una extensión del teorema clasificada en Loomis (1968) con el número 108 (algebraicas). En 1933, Loomis, matemático estadounidense, plantea una extensión del Teorema de Pitágoras en la que establece que la relación pitagórica se mantiene para cualquier polígono regular construido a partir de triángulos isósceles construidos sobre el triángulo inicial. La propiedad pitagórica no es válida únicamente para los cuadrados de lados los catetos y la hipotenusa, sino para cualquier polígono construido sobre los lados del triángulo rectángulo, siempre que los tres polígonos, así construidos, sean semejantes entre sí.

Momentos



Procedimiento:

1. Se construye el triángulo rectángulo ABC (blanco)

2. Se construyen polígonos regulares sobre sus lados: triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos, heptágonos, etc.

3. Se comparan las áreas de estos polígonos para comprobar la relación pitagórica.

Explicación: La misma relación pitagórica establecida con los triángulos y cuadrados construidos a partir de los lados de un triángulo equilátero, es mantenida si construimos sobre los lados del triángulo equilátero polígonos regulares. Es decir, cualquier polígono regular de lado igual a la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los polígonos regulares construidos de lados igual a la longitud de los catetos del triángulo rectángulo.

Demostración: En efecto, como la relación de superficies entre figuras semejantes solo depende del cuadrado de uno de sus lados, las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los lados se van a poder expresar como kb^2, ka^2, kc^2, donde el valor de k va a depender de la forma de la figura. Si las figuras son semejantes se va a verificar que $kb^2 + ka^2 = kc^2$, donde a, b, y c son los catetos e hipotenusa, respectivamente, del triángulo rectángulo.

En el primer caso, como los triángulos son equiláteros la constante k vale:

k = ¼ de la raíz cuadrada de 3

en las demás figuras regulares:

k = n / (4 tg(180 / n)) donde n es el número de lados

8- Conclusiones

La hipótesis de nuestra investigación es que el teorema de Pitágoras es un problema abierto entendido como un problema que posibilita al alumno conocer diferentes demostraciones clásicas de la proposición pitagórica a la vez que se revaloriza la importancia de la prueba pitagórica, haciéndoles observar la cantidad de personas famosas, matemáticos o no, que se han preocupado por ella.

Pero estas demostraciones no las aprende el alumno a la manera clásica del lápiz y el papel, sino mediante distintos materiales como son los puzles o los recursos informáticos, tipo GeoGebra, de manera que el profesor y los alumnos trabajen la propiedad pitagórica de una forma activa y dinámica pudiendo además seleccionar, entra la gran variedad de pruebas que ofrecemos e incluso realizando sus propias demostraciones.

Entendemos que la geometría dinámica se ha convertido en un recurso que, combinado con el correcto uso que haga el profesor, puede favorecer el aprendizaje en los alumnos debido al dinamismo en las construcciones, lo que permite que haya una interacción entre el conocimiento, el alumno y el docente a través de las construcciones geométricas.

Las actividades dinámicas permiten explorar visualizaciones de la prueba pitagórica, favoreciendo la construcción de conocimientos, a través de la manipulación directa de los puzles o del software de geometría dinámica; acciones que serían más trabajosas utilizando lápiz y papel. Los alumnos experimentan dificultades y logros de actividades que, aunque parecen actuales, han sido planteados y resueltos hace muchos siglos.

La realización de estas actividades debe producir un cambio en las concepciones de los profesores y alumnos hacia una nueva mirada de la Geometría, distinta de la tradicional de libro y pizarra, en la que el alumno es el eje del aprendizaje de una materia básica en su vida diaria y laboral (Barrantes y Barrantes, 2017)

Evidenciamos de esta manera la importancia y posibilidades que tiene el Teorema de Pitágoras dando lugar a un sin número de demostraciones y aplicaciones que lo convierten en un auténtico problema abierto de la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

9. Referencias.

Barrantes, M. (1998). *La geometría y la formación del profesorado en primaria y secundaria*. Manuales UEX, 22. Unex. Badajoz.

