UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 183-189
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

Cooperativismo y Matemática en el Aula.

Andrés Alberto Barrea

Resumen

En este trabajo se expone una propuesta para ser desarrollada en el aula, especialmente en la escuela secundaria, la cual es basada en la Teoría de Juegos, y que tiene por objetivo fundamental relacionar la Matemática con la vida real. Principalmente poniendo énfasis en el desarrollo de conductas sociales cooperativas a través del análisis matemático de las situaciones planteadas. Se propone no sólo la exposición del tema sino también prácticas experimentales con el mismo

Abstract

This paper presents a proposal to be developed in the classroom, especially in middle school, which is based on game theory, and fundamental aims relate mathematics to real life. Primarily emphasizing the development of cooperative social behavior through mathematical analysis of the situations. It proposes not only the exposition of the subject but also with the same experimental practices

Resumo

Neste trabalho expõe-se uma proposta para ser desenvolvida no aula, especialmente na escola secundária, a qual é baseada na Teoria de Jogos, e que tem por objectivo fundamental relacionar a Matemática com a vida real. Principalmente pondo ênfasis no desenvolvimento de condutas sociais cooperativas através da análise matemática das situações propostas. Propõe-se não só a exposição do tema senão também práticas experimentales com o mesmo.

Introducción

Generalmente, la Matemática es enseñada como un conjunto de fórmulas y variaciones de las mismas totalmente carentes de sentido práctico. Es decir entidades abstractas lejanas de lo cotidiano, de las vivencias de nuestras vidas diarias. ¿Quién no recuerda con estupor aquellos temas complicados que nunca más volveremos a usar en nuestras vidas que nos demandaron horas de estudio?

Sabemos que esto no refleja la verdad, que la mayoría de los contenidos provienen de hechos concretos, pero esto siempre queda oculto tras la rigidez con que se acostumbra a enseñarlos. Es cierto, existen temas complicados, los cuales son difíciles de presentar sin formalismo y abstracción; pero otros dan muchas posibilidades, y este es el humilde objetivo de esta presentación.

Uno podría concentrarse en ciertas preguntas pragmáticas pero no por ello poco interesantes: ¿Qué esperamos que el aprendizaje de la Matemática deje en el alumno?, ¿Son los contenidos clásicos lo suficientemente atractivos para que el alumno disfrute de ellos y desarrolle abstracción Matemática? Responderlas no es tarea sencilla, claro está, pero evidentemente la búsqueda de estas respuestas en sí misma es un camino a seguir. Es aquí donde la propuesta de este trabajo puede tener utilidad, y disponer al alumno a adentrarse en una forma de Matemática por lo menos distinta a la habitual.

La principal idea es dar un esbozo de un tema que no es parte de los cursos de Matemática tradicionales, la Teoría de Juegos, y que a mi entender podrían tener una importante contribución en el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos.

En Wikipedia (http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_juegos) podemos encontrar una breve introducción al tema, la que se transcribe a continuación:

La teoría de juegos es un área de la matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos (los llamados juegos) y llevar a cabo procesos de decisión. Sus investigadores estudian las estrategias óptimas así como el comportamiento previsto y observado de individuos en juegos. Tipos de interacción aparentemente distintos pueden, en realidad, presentar estructuras de incentivos similares y, por lo tanto, se puede representar mil veces conjuntamente un mismo juego.

Desarrollada en sus comienzos como una herramienta para entender el comportamiento de la economía, la teoría de juegos se usa actualmente en muchos campos, desde la biología a la filosofía. Experimentó un crecimiento sustancial y se formalizó por primera vez a partir de los trabajos de John Von Neumann y Oskar Morgenstern, antes y durante la Guerra Fría, debido sobre todo a su aplicación a la estrategia militar —en particular a causa del concepto de destrucción mutua garantizada. Desde los setenta, la teoría de juegos se ha aplicado a la conducta animal, incluyendo el desarrollo de las especies por la selección natural. A raíz de juegos como el dilema d el prisionero, en los que el egoísmo generalizado perjudica a los jugadores, la teoría de juegos se ha usado en economía, ciencias políticas, ética y filosofía. Finalmente, ha atraído también la atención de los investigadores en informática, usándose en inteligencia artificial y cibernética.

