

## Un diseño de tarea aplicado a la simplificación de términos algebraicos semejantes

Ana Isabel Siguantay Tzul, Mario Sánchez Aguilar

Fecha de recepción: 19/10/2022

Fecha de aceptación: 15/03/2023

<p><b>Resumen</b></p>	<p>Presentamos un diseño de tarea aplicado específicamente a términos algebraicos semejantes. La metodología cualitativa que empleamos consistió en informarnos sobre los errores que se hallan en la simplificación de expresiones algebraicas, seguidamente se corroboraron a través de una prueba diagnóstica. Luego se diseñó, implementó y ponderó una tarea. De esta forma se determinó la forma en cómo los estudiantes transitan a través de la tarea algebraica y se exploraron sus opiniones sobre dicha tarea. Y con ellos pudimos comprender lo que favorece a un diseño de tareas. <b>Palabras clave:</b> diseño de tareas, simplificación de términos algebraicos semejantes, álgebra.</p>
<p><b>Abstract</b></p>	<p>We present a task design specifically applied to algebraic like terms. The qualitative methodology we used consisted of informing ourselves about the errors found in the simplification of algebraic expressions, then they were corroborated through a diagnostic test. Then a mathematical task was designed, implemented and weighted. In this way, the way in which students transit through the algebraic task was determined and their opinions about such task were explored. And with them we were able to understand what favors a task design. <b>Keywords:</b> task design, simplification of algebraic like terms, algebra.</p>
<p><b>Resumo</b></p>	<p>Apresentamos um design de tarefa especificamente aplicado a termos algébrico semelhantes. A metodologia qualitativa que utilizamos consistiu em nos informar sobre os erros encontrados na simplificação de expressões algébricas, posteriormente corroborados por meio de um teste diagnóstico. Em seguida, uma tarefa foi projetada, implementada e ponderada. Dessa forma, determinou-se a forma como os alunos transitam pela tarefa algébrica e explorou-se suas opiniões sobre tal tarefa. E com eles pudemos entender o que favorece um desenho de tarefas.</p>

<b>Palavras-chave:</b> design de tarefas, simplificação de termos algébricos semelhantes, álgebra.
--

## 1. Introducción

Los estudiantes que transitan por el sistema escolar inevitablemente deben experimentar la actividad algebraica. Los estudiantes empiezan a verse más involucrados con este tipo de actividad conforme cursan grados más avanzados, pues en ellos se hace necesario el manejo del álgebra. En ese caminar de la vida estudiantil una de las actividades básicas y fundamentales es la *simplificación de términos algebraicos semejantes*; esto es, la agrupación y reducción —mediante sumas o restas de coeficientes numéricos— de monomios que poseen la misma parte literal, pero no necesariamente el mismo coeficiente. Este es un proceso que debe dominarse para profundizar en el conocimiento del álgebra y más allá.

Sin embargo, la simplificación de términos algebraicos semejantes no está libre de dificultades. Es posible escuchar anécdotas de docentes de matemáticas en las que señalan obstáculos y fuentes de confusión que son comunes durante el trabajo algebraico de sus estudiantes. Incluso hay investigaciones que reportan diferentes problemas asociados a la simplificación de expresiones algebraicas. Por ejemplo, se sabe que los estudiantes pueden hacer una interpretación incorrecta de la notación algebraica; pueden tener dificultad para operar los coeficientes; pueden agrupar erróneamente términos que no son semejantes; distribuir incorrectamente el signo negativo, entre otros (vea Kog, 2010; Ncube, 2016; Tirosh et al., 1998).

Es importante notar que no hay muchos estudios que propongan métodos de enseñanza que aborden cómo tratar las dificultades relacionadas con la simplificación de términos semejantes (Tirosh et al., 1998, p. 62). Por ello, en este artículo se reporta una experiencia de aula, que contribuye a que los estudiantes superen algunas de las dificultades asociadas con la simplificación de términos algebraicos semejantes.

La experiencia de aula reportada se enfoca en el diseño de una tarea debido a que las tareas son un elemento central en las clases de matemáticas. Además, los estudiantes tratan con tareas tanto en las aulas de matemáticas, como en los deberes escolares que atienden en sus hogares. Las tareas cumplen diversos roles: desde pedagógicos, para que los estudiantes aprendan o repasen; hasta disciplinares, pues se utilizan a veces como herramientas para mantener el orden en el aula. Así, las tareas resultan fundamentales en el estudio de las matemáticas y en la labor docente.

El diseño de tarea que se reporta en este escrito abona al repertorio de herramientas que los docentes de matemáticas pueden emplear para enseñar a sus alumnos la simplificación de términos algebraicos semejantes. El objetivo de este artículo es compartir con docentes de matemáticas el diseño de una tarea que toma en cuenta resultados de investigación educativa, y cuyo funcionamiento ha sido probado empíricamente.

En la siguiente sección del artículo se presenta un marco conceptual que sirvió como referencia para el diseño de la tarea reportada. Posteriormente se describe el diseño de la tarea, así como su implementación y ponderación.

## 2. Marco conceptual

En esta sección se introduce un conjunto de nociones clave para el encuadre y diseño de la experiencia de aula reportada. Se inicia presentando las nociones de “tarea” y “diseño de tareas”, para finalizar introduciendo un modelo para conceptualizar la actividad algebraica.

### 2.1 ¿Qué es el diseño de tareas?

Al revisar la literatura especializada, no es fácil encontrar una definición explícita de la noción de *diseño de tareas*. Usualmente se maneja una conceptualización implícita en varios de los artículos especializados. Sin embargo, de manera general el diseño de tareas se puede entender como un área de investigación dentro de la comunidad de educación matemática, que se enfoca en estudiar el diseño, implementación y funcionamiento de tareas matemáticas en el aula. Como consecuencia del estudio sistemático de las tareas se genera conocimiento teórico, pero también se crean productos didácticos prácticos, pues las tareas diseñadas son productos destinados a los estudiantes y docentes en el aula de matemáticas. La experiencia de aula que reportamos en este artículo se enmarca en el área de diseño de tareas, poniendo especial atención a la generación de un producto didáctico práctico para la simplificación de términos algebraicos semejantes.