Barrantes, M. y Barrantes, M.C. (2017). *Geometría en la Educación Primaria*. Ed. Indugrafic digital. Badajoz.

Bergua, J. B. (1958*): Pitágoras*. Ed.Ibéricas. Madrid.

Cabrera, C. R., y Campistrous, L. A. (2007). Geometría dinámica en la escuela, ¿Mito o realidad? *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 13(45),61-79.

Caniff, P. (1997): *Pitágoras*. M.E. Editores, S.L. Madrid.

Clark, M. (1986): Pythagoras Two. *Mathematics Teaching*, 114, 11-12.España

Costa, A. (2001). Cinderella. Programas informáticos en matemáticas. La Gaceta, 4 (1), 273- 278.

Ericksen, D., Stasiuk, J., & Frank, M. (1995). Bringing pythagoras to life. *The Mathematics Teacher, 88*(9), 744-747.

Eves, H. (1976). *An Introduction to the History of Mathematics*. Holt, Rinehart and Winston. N. York.

Flores, A. (1992): La feria de Pitágoras. *Educación Matemática*, 40), 66-83, 4(2), 62-78.

Gillings, R. J., (1972). *Mathematics in the time of the Pharaos*. The Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, Massachusetts

González, P. M (2001). *Pitágoras. El filósofo del número*. Nivola. Madrid,2001

González, P.M. (2008). El teorema de Pitágoras: Una historia geométrica de 4.000 años. *Sigma*,32,103.

Laing, RA. (1989): Preparing for Pythagoras. *Mathematics Teacher*, 82(6), 271-275.

Loomis, E. Scott. (1968): *The Pythagorean Proposition*. 1927. Reprint, Classics in Mathematics Education series, Wahington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.

López, A. S., Alejo, V. V. y Escalante, C. C. (2013). Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico. Números, (82), 65-87.

Meavilla, V. (1989): Dos demostraciones dinámicas del Teorema de Pitágoras. *Suma*, 3,39-42.

Nelsen, R. (1993). *Proofs without word: Exercises in visual thinking*. The Mathematical Association of America. Washington D.C., USA

Rosenthal, 1. (1994): The converse of the Pythagorean Theorem. *The Mathematics Teacher*, 87(9), 692-693.

Savora, S. (1996): Pythagorean Triples. *Short Presentations del 8th International Congress on Mathematical Education.* Sevilla.

Schuré, E. (1995): *Los grandes iniciados*. Vol. II. REI Argentina. Buenos Aires.

Strathern, P. (1999*): Pitágoras y su teorema*. Siglo XXI de España Editores. Madrid,

Thomas, I. (1985): Matemáticos griegos. En *Enciclopedia Sigma* 1, 116-135. Ed. Grijalbo. Barcelona.

Vasquez, M.V.(2012). Una ampliación al teorema de Pitágoras. *Revista de E. Matemáticas*, 27(3)

Yanney, B. F. y Calderhead, J. A.(1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. American Mathematical Monthly, 3, 65-67, 110-113, 169-171 y 299-300,

Yanney, B. F. y Calderhead, J. A.(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. American Mathematical Monthly, 4, 11-12, 79-81, 168-170, 250-251 y 267-269.

Yanney, B. F. y Calderhead, J. A.(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. American Mathematical Monthly, 5, 73-74.

Yanney, B. F. y Calderhead, J. A.(1899). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. American Mathematical Monthly, 6 , 33-34 y 69-71

Zárate, E. (1996): Generalización del Teorema de Pitágoras. *Educación Matemática*, 8(2), 127-144.

