

Algunos desafíos matemáticos al comprar chocolates

Some mathematical challenges when buying chocolates

Alguns desafios matemáticos na hora de comprar chocolates

Uldarico Malaspina

<p>Resumen</p>	<p>Se presenta un problema creado, por variación, a partir de un problema inicial de compras de dos tipos de tabletas de chocolate, cuya solución requiere solo hacer unas multiplicaciones, sumas y restas de números naturales. El problema creado tiene mayor complejidad que el problema inicial, pues requiere determinar la compra de tabletas de chocolate, teniendo en cuenta que deben ser por lo menos una tableta de cada tipo y la mayor cantidad posible, pero gastando lo menos posible. Hay diversas formas de resolver este problema de optimización, y en diversos niveles educativos, desde primaria hasta superior. Es una oportunidad para estimular el pensamiento optimizador y la intuición optimizadora, tanto de docentes como de estudiantes.</p> <p>Se invita a los lectores a tener en cuenta el problema, los comentarios y las reflexiones expuestas, para participar activamente en <i>El Rincón Intercreativo</i> correspondiente a este número.</p> <p>Palabras clave: creación de problemas por variación; resolución de problemas; optimización; intuición.</p>
<p>Abstract</p>	<p>We present a problem created, by variation, from an initial problem of buying two types of chocolate bars whose solution only requires multiplying, adding and subtracting natural numbers. The created problem is more complex than the initial problem because it requires determining the purchase of chocolate bars, taking into account that there must be at least one bar of each type and as many as possible, but spending as little as possible. There are several ways to solve this optimization problem, and at various educational levels, from primary to higher education. It is an opportunity to stimulate optimizing thinking and optimizing intuition for both teachers and students.</p> <p>Readers are invited to consider the problem, the comments and reflections presented, and to participate actively in the Intercreative Corner of this issue.</p> <p>Keywords: problem posing by variation; problem solving; optimization; intuition.</p>
<p>Resumo</p>	<p>Apresentamos um problema criado, por variação, a partir de um problema inicial de compra de dois tipos de barras de chocolate, cuja solução requer apenas multiplicação, adição e subtração de números naturais. O problema criado é mais complexo do que o problema inicial porque requer</p>

a determinação da compra de barras de chocolate, levando em conta que deve haver pelo menos uma barra de cada tipo e o maior número possível, mas gastando o mínimo possível. Há diferentes maneiras de resolver esse problema de otimização e em diferentes níveis educacionais, desde o ensino fundamental até o ensino superior. Essa é uma oportunidade de estimular o pensamento otimizador e a intuição otimizadora em professores e alunos.

Os leitores são convidados a considerar o problema, os comentários e as reflexões apresentadas, para participar ativamente do El Rincón Intercreativo desta edição.

Palavras-chave: criação de problemas por variação; resolução de problemas; otimização; intuição.

1. Problema

Celia va a la tienda con 60 soles a comprar chocolates peruanos para llevar a sus amigos extranjeros y encuentra que en la tienda hay tabletas de chocolates solamente de 9 soles (con arándanos) y de 6 soles (con aguaymanto). Entonces decide comprar la mayor cantidad de tabletas, pero por lo menos una tableta de cada uno de estos precios y gastando lo menos posible. ¿Cuál sería su compra, satisfaciendo sus tres criterios?

Este problema fue creado como una muestra de los problemas que se pueden crear por variación, a partir de un problema inicial sencillo, que suscita diversas posibilidades, como se muestra a continuación.

Problema inicial:

Celia va a la tienda a comprar chocolates y encuentra que sólo hay tabletas de 6 soles y tabletas de 9 soles. Decide comprar 2 tabletas de 6 soles y 4 tabletas de 9 soles. Si paga con 3 billetes de 20 soles ¿cuánto de vuelto recibirá?

Identifiquemos los elementos de este problema:

Información: Se compra 2 tabletas de chocolate de 6 soles y 4 tabletas de chocolate de 9 soles y se paga con 3 billetes de 20 soles.

Requerimiento: La cantidad de soles que se recibe como vuelto al pagar la compra con 3 billetes de 20 soles.

Contexto: Extra matemático.

Entorno matemático: Multiplicación, adición y sustracción con números naturales.

Tener explícitos estos elementos del problema, facilita la creación de otros problemas, modificando uno o más de sus elementos. Preguntas que ayudan mucho a crear nuevos problemas, por variación, son ¿qué pasaría si cambio la información?, ¿qué pasaría si cambio el requerimiento?, ¿qué pasaría si cambio el

contexto?, ¿qué pasaría si cambio el entorno matemático? Para simplificar y recordar estas preguntas, las resumimos en *¿qué pasaría si...?*

A continuación, muestro algunos ejemplos de problemas creados por variación del problema inicial y explico la modificación hecha

Problema 1:

Celia va a la tienda a comprar chocolates y encuentra que sólo hay tabletas de 6 soles y tabletas de 9 soles. Decide comprar 2 tabletas de 6 soles y 4 tabletas de 9 soles. Si paga con un billete de 50 soles ¿cuánto de vuelto recibirá?