El diseño de tareas es un área de investigación bien establecida en el campo de la educación matemática. Evidencia de ello son los números especiales que se han publicado sobre este tema en revistas de investigación. Por ejemplo, el número especial denominado “Mathematics teachers as partners in task design” de la revista *Journal for Research in Mathematics Education* (ver Jones & Pepin, 2016); o el número especial de la revista *Avances de Investigación en Educación Matemática* titulado “Diseño de tareas en educación matemática: una diversidad de marcos teóricos” (ver García, 2019). Otra manifestación del establecimiento de esta área de investigación son los grupos de discusión especializados que existen en los congresos internacionales de nuestra disciplina. Por ejemplo, el grupo de trabajo denominado “Task design for early algebra” que se organizó durante el congreso PME 43 (Psychology of Mathematics Education) en Sudáfrica (ver Twohill et al., 2019). Así mismo, hay libros especializados en el tema como el estudio ICMI 22 que se enfoca en el diseño de tareas matemáticas (Watson & Ohtani, 2015). Hay varias aproximaciones teóricas relacionadas con el diseño de tareas en educación matemática. Estas aproximaciones tienen la intención de promover un aprendizaje efectivo y favorecer el entendimiento de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. El enfoque teórico desde el cual se asume el diseño de tareas para este estudio es la teoría de la variación (Li et al., 2010). En la sección de metodología se explica cómo los principios de esta teoría fueron aplicados al diseño de la tarea reportada en este artículo. Pero, ¿qué se entiende por *tarea matemática*? Este concepto clave se aborda en la siguiente sección del escrito.

### 2.2 ¿Qué es una tarea?

En este artículo se adopta la conceptualización de *tarea matemática* propuesta por Stein y Smith (1998). De acuerdo a esta conceptualización, se entiende por tarea como el segmento de la actividad en el salón de clases dedicado al desarrollo de una idea matemática particular. Una tarea puede involucrar diferentes actividades o problemas relacionados entre sí o un solo problema complejo, lo cual puede cubrir

todo el período de la clase. La tarea que se presenta en este escrito se enfoca en un aspecto particular de la actividad algebraica denominado “transformacional”, el cual se aborda a continuación.

### 2.3 Modelo de conceptualización de la actividad algebraica

Existe un modelo para conceptualizar la actividad algebraica elaborado por Kieran (2004). Ella categoriza en tres tipos las actividades a realizar en el álgebra, las cuales son:

**Actividades generacionales:** estas actividades están encaminadas a formar objetos del álgebra, es decir, construir expresiones y ecuaciones. El propósito de esta actividad es representar e interpretar situaciones, propiedades, patrones y relaciones.

**Actividades transformacionales:** las actividades que entran en esta categoría son aquellas que están basadas en reglas, tales como: agrupar términos semejantes, factorizar, reducir expresiones algebraicas, sustituir, sumar o multiplicar expresiones polinomiales, resolver ecuaciones. Estas acciones están orientadas a mantener la equivalencia de las expresiones algebraicas a pesar de ser transformadas con base en reglas algorítmicas.

**Actividades globales o de nivel meta:** En estas actividades, el álgebra se utiliza como herramienta. Por tanto, no son actividades que sean puramente algebraicas, pues el propósito de las mismas es hallar un lugar de uso o aplicación en un contexto extra algebraico. Estas actividades pueden ser: resolver problemas, modelar, percibir alguna estructura, estudiar el cambio, generalizar, analizar relaciones, justificar, predecir.

De acuerdo a esta conceptualización, la tarea cuyo diseño e implementación se reporta en este artículo se centra en *actividades algebraicas transformacionales*, de manera particular en la simplificación de términos algebraicos semejantes. En la siguiente sección se explica la metodología del diseño, implementación y ponderación de la tarea en cuestión.

## 3. Metodología

### 3.1. Participantes en la experiencia de aula

Los participantes en la experiencia de aula fueron 24 estudiantes que cursaban la educación secundaria de un establecimiento educativo privado, en la ciudad de Totonicapán, en Guatemala. Inicialmente no se les informó que su actividad matemática podría formar parte de los datos empíricos de una experiencia de aula; esto para tratar de que sus respuestas fueran más naturales y espontáneas. Sin embargo, al terminar el proceso de recolección de datos, se les pidió su consentimiento explícito para incluir de manera anónima sus producciones matemáticas en este reporte. Los 24 estudiantes expresaron su consentimiento de forma oral.

Los participantes fueron jóvenes con edades de entre los 13 y 14 años. De ellos 14 se identificaban como mujeres y 10 como hombres. Debido a que la primera autora de este artículo era profesora de estos estudiantes, se tuvo acceso a sus calificaciones en el curso de matemática. Así, se puede afirmar que los 24 estudiantes que participaron en esta experiencia de aula están situados en un rango de

aprovechamiento que varía de “no sobresaliente” a “sobresaliente”<sup>1</sup>. Previo a su participación en la experiencia de aula los jóvenes habían abordado los siguientes tópicos matemáticos como parte de su plan de estudios: clasificación y operación de números reales (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación); razón y proporciones. Previamente en sus estudios de primaria algunos habían abordado temas de álgebra, como: clasificación de expresiones algebraicas; operaciones básicas con expresiones algebraicas (suma, resta, multiplicación y división).

### 3.2. Diseño de la tarea

El proceso de diseño de la tarea se realizó en tres fases. La primera fase, consistió en consultar la literatura especializada para informarse acerca de las dificultades que los alumnos comúnmente experimentan al simplificar términos algebraicos semejantes. En la segunda fase se realizó una prueba diagnóstica con el propósito de buscar evidencia de la existencia de tales dificultades en estudiantes pertenecientes al contexto donde se desarrollaría la experiencia de aula<sup>2</sup>. Esto último para ratificar el sentido y la relevancia de realizar un diseño de tareas enfocado en apoyar a los estudiantes en el tema de simplificación de expresiones algebraicas.

En la tercera fase del diseño de la tarea se definió el foco y perspectiva del diseño. Se trabajó con un diseño centrado en la simplificación de términos algebraicos semejantes con *coeficientes de signo positivo*. El diseño de la tarea se basó en la teoría de la variación (Li et al., 2010), la cual se centra en ilustrar al estudiante qué características del objeto matemático que se estudia son esenciales y qué características no lo son.

A través de los ejemplos y las tareas matemáticas con los que son instruidos, los estudiantes pueden erróneamente inferir e interpretar características no esenciales como esenciales, creando así concepciones incorrectas o limitadas de los objetos matemáticos que estudian (ver por ejemplo el estudio de Tsamir et al., 2008 sobre el caso particular de los triángulos). Por ello, el diseño de la tarea se enfocó en establecer las características esenciales de los términos algebraicos semejantes, para así proponer un diseño que ayude a los estudiantes a distinguir cuáles términos son semejantes y cuáles no lo son. Las características esenciales de dos o más términos algebraicos semejantes son:

1. Presentar partes literales idénticas.
2. El exponente al que está elevado cada componente de la parte literal debe ser igual en cada uno de los términos algebraicos semejantes.
3. El orden de las literales puede cambiar. Por ejemplo,  $5ab$  y  $5ba$  son dos términos semejantes, aunque los componentes de las partes literales se encuentran en diferente orden. Esto porque las literales son factores de una multiplicación, y el orden de los factores no altera el producto.

---

<sup>1</sup> Los estudiantes “no sobresalientes” se encuentran en un rango de 40 a 63 puntos (donde 100 es el puntaje máximo); los estudiantes “promedio” entre 64 y 79 puntos; y los estudiantes “sobresalientes” entre 80 y 100 puntos.