Webgrafía

https://www.GeoGebra.org/m/j6wRRyxB

El Libro de GeoGebra "Pruebas del Teorema de Pitágoras", creado por Álvaro Mejía, contiene 28 applets que contienen pruebas dinámico-geométricas y dinámico-algebraicas sobre la relación pitagórica. Esta es la página base de los resultados de la investigación.

https://www.GeoGebra.org

Es la página oficial de GeoGebra, software de geometría dinámica que permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales.

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/

Es la página web del Proyecto Gauss que brinda al profesorado una gran variedad de ítems didácticos y de applets de GeoGebra, que cubren todos los contenidos de matemáticas de Primaria y de Secundaria.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web

La web del Proyecto Descartes ofrece materiales didácticos interactivos, basados en la visualización y en la interacción con los elementos matemáticos, para los niveles de Primaria, ESO y Bachillerato

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/GeoGebra/

La página Webs interactivas de Matemáticas, agrupa diversos temas de los currículos de Matemáticas de ESO y Bachillerato en la que, mediante gráficos interactivos, el alumno recibe una ayuda significativa para la comprensión de la matemática.

http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/

El sitio web Actividades con GeoGebra incluye actividades de matemática realizadas con GeoGebra en la que se facilitan recursos para la enseñanza de la geometría a nivel de la ESO y de Bachillerato.

http://tube.GeoGebra.org/student/b615817#

El Libro de GeoGebra Proofs Without Words creado por Steve Phelps, contiene 30 demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras en formato de Hojas Dinámicas.

http://www.GeoGebra.org/m/1988309

En el Libro GeoGebra Puzzles Pitagóricos, creado por Matías Arce, contiene applets con varios de los puzles pitagóricos más famosos de la historia.

https://www.GeoGebra.org/m/BnPMKV3z

El Libro de GeoGebra Teorema de Pitágoras, creado por Vicente Martín Torres, contiene 30 applets que tratan sobre demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras.

https://es.scribd.com/document/224732256/Teorema-de-Pitagoras-Algunas-demostraciones-del-pdf

Página de Fco. Javier García Capitán. Demostraciones resultantes de relaciones de semejanza de triángulos. Demostraciones basadas en propiedades métricas de la circunferencia, en la comparación de áreas y por disección.

http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/

Página de Alexander Bogomolny dedicada al teorema de Pitágoras y sus muchas demostraciones.

http://www.mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html

Página de Eric Weisstein, en la que además de algunas demostraciones, puede encontrarse una extensa bibliografía.

http://elcuadradodelahipotenusa.blogspot.com.es/

Este blog incluye 25 demostraciones del teorema dentro de los diferentes contextos históricos.

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml.
Pythagorean Theorem. Una colección de 118 enfoques para probar el teorema. Muchas de las pruebas están acompañadas por ilustraciones interactivas de Java.

Autor:

Barrantes López, Manuel
Doctor en Matemáticas. Universidad de Extremadura. España.
Profesor titular de la Universidad de Extremadura.
barrante@unex.es

Barrantes Masot, María Consuelo
Grado en Física. Universidad de Valencia. España.
conbarmas @gmail.com

Zamora Rodríguez, Victor.
Doctor en Ingeniería. Universidad de Extremadura. España
Ayudante Doctor. Facultad de Formación del Profesorado.
Universidad de Extremadura.
victor@unex.es

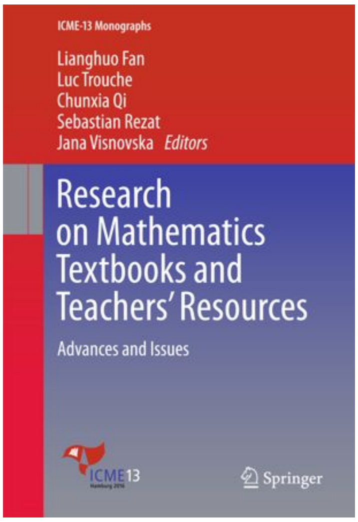
Mejía López, Álvaro Noé
Máster en Investigación en Didáctica de las C. Ex. y de las Matemáticas.
Universidad de Extremadura. España.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 113-114

