UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Marzo de 2010, Número 21, páginas 13-30
ISSN: 1815-0640
firma invitada

Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem

João Pedro da Ponte

Resumo

Investigar, ensinar e aprender são actividades que podem estar presentes, de forma articulada, no ensino-aprendizagem da Matemática e na actividade profissional do professor. Para isso, é necessário conceber tarefas que possam ser o ponto de partida para investigações e explorações matemáticas dos alunos e discutir o modo como podem ser trabalhadas na sala de aula. Recorrendo a exemplos de actividades realizadas por professores de Matemática portugueses, analiso a actividade de aprendizagem suscitada por tarefas deste tipo e discuto as respectivas potencialidades. Finalmente, refiro as condições respeitantes à cultura profissional dos professores que podem favorecer uma actividade de investigação sobre a sua própria profissional, com relevo para a colaboração e a dimensão associativa

Abstract

Researching, teaching and learning are activities that may be present, in coordination, teaching and learning of mathematics in the work of the teacher. Therefore, it is necessary to design tasks that may be the starting point for mathematical investigations and explorations of the students and discuss how they can be worked in the classroom. Drawing on examples of activities carried out by Portuguese teachers of mathematics by examining the activity of learning raised by such tasks and discuss their potencial. Finally, I refer to conditions relating to the professional culture of teachers who can promote the research activity on their own training, with an emphasis on collaboration and associative dimension.

Resumen

Investigar, enseñar y aprender son actividades que pueden estar presentes, de forma articulada, en la enseñanza-aprendizaje de matemática y en la actividad profesional del profesor. Para esto, es necesario concebir tareas que puedan ser un punto de partida para investigaciones matemáticas de los alumnos y discutir el modo en que pueden ser trabajadas en el aula. Tomando ejemplos de actividades realizadas por profesores de matemática portugueses, analizo actividades de aprendizaje a partir de tareas de este tipo y discuto las respectivas potencialidades. Por último, me refiero a las condiciones relativas a la cultura profesional de los profesores que pueden promover la actividad de investigación en su propia formación, con énfasis en la colaboración y la dimensión asociativa

Ensinar Matemática como um produto acabado, tem-se revelado problemático para sucessivas gerações de professores. Muitos alunos acham que a disciplina não faz qualquer sentido e que não vale a pena esforçarem-se para a aprender. Outros lutam para sobreviver, aprendendo a resolver diversos tipos de exercícios e desenvolvendo significados parciais que, muitas vezes, envolvem sérios equívocos. Por isso, há muito tempo que matemáticos e professores preocupados com este problema procuram encontrar outras formas de apresentar a Matemática aos alunos. Uma das ideias mais poderosas que fundamenta muitas dessas abordagens alternativas, é considerar a Matemática como uma actividade (Freudenthal, 1973), o que leva, naturalmente, a enfatizar a exploração e a investigação de situações.

1. Investigar como uma característica essencial da actividade matemática

Existem muitas perspectivas sobre a Matemática. A maioria dos dicionários apresenta-a como a "ciência da quantidade e forma" (Davis & Hersh, 1995). Para muitos matemáticos, ela é a "ciência da demonstração". Esta é a noção de que Bertrand Russell tinha em mente quando disse: "A Matemática é o assunto no qual nunca sabemos do que estamos a falar, nem se o que estamos a dizer é verdadeiro" (Kline, 1974, p. 462). Bourbaki, na abertura dos seus *Elementos*, coloca a mesma ideia de um modo mais directo: "Quem diz Matemática, diz demonstração". O movimento estruturalista da primeira metade do século XX promoveu a visão da Matemática como "ciência das estruturas", o que influenciou a profunda reforma educacional na década de 1960, a "Matemática moderna". Outro ponto de vista, ainda, afirma que a Matemática pode ser descrita como a "ciência dos padrões", tendo como objectivo descrever, classificar e explicar os padrões em números, dados, formas, organizações e relações (Steen, 1990).

Quando pensamos na Matemática, podemos concentrar-nos nos conceitos matemáticos e no corpo de conhecimento registado em artigos e livros – algo como existe na forma de produto acabado. Falamos, então, da Matemática como um edifício com muitos compartimentos e passagens ou como uma árvore com muitos ramos. Em alternativa, podemos concentrar-nos na actividade das pessoas que trabalham nesta ciência. Trata-se de uma perspectiva da Matemática muito mais dinâmica. É isso que George Pólya (1945) tem em mente, quando diz: "A Matemática tem duas faces, é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais [...] Matemática, no seu processo de criação, aparece como uma ciência experimental e indutiva" (p. vii). É isso, também, que é sustentado por Irme Lakatos (1978) quando afirma que a Matemática "não se desenvolve por meio de um crescimento monótono do número de teoremas estabelecidos, mas sim, sem dúvida, através do aperfeiçoamento crescente de especulações e conjecturas, pela crítica, pela lógica das provas e refutações" (p. 18).

Este artigo assume que a Matemática pode ser uma actividade interessante e envolvente não só para o matemático, mas também para o professor e o aluno. Singh (1998) refere que Andrew Wiles, famoso pela sua prova de um teorema que desafiou sucessivas gerações de matemáticos, recorda o papel do seu próprio professor do ensino secundário no seu envolvimento em explorações matemáticas:

> Desde que pela primeira vez encontrei o Último Teorema de Fermat, em criança, ele tem sido a minha maior paixão... Tive um professor que realizara investigações em Matemática e que me emprestou um livro sobre Teoria dos Números, que me deu algumas pistas sobre como começar a atacá-lo. Para começar, parti da hipótese

> de que Fermat não conhecia muito mais Matemática do que a que eu aprendera. (p. 93)

Outro matemático, Jacques Hadamard (1945), afirma que não há grande diferença na actividade matemática de um aluno e um matemático quando eles estão trabalhando em situações desafiadoras:

> Entre o trabalho do aluno que tenta resolver um problema de Geometria ou Álgebra e o trabalho de criação [de um matemático], pode dizer-se que há apenas uma diferença de grau, uma diferença de nível, tendo ambos os trabalhos uma natureza semelhante. (p. 104)