<sup>2</sup> Los estudiantes que participaron en la prueba diagnóstica no son los mismos que los estudiantes descritos en la sección 3.1; sin embargo, sí pertenecen al mismo contexto social.

Por otro lado, entre las características no esenciales de los términos algebraicos semejantes se encuentra que el coeficiente puede ser cualquier número real; es decir, puede tener un coeficiente positivo, negativo, entero, racional o decimal.

Una vez determinadas las características esenciales y no esenciales de los términos algebraicos semejantes, se establecieron tres momentos de institucionalización (Brousseau, 1986) para tratar de fortalecer el entendimiento de los estudiantes después de la resolución de las actividades propuestas (ver Tabla 1). Estos momentos de institucionalización se utilizaron para hacer una síntesis de los procesos de resolución manifestados por los estudiantes, identificar algunos errores comunes, y hacer explícito el propósito de las actividades.

Objetivo	Número de actividad	Número de sesión	Descripción
Enfatizar que la parte literal debe ser la misma en los términos algebraicos semejantes.	1	1	Al utilizar monomios que contienen una sola variable con exponente 1, estas actividades llaman la atención de los estudiantes hacia la primera característica esencial.
	2	1	
	3	1	
	Momento de Institucionalización	2	
Resaltar que el exponente de la parte literal debe ser igual al agrupar términos algebraicos semejantes.	4	2	Todos los monomios tienen la misma variable en la parte literal, pero el exponente no siempre es el mismo. Esto llama la atención a la segunda característica esencial.
	5	2	
	6	2	
	Momento de Institucionalización	3	
Destacar que el orden de las variables de la parte literal no afecta a los términos algebraicos semejantes, siempre y cuando esas variables estén elevadas a la misma potencia.	7	3	Los monomios involucrados en estas actividades incluyen más de una variable en la parte literal elevadas a distintos exponentes y escritas en distinto orden. Se busca llamar la atención a la tercera característica esencial.
	8	3	
	Momento de Institucionalización	4	
Poner en práctica la identificación de las tres	9	4	Se presentan expresiones algebraicas variadas donde se



características esenciales involucradas en las actividades previas			deben agrupar los términos algebraicos semejantes.
--	--	--	--

**Tabla 1.** Visión general del contenido y la implementación de las nueve actividades que constituyen el diseño de tarea que se reporta en este artículo.

En la Figura 1, se presenta la primera actividad de la tarea. Se puede observar que todas las partes literales tienen solo una variable con exponente 1. Esto porque el foco de esta actividad no es el exponente de las expresiones, sino pretende llamar la atención de los estudiantes hacia la característica esencial de que la parte literal debe ser la misma en los términos algebraicos para ser semejantes. Por ejemplo, todas las expresiones algebraicas que contienen la variable  $x$ , tienen un coeficiente igual a 5; mientras que todas las expresiones que contienen la variable  $b$ , tienen coeficiente 2.

Observe las siguientes expresiones algebraicas.  
 $5x \ 2b \ 3c \ 4a \ 5x \ 2b \ 5x \ 2b \ 3m \ 4a \ 3c$   
 ¿Pueden agrupar las expresiones que son iguales?

**Figura 1.** Actividad número 1 de la tarea en la que todos los monomios con partes literales iguales tienen el mismo coeficiente.

A diferencia de la actividad previa, en la segunda actividad (Figura 2) cambia el coeficiente que acompaña a las partes literales que son iguales. Aquí el propósito es hacer notar que no importa el valor del coeficiente, la parte literal debe ser la misma para que dos términos algebraicos sean semejantes. Por ejemplo, aquí las expresiones que contienen la variable  $x$  tienen coeficientes distintos (5, 18, 6 y 15).

Observe las siguientes expresiones algebraicas.  
 $5x \ 7b \ 9c \ 27a \ 18x \ 45b \ 6x \ 7b \ 9m \ 15x \ 8b$   
 ¿Cómo podríamos clasificar estos términos?

**Figura 2.** Actividad número 2 de la tarea en la que los coeficientes de las partes literales iguales son números enteros positivos más variados que los utilizados en la Actividad número 1.

En la tercera actividad (Figura 3) se enfoca la atención en el valor del coeficiente de términos algebraicos semejantes. Esto para que los estudiantes noten que el coeficiente no necesariamente debe ser entero, sino cualquier número real positivo —siempre y cuando la parte literal siga siendo la misma. Así, se esperaba que la mayoría de los alumnos pudieran agrupar todos los términos con variable  $x$ ; otra agrupación serían los términos que incluyen a la variable  $b$ ; y otro grupo incluiría la variable  $c$ . Al monomio con variable  $m$  (el cual no puede ser agrupado con otros monomios) se le abordó de manera explícita en el momento de institucionalización, clarificando que no había otra expresión con la que fuera semejante.

¿Cómo podemos agrupar estos términos?

$$5x \quad \frac{1}{4}b \quad 0.3c \quad \frac{4}{6}a \quad 8x \quad 2b \quad \frac{7}{9}x \quad 6b \quad 3m \quad 9.8x \quad 10x$$

**Figura 3.** Actividad número 3 de la tarea en la que los coeficientes que acompañan las partes literales no son solo números enteros.

En la Figura 4 se presenta la cuarta actividad de la tarea. Esta actividad no exige al alumno enfocarse en el coeficiente, ya que todos los monomios tienen coeficiente igual a 5. Lo importante aquí es notar la segunda característica esencial de los términos algebraicos semejantes: el exponente al que está elevado cada componente de la parte literal debe ser igual en cada uno de los términos algebraicos semejantes.

¿Cómo clasificaría los siguientes términos semejantes?

$$5x^2 \quad 5x^3 \quad 5x \quad 5x^4 \quad 5x^5 \quad 5x^2 \quad 5x^4 \quad 5x^3 \quad 5x \quad 5x^2$$

**Figura 4.** Actividad número 4 de la tarea en la que se intenta llamar la atención del estudiante al hecho de que en los términos algebraicos semejantes los exponentes que afectan a las partes literales deben ser iguales.

En la quinta actividad de la tarea (Figura 5), se puede visualizar que todos los términos poseen la variable  $x$  pero afectada por distintos exponentes. También hay una variación en el valor de los coeficientes. Se esperaba que los estudiantes pudieran recordar lo trabajado en el primer grupo de actividades, agrupando así los términos con la variable  $x$  elevada a un mismo exponente.

¿Cómo clasificaría a los siguientes términos?

$$3x^2 \quad 6x^8 \quad 9x \quad 10x^8 \quad 4x^2 \quad 15x^3 \quad 20x^2 \quad 7x^8 \quad 30x \quad 105x^3$$

**Figura 5.** Actividad número 5 de la tarea en la que se combinan dos características esenciales de los términos semejantes: la igualdad de las partes literales y el valor de los exponentes que las afectan.