RESEÑA: Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources - Advances and Issues

Sonia Barbosa Camargo Igliori



Este livro é organizado em quatro partes que correspondem às quatro partes do Topic Study Groups 38 (TSG) sobre *Research on resources (textbooks, learning materials etc.)* do 13th Internayional Congress on Matehematical Education - ICME realizado em Hamburg/Alemanha em julho de 2016. Esta partes foram ligeiramente modificadas para refletir os temas focais das discussões deste grupo:

1. Tendências na apresentação de matemática em livros didáticos e outros recursos.
2. Interação do professor com recursos curriculares e outros recursos de aprendizagem.
3. Trabalho coletivo dos professores por meio de recursos.
4. Interações de professores e alunos por meio de recursos.

A principal diferença entre a estrutura inicial do TSG 38 como acima mencionada e a estrutura do livro é que não foi dedicada uma seção às questões ligadas a recursos digitais. A razão é que os recursos digitais hoje, estão em todos os lugares e estão presentes nas quatro partes do livro. As quatro partes são seguidas por um capítulo de conclusões, escritas pelos editores, e por um capítulo de discussão final de Birgit Pepin que apresenta uma visão global do trabalho.

A Parte I do livro visa definir a cena, oferecendo uma visão sobre diferentes tipos de recursos dos professores de matemática, sua variação ao longo do tempo e em diferentes contextos culturais e institucionais. Na Parte II são analisadas as interações entre professores e recursos curriculares e outros recursos de aprendizagem. A Parte III é dedicada ao trabalho coletivo dos professores por meio de recursos. Enquanto as três partes anteriores se concentram nas interações dos professores com os recursos, a Parte IV abre uma janela para os alunos, analisando o papel dos recursos como ferramentas mediadoras entre professores e alunos.

Importantes pesquisadores de várias partes do mundo e que investigam a temática da relação dos recursos, prática docente e aprendizagem, escreveram neste livro. São eles: Trouche, Gueudet, Pepin, Remillard, Qi, Zhang, Huang, Fan, Mailizar, Alafaleq, Wang, Essonnier, Daskolia, Leshota, Adler, Rezat, Rocha, Ruthven, Ryve, Siedel, Van Steenbrugge, Larsson, Insulander, Stylianides, Kynigos, Kolovou, Trgalova, Visnovska, Cortina, Naftaliev, Kim, Chongyang Wang e Yi Wang.

Editores: Lianghuo Fan, Luc Trouche, Chunxia Qi, Sebastian Rezat, Jana Visnovska
https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-73253-4

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 115-121

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Sistemas lineales y "problemas inversos"

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Crea un problema a partir de la siguiente situación:

Paco tiene cierta cantidad de monedas, solo de dos denominaciones.

El problema debe ser tal que se resuelva usando un sistema de dos ecuaciones lineales y que su solución sea que Paco tiene 9 monedas de la denominación mayor y 15 monedas de la denominación menor.

Este problema surgió de un taller con estudiantes de profesorado de matemática, en un curso en la Facultad de Educación. En este artículo se explicitan las actividades previas y se muestran las potencialidades didácticas y matemáticas al desarrollarlas, teniendo como marco la creación de problemas en los procesos de aprendizaje de las ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Se puede percibir, que se pide la creación de un "problema inverso", pues ya se sabe cuál debe ser la respuesta. Ya me referí a la creación de "problemas inversos" en el artículo del número anterior. En este caso, la tarea es usar la situación para construir un problema en el contexto extra matemático descrito, de modo que se resuelva usando un sistema de ecuaciones lineales y que, al resolverlo, una de las variables tenga el valor 9 y la otra el valor 15. En un contexto intra matemático, se trata de construir un sistema de ecuaciones lineales cuya solución sea, digamos, el par ordenado (9; 15). Poner el contexto extra matemático conlleva una mayor reflexión; por una parte, por el cuidado que se debe tener con la coherencia entre las expresiones verbales y las algebraicas que correspondan al contexto, y por otra, por el adecuado fraseo, para la claridad del enunciado.