En este caso, se ha cambiado la información y ha sido solo un cambio cuantitativo, pues Celia, en lugar de pagar con 3 billetes de 20 soles, paga con uno de 50 soles. Evidentemente, también ha cambiado el requerimiento, pues ahora es el vuelto de 50 soles y no de 60, como es en el problema original. Más aún, se requiere de una operación menos pues el pago se hace solo con un billete de 50 soles.

En este caso, esencialmente, se mantiene la estructura del problema inicial y podría decirse que es de menor complejidad; ciertamente, esta variación podría estar motivada por un menor nivel de conocimientos de los estudiantes que van a resolverlo.

Problema 2:

Celia va a la tienda a comprar chocolates y encuentra que sólo hay tabletas de 6 soles (con aguaymanto) y tabletas de 9 soles (con arándanos). Decide comprar por lo menos una de cada sabor y compra 2 tabletas de 6 soles y 4 tabletas de 9 soles. ¿Cuánto debe pagar por esta compra? ¿Celia pudo comprar más de 6 tabletas de chocolate gastando la misma cantidad que en esta compra?

En este problema, la información ha sido modificada, pues se considera sabores específicos de los chocolates, la compra de por lo menos una tableta de cada sabor y ya no se incluye el monto con el que se pagó por la compra.

En relación al requerimiento, advertimos que hay dos: uno es determinar cuánto se debe pagar por la compra y el otro es examinar si Celia pudo comprar más de 6 tabletas de chocolate, gastando la misma cantidad de soles que en la compra que hizo. Otra manera de formular este segundo requerimiento es determinar cuál es la cantidad máxima de tabletas de chocolate que puede comprar Celia con lo que gastó para comprar 2 tabletas de 6 soles y 4 de 9 soles. Si la respuesta a la pregunta del problema es negativa y adecuadamente justificada, la cantidad de tabletas de chocolate compradas es la máxima.

Es necesario obtener el primer requerimiento para obtener el segundo y la novedad es que hay que hacer cálculos que invitan a un tanteo inteligente. En buena cuenta, se trata de sumas de múltiplos de 6 y de 9, que deben dar 48 (es la respuesta al primer requerimiento; o sea, la cantidad de soles que gasta en comprar 6 tabletas de chocolate: 2 de 6 soles y 4 de 9).

El contexto sigue siendo extra matemático y, específicamente, se mantiene el contexto de compra de tabletas de chocolate.

El entorno matemático, además de operaciones con números naturales, incluye múltiplos de números naturales, en un marco de optimización, pues la idea es determinar la mayor cantidad de tabletas de chocolate que se puede comprar gastando 48 soles.

El lector puede verificar que, manteniendo el criterio de comprar por lo menos una tableta de cada sabor, es posible comprar más de 6 tabletas, gastando 48 soles; más aún, que es posible comprar 6 tabletas, gastando menos de 48 soles.

Problema 3

Es el problema que presenté al inicio:

Celia va a la tienda con 60 soles a comprar chocolates peruanos para llevar a sus amigos extranjeros y encuentra que en la tienda hay tabletas de chocolates solamente de 9 soles (con arándanos) y de 6 soles (con aguaymanto). Entonces decide comprar la mayor cantidad de tabletas, pero por lo menos una tableta de cada uno de estos precios y gastando lo menos posible. ¿Cuál sería su compra, satisfaciendo sus tres criterios?

Vemos que, en este problema, la información del problema inicial, ha sido modificada, pues si bien se mantiene la cantidad de soles con la que se va a comprar (60 soles), no se da una compra específica sino tres criterios para hacer la compra de tabletas de chocolate:

- (i) el mayor número posible de tabletas;
- (ii) por lo menos una de cada precio;
- (iii) el menor gasto posible, menor o igual a 60 soles.

El requerimiento es determinar la cantidad de tabletas de cada sabor que se debe comprar, satisfaciendo los tres criterios, dados en la información.

El contexto sigue siendo extra-matemático y, específicamente, la compra de tabletas de chocolate.

El entorno matemático es operaciones con números naturales y múltiplos de números naturales, en un marco de optimización.

2. Para una solución del problema dado.

Los contextos de este problema (el 3) así como del problema inicial y del 1 y el 2, restringen a trabajar con números naturales, pues se sobreentiende que no se compran fracciones de tabletas de chocolate.

Obtener el segundo requerimiento del problema 2 da elementos para resolver este problema. Más aún, si manteniendo el criterio de comprar por lo menos una tableta de chocolate de cada sabor, el resolutor se plantea preguntas adicionales,

como las siguientes,: ¿Es posible que Celia compre 6 tabletas de chocolate, gastando menos de 48 soles?; ¿Es posible que Celia compre más de 6 tabletas de chocolate, gastando menos de 48 soles?

Algo a destacar en el problema 3, como lo dije al examinar la información de este problema, es la búsqueda de una cantidad máxima de tabletas de chocolate (i), teniendo en cuenta que se debe comprar por lo menos una tableta de cada precio (ii) y que el gasto debe ser el menor posible, menor o igual a 60 soles (iii).

Se tiene un conjunto finito de posibles compras y una forma de resolver el problema es examinando adecuadamente cuál o cuáles de esas posibilidades cumplen con las condiciones (i), (ii) y (iii). La idea es hacer sumas de múltiplos de 6 y de 9 y compararlas con 60.

Una manera de examinar las posibilidades es observando que el máximo número de tabletas a comprar tiene que ser menor que 10, pues Celia puede comprar, con sus 60 soles, a lo más 10 unidades del chocolate más barato (6 soles la tableta), pero esto incumple la condición (ii). Además, por esta misma condición su compra debe incluir, de todas maneras, 1 tableta de 9 soles y 1 tableta de 6 soles; así, tiene margen de gasto, a lo más de 45 soles.

Con lo ya dicho, el lector puede optar por alguno de los diversos caminos que hay para llegar a concluir que, gastando 60 soles o menos, solo hay dos formas de comprar 9 tabletas en total: una de ellas es 1 tableta de 9 soles y 8 tabletas de 6 soles, con la cual se gasta 57 soles ($1 \times 9 + 8 \times 6$); y la otra es 2 tabletas de 9 soles y 7 de 6 soles, con la cual se gasta 60 soles ($2 \times 9 + 7 \times 6$). En consecuencia, la compra de 9 tabletas de chocolate que minimiza el gasto es la primera y vemos que así se cumple los tres criterios (i), (ii) y (iii).

3. Comentarios y reflexiones

Los problemas creados por variación del problema inicial, muestran la riqueza de ocasiones para desarrollar el pensamiento matemático que se pueden ir creando, modificando creativamente uno o más de los elementos del problema inicial dado. Esto es mucho más enriquecedor aún, si se hace con los estudiantes, luego de resolver con ellos un problema inicial adecuadamente escogido o creado por el profesor.

El problema inicial y el problema 1 llevan a hacer cálculos directos para resolverlos, pero los problemas 2 y 3 creados también a partir del problema inicial, llevan a hacer tanteos inteligentes y así a desarrollar el pensamiento matemático y específicamente a desarrollar el pensamiento optimizador o la intuición optimizadora, que no es muy cultivada en la educación básica. El uso de expresiones como “la menor cantidad”, “la mayor cantidad”, “lo menos posible”, “lo más posible”, “a lo más” y “por lo menos” es muy frecuente en la vida cotidiana y es muy importante su uso adecuado en la formulación de problemas y en sus soluciones.

El problema 3 puede resolverse – orientándolo adecuadamente – tanto en primaria como en secundaria. Más aún, puede resolverse en el nivel superior,

usando recursos más potentes de la optimización matemática. Sin embargo, destaco que no es indispensable recurrir a matemática avanzada y que es altamente enriquecedor – en general – que, ante problemas de optimización, se estimule la intuición optimizadora y se busque diversas formas de resolver tales problemas (Malaspina, 2002, 2007).

Como en los números anteriores, con estas reflexiones concluyo *El Rincón de Problemas* de este número de *UNIÓN* e invito a los lectores a *El Rincón Intercreativo*, que continuamos en este número.

Agradezco los comentarios y propuestas que me hicieron llegar, relacionados con el problema del número anterior de *UNIÓN* y los invito a leerlos en este número. También, los exhorto muy amigablemente a que me hagan llegar sus comentarios, propuestas o experiencias, a partir de reflexiones de carácter didáctico o matemático, que se originen en los problemas o en las soluciones expuestas en este número. Para facilitar la participación de los lectores, dejo algunas preguntas, como un medio de interactuar. Nos dará mucho gusto publicar y comentar lo que me escriban, en el próximo número de *UNIÓN*, como lo estoy haciendo en este número, con lo que me han enviado.

Bibliografía

Malaspina, U. (2002). Optimización matemática. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. *Alme* 15. <https://core.ac.uk/download/pdf/33252804.pdf>

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Relime*. 10 (3), 365-399.

Autor: Malaspina Jurado, Uldarico

Doctor en Ciencias, Profesor Emérito de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Expositor en foros internacionales de Educación Matemática. Autor y coautor de libros y artículos de Matemática y Educación Matemática. Académico de Número de la Academia Nacional de Ciencias del Perú. Palmas Magisteriales- Grado Amauta