UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 147-150
ISSN: 1815-0640

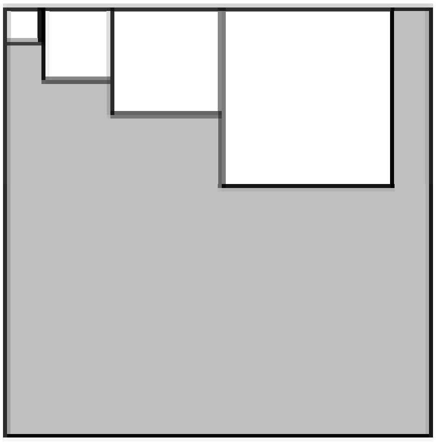
El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Javier toma una cartulina cuadrada cuyos lados miden 2 005 unidades, y va recortando cuadrados de lado 1, lado 2, lado 3, etc., todos pegados al borde superior, hasta que ya no cabe un cuadrado más, como se ilustra en la siguiente figura



Hallar el área de la porción de cartulina que queda sin recortar.

La versión original de este problema figura en alguna página de Internet relacionada con las Olimpiadas Brasileras de Matemática y lamentablemente no tengo la referencia exacta. Ésta es una versión modificada (en la versión original no aparece Javier ni son 2 005 las unidades) que resultó muy interesante al emplearla en un taller sobre resolución de problemas con profesores de secundaria, desarrollado con mi colega Emilio Gonzaga, como parte de las actividades del IREM-PUCP, en agosto del 2005. El problema es muy atractivo no sólo porque al resolverlo se establecen de manera natural conexiones matemáticas entre geometría, sucesiones, inecuaciones cuadráticas y suma de los cuadrados de un conjunto de números, sino por las posibilidades que presenta de desarrollar una sesión de trabajo en una perspectiva activa y colaborativa.

Resolviendo el problema

Una manera de resolver el problema es examinar cuántos cuadrados puede recortar Javier, resolviendo la inecuación $\sum_{i=1}^{n} i \leq 2005$.

La suma es muy conocida y entonces se llega a la inecuación cuadrática

$n^2 + n - 4010 \leq 0$,

de donde se obtiene que $n = 62$.

Con este dato se calcula el área total de los cuadrados recortados, que queda expresada en la fórmula $\sum_{i=1}^{62} i^2$. Conociendo la fórmula, se obtiene fácilmente que esta área es 81 375 unidades cuadradas. La respuesta al problema ya es cuestión de una simple resta: $2\,005^2 - 81\,375$.

El problema en el taller

Entusiasmados por los atractivos del problema y por las posibilidades que ofrece al solicitar algunas variaciones, decidimos plantearlo en el taller, pero advertimos que la fórmula de la suma de los cuadrados de los *n* primeros números enteros positivos podría no ser conocida por los profesores participantes del taller. Una solución fácil era darles la fórmula, pero consideramos que sería mucho más interesante que ellos la descubran. Con ese propósito elaboramos con Emilio las siguientes cuatro fichas de trabajo, de modo que se desarrollen ciertas actividades preparatorias y enriquecedoras a nivel individual y grupal. El problema de Javier y el área de la cartulina, aparece finalmente en la última ficha de trabajo.

Ficha 1 A

Problema

Hallar en términos de *n* el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} i^k$, donde *k* toma los valores 2 y 3.

Actividades individuales

1. Hallar el valor de la suma $\sum_{i=1}^{4} [i^3 - (i-1)^3]$
2. Expresar en términos de *n* el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} [i^3 - (i-1)^3]$.
3. Expresar la suma $\sum_{i=1}^{3} (a_i + b_i)$ en términos de las sumas $\sum_{i=1}^{3} a_i$ y $\sum_{i=1}^{3} b_i$.

Ficha 1B

Problema

Hallar en términos de *n* el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} i^k$, donde *k* toma los valores 2 y 3.

Actividades individuales

1. Expresar la suma $\sum_{i=1}^{3}(a_i + b_i)$ en términos de las sumas $\sum_{i=1}^{3} a_i$ y $\sum_{i=1}^{3} b_i$.
2. Expresar $\sum_{i=1}^{3} 5a_i$ en términos de 5 y de la suma $\sum_{i=1}^{3} a_i$.
3. Demostrar la identidad $\sum_{i=1}^{n}[i^3 - (i-1)^3] = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$

Ficha 2

Problema

Hallar en términos de *n* el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{i}^{\mathbf{k}}$, donde *k* toma los valores 2 y 3.

Actividades grupales

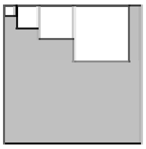
a) Hallar, en términos de *n*, el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{i}^2$

b) Esbozar un procedimiento que permita expresar, en términos de n, el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{i}^3$

Ficha 3

Situación

Javier toma una cartulina cuadrada cuyos lados miden 2005 unidades, y va recortando cuadrados de lado 1, lado 2, lado 3, etc., todos pegados al borde superior, hasta que ya no cabe un cuadrado más, como se ilustra en la siguiente figura



Actividades grupales

1. Hallar el área de la porción de cartulina que queda sin recortar.
2. Proponer otras actividades individuales o grupales relativas a la situación descrita.

Las fichas 1A y 1B fueron repartidas simultáneamente a los grupos A y B, previamente definidos entre los participantes del taller. La ficha 2 se repartió a grupos de dos participantes, formados previamente por uno del grupo A y otro del grupo B. Finalmente, la ficha 3 se repartió a los mismos grupos de dos.

Los resultados fueron altamente satisfactorios para los participantes y para quienes condujimos el taller, pues ellos, no sólo vivieron la experiencia de una forma de trabajo colaborativo, en la que se complementan los resultados obtenidos por los integrantes del grupo (Fichas 1A y 1B) y se aplican los resultados previos (Ficha 2) para resolver el problema de geometría propuesto en la actividad 1 de la ficha 3; sino también trabajaron temas de sucesiones y sumas, descubriendo formas sencillas de demostrar fórmulas de algunas sumas de uso frecuente. Además, surgieron propuestas muy interesantes en la actividad 2 de esta última ficha, relacionadas con la obtención de perímetros y con la obtención de áreas por repetición de recortes.