A continuación, describimos las actividades previas para proponer este problema. Cabe mencionar que los participantes del taller tienen entre sus conocimientos previos que las ecuaciones de la forma $ax + by = K$, con a, b y K números reales cualesquiera, tienen como representación geométrica a una recta, con la única restricción que a y b no pueden ser ambos iguales a cero (Esto solo podría ser si K = 0 y tendríamos 0 = 0 para todos los valores de x y de y):

Actividad 1: Graficar dos ecuaciones lineales con dos variables, ambas en un mismo plano cartesiano.

Pedir la construcción de sistemas que correspondan a rectas

i) Que se intersequen en un punto

ii) Que se intersequen en más de un punto
iii) Que no se intersequen.

Actividad 2. Reconocer expresiones verbales cuya expresión algebraica es una ecuación lineal con dos variables.

Actividad 3. Dadas diversas situaciones, en contextos extra matemáticos, encontrar expresiones verbales relacionadas con tal situación, cuyas formalizaciones algebraicas sean ecuaciones lineales con dos variables.

Actividad 4. Dada una ecuación lineal de dos variables, encontrar enunciados verbales correspondientes a contextos extra matemáticos, cuya expresión algebraica sea la ecuación dada.

Actividad 5. Dado un par ordenado de números reales, encontrar sistemas de dos o más ecuaciones cuya solución sea el par ordenado dado.

Actividad 6. Dada una situación de contexto extra matemático, y un par ordenado de números reales, crear un problema en tal contexto, cuya solución sea tal par ordenado.

Ejemplos y comentarios

A continuación, daré algunos ejemplos o comentarios sobre las experiencias didácticas, poniendo énfasis en las actividades más directamente vinculadas con la creación de problemas.

Sobre la *Actividad 1*:

Lo que más llamó la atención de los participantes fue el pedido de dos ecuaciones lineales cuyas gráficas se intersequen en más de un punto. A continuación, algunas expresiones:

- *Eso es imposible.*
- *Claro, dos rectas se cortan solo en un punto.*
- *O en ningún punto, cuando son paralelas*.

La pregunta ¿qué pasaría si dos rectas tuvieran dos puntos en común? los llevó a concluir que se trataría de la misma recta y a partir de eso, luego de reflexionar en sus grupos de trabajo, propusieron sistemas lineales como

$$2x + 3y = 12$$
$$4x + 6y = 24$$

O un sistema, con menor evidencia de la proporcionalidad directa de los coeficientes y del término independiente, como

$$6x - 10y = 8$$
$$9x - 15y = 12$$

Sobre la *Actividad 2*:

Algunas expresiones verbales para analizar si corresponden o no a una ecuación lineal con dos variables:

- *El producto de dos números es 12*
- *La suma de dos números es 10*

- *Por 3 kilos de papas y 4 kilos de arroz, se pagó 23,30 soles.*
- *Solo con billetes de 20 soles y de 50 soles, Carlos tiene 590 soles*
- *El perímetro de un terreno rectangular es 190 metros.*

Sobre la *Actividad 3*:

Algunas situaciones en contextos extra matemáticos, a partir de las cuales se pidió encontrar expresiones verbales que se puedan formalizar como una ecuación lineal con dos variables.

a) Niños y adultos que ingresan a un teatro, pagando entradas diferentes
b) En una tienda venden triciclos y bicicletas
c) En una bodega se venden botellas de yogurt y botellas de jugo y tienen precios diferentes.