En la sexta actividad de la tarea (Figura 6), se pretendía que los estudiantes tuvieran la oportunidad de confirmar la noción de que los exponentes que afectan a las partes literales deben ser los mismos en los términos algebraicos semejantes. Se esperaba que los estudiantes recordaran lo abordado en las actividades anteriores con relación al coeficiente de los monomios: se deben agrupar todos aquellos monomios que tengan la misma parte literal afectada por el mismo exponente.

Clasifique los siguientes términos

$$x^2 \quad \frac{10}{3}x^8 \quad 0.4x \quad 2.5x^8 \quad \frac{12}{7}x^2 \quad 1.5x^3 \quad \frac{8}{9}x^3 \quad 89x^8 \quad \frac{1}{3}x \quad 4.5x^3$$

**Figura 6.** Actividad número 6 de la tarea la cual guarda cierta similitud con la Actividad 5, pero incluyendo coeficientes no enteros.

Se propuso como séptima actividad (Figura 7) la identificación no solo de los términos algebraicos que son semejantes, sino también aquellos que no lo son. Con esta actividad se pretendía ayudar a identificar una tercera característica esencial de los términos algebraicos semejantes: para que dos o más términos algebraicos sean



semejantes no importa el orden de las variables que integran sus partes literales, siempre y cuando cada una de ellas sean afectadas por los mismos exponentes respectivamente. Para subrayar esta idea, esta actividad incluyó monomios con más de una variable en su parte literal.

Busque la pareja a cada término

$$8x^3y \quad 0.9x^4y^5 \quad 12x^6yz \quad 24y^5x^4 \quad \frac{7}{3}x^6yz \quad \frac{8}{5}x^3y \quad x^5y^4 \quad x^6yz$$

**Figura 7.** Actividad número 7 de la tarea en la que se introduce otra característica esencial de los términos semejantes: no importa el orden de sus literales, siempre y cuando cada una de ellas sean las mismas y estén afectadas por los mismos exponentes, respectivamente.

Posteriormente se propuso la octava actividad (Figura 8), donde se les indicó que debían agrupar los términos semejantes de cada inciso.

Agrupe los términos semejantes e identifique el término no semejante

1.  $2a^3b \quad 9.8ba^4 \quad \frac{3}{7}ba^3 \quad 7.9a^4b \quad a^6bc \quad \frac{8}{5}ca^6b \quad ab^6c$
2.  $2mn \quad \frac{8}{3}m^{10}n \quad 9.8mn \quad 4.8m^{10}n \quad mm^{10}$
3.  $10x^6yz \quad 8.9y^2z^5 \quad x^6yz \quad 9.0y^5z^2 \quad \frac{3}{2}y^2z^5$

**Figura 8.** Actividad número ocho de la tarea en la que se involucran términos semejantes y términos no semejantes.

Por último, se propuso una actividad final (Figura 9) para aplicar los conocimientos estudiados a lo largo de las actividades anteriores, mediante la identificación y agrupación de términos semejantes.

Simplifique las siguientes expresiones algebraicas, al agrupar términos semejantes

- $x^4y + x^3y^2 + x^2y + 8x^4y + x^2y + 10 + x^3y^2 + 7x^3y^2 + 9 + 21x^4y$
- $m + n + m + n$
- $71a^3b + 84a^4b^2 + 50a^3b + 84a^4b^2 + 45a^3b$
- $10a + 7b + 4a + 5b + 14a + 3b$
- $12m + 3n + 4m + 10n + 5m + n$

**Figura 9.** Actividad final de la tarea en la que los estudiantes deben identificar y simplificar términos algebraicos semejantes.

### 3.3 Implementación de la tarea

La tarea descrita en la sección previa se implementó durante las clases regulares de un curso de matemática de nivel secundaria. Dichas clases se impartían una vez a la semana durante dos horas. Debido a la emergencia sanitaria provocada por la pandemia de COVID-19 esta tarea se implementó a distancia a través de internet durante los meses de septiembre y octubre del año 2021.

Se utilizó la plataforma Google Meet para mantener la comunicación con los estudiantes durante las sesiones, las cuales se grabaron para su posterior análisis. Para presentar la tarea a los estudiantes se utilizó la pizarra digital Google Jamboard, porque permite tener preparada la sesión de antemano, y porque contiene herramientas como marcadores con diferentes colores para escribir, resaltador, y un láser para señalar contenidos. Asimismo, se utilizó la plataforma Moodle para recolectar y almacenar las respuestas de los estudiantes a cada una de las actividades, las cuales también fueron analizadas con posterioridad.

Las nueve actividades que constituyen la tarea fueron presentadas a los estudiantes una por una. Ellos resolvían la actividad que se les presentaba, y enviaban una fotografía de su respuesta por medio de la plataforma Moodle. Las actividades se dosificaron una a una con la finalidad de detectar si había alguien que tuviera dificultades, para poder apoyarlo en el momento. Si se realizaba este monitoreo al finalizar la tarea, no habría forma de poder ayudar a los estudiantes que presentaran dificultades. En total, se realizaron cinco sesiones, las cuales se describen a continuación:

**Primera sesión:** esta sesión inició con una actividad preparatoria, cuyo propósito fue introducir a los estudiantes al tema de las partes de un término algebraico, particularmente monomios. La actividad preparatoria consistió en identificar las partes de un monomio, a través de completar una tabla donde se debían identificar el coeficiente, la parte literal y el exponente de un grupo de monomios dados. Posterior a la actividad preparatoria, en esta sesión también se abordaron las actividades primera, segunda y tercera de la tarea.

**Segunda sesión:** se inició abordando las respuestas de los estudiantes a las actividades primera, segunda y tercera, poniendo especial atención a aquellas respuestas diferentes a las esperadas (incorrectas). Aquí hubo un momento de institucionalización en el que se explicó el propósito de las actividades, se desarrollaron las respuestas esperadas y se aclararon las dudas de los estudiantes. Seguidamente se presentaron la cuarta, quinta y sexta actividad de la tarea.

**Tercera sesión:** nuevamente se inició repasando las respuestas de los estudiantes a las actividades presentadas en la sesión previa, particularmente aquellas distintas a las esperadas, preguntando a los estudiantes la razón que fundamentaba sus respuestas. Esto dio pie a un momento de institucionalización en el que se repasaron de forma explícita las características esenciales y no esenciales de los términos semejantes. Seguidamente se realizaron las actividades séptima y octava.

**Cuarta sesión:** se utilizó esta sesión para un momento de institucionalización en el que se repasaron las respuestas de las actividades séptima y octava. Asimismo, a través de la novena actividad se daba oportunidad a los estudiantes de identificar las tres características esenciales involucradas en las actividades previas. Finalmente se repasaron las respuestas correctas de todas las actividades que constituyeron la tarea.

**Quinta sesión:** esta sesión se realizó una semana después de finalizar la implementación de la tarea, y su propósito fue ponderar la tarea que los estudiantes experimentaron. Este proceso de ponderación se describe en la siguiente sección.

### 3.4 Ponderación de la tarea

El propósito de la ponderación de la tarea fue recolectarse evidencia empírica que ilustrara su funcionamiento y su opinión por parte de los estudiantes. La ponderación de la tarea se dividió en dos fases. Primero se hizo una prueba a los estudiantes denominada «examen parcial». Esta prueba se aplicó con el propósito de evaluar los conocimientos algebraicos adquiridos por los estudiantes luego de haber transitado por la tarea diseñada. Los estudiantes enviaron sus respuestas a la prueba a través de Moodle, ya sea en formato PDF o en imagen JPG. Estos archivos son parte de los datos empíricos en los cuales se basa esta experiencia de aula.

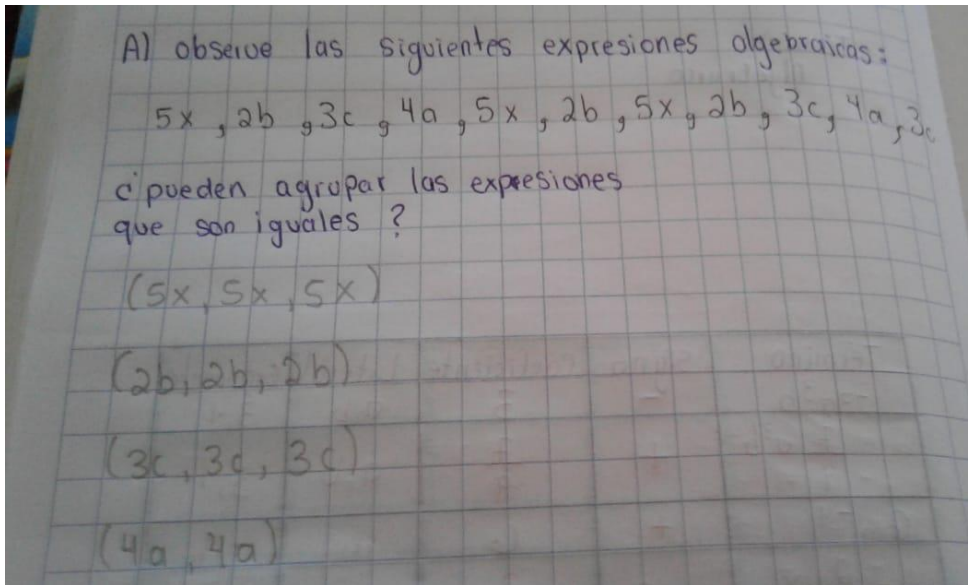
Por otro lado, se aplicó un cuestionario a los estudiantes. A través del cuestionario se exploraron las opiniones de los pupilos sobre la utilidad que tuvo para su propio aprendizaje la tarea diseñada. El cuestionario se administró a través de un formulario de Google e incluyó las siguientes preguntas:

- ¿Cree que la tarea le ayudó a comprender qué son los términos semejantes?
- ¿Por qué?

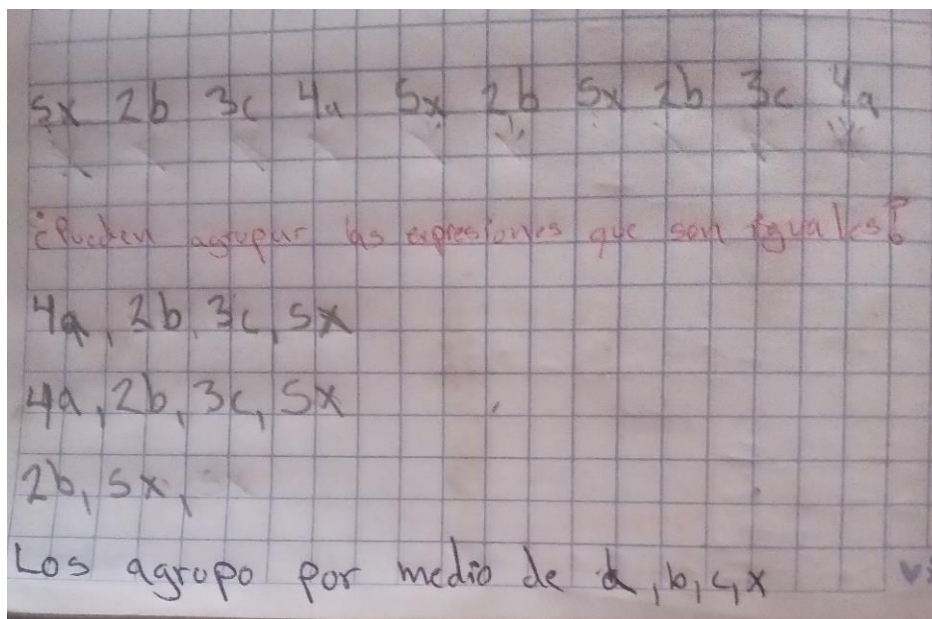
Las respuestas a las preguntas fueron anónimas, y se registraron en hojas de Excel para su posterior análisis. A continuación, se explica cómo se analizaron los datos empíricos asociados a la experiencia de aula.

### 4. Análisis de datos

Se comenzó analizando las producciones de los estudiantes provenientes de sus respuestas a las nueve actividades que constituyen la tarea diseñada. Cada actividad se revisó, poniendo atención si los estudiantes respondieron como se esperaba, es decir, de manera correcta. Por ejemplo, en la primera tarea se esperaba que los estudiantes agruparan todos los términos que fueran iguales en términos de su coeficiente, su parte literal y su exponente. Un ejemplo de una respuesta correcta se muestra en la Figura 10. Este tipo de respuestas se clasificaron como «correctas» y se contabilizaron. No obstante, también se encontraron respuestas distintas a las esperadas. Es decir, respuestas donde se utilizó algún criterio no adecuado para realizar la agrupación de términos algebraicos, conduciendo así a algún error. Estas respuestas se clasificaron como «incorrectas» y se contabilizaron. Un ejemplo de respuesta incorrecta se ilustra en la Figura 11.



**Figura 10.** Ejemplo de una respuesta correcta a la primera actividad, donde una estudiante agrupa los monomios que tienen igual coeficiente, parte literal y exponente, formando así cuatro grupos de expresiones algebraicas.



**Figura 11.** Ejemplo de una respuesta incorrecta a la primera actividad. Al parecer el criterio utilizado por el estudiante para agrupar los términos fue seguir el orden alfabético de las variables. Así lo sugiere su anotación: «Los grupo por medio de  $a, b, c, x$ ».

Después de clasificar las respuestas en correctas e incorrectas, se profundizó en analizar qué criterios utilizaban los estudiantes para clasificar los monomios y resolver la actividad. De manera particular, se identificaban los errores manifestados por los estudiantes y se clasificaban de acuerdo al tipo de error. Este proceso de análisis se aplicó a todas las actividades que constituyen la tarea algebraica, y también al examen parcial que se utilizó en la primera fase de ponderación de la tarea.