Aunque tiene algunos puntos en común con la teoría de la decisión, la teoría de juegos estudia decisiones realizadas en entornos donde interaccionan. En otras palabras, estudia la elección de la conducta óptima cuando los costes y los beneficios de cada opción no están fijados de antemano, sino que dependen de las elecciones de otros individuos. Un ejemplo muy conocido de la aplicación de la teoría de juegos a la vida real es el dilema del prisionero, popularizado por el matemático Albert W. Tucker, el cual tiene muchas implicaciones para comprender la naturaleza de la cooperación humana."

Es en esta parte de la Matemática donde quiero hacer hincapié, y en especial en los llamados dilemas sociales, que modelan situaciones reales de cooperación (o egoísmo) entre los jugadores o grupos de ellos (Kollock. 1998). Esto además suma un contenido social al del razonamiento matemático que esperamos el alumno incorpore. Es decir preguntas como las siguientes deberían surgir:

- ¿Conviene pensar en conjunto y no individualmente?
- ¿Qué mecanismos aseguran que nuestra cooperación sirva?
- ¿Quién debe generar estos mecanismos?

En un hermoso libro (Fisher. 2008), el autor, con numerosos ejemplos, fundamenta la idea de que la Matemática puede mezclarse con la vida diaria.

Esta rama de la Matemática no cuenta, en principio y en su forma básica, con excesiva cantidad de fórmulas, teoremas y entes abstractos que puedan complicar el entendimiento del alumno; a la vez su cercana relación con hechos cotidianos la hace una herramienta maravillosa que extrañamente no ha sido explotada en toda su dimensión.

Comenzaremos con una revisión de los dilemas sociales más conocidos, algunos detalles matemáticos surgirán a medida que la exposición avance y trataremos, con la menor cantidad de tecnicismos.

El dilema del prisionero, el comienzo de la historia.

Este es históricamente el primer dilema social de la teoría de juegos, y existe una vasta biografía sobre el mismo (Poundstone. 1992). La cuestión es bien simple, dos personas son encarceladas por un hecho delictivo, ellas se encuentran en celdas separadas e incomunicadas y ambos reciben la misma propuesta del juez de la causa.

- Si usted confiesa ser culpable y su compañero también confiesa ambos recibirán 4 años de castigo.
- Si usted no confiesa y su compañero tampoco lo hace ambos recibirán 2 años de castigo.
- Si uno de ustedes no confiesa y el otro si lo hace, el primero recibirá 10 años y el segundo saldrá en libertad.

Podemos ver el problema gráficamente con el siguiente esquema:

JugadorA Jugador B	***Confiesa***	***No Confiesa***
Confiesa	**(4,4)**	**(0,10)**
No Confiesa	**(0,10)**	**(2,2)**

En el cuadro cuando escribimos el par (a , b) estamos significando que el jugador A recibirá el <u>*pago*</u> a y el jugador B el <u>*pago*</u> b, en este caso el pago es la cantidad de años preso, un pago no muy bienvenido por ellos.

La situación es la siguiente; lo mejor que ellos pueden lograr, pensando en conjunto (cooperativamente) es confesar ambos y cumplir una condena de 2 años cada uno.

Pero el riesgo es que el otro no confiese (ellos no conocen la decisión del otro) y tener que cumplir 10 años, lo cual hace que la situación empeore.

En cambio si ambos no confiesan deberían cumplir con 4 años cada uno, pero si alguno individualmente decide confesar, ese se haría cargo del delito y el que no confeso saldría libre.

Por lo tanto, la mejor opción individual es no confesar, pues independientemente de la decisión del otro la situación no lo llevaría a cumplir más de 4 años. Esto es lo que se conoce como Equilibrio de Nash. En otras palabras en un Equilibrio de Nash ningún jugador podría mejorar su pago cambiando de estrategia independientemente de lo que hagan los otros jugadores. Como conclusión podemos decir, en simples palabras

> La mejor solución individual no coincide con la mejor solución grupal.

Esto es lo que da el nombre a este tipo de situaciones, ***dilemas sociales.*** Ya habrá quedado claro que aquí no hay fórmulas, ni cálculos complicados pero definitivamente hay Matemática!!

Pensando en esta situación lo primero que uno concluye que el desenlace depende de la confianza y el compañerismo de los protagonistas, y eso es claro; pero el tipo de análisis es puramente matemático.

La Tragedia de los Comunes

El dilema que presentamos a continuación, es básicamente equivalente al Dilema del Prisionero, pero muchas personas o grupos de ellas.

El trabajo original fue publicado en el año 1968 por G. Hardin y mucho se ha investigado y se sigue investigando sobre él. Esta es una cita de aquel trabajo que casi lo define:

> *"La ruina es el destino hacia el cual corren todos los hombres, cada uno buscando su mejor provecho en un mundo que cree en libertad de los recursos naturales"*

Pensemos en la siguiente situación, en cierto país los productores agrícolas deben restringirse con el uso del agua debido a la sequía imperante. Supongamos que si ellos cooperan con la restricción conseguirán una producción de 5 quintales por hectárea, mientras que si no lo hacen conseguirán 10 quintales por hectárea.

Si la mayoría de ellos no coopera, el reservorio de agua será menor, la restricción será más fuerte y solo producirán 1 quintal los que cooperen y 2 los que no lo hagan.

Podemos hacer un cuadro para este problema, similar al del dilema del prisionero.

Mayoría / Individuo	***No coopera***	***Coopera***
No Coopera	**(2,2)**	**(10,5)**
Coopera	**(1,2)**	**(5,5)**

Con el mismo razonamiento que en el dilema del prisionero, llegamos a la misma situación anticooperativista, el individuo prefiere optar por su mejor resultado individual antes que por un mejor resultado para todos. Podemos sacar una breve conclusión de este ejemplo:

> Debemos incentivar en los individuos el cooperativismo

Esta conclusión proviene de un análisis de la situación, y casi es evidente en la vida real, pero situaciones como estas se ven a diario en nuestras vidas y sin los incentivos correctos el resultado siempre desfavorece a todos.

La caza del ciervo

El nombre de este dilema proviene de una vieja historia contada por el filósofo Jean Jacques Rousseau:

> *"Si un ciervo iba a ser cazado, cada uno dio cuenta de que, con el fin de tener éxito, debía cubrir fielmente su puesto, pero si una liebre pasó y quedó al alcance de cualquiera de ellos, no hay duda de que él la persiguió sin escrúpulos, y, tras la confiscación de su presa, le importaba muy poco, si con ello hizo que sus compañeros pierdan la suya."*

La historia habla de la eterna lucha entre la cooperación social y la libertad individual. Podemos citar la famosa frase de Rousseau sobre la libertad

> *"La verdadera libertad consiste en dar algo de mi libertad para entonces poder tener nuestra libertad"*

La situación ahora es la siguiente, dos jugadores a los que llamaremos A y B pretenden cazar un ciervo, para lograrlo ellos deben permanecer en sus posiciones hasta el momento oportuno, pero cada uno puede tener la posibilidad de cazar una liebre fácilmente que se cruza por sus caminos, claro esta descuidando su posición, perjudicando al otro jugador.

El dilema de la caza del ciervo puede ser visto como un dilema del prisionero "invertido", es decir lo que llamamos el Equilibrio de Nash (el cual no era la solución cooperativista en aquel caso) ahora coincide con la solución cooperativa.

En este juego el diagrama, como el usado en los anteriores juegos, es:

JugadorB Jugador A	***Caza Liebre***	***Caza Ciervo***
Caza Liebre	**(2,2)**	**(2,0)**
Caza Ciervo	**(0,2)**	**(10,10)**

Con el mismo razonamiento que en el dilema del prisionero, llegamos a una conclusión similar, la solución cooperativa (10,10) es la mejor para los dos, pero ante la posibilidad de asegurarse una presa, aunque sea menor cada individuo puede elegir una estrategia que no permita llegar a la solución óptima para todos.

La diferencia aquí es que el cooperativismo es roto por un jugador que ve la posibilidad de individualmente minimizar los riesgos, en el dilema del prisionero los jugadores pretenden maximizar sus ganancias, y en el juego de la caza del ciervo ellos pretenden minimizar los riesgos. Una interesante referencia es (Skyrms. 2004)

Este juego tiene un correlato para más de dos jugadores que es interesante de trabajar, así como también una versión probabilística del mismo (técnicamente se llama a esto estrategias mixtas) también posible para los dos dilemas anteriores.

Como una nota matemática, debemos decir que existe una formalización de lo que llamamos juego, junto con una de equilibrio de Equilibrio de Nash.

Además existen juegos que no cuentan o tienen múltiples equilibrios de Nash considerando sus estrategias puras. Un importante teorema asegura la existencia de Equilibrios de Nash para estrategias mixtas. en juegos con una cantidad finita de estrategias puras (Webb. 2007)

Trabajando con los dilemas sociales

Sumado al hecho de enseñar estos juegos en una clase, hecho que de por sí ya causaría sorpresa en el alumnado, que no acostumbra a relacionar Matemática con situaciones reales, se puede agregar, experimentación al respecto, otro hecho novedoso, pues en general se cree que la Matemática es un ciencia puramente teórica. Las clásicas frases “en Matemática todo está hecho” o “uno más uno siempre es dos” son sólo muestras de ello.

Quiero citar dos propuestas que me parecen interesantes de desarrollar. Una de ellas se puede encontrar en la referencia (Pascual. 2009), donde los autores, mediante un software implementan un juego similar a la tragedia de los comunes para ser utilizado en enseñanza.

Un juego tipo tragedia de los comunes, inspirado en pesca, es decir una fuente común de explotación (un lago, un río, etc.), junto con una tasa de reproducción sin ningún tipo de regulación para comenzar, e incorporando un sistema de premios y castigos (diseñados por los alumnos) sería un posible “experimento” a desarrollar en el aula.

Como ya hemos dicho en la referencia (Fisher. 2008), se pueden encontrar innumerables situaciones para ejemplificar estos juegos y otros con hechos de la vida real, cuya discusión en el aula enriquecería el tema y al alumnado.

Bibliografía

Fisher, L. (2008). *Rock, Paper, Scissors: Game Theory in Everyday Life.* Basic Books, New York

Hardin, G. (1968). Tragedy of Commons. *Science* 162, 1243-1248.

Kollock, P. (1998). *Social Dilemmas: The Anatomy of Cooperation*. Annu. Rev. Soc., 24, 183 -214.

Pascual, J. et. Al (2009). Una herramienta didáctica para la enseñanza de la teoría de juegos mediante Internet. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 29, 1-14.

Poundstone, W. (1992): *Prisoner's Dilemma*. Anchor Books, New York.

Skyrms, B (2004): *The Stag Hunt and the Evolution Social Structure*. Cambridge University Press, UK.

Webb, J. (2007): *Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution*. Springer, London

Andrés Alberto Barrea Doctor en Matématica de la Universidad Nacional de Córdoba, es Profesor Asistente en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física e Investigador Asistente de la carrera de Investigador Científico del Conicet. Su área de investigación es la Matemática Aplicada con énfasis en modelos matemáticos de fenómenos relacionados con tratamientos de tumores andresbarrea1789@yahoo.com.ar.