Esta actividad no fue fácil, pero finalmente hicieron sus propuestas. Por ejemplo, a partir de (a) propusieron:

a1) El total de personas que ingresó al teatro, entre niños y adultos, fue 120

a2) Para ingresar al teatro, los niños pagaron 6 soles y los adultos 10 soles, y en total en la boletería recibieron 680 soles

a3) Los niños pagan 4 soles y los adultos 10 soles, pero la boletería habría recibido la misma cantidad de dinero si el precio de entrada para niños se reduce a la mitad y el precio de entrada de adultos se aumenta en la mitad.

Hubo una marcada tendencia a crear problemas, pero la idea no era esa; sin embargo, dejé libertad a que propongan algunos problemas; así, considerando a1 y a2 quisieron determinar el número de niños y de adultos. Al obtener un valor negativo para una de las variables, tomaron conciencia que al crear un problema hay que tener sumo cuidado al establecer las condiciones (la información) en el problema.

Sobre la *Actividad 4*:

Dada una ecuación, se tenía que encontrar expresiones verbales cuya formalización sea esa ecuación.

- Se partió de la ecuación

$$4x + 3y = 32$$

y se pidió encontrar algún contexto extra matemático en el cual la ecuación tenga sentido. Ante el silencio, propuse considerar la compra de dos productos en una bodega. Surgió entonces la expresión verbal:

> *Se compra x botellas de jugo a 4 soles cada una y y paquetes de galletas a 3 soles cada uno, y en total se paga 32 soles.*

Que, efectivamente, al formalizarla, se obtiene la ecuación dada. Luego tomó la forma más coloquial de

> *Se compra cierta cantidad de botellas de jugo a 4 soles cada una y también cierta cantidad de paquetes de galletas a 3 soles cada uno, y en total se paga 32 soles.*

Otro contexto para la misma ecuación: "autos, triciclos y número de ruedas"

Surgió la expresión verbal:

> En una *tienda de venta de carros y triciclos para niños, en total hay 32 ruedas colocadas.*

Se aclaró que debe entenderse que cada carro tiene 4 ruedas colocadas y cada triciclo 3 ruedas colocadas.

- Otra ecuación de partida:

$$5\,x - 3y \;=\; 40$$

Surgió la siguiente expresión verbal:

> *La diferencia de lo que se pagaría por cierta cantidad de piñas, a 5 soles cada una y lo que se pagaría por cierta cantidad de papayas a 3 soles cada una, es 40 soles.*

Una ecuación equivalente a la dada, llevó también a una expresión equivalente del enunciado anterior.

Ecuación equivalente:

$$5\,x = \;3y + \;40$$

Expresión verbal:

> *Por cierta cantidad de piñas a 5 soles cada una, pagué lo mismo que habría pagado por cierta cantidad de papayas a 3 soles cada una, más 40 soles.*

Sobre la *Actividad 5*:

En esta actividad estuvieron cinco estudiantes de profesorado de matemáticas. Pedí que cada uno diga en voz alta dos números reales entre −9 y 9. Los fui anotando en la pizarra, dividida en cinco franjas verticales. Luego di forma de pares ordenados a cada par de números escritos en cada franja de la pizarra y pedí a los estudiantes que cada uno, individualmente o comunicándose con un(a) compañero(a) escriba un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución sea el par ordenado formado con los números que él (o ella) dio.

Al inicio hubo cierto desconcierto, pero pronto reaccionaron favorablemente y cada estudiante hizo lo pedido y explicó cómo obtuvo el sistema que mostró. Entonces pedí que cada uno escriba otro sistema de dos ecuaciones, que también tenga como solución el mismo par ordenado. En la Figura 1, mostramos el trabajo personal de una de las alumnas, para obtener sus dos sistemas lineales con dos incógnitas, cuya solución es el par ordenado (5; −2).

Como se puede observar, esencialmente escribe de manera arbitraria la parte algebraica de cada ecuación del sistema y para obtener el término constante de cada ecuación, reemplaza en cada expresión algebraica los valores de x y de y (en este caso x =5; y = −2). También se puede observar que la alumna hace un trabajo simultáneo de "verificación" de que, al resolver el sistema que propone, la solución será, efectivamente, el par (5; −2).