Posteriormente se hizo un análisis cualitativo de las respuestas al cuestionario de Google de los 24 estudiantes, a través de las cuales valoraron la tarea. Dichas respuestas fueron sometidas a un análisis temático en el que se codificaron y categorizaron, para tratar de encontrar así patrones de respuestas (Ayres, 2008).

Para ilustrar el análisis temático, tomemos como ejemplo la pregunta: «¿Por qué (cree que la tarea le ayudó a comprender qué son los términos semejantes)?». En un primer momento se identificaron las respuestas de aquellos estudiantes que creían que la tarea sí les ayudó en su comprensión<sup>3</sup>, y se les asignó un código. Ese código estaba asociado con lo que declaraba cada estudiante. Por ejemplo, el estudiante 3 respondió: «sí, porque [la profesora] ha dado varios ejemplos y enseña bien», y el código que se le asignó fue: *profesora enseña bien*. El estudiante 9 contestó: «sí, porque [la profesora] nos explicó de forma detallada cada cosa» y el código asignado fue: *profesora explica detalladamente*. En su respuesta el estudiante 23 declaró: «sí se me facilitó ya que las clases eran demasiado entretenidas y dinámicas»; en este caso se asignó el código: *clases entretenidas y dinámicas*. Este proceso de codificación fue aplicado a cada una de las respuestas de los estudiantes participantes.

En un segundo momento se volvieron a visitar los códigos asignados y se agruparon en categorías de acuerdo a su similitud o relación. Por ejemplo, los códigos *profesor enseña bien* y *profesor explica detalladamente* se agruparon en la categoría llamada «aproximación a la enseñanza por parte del docente». Un proceso similar se aplicó al resto de los códigos, formando así categorías para las respuestas que proveyeron los estudiantes. Los detalles de las categorías resultantes se muestran en el siguiente capítulo de resultados.

## 5. Resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos después de la etapa de análisis. En particular se muestran los resultados relativos a cómo los 24 estudiantes participantes respondieron cada actividad de la tarea diseñada, así como los resultados asociados a la ponderación que los estudiantes hicieron de la tarea y sus opiniones sobre la misma.

### 5.1 Respuestas de los estudiantes a la tarea

Como recordará el lector, las primeras tres actividades que constituyen la tarea tienen la intención de que los estudiantes centren su atención en la igualdad de las partes literales que deben tener los términos semejantes. Es por esto que cada monomio presentado en las actividades contiene solo una variable cuyo exponente es 1. Así, en la primera actividad (Figura 1) 20 de los 24 estudiantes agruparon los términos de manera correcta; en la segunda actividad (Figura 2) hubo 21 estudiantes que contestaron correctamente; mientras que en la tercera actividad (Figura 3) solo 11 de los 24 estudiantes lograron contestar correctamente. Es probable que los estudiantes hayan experimentado más dificultades con esta última actividad debido a que no todos los coeficientes son números enteros.

Ahora bien, con relación a las actividades cuarta y quinta (Figuras 4 y 5), estas enfocaban la atención de los estudiantes hacia los exponentes que afectan a las

<sup>3</sup> Aquí es importante notar que todos los estudiantes afirmaron que la tarea sí les ayudó a comprender qué son los términos semejantes.



partes literales, los cuales deben ser iguales para considerarlos términos algebraicos semejantes. Así, en la cuarta actividad 21 estudiantes realizaron correctamente las agrupaciones de términos algebraicos esperadas. En la quinta actividad 16 estudiantes respondieron correctamente.

En la sexta actividad (Figura 6) se requería aplicar de manera simultánea los conocimientos sobre partes literales y exponentes utilizados en las actividades previas, pero involucrando solo la variable  $x$ . En esta actividad 20 estudiantes identificaron correctamente los términos algebraicos semejantes. En las actividades séptima y octava que eran las más complejas de todas, 10 estudiantes realizaron correctamente la actividad 7 y 12 estudiantes resolvieron correctamente la actividad 8. Esto indica que algunos estudiantes encontraron dificultad en agrupar los términos algebraicos semejantes presentes en estas actividades.

La última actividad de la tarea consistía en simplificar expresiones algebraicas variadas. Fueron cinco expresiones algebraicas con valor de un punto cada una, por tanto, la calificación máxima era de cinco puntos. El promedio de calificación de los estudiantes en esta actividad fue de 3.84 puntos.

## 5.2 Resultados de la ponderación de la tarea

### 5.2.1 Resultados del examen parcial de conocimientos

Como se clarificó previamente, durante la primera fase de la ponderación se aplicó una prueba a los 24 estudiantes denominada «examen parcial». Esta prueba consistía de 10 reactivos con valor de un punto cada uno; es decir, la calificación máxima que podría obtener un estudiante era 10. El promedio de puntuación de los estudiantes fue de 7.1. En esta prueba los estudiantes manifestaron los mismos tipos de errores que emergieron durante su resolución de las nueve actividades de la tarea diseñada. Los tipos de errores identificados se ilustran enseguida con las respuestas de los estudiantes al examen parcial.

1. *Confusión en el orden de las literales.* En el tercer reactivo del examen parcial los estudiantes debían simplificar la expresión  $7xy + 4xy + 3yx$ , pero 14 estudiantes no reconocieron el término  $3yx$  como semejante a  $7xy$  y  $4xy$ . Los estudiantes agruparon los términos  $7xy$  y  $4xy$ , sumando el resultado a  $3yx$  (ver Figura 12). Esto sugiere que para estos estudiantes  $xy \neq yx$ , lo cual es incorrecto. El orden en el que aparecen las variables parece afectar negativamente su percepción de la semejanza de términos algebraicos. Resultados similares se han reportado por Kog (2010).

**Figura 12.** Ilustración del error «confusión con el orden de las literales» en el que no se reconocen como semejantes a los monomios  $11xy$  y  $3yx$ , probablemente por el orden en el que aparecen las variables.

2. *Ignorar los exponentes de las partes literales.* Al pedirles que simplificaran la expresión  $3abc^2 + 2ab^2c + 4bc^2 + ab^2c$ , 10 estudiantes no observaron que el



monomio  $3abc^2$  no es semejante con los monomios  $2ab^2c$  y  $ab^2c$ . Este tipo de error se ilustra en la Figura 13. El estudiante suma los términos  $3abc^2$ ,  $2ab^2$  y  $ab^2c$ , obteniendo así  $6abc^2$  el cual suma con  $4bc^2$ . Este tipo de respuesta sugiere que los estudiantes que manifiestan este error no prestan atención a los exponentes que afectan las partes literales, es suficiente con que las variables sean las mismas para considerarlos como términos algebraicos semejantes. Sin embargo, no es improbable que el uso del exponente 2 en todos los sumandos de la expresión algebraica haya fomentado en estos estudiantes una percepción de semejanza. Tal error es identificado por Kog (2010) como una mala interpretación del exponente en las partes literales.

5.  $3abc^2 + 2ab^2 + 4bc^2 + ab^2c$

R  $6abc^2 + 4bc^2$

**Figura 13.** La estudiante 11, identifica erróneamente como términos semejantes a los monomios  $3abc^2$ ,  $2ab^2$  y  $ab^2c$ .

3. *Errores aritméticos.* Trece estudiantes cometieron errores aritméticos durante el proceso de agrupación de términos semejantes. Por ejemplo, al sumar los términos  $9a^3b^2c + 12a^3b^2c + 6a^3b^2c$  el estudiante número 24 escribió como respuesta  $26a^3b^2c$ , en lugar de  $27a^3b^2c$  (ver Figura 14). Pareciera que se trata de un error aritmético al sumar los coeficientes, más que un error relacionado con la identificación de términos semejantes.

9  $9a^3b^2c + 9a^2bc^2 + 12a^3b^2c + 3a^2bc^2 + 6a^3b^2c$

$26a^3b^2c - 6a^2bc^2$

**Figura 14.** El estudiante 24, suma de manera incorrecta los coeficientes de los términos semejantes  $a^3b^2c$ .

4. *Simplificación como términos independientes.* Se identificaron 4 estudiantes que al agrupar los términos algebraicos semejantes de un polinomio dado, no escribían la expresión algebraica resultante como un nuevo polinomio, sino como un conjunto de expresiones algebraicas independientes (monomios). En la Figura 15 se ilustra este tipo de respuesta. Nótese cómo la estudiante 19 simplifica la expresión  $3abc^2 + 2ab^2c + 4bc^2 + ab^2c$ , pero presenta el resultado como una lista de tres términos independientes. Esto sugiere que algunos estudiantes aún no han formado una concepción robusta de la naturaleza de la actividad de simplificación algebraica y su resultado.

Handwritten work on grid paper showing the simplification of a polynomial. The original expression is  $3abc^2 + 2ab^2c + 4bc^2 + ab^2c$ . The student has underlined each term. Below, they have written three separate equations:  $3 + = 3abc^2$ ,  $2 + 1 = 3ab^2c$ , and  $4 = 4bc^2$ . The plus signs in the equations are likely intended to represent the coefficients of the terms.

**Figura 15.** La estudiante 19, escribe el resultado de un proceso de simplificación algebraica de un polinomio como una lista de tres monomios independientes.

5. *Omisión de partes literales.* Al escribir el resultado, luego de agrupar los términos algebraicos semejantes, tres estudiantes no escribieron la parte literal que acompaña a los coeficientes resultantes. Un ejemplo de esta situación se ilustra en la Figura 16. El estudiante parece realizar la suma de términos semejantes  $12x + 3x$  lo cual da como resultado  $15x$ , pero el estudiante escribe solamente el coeficiente 15. Asimismo, este estudiante parece realizar la suma  $45y + 60y$  cuyo resultado es  $105y$ , pero escribe únicamente el coeficiente 105. Al igual que en el caso anterior de la *simplificación como términos independientes*, este tipo de respuesta incompleta sugiere que los estudiantes aún no forman una concepción sólida de la naturaleza del resultado de un proceso de simplificación algebraica.

Handwritten work on grid paper showing the simplification of  $12x + 45y + 3x + 60y$ . The student has written the result as  $15 + 105$ , where the variables  $x$  and  $y$  are omitted.

**Figura 16.** Respuesta del estudiante 12, en la que no escribe las partes literales como parte del resultado. Únicamente expresa la suma de los coeficientes resultantes.

6. *Omisión de términos con coeficiente igual a 1.* Tres estudiantes omitieron sumar aquellos monomios con coeficiente igual a 1. La Figura 17 ilustra esta situación. Al agrupar los términos algebraicos semejantes de un polinomio, una estudiante suma únicamente los términos  $3ax$  y  $15ax$ , pero omite adicionarles la parte literal  $ax$ . Pareciera que los estudiantes que cometen esta omisión no comprendieran que  $ax = 1ax$ ; es decir, que la parte literal  $ax$  va implícitamente acompañada del coeficiente 1, el cual debería considerarse durante la simplificación de términos algebraicos semejantes. Este tipo de error ha sido reportado por Kog (2010) y Ncube (2016).

Handwritten work on grid paper showing the simplification of  $3ax + 5by + 15ax + 8by + ax + by + 10 + 10$ . The student has grouped the  $3ax$  and  $15ax$  terms and summed them to  $18ax$ . The  $ax$  term is omitted. The final result is  $18ax + 19by + 20$ .

**Figura 17.** Al agrupar los términos algebraicos semejantes de un polinomio, la estudiante 6 suma los monomios semejantes  $3ax$  y  $15ax$ , pero no toma en consideración la parte literal  $ax$ .

## 5.2.2 Resultados del cuestionario sobre percepciones de los estudiantes acerca de la tarea

Como se mencionó previamente, el cuestionario para explorar las opiniones de los estudiantes acerca de la utilidad de la tarea constó de dos preguntas. Con relación a la primera pregunta: «¿cree que la tarea le ayudó a comprender qué son los términos semejantes?» Todos los estudiantes (24) contestaron que sí, por lo que se infiere una valoración positiva de la actividad por parte de los estudiantes. Sin embargo, al cuestionarles sobre el porqué de su ponderación, los estudiantes brindaron una variedad de respuestas las cuales fueron agrupadas en distintas categorías que se muestran a continuación.

**Categoría 1. Aproximación a la enseñanza por parte del docente:** esta categoría agrupa respuestas que se refieren al proceder del docente durante el desarrollo de la tarea. Por ejemplo, el estudiante 7 escribió: “porque [el docente] fue muy concreto y específico”. Por su parte, el estudiante 14 declaró: “porque [el docente] explicó de una manera sencilla”. El estudiante 10 expresó: “porque [el docente] explicó muy bien”. Otros estudiantes opinaron que el docente dio varios ejemplos e hizo las clases dinámicas e interesantes, mientras algunos se referían al dinamismo que el docente manejaba con cada estudiante. Un total de 10 estudiantes se encuentran en esta categoría, la cual ilustra la importancia del proceder del docente durante la implementación de la tarea.

**Categoría 2. Importancia en la educación matemática futura:** aquí se encuentran agrupadas respuestas que hacen referencia a la importancia que tiene el conocimiento generado a través de la tarea en la educación futura de los estudiantes. Por ejemplo, la estudiante 2 declaró: “porque es parte del álgebra, que es lo que todos debemos aprender a cierta edad para después ya realizar ciertas cantidades”. El estudiante 4 afirmó: “...son cosas que veremos en grados más avanzados”. Como se puede observar, los estudiantes hablan de cómo esperan que el conocimiento producido por la tarea les servirá en su educación matemática futura o lo repasarán en grados posteriores. Dos estudiantes se encuentran en esta categoría.

**Categoría 3. Percepción de su propio aprendizaje:** en esta categoría se encuentran las respuestas en las que los estudiantes expresaron una percepción de que con la tarea aprendieron fácilmente o que su entendimiento mejoró. Un ejemplo es la respuesta de la estudiante 3: “entendí que [los términos semejantes] son aquellos términos que tienen la misma parte literal... con igual exponente...”. Otro ejemplo es la siguiente respuesta del estudiante 13: “...me sirvió de apoyo...ya no se me hace muy difícil”. Quince son los estudiantes cuyas respuestas se hallan en esta categoría.

**Categoría 4. Cambios en la dinámica de la clase:** aquí se localizan aquellas respuestas que se refieren a cómo el diseño de la tarea modificó de manera positiva la dinámica de la clase. Por ejemplo: “porque las clases fueron creativas e innovadoras” (estudiante 21), “porque las clases fueron divertidas y fáciles de aprender” (estudiante 15), “porque las clases fueron entretenidas y dinámicas” (estudiante 5). Tres estudiantes proveyeron estas respuestas, las cuales sugieren que el diseño de la tarea puede tener influencia en la dinámica de la clase, de acuerdo con la opinión de algunos estudiantes.

**Categoría 5. Razones afectivas:** en esta categoría se agruparon las respuestas en la que los estudiantes expresan manifestaciones de agrado y de gusto por la tarea. Ejemplo de esta categoría son las respuestas de la estudiante 3: “porque me gustó bastante”, y la estudiante 15: “porque [la tarea] fue de mucho agrado” y “porque estas formas son muy interesantes para aprender”. Estas respuestas se interpretan cómo que los estudiantes no solo tuvieron la oportunidad de fortalecer sus conocimientos matemáticos, sino que al parecer también disfrutaron o encontraron interesante la implementación de la tarea. Las respuestas de tres estudiantes están localizadas en esta categoría.

## 6. Conclusión

En esta sección del artículo se abordan algunas de las implicaciones y principales contribuciones de la experiencia de aula reportada. También se reconocen algunas de las limitaciones de la experiencia.

### 6.1 Implicaciones para la práctica

La experiencia de aula reportada no solo hace referencia al diseño y funcionamiento de la tarea, sino que también se refiere a factores que influyen en el éxito de la implementación de la tarea.

La evidencia presentada sugiere que la tarea diseñada favorece la comprensión de los estudiantes acerca de la simplificación de términos algebraicos semejantes. Además, como se ilustró anteriormente, existen varias respuestas de los estudiantes al cuestionario que sugieren que el diseño de la tarea logra captar su atención y promueve su interés, afectando así de manera positiva la dinámica de la clase. Uno de los elementos con los que cuentan los estudiantes de este nivel para valorar el diseño de la tarea son sus experiencias previas con otras lecciones de matemáticas, y diferentes aproximaciones de enseñanza. Por estos motivos se argumenta que la implementación de este diseño de tarea en otras aulas de matemáticas es recomendable.

Las expresiones de los estudiantes como “[el docente] fue muy concreto y específico”, “[el docente] explicó de una manera sencilla” o “porque las clases fueron entretenidas y dinámicas”, apuntan hacia la importancia del quehacer docente como parte del éxito en la implementación de la tarea. Este es un aspecto importante de la implementación que inicialmente no fue considerado como parte del diseño de la tarea. No obstante, estas respuestas de los estudiantes sugieren que para los estudiantes el diseño de la tarea no lo es todo. Para ellos parece también importar el ambiente y la dinámica de clase que el docente crea durante la implementación.

### 6.2 Limitaciones de la experiencia de aula

Una limitación del diseño de tarea reportado en este escrito es que se enfoca solamente en términos algebraicos semejantes *de signo positivo*. Futuros diseños de tarea podrían ser más amplios e integrales al incluir también expresiones con signo negativo, y reportar las dificultades de los estudiantes asociadas a este tipo de expresiones algebraicas.

Otra limitación se refiere al nivel de involucramiento de los padres en la actividad. Sería importante informar a los padres de los estudiantes que sus hijos participarán

en una experiencia de aula que será reportada, e incluso obtener un consentimiento informado en caso de los estudiantes menores de edad.

Otros aspectos que podrían ayudar a robustecer el diseño de tarea reportado en este escrito son:

1. Crear más actividades con términos que tengan más de una variable en la parte literal (debido a que éste tipo de actividades fueron las más complicadas para los estudiantes).
2. Emplear más momentos de institucionalización discutiendo aquellas actividades donde los términos algebraicos semejantes tengan la posición de las variables cambiadas (que es otra de las situaciones en las que los estudiantes comúnmente manifiestan dificultades).

### Referencias bibliográficas

Ayres, L. (2008). Thematic coding and analysis. En L. M. Given (Ed.), *The Sage encyclopedia of qualitative research methods* (pp. 867–868). Sage.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–11.

García, F. J. (2019). Introducción a 'Diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos'. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 1–4. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.264>

Jones, K., & Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Education*, 19(2–3), 105–121. <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9345-z>

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study*. Springer. [https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6\\_2](https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_2)

Kog, L. (2010). An error analysis of form 2 (grade 7) students in simplifying algebraic expressions: A descriptive study. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 8(20), 139–162. <https://doi.org/10.25115/ejrep.v8i20.1398>

Li, J., Peng, A., & Song, N. (2010). Teaching algebraic equations with variation in Chinese classroom. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 529–556). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_27)

Ncube, M. (2016). *Analysis of errors made by learners in simplifying algebraic expressions at grade 9 level* [Tesis de maestría, Universidad de Sudáfrica]. Theses and dissertations of the University of South Africa. <https://hdl.handle.net/10500/23199>



Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275. <https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268>

Tirosh, D., Even, R., & Robinson, N. (1998) Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 35(1), 51–64. <https://doi.org/10.1023/A:1003011913153>

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 81–95. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9133-5>

Twohill, A., McAuliffe, S., Breen, S., Venkat, H., Roberts, N., & Lampen, E. (2019) Working group 5 report: Task design for early Algebra. *PME Newsletter*, December 2019, 8–9.

Watson, A., & Ohtani, M. (Eds.). (2015). *Task design in mathematics education. An ICMI Study 22*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2>

**Siguntay Tzul, Ana Isabel:** Licenciada en la enseñanza de la matemática y profesora de enseñanza media de matemáticas en el Colegio Privado Mixto “La familia”. Totonicapán. Guatemala  
Estudiante de la maestría en Didáctica de la matemática, Universidad de San Carlos de Guatemala  
Dirección electrónica: [aidesiguntay@gmail.com](mailto:aidesiguntay@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6908-7157>

**Sánchez Aguilar, Mario:** Profesor titular del Programa de Matemática Educativa del CICATA Legaria del Instituto Politécnico Nacional de México. Editor Asociado de las revistas *Educación Matemática* e *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*.  
Dirección electrónica: [mosanchez@ipn.mx](mailto:mosanchez@ipn.mx)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1391-9388>