Investigar, em Matemática, inclui a formulação de questões, que frequentemente evoluem à medida que o trabalho avança. Investigar envolve, também, a produção, a análise e o refinamento de conjecturas sobre essas mesmas questões. E, finalmente, envolve a demonstração e a comunicação dos resultados. O ponto de partida para uma investigação pode ser um problema matemático ou uma situação não-matemática (tanto de outras ciências e da tecnologia, como da organização social ou da vida diária). Quando procuramos obter uma melhor percepção da situação, estamos a "explorá-la". Mais tarde, quando a nossa pergunta é formulada de modo claro, dando unidade ao trabalho, podemos dizer que temos um "problema". A realização de uma investigação matemática envolve processos conscientes e inconscientes, sensibilidade estética, conexões e analogias com problemas matemáticos e situações não matemáticas. Tal como referem Davis e Hersh (1995) e Burton (2001), é levada a cabo de formas diferentes por pessoas com estilos cognitivos mais analíticos, visuais ou conceptuais, mas, para todos eles, constitui uma actividade envolvente e gratificante.

Podemos dizer que a "grande investigação" é que se realiza nas universidades, empresas e laboratórios. No entanto, o facto dessa investigação existir, ser legítima e ser por vezes muito útil, não significa que não possa existir mais nenhuma investigação. Pelo contrário, ao lado da "grande investigação" podem e devem existir outras formas de indagação por parte de outros actores sociais. Na verdade, na sua essência, "investigar" consiste em procurar compreender algo de modo aprofundado, tentar encontrar soluções adequadas para os problemas com que nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos, que deve permear todo o trabalho da escola, tanto dos alunos como dos professores.

2. Alunos investigam Matemática na sala de aula

Vamos considerar alguns exemplos de alunos que trabalham como investigadores matemáticos.

2.1. Regularidades numéricas. O primeiro exemplo vem de uma turma do 5.º ano (alunos de 10 anos de idade) conduzida pela professora Irene Segurado (ver Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998). A tarefa é a seguinte:

1. *Escreve em coluna os 20 primeiros múltiplos de 5.*
2. *Repara nos dígitos das unidades e das dezenas. Encontras algumas regularidades?*
3. *Investiga agora o que acontece com os múltiplos de 4 e 6.*

4. Investiga para outros números.

Esta tarefa foi apresentada no início de uma classe de 50-minutos. A professora tinha planeado a aula para ser realizada em trabalho em grupo, mas sentiu que os alunos, quando entraram, estavam muito agitados e decidiu trabalhar colectivamente com toda a turma. Pediu aos alunos para indicaram os múltiplos de 5 e escreveu-o no quadro. Os alunos começaram a procurar por regularidades:

Tatiana, levantando o braço, responde rapidamente: *O algarismo das unidades é sempre 0 ou 5, o que foi aceite pelos colegas, ecoando pela sala: é sempre 0; 5; 0; 5...*

Professora: *Mais?*

Octávio, com um ar feliz, indica: *O algarismo das dezenas repete-se: 0-0, 1-1, 2-2, 3-3...*

Carlos, agitado, intervém: *Descobri mais outra coisa... Posso ir ao quadro explicar? (...) No quadro, ligando os números com o giz, continuou: O 0 com o 5 dá 5, 0 com o 0 dá 0, 1 com o 5 dá 6, 1 com o 0 dá 1, 2 com o 5 dá 7, 2 com o 0 dá 2, 3 com o 5 dá 8, estão a perceber? Há uma sequência. Dá 5, salta um, dá 6, salta um, dá 7... Ou dá 0, salta um, dá 1, salta uma, dá 2... (Ponte et al., 1998, pp. 68-69)*

Vemos que os alunos foram capazes de identificar diferentes tipos de padrões. Assim, observaram padrões de repetição simples (como 0 5 0 5 ...) e padrões mais complexos, combinando crescimento linear e repetição (como 1 1 2 2 3 3 ...). Também identificaram padrões lineares como subsequências de padrões bastante complexos (0 5 1 6 2 7 3 8...).

Os alunos também analisaram padrões nos múltiplos de 4. Em seguida, voltaram-se para os múltiplos de 6, que foram colocados numa coluna ao lado dos múltiplos de 5 e 4:

0	0	0
5	4	6
10	8	12
15	12	18
20	16	24
25	20	30
30	24	36
35	28	42
40	32	48
45	36	54
50	40	60
55	44	66
60	48	72
65	52	78
70	56	84
75	60	90
80	64	96
85	68	102
90	72	108

As descobertas dos alunos foram chegando em catadupa, de tal forma que a professora sentiu dificuldade em registar e sistematizar suas contribuições:

O algarismo das unidades é sempre 0, 6, 2, 8 e 4.

O algarismo das unidades é sempre um número par.

O algarismo das dezenas não se repete de 5 em 5.

A professora procurou lidar com esse entusiasmo: *Calma! Vamos verificar se o que o que colega afirmou é verdade. Atenção! Olha! Olhem que interessante o que o colega descobriu!*

De repente, Sónia disse: *São os mesmos algarismos que para os múltiplos de 4*. Mesmo antes da professora ter percebido o alcance desta afirmação, Vânia continuou: *Estão é por outra ordem*. A professora percebeu que os alunos estavam a comparar os múltiplos de 4 e 6, e indicou-o à turma. Outros alunos continuaram:

Começa na mesma por 0.

Os outros algarismos estão ao contrário.

Há múltiplos de 4 que também são múltiplos de 6.

Os múltiplos de 6, a partir do 12, são alternadamente também múltiplos de 4.

Os alunos expressaram as suas generalizações em linguagem natural. Encontraram novamente padrões complexos de repetição (como 8 2 6 0 4 8 2 6 0 4 8...) e, mais interessante, foram capazes de comparar as características de diferentes sequências. Nesta actividade, desenvolveram o seu sentido do número, adquiriram uma melhor compreensão do comportamento dos múltiplos e fizeram muito cálculo mental.

Na sua reflexão, Irene Segurado indica que os alunos superaram todas as suas expectativas: "*Eu não tinha previsto a hipótese de comparar os múltiplos dos diferentes números, pois nunca os colocara em paralelo. Vivi por isso as suas descobertas com grande entusiasmo*" (p. 71). A professora também reflecte sobre as implicações de trabalhar com toda a turma, em comparação com o trabalho em pequenos grupos: "*O contributo de um dado aluno foi 'agarrado' por todos os seus colegas, conduzindo a um maior número de descobertas*" (p. 72). Poderia parecer que em temas curriculares do ensino básico, como a tabuada de multiplicação e os múltiplos e divisores, se podem fazer apenas exercícios de rotina. Este exemplo mostra que, pelo contrário, estes temas permitem a realização de muito trabalho exploratório e investigativo.

2.2. Como é o aluno típico da minha classe? Um segundo exemplo vem de uma turma do 6.º ano (alunos de 11 anos), da professora Olívia Sousa (2002). A tarefa foi organizada como um estudo estatístico: "*Supõe que se quer comunicar, a um aluno de um país distante, ou mesmo, quem sabe, a um extraterrestre, como são os alunos da tua turma*".[1] Isto foi feito para que os alunos fizessem diversas medições sobre o seu corpo e recolhessem dados sobre as suas famílias, o que geralmente gera neles altos níveis de entusiasmo.

Seis blocos de 90 minutos foram utilizados para realizar esta tarefa, com os alunos trabalhando em pequenos grupos. A professora dividiu a tarefa em quatro grandes etapas: (i) preparação das questões de investigação, (ii) recolha de dados,

[1] A ideia original é de Batanero (2001).

(iii) análise dos dados, e (iv) comunicação dos resultados. Em cada etapa, foram fornecidas instruções escritas aos alunos. Por exemplo, para a etapa 2, as indicações foram:

> *Discute com os teus colegas, sobre:*
>
> *1. Escreve na forma de pergunta cada uma das características que vais investigar.*
>
> *2. Que respostas pensas obter para as tuas perguntas?*
>
> *3. De que modo (através de observação, medição ou inquérito) podes obter as respostas às tuas perguntas?*
>
> *4. Prepara folhas de registo para os dados que vais recolher.*

As medidas estatísticas (média, mediana, moda) ainda não tinham sido ensinadas a esta turma. Neste estudo, uma decisão importante foi que os alunos deveriam trabalhar com base nos seus conhecimentos prévios destas noções, em vez de primeiro os ensinar formalmente e depois propor exercícios de aplicação dos conhecimentos ensinados. Assim, os alunos foram convidados a encontrar a moda (ou seja, "o valor mais frequente"), a mediana (o "valor" do meio), e a média (supondo que eles conheciam esta noção). Na verdade, os alunos não tiveram dificuldade em encontrar a moda. Para encontrarem a mediana levaram mais tempo, mas quando perceberam que poderia ordenar os valores, tornou-se relativamente fácil. Houve alguns problemas quando alguns se esqueceram de contar valores repetidos ou tomaram a mediana como a média dos valores extremos, mas a discussão na turma permitiu clarificar o conceito. E, quanto à média, os alunos já tinham uma forte noção intuitiva como algo a meio caminho entre dois valores:

Inês: Então, pomos 1 e 35.

Alexandre: 1 e 40.

Prof. Como é que chegaste ao 1 e 35? (...)

Inês e Estelle: Foi estimativa!

Inês: Nem é como o do Mauro (1,20m), nem como a minha envergadura (1,50m), é no meio.

Estelle: É entre...

Inês: É entre os dois.

Estelle: Do Mauro e da Inês.

Para encontrar a média de mais de dois números, os alunos, com a ajuda do professor, foram capazes de generalizar a noção intuitiva de média como a soma de dois números dividida por dois.

Na sua reflexão, Olívia Sousa considerou que a realização desta tarefa foi uma experiência de aprendizagem significativa, na qual os alunos trabalharam de forma integrada noções matemáticas de dois domínios, Estatística e Números e cálculo. Os números decimais obtidos a partir de medição de grandezas associadas ao corpo, deixaram de ser entidades abstractas, para passar a ser algo com significado. O trabalho com esses números – comparando, classificando e operando num contexto significativo – contribuiu para os alunos desenvolverem uma melhor compreensão a seu respeito. A professora considerou que o contacto com diferentes tipos de variáveis e diferentes maneiras de recolher, organizar e representar a informação significativa promoveu a compreensão dos alunos sobre a linguagem, os conceitos e os métodos estatísticos que foram muito além da simples memorização. Este exemplo mostra que uma investigação baseada na realidade dos alunos pode ser o ponto de partida para desenvolver a sua capacidade de investigação, para aprender novos conceitos de Matemática (neste caso, as noções estatísticas) e para praticar e consolidar os conhecimentos anteriormente aprendidos.

2.3. Como fazer ampliações? O exemplo seguinte refere-se a uma experiência realizada com alunos do 8º ano (alunos com 13 e mais anos) pelo professor João Almiro (2005). A tarefa proposta é a seguinte:

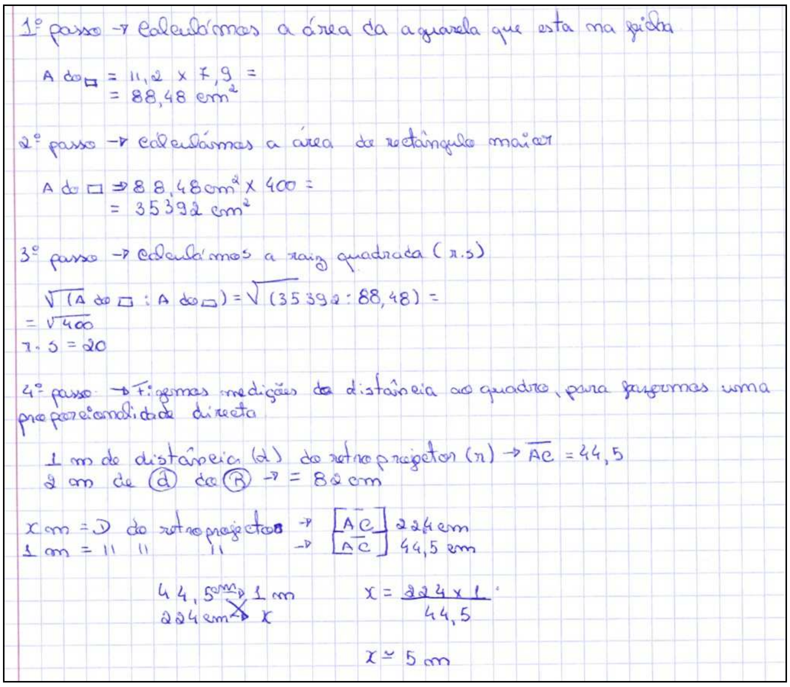
A professora de Educação Visual quer fazer a ampliação para papel de cenário da aguarela que se encontra em baixo (M. C. Escher, 1965)*, mas colocou a seguinte condição: a área da figura ampliada tem de ser 400 vezes maior do que a área desta. A professora vai fazer um acetato com a aguarela e projectá-lo, usando um retroprojector, no papel de cenário que irá pendurar numa parede. Mas tem um grande problema: A que distância é que deve colocar o retroprojector da parede? Como é que podemos ajudá-la? Elabora um relatório que inclua a descrição das tuas investigações, os cálculos que efectuaste, as tuas conjecturas e possíveis soluções para entregarmos à professora.*

Trata-se de um problema em que os alunos podiam usar estratégias de cunho exploratório. O interesse do professor era perceber o que é que os alunos eram capazes de fazer de modo autónomo. Preparou a sala com quatro retroprojectores, um para cada dois grupos, e distribuiu uma fita métrica e uma régua para cada grupo. A sala era um tanto apertada para os retroprojectores, mas conseguia-se trabalhar. Não deu instruções nenhumas, disse somente que tinha sido a professora de Educação Visual que lhe tinha pedido para colocar aquele problema. Claro que muitos dos alunos não acreditaram.

As reacções dos grupos foram diversas. Alguns ficaram completamente perdidos sem saber o que fazer, outros agarraram na tarefa e começaram a tentar definir uma estratégia. No questionário final um aluno referiu: "*Senti algumas dificuldades com os retroprojectores, pois no início não sabíamos por onde começar*". Contudo, o professor verificou com satisfação que todos os grupos perceberam que o rectângulo projectado teria que ter a largura e o comprimento 20 vezes maiores que o inicial, para que a área fosse 400 vezes maior. Os alunos já tinham resolvido vários problemas relacionados e foram capazes de mobilizar os seus conhecimentos.

A grande dificuldade dos alunos era perceber a que distância deviam colocar o retroprojector da parede para que o comprimento dos segmentos da figura aumentasse 20 vezes. Quase todos os grupos recortaram um rectângulo com as dimensões da aguarela da tarefa. Projectavam, mediam o que encontravam e depois viam quantas vezes é que o comprimento e a largura tinham aumentado. Rapidamente se aperceberam que não tinham espaço na sala para aumentar as dimensões 20 vezes, pelo que tinham que fazer cálculos para saber onde colocar o retroprojector.

O professor considerou espectacular o trabalho de um grupo. Os alunos perceberam que havia proporcionalidade directa entre a distância do retroprojector à parede e o número de vezes que as dimensões eram ampliadas e rapidamente resolveram o problema. Outros quatro grupos, ajudando-se muito uns aos outros, foram medindo e discutindo e quando um chegava a uma conclusão partilhava logo com os outros. A pouco e pouco foram avançando, por vezes com conjecturas interessantes que os outros grupos refutavam e provavam que não estavam certas. Seguindo os seus caminhos, foram chegando a soluções que o professor considerou aceitáveis. Um dos grupos que melhor trabalhou no decorrer desta aula entregou a seguinte resolução:



Os outros três grupos, sozinhos, não conseguiram avançar quase nada. Um deles apresentou imensas dificuldades, não fazendo nada sem uma ajuda constante. O professor ficou muito desiludido com estes grupos que, na sua perspectiva, "brincaram muito e produziram pouco".

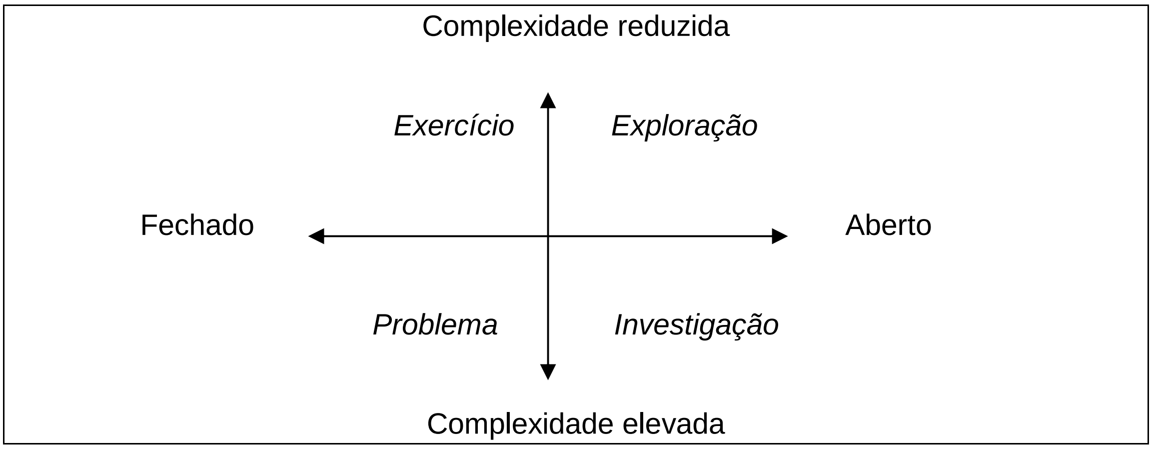
Alguns dos alunos (cerca de 1/5) não gostaram destas aulas. Um deles escreveu no questionário: "*Eu não gostei destas aulas, prefiro aulas normais a fazer* *exercícios, acho que aprendo muito mais nas aulas a fazer exercícios e a tirar dúvidas*". No entanto, a maioria dos alunos manifestou satisfação e reconheceu ter feito aprendizagens significativas. É o que nos diz este aluno:

> *Os problemas são um bocadinho mais complicados do que os das outras aulas, pelo menos o do retroprojector, em que tínhamos que pensar um bocado, desenvolver, tínhamos que pensar métodos diferentes, para conseguir o método ideal para ter o resultado certo. Tínhamos que descobrir o que era para fazer primeiro. Nos manuais, as perguntas estão directas, dizem logo o que temos que fazer.*

3. Diferentes tipos de tarefa para a aula de Matemática

O ensino-aprendizagem da Matemática assenta na actividade que os alunos levam a cabo na sala de aula e esta, por sua vez, depende muito das tarefas apresentadas pelo professor. O exercício é a tarefa mais comum na disciplina de Matemática[2] e tende a gerar um certo tipo de actividade. Outros tipos de tarefa, como os problemas e as investigações podem gerar outras tipos actividade, mais favorável à aprendizagem.

Podemos dizer que uma tarefa tem quatro dimensões fundamentais: o grau de complexidade, a estrutura, o contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. Conjugando as duas primeiras dimensões, obtemos quatro tipos básicos de tarefa:



Este esquema indica que os *exercícios* são tarefas de complexidade reduzida e estrutura fechada; os *problemas* são tarefas também fechadas e com elevada complexidade; as *investigações* têm um grau de complexidade elevado e uma estrutura aberta; e, finalmente, as *tarefas de exploração* são também abertas mas relativamente pouco complexas. Muitas vezes não se distingue entre tarefas de investigação e de exploração, chamando-se "investigações" a todas elas. Isso acontece porque é difícil saber à partida qual o grau de complexidade que uma

[2] Note-se que não é só em Matemática que se fazem exercícios. Eles existem em todas as disciplinas, das línguas à Educação Física, passando pelas ciências como a Física e a Química, e até nas artes como a Música, a Dança e o Teatro.

tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos. No entanto, a análise é mais clara se usarmos uma designação para as tarefas abertas menos complexas (explorações) e outra designação para as mais complexas (investigações) – isto, tendo por referência a capacidade usual dos alunos de cada nível etário.

Um *projecto*, no fundo, não é mais do que uma tarefa de investigação de um tipo particular, com um carácter relativamente prolongado. De facto, uma investigação chama-se muitas vezes "projecto de investigação" e pode demorar anos a concluir. Em contrapartida, certas investigações demoram um tempo relativamente curto, podendo realizar-se numa aula ou numa curta sequência de aulas. Tanto o projecto como a investigação comportam um carácter aberto – uma vez definida a ideia central, a concretização do objectivo requer ainda muito trabalho – e têm um grau de dificuldade considerável na procura da metodologia de trabalho, na superação das dificuldades, na organização e análise do material recolhido, em tirar conclusões, etc. O projecto, de resto, é um excelente exemplo de uma tarefa de longa duração enquanto se espera que as actividades de natureza estruturada, por via de regra, se resolvam num prazo relativamente curto. Deste modo, a dimensão tempo assume também um papel chave na caracterização das tarefas. No nosso caso, as tarefas propostas por Irene e Olívia assumiram o carácter de investigações, enquanto João apresentou aos seus alunos um problema.

A outra dimensão das tarefas diz respeito ao contexto referencial: a tarefa pode ser contextualizada numa *situação da realidade* ou formulada em termos *puramente matemáticos*. Skovsmose (2000) indica ainda um terceiro tipo de situações, a que chama de *"semi-realidade"*, que à primeira vista parecem reais mas que, na prática, são abstractas, pois nelas não se atende às propriedades dos objectos excepto aquelas que o contrato didáctico indica serem relevantes para a respectiva resolução. As tarefas formuladas em termos de realidade ou semi-realidade que aparecem no ensino da Matemática constituem exercícios, problemas, explorações e investigações, dependendo do seu grau de complexidade e da sua abertura.

Muitos trabalhos têm sido feitos em Portugal dando atenção ao processo de investigação em Matemática. Temos hoje já uma noção bastante clara das diversas fases de um processo típico de investigação, da formulação de questões até à produção, teste e refinamento de conjecturas, e daí às tentativas de prova e ao processo de divulgação de resultados (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003).

É de notar que as tarefas, embora sejam importantes, não determinam por si só o que acontece na sala de aula. Uma mesma tarefa pode dar origem a situações de aprendizagem muito diversas, dependendo do modo como é apresentada aos alunos, do modo como estes aceitam o desafio que lhes é proposto e, muito em especial, do modo como evolui a situação de trabalho na sala de aula. Trata-se de questões que vamos analisar de seguida.

4. A prática do professor na sala de aula

Tarefas exploratórias e investigativas adequadas criam oportunidades para o envolvimento dos alunos na Matemática. No entanto, a sua aprendizagem depende muito também de outros elementos da prática do professor, que se relacionam estreitamente com os papéis assumidos na sala de aula por todos os actores e a comunicação que se desenvolve.

4.1. Papéis na sala de aula. As tarefas são importantes, mas ainda mais importante é a maneira como elas são abordadas na sala de aula. Uma aula em que os alunos trabalham em explorações ou investigações tem, frequentemente três segmentos principais (Christiansen & Walther, 1986): (i) introdução, (ii) desenvolvimento do trabalho, e (iii) apresentação de resultados e discussão. Na introdução, o professor e os alunos "negoceiam" a tarefa a realizar – qual é a formulação da tarefa, como interpretá-la, e quais as formas de trabalho a prosseguir. De seguida, no desenvolvimento do trabalho, os alunos trabalham por si de modo autónomo, individualmente, em pares ou em pequenos grupos. Outras vezes, trabalham de modo colectivo, com classe, com a direcção do professor. E, finalmente, chega o momento da apresentação e discussão dos resultados, onde toda a classe compartilha as ideias geradas nos diferentes grupos e se institucionaliza o novo conhecimento matemático.