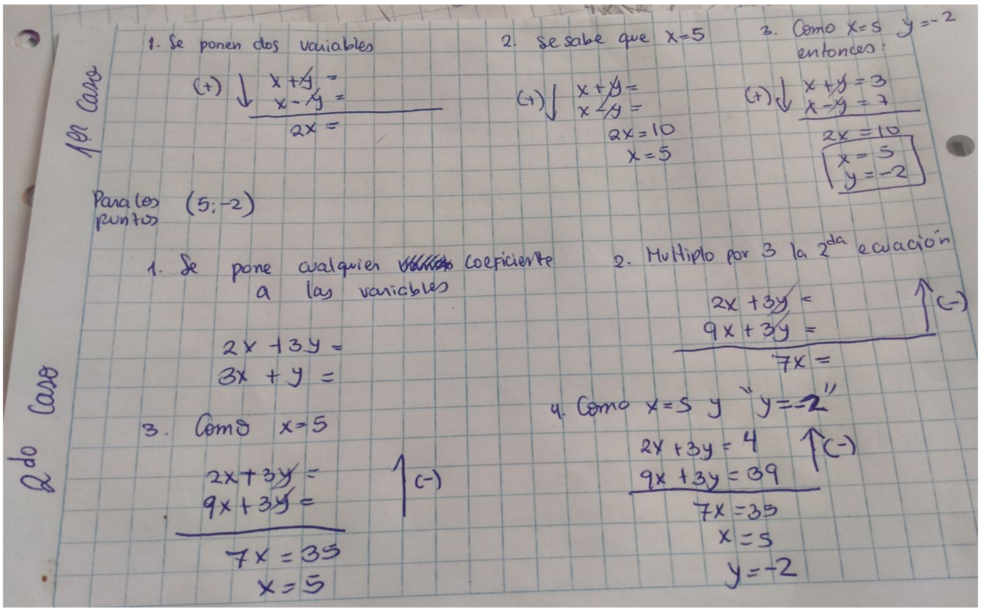


Figura 1. Construyendo sistemas lineales cuya solución es (5, −2)

Cabe mencionar, como lo hice notar en el taller, que ningún participante usó registros gráficos para crear sus sistemas. Pedí que se grafiquen las rectas correspondientes a cada sistema de ecuaciones dado, usando un mismo sistema de coordenadas. En cada caso se tenía cuatro rectas que pasan por un mismo punto y así quedaron evidenciados sistemas de cuatro ecuaciones lineales, con dos incógnitas y con solución única, como se muestra en la Figura 2, usando GeoGebra, para el caso presentado en la Figura 1. Ciertamente, fue la ocasión para que los estudiantes construyan también sistemas lineales de dos variables y más de dos ecuaciones, cuyo conjunto solución es vacío, por representarse mediante rectas que no pasan, todas, por un mismo punto.

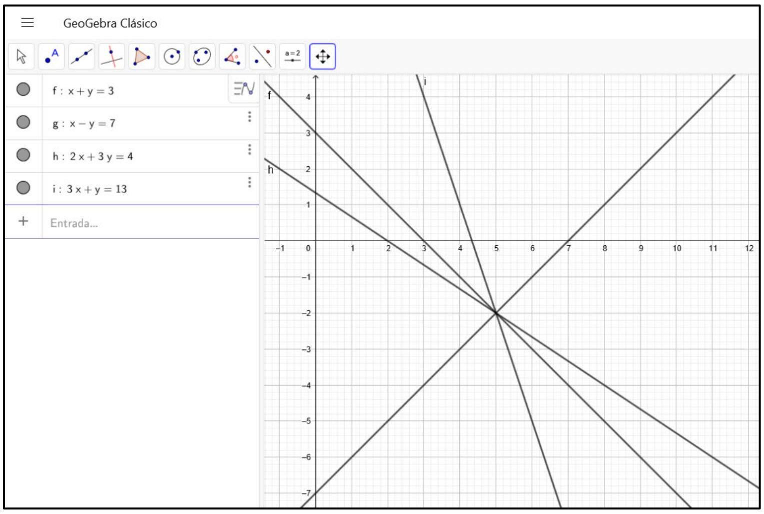


Figura 2. Representación gráfica de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuya solución es (5; −2)

