UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas167-182
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Martha Iglesias

Ideas para Enseñar

Estudio de las Funciones Reales de una Variable Real en un Ambiente de Geometría Dinámica

Rolando García

Resumen

El concepto de función, es uno de los pocos conceptos presentes en todas las áreas de la Matemática (Geometría, Análisis, Álgebra, Estadística y Probabilidad). En consecuencia, un correcto abordaje del mismo garantiza un desenvolvimiento exitoso de los profesores en formación en cursos posteriores de la Especialidad de Matemática y, más tarde, en su desempeño profesional.

Abstract

The function concept, is one of the few present concepts in all the areas of the Mathematical one (Geometry, Analysis, Algebra, Statistic and Probability). Consequently, a correct boarding of the same guarantees a successful unfolding of the professors in formation in later courses of the Specialty of Mathematical and, later, in their professional performance.

Resumen

O conceito de função, é um dos poucos conceitos presentes em todas as áreas da Matemática (Geometría, Análise, Álgebra, Estatística e Probabilidade). Em consequência, um correcto abordaje do mesmo garante um desenvolvimiento exitoso dos professores em formação em cursos posteriores da Especialidad de Matemática e, mais tarde, em seu desempenho profissional.

Introducción

En este artículo, se presentará una secuencia didáctica en la que se pretende analizar la gráfica de una Función Real de una Variable Real construida con las herramientas que posee el software de Geometría Dinámica GeoGebra, teniendo en consideración los sistemas de representación y principios de graficación. Con el fin de alcanzar este objetivo general, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar los distintos tipos de Funciones Reales de una Variable Real.
2. Identificar los distintos sistemas de representación de las Funciones Reales de una Variable Real.
3. Identificar los distintos tipos de principios de graficación.

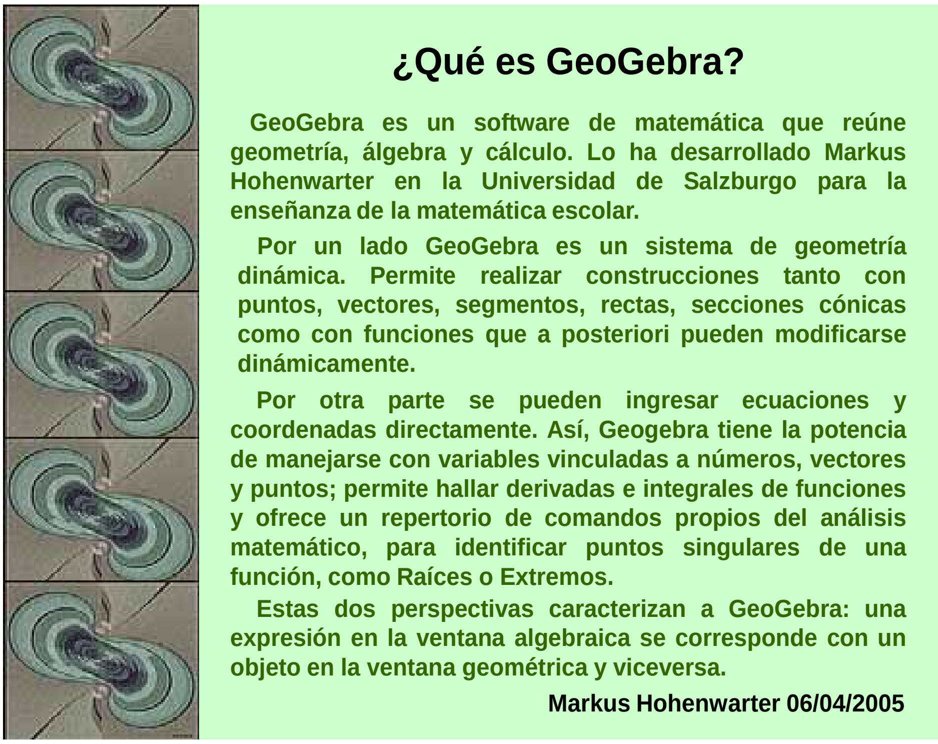
4. Construir las gráficas de las Funciones Reales de una Variable Real a través del software de Geometría Dinámica GeoGebra.
5. Determinar dominio y rango de una Función Real de una Variable Real.
6. Determinar intervalos de crecimiento o decrecimiento de una Función Real de una Variable Real.
7. Determinar máximo o mínimo de una Función Real de una Variable Real.

Esta secuencia didáctica o taller se organizó en nueve sesiones de trabajo, cada una con tres horas de duración, teniendo en consideración a las fases de aprendizaje (Información, Orientación Dirigida, Explicitación, Orientación Libre e Integración), propuestas en el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Las Funciones Reales de una Variable Real abordadas en este estudio son: Afín, Cuadrática, Raíz Enésima, Definidas a Trozos, Logarítmica, Exponencial y Trigonométricas. El presente taller está dirigido a docentes en formación en el ámbito de la Educación Superior (1er Semestre). Las actividades previstas para cada una de las funciones mencionadas anteriormente se describen brevemente a continuación.

Sesión de Trabajo Nº 1

Información: En esta fase se trabajó con una presentación en PowerPoint, relacionada con el Software de Geometría Dinámica GeoGebra (Hohenwarter, 2005). A continuación se presentan algunas diapositivas sobre las características relevantes del GeoGebra y su autor Markus Hohenwarter. También, en esta sesión, es importante familiarizar a los estudiantes participantes en el manejo del software.



Markus Hohenwarter

Nació el 24 de Mayo de 1976, en Salzburgo, Austria.

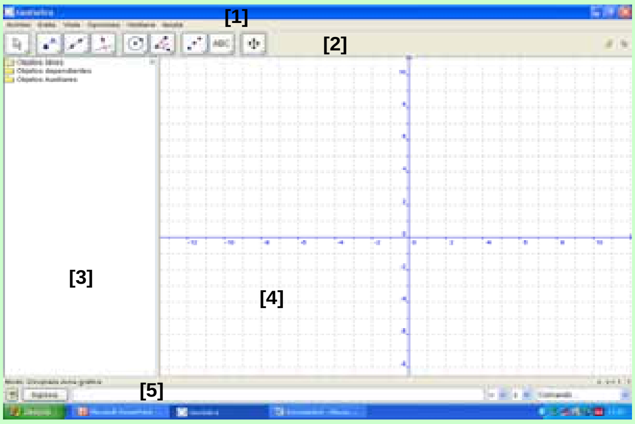
El proyecto de GeoGebra dió inicio en el 2001 en el curso de la tesis de maestría y avanzó hacia la tesis de doctorado en Educación Matemática en la Universidad de Salzburgo (Austria).

Marzo de 2002 obtiene el grado de Magíster en Matemáticas y Psicología en la Universidad de Salzburgo.

Junio de 2002 obtiene el grado de Magíster en Computación aplicada a la Ciencia en la Universidad de Salzburgo.

Febrero de 2006 obtiene el grado de Doctor en Educación Matemática, Summa cum Laude, Universidad de Salzburgo. Disertación: GeoGebra - Material Educativo y Aplicaciones en la Enseñanza de la Matemática

Interfaz de GeoGebra

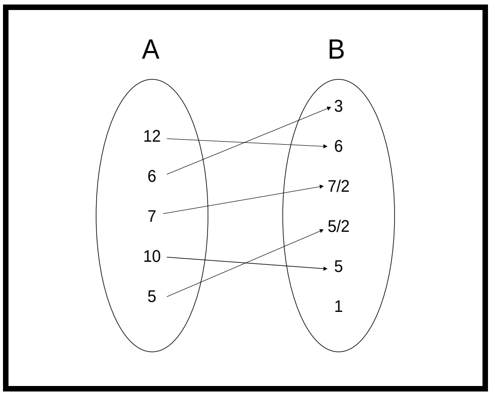
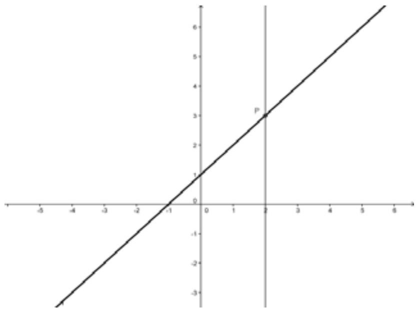
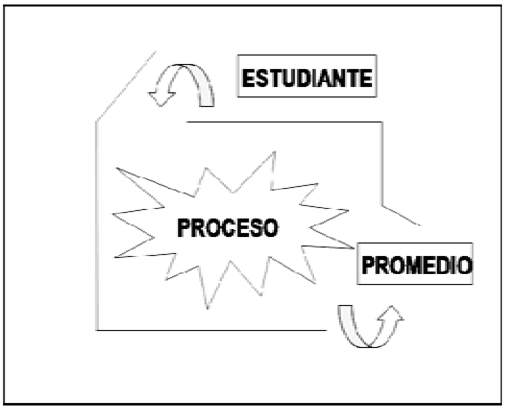


[1] Barra de Menús
[2] Barra de Herramientas
[3] Ventana Algebraica
[4] Zona Gráfica
[5] Campo de Entrada de Comandos

Sesión de Trabajo N^o 2

Información: En esta fase se trabajó con una presentación en PowerPoint, relacionada con los Sistemas de Representación Geométricos (Diagramas de Venn, Gráfica, Máquina Funcional), y Algebraicos (Descriptivo, Fórmula, Par Ordenado, Regla y Tabla de Valores) de las Funciones Reales de una Variable Real propuestos por Rojas y Salazar (1985) y Escobar (1998).

Visualicemos esta clasificación a través de algunos ejemplos.

Sistema de Representación Geométrico	Descripción	Representación
Diagramas de Venn	Estos diagramas se usan para mostrar gráficamente la relación matemática o lógica entre diferentes conjuntos, representando cada conjunto mediante un óvalo o círculo. Este tipo de representación es útil cuando los conjuntos involucrados poseen pocos elementos.	Sean los conjuntos: $A=\{12,6,7,10,5\}$ y $B=\left\{3,6,\frac{7}{2},\frac{5}{2},5,1\right\}$ y la relación "*es mitad de*". 
Gráfica	Dada una gráfica en R^2 la misma representa una función, si al trazar una recta vertical, ésta corta a la gráfica a lo más en un punto.	
Máquina Funcional	Esta consiste en una simple caja con un agujero en su parte superior llamado entrada y un agujero en la parte inferior llamado salida, la idea es introducir "objetos" y de acuerdo al tipo de proceso interno que acontece en la caja, saldrán "objetos" dependientes de los que entraron.	Consideremos una máquina funcional la cual asigna a estudiantes su promedio de calificaciones. Por ejemplo si se introduce el nombre del estudiante sale el número que representa su promedio. 

<table>
<tr><th>Sistema de Representación Algebraico</th><th>Descripción</th><th>Representación</th></tr>
<tr><td>Descriptivo</td><td>La función se especifica utilizando el lenguaje verbal mediante una descripción de la misma.</td><td>Consideremos la función que asigna a cada elemento del conjunto de partida, el cuadrado del elemento más el doble del elemento menos cinco.</td></tr>
<tr><td>Fórmula</td><td>Se da una fórmula explícita $y = f(x)$ que define a la variable y implícitamente como función de x.</td><td>$y = 2x - 1$</td></tr>
<tr><td>Par Ordenado</td><td>Una función es la colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (a,b) y (a,c) pertenecen ambos a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.</td><td>Sea $M = \{(1,5),(7,8),(2,3)\}$.
Nótese que no existen dos pares ordenados diferentes que posean el mismo primer número.</td></tr>
<tr><td>Regla</td><td>Una función es una regla cualquiera que hace corresponder números a ciertos otros números, no necesariamente una regla que puede ser expresada mediante una fórmula algebraica; ni tampoco necesariamente una regla a la que sea posible encontrar una aplicación en la práctica.</td><td>Sean los conjuntos $E = \{1,2,4,6\}$ y $F = \{1,8,64,216,343\}$. Una regla le hace corresponder a los elementos del conjunto E, su cubo en los elementos del conjunto F, es decir:
$(1)^3 = 1, \quad (2)^3 = 8$
$(4)^3 = 64, \quad (6)^3 = 216$</td></tr>
<tr><td>Tabla de Valores</td><td>Dada una tabla de dos columnas A y B respectivamente, donde a cada elevento de A se le hace corresponder un único elemento de B, es decir, cualquier elemento de la columna A no aparece en dos filas diferentes.</td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>16</td></tr></table></td></tr>
</table>

Sesiones de Trabajo N° 3 y 4

En estas sesiones, se estudiaron la Función Afín y la Función Cuadrática. Para cada una de estas funciones, se elaboró una hoja de trabajo, en la cual se destacaban los siguientes aspectos: algunas nociones básicas sobre la función objeto de estudio, sistemas de representación geométrico y algebraico de la misma y las actividades que se desarrollarían. A manera de ejemplo, se presentan algunos aspectos tratados en la hoja de trabajo sobre la Función Afín.

<table>
<tr><th colspan="2">FUNCIÓN AFÍN</th></tr>
<tr><td>Nociones Básicas sobre Funciones</td><td>Una función polinómica definida de R en R, la cual se denota $P: R \to R$ es una función que se escribe de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales denominados coeficientes, con a_n coeficiente de x^n, a_0 coeficiente de x^0, $(x^0 = 1)$.

A cada uno de estos sumandos $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se les denominan términos.

Los números naturales $n, n-1, n-2, \ldots$ en los superíndices determinan el exponente de cada término. El mayor de los exponentes determina el grado del polinomio.

Se llama función afín a la función de la forma $P(x) = a_1 x + a_0$ donde $a_1, a_0 \in R$. La representación gráfica de una función afín es una recta. El número real a_1 se denomina pendiente de la recta y, el número real a_0 se llama la ordenada en el origen, es decir a_0 representa la intersección de la recta y con el eje de las ordenadas, en consecuencia esta intersección tiene como coordenadas $(0, a_0)$.

En una función afín el exponente de las variables x e y son iguales a 1. La expresión $y = a_1 x + a_0$ puede llamarse: ecuación de la recta.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Sistemas de Representación Geométrico y Algebraico</td>
<td>
Instrucciones: A continuación se presenta una lista de instrucciones útiles para el ingreso de algunos objetos matemáticos en la zona gráfica y la ventana algebraica, a través del campo de entrada de comandos o los botones de la barra de herramientas del software GeoGebra.
<table>
<tr><th>OBJETO MATEMÁTICO</th><th>BOTÓN EN LA BARRA DE HERRAMIENTAS</th><th>CAMPO DE ENTRADA DE COMANDOS (SINTAXIS)</th></tr>
<tr><td>Pendiente</td><td>-</td><td>Pendiente
$Pendiente[\mathrm{Re}cta]$</td></tr>
<tr><td>Punto</td><td>Botón 2
Opción: Nuevo Punto</td><td>Punto
Un punto en el plano se puede ingresar también de la siguiente forma: $A=(0,0)$.</td></tr>
<tr><td>Recta</td><td>Botón 3
Opción: Recta a través de dos puntos</td><td>Recta
$\mathrm{Re}cta[Punto, Punto]$
Nota: También se puede ingresar la ecuación de la recta de la siguiente forma: $y=3x-7$ ó $g(x)=3x-7$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Actividades</td>
<td>
1. Representa en la misma pantalla las siguientes rectas:
$y=2, \quad y=1, \quad y=0, \quad y=-1, \quad y=-2$,
a) ¿Qué tienen en común y en que se diferencian?,
b) ¿Qué tipo de función representan cada una de las rectas mencionadas anteriormente?,
c) ¿Cuál es el dominio y el rango de las funciones antes descritas?,
d) ¿La función $f(x)=2$ posee punto máximo? ¿Punto mínimo?,
e) ¿f es creciente?,
f) ¿Al graficar las funciones anteriores notaste algún cambio?, en caso afirmativo, indícalo.
</td>
</tr>
</table>

	2. Represena las siguientes rectas de ecuaciones: $y=-3x,\quad y=-x,\quad y=x,\quad y=3x,\quad y=7x$, y responde las siguientes cuestiones: a) Identifica cada una de las pendientes de las rectas mencionadas anteriormente, b) Identifica la ordenada en el origen de cada una de las rectas, c) ¿En qué se diferencian las ecuaciones y representación gráfica de las rectas $y=-3x,\quad y=-x$, de las restantes?, d) ¿Cuál es el dominio y el rango de la función $g(x)=-3x$?, e) ¿La función *g* posee punto máximo?, y ¿Punto mínimo?, e) ¿Es *g* creciente?, f) ¿Al graficar las funciones $h(x)=x$ y $t(x)=-x$, notaste algún cambio? En caso afirmativo, señálalo.
	3. Representa las siguientes rectas de ecuaciones: $y=3x-3,\quad y=3x-2,\quad ,y=3x-1,\quad y=3x,\quad y=3x+1$, y responde: a) Identifica cada una de las pendientes de las rectas mencionadas anteriormente, b) Identifica la ordenada en el origen de cada una de las rectas, c) ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian las ecuaciones y representación gráfica de las rectas de esta actividad?.
	4. Escribe en cada caso la función que se asocia a cada número y luego represéntala en el software, a) El mismo número, b) dos menos el triple del número, c) seis veces el número más uno, d) Un medio del número más tres.
	5. Un taxista cobra Bs. 8 por buscar un pasajero a su casa y además Bs. 0,2 por cada kilómetro que recorre. a) Describe lo que cobrará por cada kilómetro recorrido en función de la distancia, b) ¿Cuánto cobrará por llevar a un pasajero a 15, 20 y 50 kilómetros de su casa?

Sesiones de Trabajo Nº 5 y 6

En estas sesiones, se estudiaron la Función Raíz Enésima y las Funciones Definidas a Trozos. A continuación, se describirán ciertos aspectos tratados en la hoja de trabajo sobre las Funciones Definidas a Trozos.

<table>
<tr><th colspan="2">FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS</th></tr>
<tr><td>Nociones Básicas sobre Funciones</td><td>Una función definida a trozos $F : R \to R$ está constituida por un número finito de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ donde el dominio de cada una de estas funciones es un subconjunto de los números reales, es decir; $Dom\ f_i \subset R, \quad 1 \le i \le n$ y disjuntos dos a dos $Dom\ f_i \cap Dom\ f_j = \phi \quad para \quad i \ne j$. Además el dominio de F es la unión de los dominios de las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$, en símbolos: $Dom\ F = \bigcup_1^n Dom\ f_i$ y $F(x) = f_i(x)$, si $x \in Dom\ f_i$.</td></tr>
<tr><td>Sistemas de Representación Geométrico y Algebraico</td><td>Instrucciones:
A continuación se presenta una lista de instrucciones útiles para el ingreso de algunos objetos matemáticos en la zona gráfica y la ventana algebraica, a través del campo de entrada de comandos del software GeoGebra.
<table>
<tr><th>OBJETO MATEMÁTICO</th><th>CAMPO DE ENTRADA DE COMANDOS (SINTAXIS)</th></tr>
<tr><td>Función
$f : R \to R$
$f(x) = \begin{cases} -3 & si\ x \le -1 \\ 1 & si\ -1 \le x \le 2 \\ 4 & si\ x > 2 \end{cases}$</td><td>$Función[Función, Número, Número]$
Nota: Este comando permite graficar funciones definidas a trozos, primero se escribe la función y luego se define el intervalo.
Por ejemplo para graficar el segundo trozo f_2 de la función f, se procederá de la siguiente manera:
$Función[1,-1,2]$.</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr>
<td>Función Valor Absoluto
$g : R \to R$
$g(x) = \begin{cases} x & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$
$m(x) = \lvert x+2 \rvert$
$n(x) = \lvert x \rvert - 2$</td>
<td>$g(x) = abs(x)$
$m(x) = abs(x+2)$
$n(x) = abs(x) - 2$</td>
</tr>
<tr>
<td>Función Signo
$h : R \to R$
$h(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases}$</td>
<td>$h(x) = \operatorname{sgn}(x)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Función Mayor Entero
$t : R \to R$
$t(x) = [\lvert x \rvert] = n$
$si \quad n \leq x < n+1, con\ n \in Z$

Ejemplo: El mayor entero de los números reales que se encuentran en el intervalo $[1,2)$, es el número 1.</td>
<td>$Función[Función, Número, Número]$

Nota: Si deseamos representar el trozo de función señalado en el ejemplo, entonces intro-ducimos en el campo de entrada de comandos la siguiente info.-mación:
$Función[1,1,2]$.</td>
</tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Actividades</td>
<td>1. Representa en la misma pantalla las siguientes funciones:
$f(x) = \lvert x \rvert$, $g(x) = \lvert x+1 \rvert$, $h(x) = \lvert x-1 \rvert$, $m(x) = \lvert x+2 \rvert$, $n(x) = \lvert x-2 \rvert$.

a)¿Qué tienen en común y en qué se diferencian?,
b) ¿Qué tipo de función representan cada una de las mencionadas anteriormente?.
c) ¿Se nota algún cambio al graficar estas funciones?,
d) ¿Cuál es el dominio y el rango de las funciones antes descritas?,
e) ¿La función f posee punto máximo?,
f) ¿La función f posee punto mínimo?, g) ¿f es decreciente en $[0, \infty)$?.</td>
</tr>
</table>

	2. Representa en otra pantalla las siguientes funciones: $f(x)=\|x\|+1$, $g(x)=\|x\|+2$, $h(x)=\|x\|-1$, $n(x)=\|x\|-2$. a) ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian?, b) ¿Qué tipo de función representan cada una de las mencionadas anteriormente?. c) ¿Se nota algún cambio al graficar estas funciones?, d) ¿Cuál es el dominio y el rango de las funciones antes descritas?, e) ¿La función g posee punto máximo?, f) ¿La función g posee punto mínimo?, g) ¿Es g creciente en $(-\infty,0]$?.
	3. Escribe en cada caso la función que se asocia a cada número y luego represéntala en el software, a) El valor absoluto del número, b) El opuesto del valor absoluto del número, c) El valor absoluto del número más cinco, d) El valor absoluto del número, menos cuatro.
	4. Representa la función signo y la función mayor entero, y responde lo siguiente: a) ¿Cuál es el dominio y el rango de ambas funciones?, b) ¿Poseen estas funciones puntos máximos y mínimos?, c) ¿La función signo es creciente $(0,\infty)$?, d) ¿La función mayor entero es decreciente en $(-\infty,0]$?.
	5. G, H y K son tres puntos de una recta. Las coordenadas de G y H son 4 y -3, respectivamente. Si H está entre G y K, y $GK=13$, ¿Cuál es la coordenada de K?. Tomado: Moise E, y Downs, F. (1970). *Geometría Moderna*. México: Fondo Educativo Interamericano, S.A.

Sesiones de Trabajo No 7 y No 8

En estas sesiones, se estudiaron las Funciones Logarítmica - Exponencial y Trigonométricas. A manera de ejemplo, se describirán los aspectos tratados en la hoja de trabajo sobre las Funciones Logarítmica y Exponencial.

FUNCIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL	
Nociones Básicas sobre Funciones	**Función exponencial:** Si $b > 0 \quad y \quad b \neq 1$, entonces la función exponencial con base b es la función $f : R \to R^+$ definida por: $$f(x) = b^x.$$ **Función logarítmica:** Para definir la función logarítmica partamos de la función exponencial $x = b^y$. Si quisiéramos hallar la función inversa debemos despejar la variable y, es decir, buscar el exponente que elevado a la base b nos de como resultado el valor de la potencia x. Dicho exponente lo definiremos como la función ***logaritmo*** $f : R^+ \to R$ tal que: $y = f(x) = \log_b x$, y se lee, logaritmo con base b de x, donde x recibe el nombre de ***argumento***. En otras palabras, el logaritmo con base b de x**,** es el exponente al que hay que elevar la base b para obtener el argumento x. En símbolos: $y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$. En el caso particular de que la base sea el número 10, esta función recibe el nombre de logaritmo base diez o base decimal, y se expresa así: $\log_{10} x = \log x$. Si la base es el número $e \approx 2.7182818$, ésta función recibe el nombre de logaritmo neperiano y se expresa así: $\log_e x = Ln\ x$.
Sistemas de Representación Geométrico y Algebraico	**Instrucciones:** A continuación se presenta una lista de instrucciones útiles para el ingreso de algunos objetos matemáticos en la zona gráfica y la ventana algebraica del software GeoGebra.

<table>
<tr><td></td><td>

OBJETO MATEMÁTICO	CAMPO DE ENTRADA DE COMANDOS (SINTAXIS)
Número *e*	2.7182818
Función Logaritmo $f(x)=\log(x)$	$f(x)=\log(x)$
Función Exponencial $g(x)=e^{x}$	$g(x)=\exp(x)$ $t(x)=(2.71)\hat{}\, x$
$h(x)=\dfrac{45000}{1+224e^{-0.9\,x}}$	$h(x)=(45000)/(1+224(2.71)\hat{}\,(-0.9x))$

</td></tr>
<tr><td>Actividades</td><td>

1. Representa en la misma pantalla las siguientes funciones:

$$f(x)=\log(x) \qquad g(x)=\log(x+1) \qquad h(x)=\log(x-1),$$
$$m(x)=\log(x+2) \qquad n(x)=\log(x-2).$$

a) ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian las gráficas?
b) ¿Qué tipo de función representa cada una?.
c) ¿Se nota algún cambio al graficar estas funciones?,
d) ¿Cuál es el dominio y el rango de estas funciones?,
e)¿La función f posee punto máximo?,
f) ¿La función f posee punto mínimo?,
g) ¿La función f es creciente en $(0,1)$?.

</td></tr>
<tr><td></td><td>

2. Representa en otra pantalla las siguientes funciones:

$$f(x)=\exp(x) \qquad g(x)=\exp(x+1) \qquad h(x)=\exp(x-1).$$

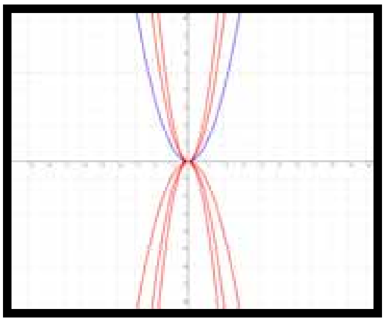
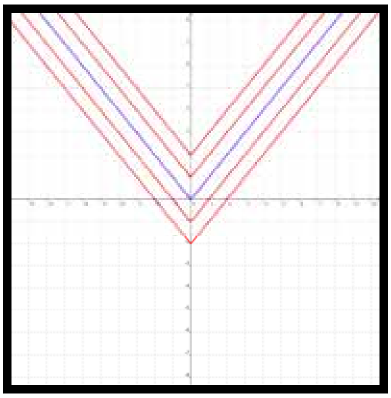
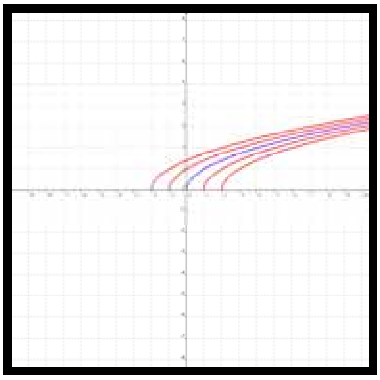
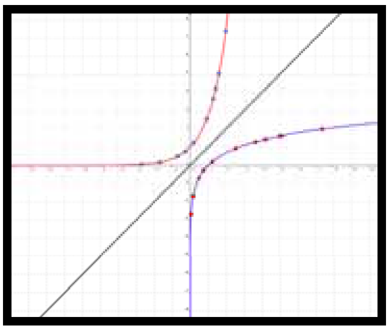
a)¿Qué tienen en común y en qué se diferencian las gráficas?,
b) ¿Qué tipo de función representan cada una?.
c) ¿Se nota algún cambio al graficar estas funciones?,
d) ¿Cuál es el dominio y el rango de estas funciones?,
e) ¿La función f posee punto máximo?,
f) ¿La función f posee punto mínimo?,
g) ¿La función f es decreciente en $[-2,2]$?.

</td></tr>
</table>

	3. Escribe en cada caso la función que se asocia a cada número y luego represéntala en el software, a) El logaritmo del número, más tres, b) El opuesto del logaritmo del número, c) El opuesto de la función exponencial, d) La función exponencial del número más seis.
	4. Representa la función: $g(x) = \exp(x)$, luego traza la recta $y = x$. Marca diez puntos distintos sobre la función g, ahora con la opción "refleja objeto por recta" (ubicada en el séptimo botón de la barra de herramientas), reféjalos con respecto a la recta $y = x$. A continuación responde: a) ¿Los puntos reflejados pertenecen a la gráfica de alguna función estudiada anteriormente?, b) Si la respuesta es afirmativa, ¿Qué tipo de movimiento o transformación en el plano se utilizó?
	5. Cierto día en una universidad asistieron 5000 personas, un estudiante se enteró que cierto orador polémico iba a efectuar una presentación no programada. Esta información fue comunicada a algunos amigos quienes a su vez la pasaron a otros. Después de transcurridos *t* minutos, $f(t)$ personas se habían enterado de la noticia, donde: $f(t) = \dfrac{5000}{1 + 4999e^{-0.5t}}$. ¿Cuántas personas se habían enterado del suceso (a) después de 10 minutos y (b) después de 20 minutos?. Representa la gráfica en el software. (Tomado: Leithold, L. (1997). Matemáticas previas al Cálculo. Análisis funcional y Geometría Analítica).

Sesión de Trabajo N^{o} 9

En esta sesión se formalizó el estudio de algunos de los principios básicos de graficación de funciones propuestos por Torres (2002), porque en las actividades propuestas en las hojas de trabajo ya se manejaba esta idea de forma intuitiva. La discusión se apoyó en una presentación elaborada en PowerPoint. A continuación, se mencionan los principios estudiados en este taller.

Principio de Graficación de Funciones	Ejemplo
Ampliación o alargamiento: La gráfica de $y = a\ f(x)$, para $a > 1$, tiene la misma forma básica de la gráfica de $y = f(x)$ y se obtiene al alargar esta última lejos del eje X. Ejemplo: $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = 2x^2,\ f_3(x) = 3x^2$	
Desplazamiento Vertical: La gráfica de $y = f(x) + c$, con $c > 0$, se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$ exactamente c unidades hacia arriba. La gráfica de $y = f(x) - c$, con $c > 0$, se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$ exactamente c unidades hacia abajo. Ejemplo: $f_1(x) = \|x\|,\ f_2(x) = \|x\| + 1,\ f_3(x) = \|x\| - 1,$ $f_4(x) = \|x\| + 2,\ f_5(x) = \|x\| - 2$	
Desplazamiento Horizontal: La gráfica de $y = f(x + c)$, con $c > 0$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ exactamente c unidades a la izquierda. La gráfica de $y = f(x - c)$ con $c > 0$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ exactamente c unidades a la derecha. Ejemplo: $f_1(x) = \sqrt{x},\ f_2(x) = \sqrt{x+1},\ f_3(x) = \sqrt{x-1},$ $f_4(x) = \sqrt{x+2},\ f_5(x) = \sqrt{x-2}$	
Reflexión: Dada una función $y = f(x)$ diremos que $y = -f(x)$ es la reflexión de la función original. Para obtener la gráfica de $y = -f(x)$ se refleja la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje X, o con respecto a la recta $y = x$. Ejemplo: $f_1(x) = \exp(x),\ f_2(x) = \ln(x)$	

Bibliografía

Escobar, B. (1998). *Matemática* I *Funciones y Representaciones Gráficas*. Caracas: Universidad Nacional Abierta.

Hohenwarter, M. (2005). *GeoGebra* [Programa de Computación en línea]. Disponible: www.geogebra.at [Consulta: 2007, Enero 15].

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la educación de la Geometría: El modelo de Van Hiele*. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds). *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 303-376). Sevilla: Alfar.

Rojas, J. y Salazar, J. (1985). *Matemática I Operaciones en N, Divisibilidad, Funciones.* Caracas: Fondo Editorial de la UPEL.

Torres, A. (2002). *Principios Básicos de Graficación*. San Cristóbal: Fondo Editorial UNET.

Rolando García, Profesor de Matemática. Magíster en Educación, mención Enseñanza de la Matemática. Profesor de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL Maracay).