Os papéis de professores e alunos mudam consideravelmente nos três segmentos de uma aula com tarefas exploratórias e investigativas. No entanto, em cada segmento, os alunos têm voz e espera-se que tenham iniciativas. Eles têm a responsabilidade de usar argumentos lógicos para convencer os outros da veracidade de suas soluções, defendendo os seus pontos de vista, assumindo assim o estatuto de autoridade intelectual (Lampert, 1990). Isto é completamente diferente da aula em que o professor presta “esclarecimentos” e mostra exemplos, explica "como fazer" os diferentes tipos de exercícios, surgindo como a única autoridade na sala de aula, apoiado pelo manual escolar.

4.2. Comunicação na sala de aula. Em muitas aulas de Matemática, o professor domina o discurso, seja fornecendo explicações e exemplos ou colocando questões e dando um retorno imediato aos alunos. Essas aulas tendem a seguir a sequência IRF – o professor Inicia com uma pergunta, um aluno Responde e o professor fornece Feedback, fechando o ciclo, quer confirmando ou rejeitando a resposta dada. No entanto, existem outros padrões de discurso que podem ser seguidos na sala de aula. Na verdade, existem muitos tipos diferentes de perguntas que o professor pode usar (por exemplo, perguntas de focalização, de confirmação, e de inquirição – ver, por exemplo, Ponte e Serrazina, 2000), levando a padrões de comunicação muito diferentes (Wood, 1994).

Os alunos podem ser encorajados a compartilhar ideias com seus colegas, quer trabalhem individualmente, em pares, em grupos, ou como uma só classe. Os momentos de discussão na sala de aula são muito importantes pela possibilidade que abrem de negociação de significados (Bishop & Goffree, 1986). Em tais discussões, diferentes representações são contrastadas, as representações convencionais são analisados em detalhe, e é fixado o uso correcto da linguagem matemática. Este é também o momento em que as principais ideias relacionadas com a tarefa são clarificadas, formalizada e institucionalizadas como novo conhecimento, daí em diante aceite como tal na comunidade da sala de aula.

Durante o trabalho em grupo, a comunicação que ocorre entre os alunos pode variar fortemente. Por vezes, há uma verdadeira troca de ideias e argumentos. Noutros casos, apenas um ou dois alunos se envolvem activamente no trabalho e os demais limitam-se a observar ou acabam por se distrair. A forma como o professor interage com os alunos de um grupo é também de grande importância. Se não responde às perguntas dos alunos, estes podem perder sua motivação para continuar a trabalhar na tarefa. Se dá a resposta, ele anula a maior parte do benefício que a tarefa pode ter para aprendizagem dos alunos. Isto mostra como o professor tem que lidar permanentemente com muitos dilemas na condução da comunicação na sua sala de aula.

4.3. Dois estilos de práticas pedagógicas. A consideração de diferentes tipos de tarefas, papéis e padrões de comunicação fornece uma caracterização dos dois principais estilos de práticas de ensino de Matemática que encontramos hoje nas salas de aula em todo o mundo em diferentes níveis de ensino. Podemos chamá-los de ensino "directo" (Brooks & Suydam, 1993). e ensino para uma "aprendizagem exploratória" (Ponte, 2005).

Ensino directo	Aprendizagem exploratória
Tarefas ▪ Tarefa padrão: Exercício; ▪ As situações são artificiais; ▪ Para cada problema existe uma estratégia e uma resposta certa.	Tarefas ▪ Variedade: Explorações, Investigações, Problemas, Projectos, Exercícios; ▪ As situações são realísticas; ▪ Com frequência, existem várias estratégias para lidar com um problema.
Papéis ▪ Os alunos recebem "explicações"; ▪ O professor e o manual escolar são as únicas autoridades na sala de aula; ▪ O professor mostra "exemplos" para os alunos "aprenderem a fazer".	Papéis ▪ Os alunos recebem tarefas para descobrirem estratégias para as resolver; ▪ O professor pede ao aluno para explicar e justificar o seu raciocínio; ▪ O aluno é autoridade se usar raciocínio lógico para fundamentar as afirmações.
Comunicação ▪ O professor coloca questões e fornece feedback imediato (sequência I-R-F); O aluno coloca "dúvidas".	Comunicação ▪ Os alunos são encorajados a discutir com os colegas (trabalhando em grupos ou pares); ▪ No fim de um trabalho significativo, fazem-se discussões com toda a turma; Significados negociados na sala de aula.

Evidentemente, a prática de sala de aula não depende apenas do professor. Também depende do aluno bem como de diversos factores externos. Algumas condições tornam muito difícil a um professor passar do ensino directo para a aprendizagem exploratória. Uma aula com a exploração e tarefas de investigação é muito mais complexa de gerir do que uma aula com base na exposição de conceitos e de realização de exercícios, já que é impossível prever todas as sugestões e questões que os alunos possam apresentar. Além disso, os alunos não sabem trabalhar a partir deste tipo de tarefa e é necessário que o professor os ajude a fazer essa aprendizagem. Não obstante as suas dificuldades e limitações, este trabalho é essencial para uma aula de Matemática que visa objectivos educacionais relacionados com compreensão e raciocínio dos alunos, modelação e a capacidade de resolução de problemas.

Uma tarefa poderosa pode criar um ambiente interessante. No entanto, para terem uma experiência de aprendizagem significativa em Matemática, os alunos precisam de trabalhar por um tempo prolongado num campo de problemas – pelo menos por várias aulas. Durante esta actividade, eles têm a oportunidade de compreender os aspectos não triviais dos novos conhecimentos, relacioná-los com o seu conhecimento anterior e desenvolver novas representações e estratégias. Isso acontece no quadro do trabalho com unidades de ensino, que (i) se podem apoiar numa perspectiva sobre a trajectória de aprendizagem dos alunos (Simon & Tzur, 2006) relativa a um determinado conceito e (ii) podem apoiar o desenvolvimento dos alunos nas diversas capacidades transversais da aprendizagem matemática, incluindo a capacidade de representar, raciocinar, estabelecer conexões, resolver problemas e comunicar. Witmann (1984) indica que a concepção de unidades de ensino poderosos, de modo coerente, é uma tarefa importante para os investigadores em educação matemática. Os professores fazem isso constantemente, usando seu conhecimento profissional (Ruthven & Goodchild, 2008), seleccionando e ajustando os recursos disponíveis, especialmente os manuais escolares.

O que é necessário a um professor para realizar trabalhos de cunho exploratório e investigativos na sua sala de aula? Uma análise dessa actividade e suas exigências contextuais sugere duas áreas principais – uma relação pessoal positiva com as explorações e investigações matemáticas e uma capacidade para usar tais tarefas na sua prática profissional. Estas não são competências que os professores desenvolvam espontaneamente um dia para o outro. Em seguida, analiso o que está envolvido na formação de professores para a realização de um ensino deste tipo.

5. Projectos de investigação sobre a sua própria prática

5.1 Aprendizagens profissionais nas diversas experiências. Mostrei algumas situações que ocorreram na sala de aula durante a realização de tarefas que, por uma razão ou por outra, assumem um carácter exploratório ou de investigação. Estas situações desenvolveram-se a partir de tarefas diferenciadas – um problema e duas tarefas de exploração/investigação. Em todos os casos se registaram aprendizagens importantes por parte dos alunos. No entanto, em todos os casos houve também problemas com que os professores tiveram de lidar. Irene Segurado tinha previsto que a aula iria decorrer em trabalho de grupo e sentiu necessidade, no início, de mudar a forma de trabalho, para uma aula colectiva. Olívia Sousa teve problemas com a gestão do tempo, uma vez que a realização da investigação se prolongou mais que o previsto. Pelo seu lado, João Almiro gostou do trabalho de vários grupos, mas sentiu bastante frustração com o trabalho de outros. Além disso, indica que a maioria dos alunos gostou destas aulas e sentiu ter aprendido, mas reconhece que alguns alunos preferem aulas com exercícios, onde sentem aprender mais.

Ou seja, em todos os casos há importantes benefícios em termos de aprendizagens dos alunos, mas também há problemas que se vão colocando. Esses problemas têm a ver com aspectos referentes ao envolvimento dos alunos no trabalho (que, por vezes, é muito difícil de conseguir), com as suas capacidades e conhecimentos (frequentemente, abaixo do que seria de desejar), e também com a previsão tudo o que se pode passar numa aula deste tipo, de modo a tomar em cada momento a melhor decisão relativamente ao modo de prosseguir.

***5. 2. Investigar a sua própria prática*.** As experiências anteriores são exemplos de investigações feitas por professores sobre a sua própria prática. Por todo o mundo são cada vez mais os professores que investigam. Alguns fazem-no inseridos em programas de mestrado e doutoramento, outros no quadro de projectos que realizam nas suas escolas. No entanto, a investigação sobre a sua própria prática não diz apenas respeito a professores. É uma actividade que interessa igualmente a técnicos de orientação escolar e da administração educativa, psicólogos, formadores de professores e professores do ensino superior. Assistimos, em muitos países, ao desenvolvimento de um movimento cada vez mais alargado de profissionais da educação e de áreas como a saúde e o serviço social que investigam problemas relacionados com a sua própria prática.

Isso acontece porque estes profissionais defrontam-se na sua actividade com problemas de grande complexidade. Em vez de esperar por soluções vindas do exterior, eles procuram investigar directamente esses problemas. Tal investigação, para além de poder ajudar ao esclarecimento e resolução desses problemas, contribui igualmente para o desenvolvimento profissional dos participantes e para o aperfeiçoamento das respectivas organizações. Além disso, contribui para o desenvolvimento do conhecimento e da cultura profissional nesse campo de prática e, em certos casos, traz novos elementos para o conhecimento e a cultura geral da sociedade.

Irene, Olívia, João, os professores envolvidos nas experiências acima indicadas, desenvolveram-se profissionalmente. Para isso, foram importantes não só as investigações em si como o trabalho de divulgação das suas experiências, elaborando artigos, publicados em livros e revistas, o que permitiu um olhar mais aprofundado sobre as mesmas. Igualmente importante foi a apresentação oral das experiências em conferências e comunicações em encontros e congressos. Este trabalho constitui, sem dúvida, uma importante mais valia para a educação matemática, mostrando caminhos que pode seguir a mudança curricular e a renovação das práticas profissionais.

***5.3. O papel da colaboração*.** As experiências atrás referidas foram, todas elas, feitas no quadro de grupos colaborativos (Boavida & Ponte, 2002). Na verdade, a colaboração, permitindo conjugar os esforços de diversas pessoas, constitui uma estratégia de grande valor para enfrentar os problemas da prática profissional.

Várias pessoas a trabalhar em conjunto têm mais ideias, mais energia e mais força para derrubar obstáculos do que uma pessoa trabalhando sozinha e podem capitalizar na diversidade das competências individuais.

A colaboração pode ocorrer entre professores, ajudando a caracterizar os problemas com que eles se defrontam, definir estratégias de actuação, avaliar resultados da acção, criando um ambiente de trabalho conjunto positivo e estimulante. Quando um dos membros do grupo está num momento menos bom, recebe o apoio dos outros membros. Quando um membro está mais inspirado, contagia todo o grupo.

Pode existir igualmente colaboração entre actores educativos diversos, como educadores matemáticos, matemáticos, psicólogos, sociólogos, animadores culturais, encarregados de educação, etc. Um grupo mais diversificado tem maior dificuldade em funcionar, pois os participantes têm muitas vazes estatutos, valores e linguagens diferentes e estes nem sempre se conseguem harmonizar facilmente. No entanto, a diversidade pode ser profundamente enriquecedora. Um grupo heterogéneo tem uma capacidade de acção acrescida, dada a variedade de competências dos seus membros.

5.4. A investigação como elemento da cultura profissional. A valorização de uma cultura de investigação entre os professores não depende apenas de uma actuação mais ou menos voluntarista no plano individual. Pressupõe, pelo contrário, um papel fundamental das instâncias colectivas onde os professores exercem a sua actividade profissional, com destaque para as escolas, os movimentos pedagógicos e as estruturas associativas. Neste caso, a experiência de Irene processou-se no quadro de um projecto de investigação, a de Olívia no âmbito dos seus estudos de mestrado, e a de João no quadro de um projecto associativo.

Um dos maiores obstáculos à afirmação de uma cultura de investigação nos professores é a oposição entre teoria e prática. Nesta oposição, a teoria é frequentemente apontada como algo fantasioso, inadequado para a interpretação da realidade, inútil ou até pernicioso. A prática, pelo seu lado, é vista como o campo onde tudo é natural e inevitável, onde todos os problemas encontram sempre justificação externa (sejam os alunos, os encarregados de educação, os explicadores, a falta de condições de trabalho ou a política do Ministério da Educação). Trata-se de uma concepção estranha de teoria e prática. Na verdade, teoria e prática são duas faces de uma mesma moeda. Coexistem sempre. Onde há uma teoria há uma prática e onde há uma prática há uma teoria. O que é preciso é questionar se a teoria serve ou não serve e se a prática é recomendável ou é problemática. Há muitas teorias que não servem, mas há outras que podem ter grande utilidade. Também há muitas práticas inadequadas, ao lado de outras exemplares. Pôr em diálogo, em cada situação, a teoria e a prática, é uma condição fundamental para a compreensão dos problemas e um passo essencial para a sua resolução. Isso consegue-se muito melhor no plano colectivo do que no plano individual, e aí está mais uma razão para sublinhar a importância do nível colectivo de actuação profissional do professor.

Na verdade, muitos passos têm ainda de ser dados para que se afirme uma verdadeira cultura de investigação no seio dos professores. Esta cultura não deve encarar-se como uma mera transposição do que se passa noutras comunidades académicas (como os matemáticos ou os educadores matemáticos) ou profissionais (como os médicos ou os engenheiros). Pelo contrário, deve equacionar-se no quadro da afirmação de uma nova profissionalidade docente.

A concluir

Procurando defender a ideia que pode haver uma ligação estreita entre ensinar, aprender e investigar, apresentei diversas situações em que os alunos fizeram explorações e investigações matemáticas na sala de aula. Mostrei, também, que essas situações correspondem a experiências em que os professores investigaram a sua própria prática e sublinhei a importância da dimensão colaborativa. Indiquei, finalmente, o papel da dimensão institucional e associativa para o desenvolvimento de uma nova cultura profissional, onde a teoria e a prática surjam ligadas de modo mais estreito. A minha argumentação teve por base uma perspectiva alargada da noção de investigação, como uma actividade onde todos podem participar, em contraponto com uma perspectiva elitista e restritiva, que reserva esta actividade para os "investigadores profissionais".

No entanto, antes de concluir, parece-me ser necessário sublinhar que me parece importante evitar a banalização deste conceito. A investigação requer uma racionalidade muito diferente da simples opinião. Pressupõe, da parte de quem a realiza, um esforço de clareza nos conceitos, nos raciocínios e nos procedimentos. Exige reflexão, debate e crítica aprofundada pela comunidade dos pares. Isso requer, naturalmente, que as ideias sejam apresentadas de forma suficientemente detalhada e rigorosa para poderem ser compreendidas e debatidas. Requer uma racionalidade argumentativa mais sólida do que a simples justificação circunstancial e exige que se saiba qual o enquadramento teórico geral por onde essa racionalidade pode ser aferida.

Investigar não resulta de se conhecer e aplicar umas tantas técnicas de recolha de dados, sejam questionários ou entrevistas, e de fazer uma análise estatística ou de conteúdo. Pelo contrário, pressupõe sobretudo uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo. Ao investigarmos, sabemos que esse trabalho tem as suas potencialidades mas também tem os seus limites. É útil para atingir certos objectivos, mas não o será para outros. Nem tudo se pode aprender através da investigação. Mesmo tendo esses limites, trata de uma poderosa forma de construção do conhecimento tanto para o aluno como para o professor, que importa, por isso, promover no ensino da Matemática e na cultura profissional dos professores.

Referências

Almiro, J. P. (2005). Materiais manipuláveis e tecnologias na aula de Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 275-316). Lisboa: APM.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: GEEUG, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Bishop, A.; Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Boavida, A. M.; Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Brooks, K.; Suydam, M. (1993). Planning and organizing curriculum. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 232-244). Reston: NCTM.

Burton, L. (2001). Research mathematicians as learners – and what mathematics education can learn from them. *British Educational Research Journal, 27*(5), 589-599.

Christiansen, B.; Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Davis, P.; Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Hadamard, J. (1945). *Psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press.

Kline, M. (1974). *Mathematics in Western culture* (ed. original de 1953). London: Oxford University Press.

Lakatos, I. (1978). *A lógica do descobrimento matemático: Provas e refutações*. Rio de Janeiro: Zahar.

Lampert, M. (1990). *When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching*. American Educational Research Journal, *27*(1), 29-63.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Brocardo, J.; Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H.; Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P.; Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ruthven, K.; Goodchild, S. (2008). Linking research with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 565-592). New York, NY: Routledge.

Simon, M. A.; Tzur, R. (2006). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 91-104.

Singh, S. (1998). *A solução do último teorema de Fermat*. Lisboa: Relógio d'Água.

Skovsmose, O. (2000). *Cenários para investigação*. Bolema*, 14*, 66-91.

Sousa, O. (2002). Investigações estatísticas no 6º ano. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). Lisboa: APM.

Steen, L. A. (1990). Pattern. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 1-10). Washington, DC: National Academy Press.

Wittmann, E. C. (1984). *Teaching units as the integrating core of mathematics education*. Educational Studies in Mathematics, 15, 25-36.

Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of the mathematics classroom. In S. Lerman (Ed.), *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (pp. 149-168). Dordrecht: Kluwer.