El sistema lineal de cuatro ecuaciones con dos incógnitas que se ha construido, es:

$$x + y = 3$$
$$x - y = 7$$
$$2x + 3y = 4$$
$$3x + y = 13$$

Sobre la *Actividad 6*:

A continuación, transcribo los problemas que crearon tres de los estudiantes de profesorado, ante la situación planteada al inicio de este artículo, que la reproduzco para facilitar la lectura:

> *Crea un problema a partir de la siguiente situación:*
>
> *Paco tiene cierta cantidad de monedas, solo de dos denominaciones.*
>
> *El problema debe ser tal que se resuelva usando un sistema de dos ecuaciones lineales y que su solución sea que Paco tiene 9 monedas de la denominación mayor y 15 monedas de la denominación menor.*

- Problema 1:

Paco tiene en su alcancía x monedas de 1 sol y z monedas de 2 soles y así ha reunido 33 soles en total. Si al número de monedas de 1 sol se le añade tres monedas, se obtiene el doble de la cantidad de monedas de 2 soles que tiene Paco.

El sistema que este alumno resuelve, es

$$x + 2z = 33$$
$$x + 3 = 2z$$

Así obtiene z = 9, x = 15, como se pidió.

- Problema 2:

Paco tiene solo monedas de dos denominaciones y en total son 24. Si su mamá le duplica la cantidad de monedas de denominación mayor, el total de monedas será 33. ¿Cuántas monedas de cada denominación tiene Paco?

El sistema que esta alumna resuelve, es

$$x + y = 24$$
$$2x + y = 33$$

Así obtiene x = 9, y = 15 , como se pidió.

- Problema 3:

Paco recibe de su mamá cierta cantidad de monedas de 5 soles y otra cantidad de monedas de 2 soles. La suma de los valores en soles por ambas denominaciones, es 75 soles y la diferencia de estos valores es 15 soles. Hallar la cantidad de monedas de cada denominación.

El sistema que este alumno resuelve, es

$$5x + 2y = 75$$
$$5x - 2y = 15$$

Así obtiene x = 9, y = 15, como se pidió.

Comentarios generales

1. La descripción de las actividades desarrolladas en esta experiencia didáctica, con los ejemplos y algunos comentarios, pueden ser útiles para el diseño de tareas en el marco de la creación de problemas de matemáticas, considerando otros objetos matemáticos. Son actividades que pueden realizarse como parte de las clases; sin embargo, también pueden integrarse en las estrategias *Episodio, Problema Pre, Problema Pos* (EPP) y *Situación, Problema Pre, Problema Pos* (SPP), que forman parte de mi propuesta para talleres de formación de profesores (Malaspina, 2017). El lector queda invitado a desarrollar actividades similares y a investigar.

2. Considero que este tipo de actividades en cursos y talleres de formación de profesores, contribuye a fortalecer sus competencias didáctico matemáticas en relación a la modelización matemática; y al desarrollarlos con estudiantes, a iniciarlos en experiencias orientadas al uso del álgebra como una herramienta para la modelización de situaciones de contexto extra matemático.

3. En el caso específico de los sistemas de ecuaciones lineales, observé una gran tendencia a trabajar restringiéndose al registro algebraico; algo que también es frecuente cuando se trabaja con funciones. Con la dinámica de creación de problemas se llegó a considerar y a visualizar casos de sistemas con más ecuaciones que variables, cuya solución es única, transitando entre los registros algebraico y gráfico.

Referencia

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.*), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*
Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf