UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 75. Diciembre 2025
Páginas 1-19

Análisis y rediseño de un recorrido de estudio e investigación en la formación de profesores

Análise e redesenho de um percurso de estudo e investigação na formação de professores

María Laura Santori, Mariela Edith Martínez, Leonardo Filippa

Fecha de recepción:11-11-2024
Fecha de aceptación: 02-06-2025

Resumen

En este trabajo, enmarcado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, realizamos un análisis y rediseño de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI), experimentado en la formación de profesores de matemática, relacionado con la optimización en la construcción de envases. De acuerdo con el análisis realizado hemos observado que, en algunos puntos del REI, resultó necesario revisar la planificación de las actividades desarrolladas durante las implementaciones, para plantear con mayor precisión las cuestiones a abordar, evitando así interpretaciones erróneas que generen desvíos en el desarrollo de este.

Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico, Recorrido de Estudio e Investigación, Formación de Profesores.

Abstract

In this work, framed within the Anthropological Theory of Didactics, we carried out an analysis and redesign of a Study and Research Path (SRP), experienced in the training of mathematics teachers, related to the optimization of the construction of containers. According to the analysis carried out, we have observed that, in some points of the SRP, it was necessary to review the planning of the activities developed during the implementations, in order to more precisely raise the questions to be addressed, thus avoiding erroneous interpretations that generate deviations in its development.

Keywords: Anthropological Theory of Didactics, Study and Research Path, Teacher Training.

Resumo

Neste trabalho, marcado na Teoria Antropológica do Didático, realizamos uma análise e redesenhamento de um Percurso de Estudo e Investigação (REI), experimentado na formação de professores de matemática, relacionado à otimização na construção de vasos. De acordo com a análise realizada, apresentamos que, em alguns pontos do REI, resultou necessário revisar o planejamento das atividades desenvolvidas durante as implementações, para plantar com maior precisão as questões a abordar, evitando assim interpretações errôneas que geraram desvios no desenvolvimento deste.

Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático, Percurso de Estudo e Pesquisa, Formação de Professores.

1. Introducción

El trabajo que aquí presentamos se realiza en el marco de un proyecto de investigación en didáctica de la matemática que se desarrolla en la Universidad Nacional del Comahue (UNCo), y que tiene como finalidad realizar aportes al problema de la formación inicial de profesores de matemática. Para llevar a cabo la investigación, se tomó como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD), que es una de las primeras corrientes didácticas que consideró como objeto de estudio e investigación todo el proceso que va desde la creación y la utilización del saber matemático hasta su transposición a las instituciones docentes (Chevallard et al., 1997, Chevallard 1999, 2013).

Desde la perspectiva de la TAD, la mayoría de los sistemas de enseñanza se encuentran actualmente enmarcados en un paradigma pedagógico al que Chevallard (2013), denomina metafóricamente paradigma de “la visita de las obras”, o “monumentalismo”. En este paradigma se define el objetivo de la enseñanza a partir de un conjunto de conocimientos que el docente presenta para que los estudiantes los estudien. Estos conocimientos son presentados de forma fragmentada, como monumentos que los estudiantes visitan y admiran con el profesor como guía, sin permitirles cuestionar o entender su relevancia en contextos más amplios. Esta visión monumentalista de la enseñanza limita el papel activo del estudiante en el proceso de aprendizaje y, el conocimiento oficial transmitido por la institución escolar, en general, es percibido por los estudiantes como poco útil para comprender y abordar problemas del mundo real.

La TAD aborda este paradigma desde otra óptica pedagógica más amplia, conocida como el "paradigma del cuestionamiento del mundo" (Barquero et al., 2022), en el cual el objetivo de la educación es el estudio de cuestiones abiertas y la exploración de conocimientos, de manera que los estudiantes puedan aplicarlos en contextos reales, desarrollando un entendimiento más profundo y funcional. En el paradigma del cuestionamiento del mundo, las obras matemáticas son importantes en la medida en que contribuyen a elaborar respuestas a las cuestiones planteadas.

Las investigaciones enmarcadas en la TAD se centran en estudiar las condiciones que facilitan la transición del paradigma de la "visita de las obras" al del "cuestionamiento del mundo", especialmente en el contexto de la enseñanza universitaria y en la formación de profesores (Barquero et al., 2021). El instrumento clave para esta transición es un dispositivo de enseñanza denominado *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI) (Chevallard, 2013; Bosch, 2018).

Estos dispositivos didácticos se están experimentando desde hace varios años en diversos sistemas de enseñanza, sin embargo, las investigaciones subrayan que se evidencian dificultades en su desarrollo concreto en las instituciones y también en su análisis en términos de investigación didáctica (Parra y Otero, 2018).

En cuanto a la formación de profesores, en la carrera Profesorado Universitario en Matemática de la Universidad Nacional del Comahue (en adelante PUMAT) se pueden caracterizar algunas cuestiones problemáticas puntuales, tal como se plantea en Olivero et al. (2020):

- Se observa que existe una ausencia casi total de un trabajo genuino de modelización matemática.

- Los egresados encuentran fuertes limitaciones para implementar la modelización matemática como estrategia de enseñanza en el ámbito de la escuela secundaria.
- Existen pocos espacios curriculares en los cuales se permite a los futuros profesores pensar y reflexionar sobre la necesidad de una educación emancipadora, tal como se plantea en los documentos oficiales y diseños curriculares provinciales y nacionales.

Es por esto, que se cree necesario abordar la problemática de la incorporación de REI en la formación de profesores. Por medio de este tipo de dispositivos didácticos, utilizados en un espacio curricular de la carrera PUMAT denominado *Taller Actividad Matemática y Resolución de Problemas*, se busca abordar el estudio de la modelización matemática en la formación de profesores, y a la vez aportar al análisis de las condiciones que facilitan la transición del paradigma de la visita de las obras al del cuestionamiento del mundo, especialmente en el caso de la enseñanza universitaria.

Las implementaciones de los REI realizadas hasta el momento en el PUMAT, han dado resultados satisfactorios (Olivero et al., 2020), no obstante, luego de revisar las implementaciones del REI relacionado con la optimización de envases, y llevado a cabo durante los años 2016 y 2019, notamos la necesidad de realizar una readecuación a la propuesta.

2. La modelización matemática en la formación de profesores

La TAD sitúa la actividad de modelización matemática (MM) en el corazón de la actividad matemática. Uno de los primeros postulados de la TAD es la asunción que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización (Chevallard et al., 1997).

El enfoque de la MM que propone la TAD implica que la actividad de modelización sea sinónimo de actividad matemática funcional, en contraposición a una actividad matemática meramente formal. Por lo tanto, desde esta perspectiva, la modelización matemática debe formar parte integrante de cualquier proceso de estudio de las matemáticas (Barquero, 2009).

La MM puede describirse en cuatro estadíos sin que sean necesariamente una sucesión temporal lineal entre ellos (Bolea, 2002), en forma sintética estos estadíos son:

1. Planteamiento de la situación problema (extra-matemática o intra-matemática) y delimitación de las cuestiones a estudiar.
2. Construcción del modelo matemático, determinación de las variables, planteamiento de hipótesis, relaciones y formalización de dichas relaciones.
3. Trabajo con el modelo para dar respuesta a las cuestiones planteadas.
4. Interpretación de los resultados y planteamiento de nuevas cuestiones.

Como ya hemos mencionado, desde la TAD se propone un dispositivo didáctico denominado Recorrido de Estudio e Investigación (REI), que integra la razón de ser de los saberes escolares en el corazón del proceso de estudio (Chevallard, 2007) y favorece el desarrollo de las condiciones que se requieren para hacer posible una actividad matemática funcional (Ruiz-Munzón, 2010: Barquero, 2022).

La propuesta de un REI se centra en estructurar los procesos de enseñanza y aprendizaje mediante la consideración de cuestiones abiertas planteadas a los estudiantes, quienes deben elaborar respuestas bajo la guía de uno o varios profesores. Se inicia con una cuestión generatriz que orienta todo el estudio y genera una ramificación de cuestiones derivadas. Durante el proceso de elaboración de respuestas a estas cuestiones, surgen actividades de investigación, como la búsqueda de información, la recopilación de datos, la confrontación de la información obtenida y la producción de respuestas parciales; y actividades de estudio para comprender la información recopilada, adquirir y movilizar nuevos conocimientos y herramientas de análisis (Chevallard, 2013). Los REI integran el estudio de nuevos conocimientos dentro del proceso de investigación.

En el caso de la formación del profesorado y teniendo en cuenta las necesidades de formación detectadas en los profesores para gestionar los REI experimentados, es de fundamental importancia el diseño de Recorridos de Estudio e Investigación para la Formación del Profesorado (REI-FP). (Ruiz-Olarría et al., 2019).

Alicia Ruiz-Olarría (2015) en su tesis doctoral describe estos dispositivos didácticos que servirán para organizar las praxeologías matemáticas por enseñar y para la enseñanza, e integrar la formación matemática y didáctica del profesorado.

El desarrollo de un REI-FP se estructura en cinco módulos de trabajo, estos módulos están diseñados para proporcionar una formación integral y práctica, preparando a los futuros profesores para enfrentar los desafíos de la enseñanza con una perspectiva reflexiva y adaptativa.

El módulo M_0 comienza con una cuestión inicial relacionada con la problemática de la profesión docente. En el módulo M_1 el profesor en formación experimenta un REI desde la perspectiva de un estudiante. El módulo M_2 se centra en el análisis matemático-didáctico del REI experimentado. En el módulo M_3 el profesor en formación debe diseñar un REI análogo al que vivenció previamente, lo cual le permitirá no solo explicitar los criterios fundamentales que orientan su construcción, sino también movilizar los conocimientos y técnicas trabajados en los módulos anteriores. Finalmente, en el último módulo (M_4) el profesor en formación experimenta el REI diseñado, en alguna institución educativa. Esta experimentación permite analizar las dificultades y obstáculos encontrados en la práctica, proporcionando criterios para modificar y mejorar el diseño de cara a futuras implementaciones.

El taller *Actividad Matemática y Resolución de Problemas* constituye el espacio físico y temporal dentro del diseño curricular del PUMAT, donde se hace efectiva la realización de los módulos 1 y 2 de una propuesta de REI-FP.

3. Rediseño de un Recorrido de Estudio e Investigación en la Formación de Profesores

El espacio curricular *Actividad Matemática y Resolución de Problemas* (AMRP) del plan de estudio de la carrera Profesorado Universitario en Matemática, y fue diseñado para la introducción, estudio e implementación de la modelización matemática en la formación de profesores. Se desarrolla durante 16 semanas, mediante un encuentro semanal de 4 horas reloj, en el segundo cuatrimestre del segundo año de la carrera, El objetivo principal de este espacio es realizar un proceso de estudio sobre la propuesta de un REI basado en una cuestión de interés multidisciplinar.

Durante los años 2016 y 2019 se experimentó en este espacio curricular un REI relacionado con la optimización en la construcción de envases, y en base a esas implementaciones y su evaluación, presentamos a continuación una propuesta que integra las experiencias y busca mejorar las distintas etapas del recorrido.

3.1. Acuerdos iniciales

Previo al inicio del REI, se realizarán ciertos acuerdos que guiarán el recorrido:

- Las actividades propuestas durante el desarrollo del taller se harán en grupos de dos o tres integrantes.
- Los estudiantes tendrán la libertad de elegir, en la primera sesión de trabajo, cómo se conformarán los grupos, y éstos se mantendrán estables durante todo el cuatrimestre.
- En cada sesión de trabajo, cada grupo deberá entregar un informe por escrito con todo lo realizado en ese día. El informe deberá contener: cuestiones abordadas en la sesión de trabajo, posibles vías de resolución y conclusiones.
- Al inicio de cada sesión, uno de los grupos oficiará de “grupo secretario” presentando un resumen de los avances y problemas que han quedado plasmados en los informes entregados por cada grupo en la sesión anterior.
- La asistencia a clase será obligatoria, y se permitirá sólo dos inasistencias durante el cursado del taller.
- La acreditación comprenderá haber entregado grupalmente todos los informes de avance, un examen escrito individual al finalizar el taller, y la posibilidad de recuperar este examen.

3.2 Descripción de las cuestiones y respuestas.

Inicialmente se les propondrá a los estudiantes la lectura de un texto suministrado por los docentes, donde se plantea la importancia del diseño de envases y la necesidad de que el mismo se ajuste a las características de los productos que se desean envasar y requerimientos del mercado. Luego de esta lectura, se trabajará en grupo para debatir y responder las siguientes cuestiones que estarán planteadas en dicho texto:

¿Qué tipo de envases conocemos y para qué se usan? ¿Qué aspectos hay que tener en cuenta al momento de elegir un envase para cierto producto?

A partir de las experiencias llevadas a cabo en los años 2016 y 2019, se espera obtener de los diferentes grupos respuestas que aborden aspectos multidisciplinarios relacionados con la construcción de envases, con el tipo de producto, con el marketing asociado, con el impacto ambiental causado por su fabricación, con la logística de producción, de almacenamiento y transporte.

Después de una puesta en común en la que se analizará lo expresado por cada uno de los grupos, los docentes formularán la siguiente cuestión:

¿Qué aspectos de los planteados podrían abordarse desde la matemática?

Si bien existen varios aspectos que pueden ser abordados desde la matemática, de acuerdo con lo experimentado, es muy probable que una de las cuestiones a estudiar que surja para desarrollar el REI, se plantee en torno a la optimización del material necesario para la construcción de envases, por lo que proponemos la siguiente cuestión generatriz:

Q_0: ¿Cuáles son las dimensiones óptimas de un envase con cierto volumen V, de forma tal que el costo de material empleado para su fabricación sea mínimo?

Como metodología propia de los REI, durante el trabajo grupal, y a partir de la formulación de Q_0, surgirán numerosas preguntas que ayudarán a comprender y delimitar la problemática a abordar, en particular, respecto al producto que se va a envasar, al tipo de material que se va a utilizar para construir el envase, cuáles son las características físicas que tendrá el envase, dónde y cómo será el almacenamiento, qué tipo de tecnología será la más adecuada para la fabricación del envase a bajo costo, cuánto material extra se necesita para realizar el cierre del envase, etc.

Con el fin de dar una respuesta provisoria a la cuestión generatriz Q_0, será importante delimitar el sistema a estudiar, por lo que sugerimos proponer las siguientes hipótesis iniciales:

H_1: El producto a envasar es un líquido.

H_2: El envase es una lata cilíndrica.

Aparecerá así la necesidad de reformular la cuestión generatriz del siguiente modo:

Q_1: ¿Qué dimensiones debe tener una lata cilíndrica para contener un litro de un determinado líquido de forma tal que el costo de material para fabricarla sea mínimo?

De acuerdo con la experiencia transitada en las dos implementaciones anteriores del REI, pueden surgir varios modelos para responder a esta pregunta. Un primer modelo se construirá considerando una lata cilíndrica de altura h, base circular de radio r; y asumiendo para el volumen la equivalencia 1 litro = 1000 cm^3. Este primer modelo es el modelo clásico, en el cual no se considera ningún tipo de material extra para el cierre de las latas, es decir, se asume una nueva hipótesis:

H_3: no se considera material extra para el cierre ni desperdicios en el corte.

Esta nueva hipótesis llevará a reformular la pregunta Q_1 de la siguiente manera:

$Q_{1.1}$: ¿Qué dimensiones debe tener una lata cilíndrica para contener un litro de un determinado líquido de forma tal que el costo de material para fabricarla sea mínimo, sin considerar material extra para el cierre ni desperdicios en el corte?

Para dar respuesta a $Q_{1.1}$, los grupos podrán plantear un esquema gráfico (figura 1) y determinar que la cantidad de material necesario para construir la lata está dada por el área superficial del cilindro cerrado, esto es:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad (1)$$

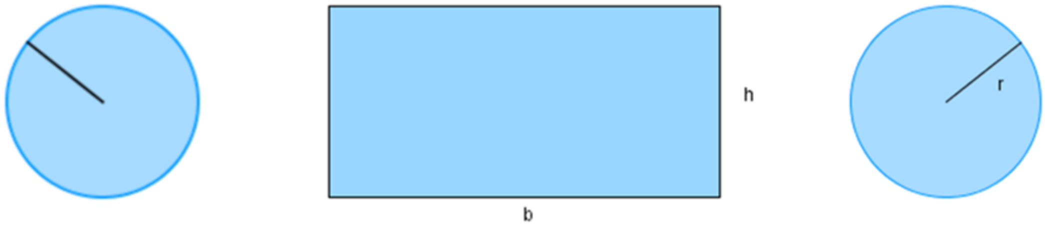


Figura 1. Esquema gráfico de la superficie de la lata. Fuente: Elaboración propia

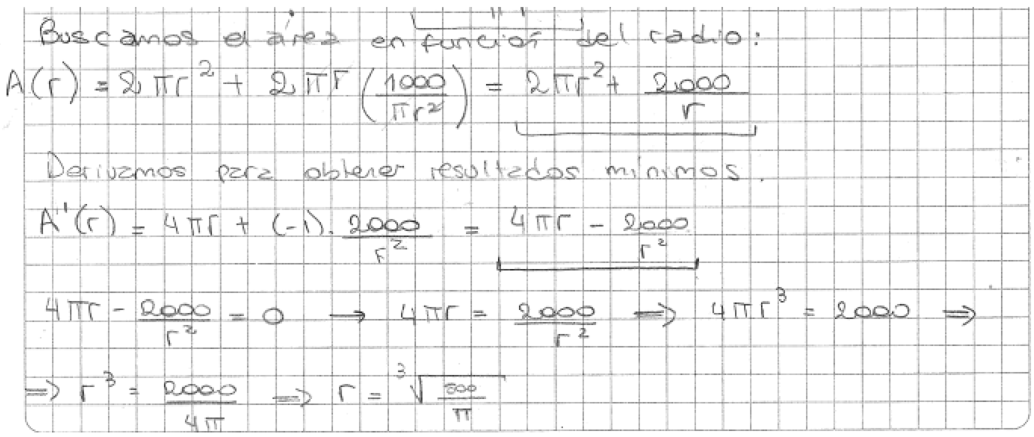
La función área en la ecuación (1) depende de dos variables (radio y altura), sin embargo, considerando que el volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h = 1000\ cm^3$, es posible expresarla como una función de una sola variable. De esta manera se obtiene la siguiente expresión para el área del cilindro (en cm^2) en función del radio:

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad (2)$$

Para determinar las dimensiones de la lata que optimicen la cantidad de material necesario para su fabricación, los grupos de estudiantes tendrán que llevar a cabo actividades exploratorias como: realización de procedimientos iterativos considerando diferentes valores para el radio y la altura, aplicados a la ecuación (1); utilización de algún software educativo, como por ejemplo GeoGebra, para obtener el valor mínimo de la función área considerando la fórmula dada por la ecuación (2); empleo de las técnicas de optimización de funciones de una variable, considerando la expresión de la misma ecuación, o de funciones de dos variables, utilizando la ecuación (1).

Luego de esta instancia, con el fin de dar una respuesta a la cuestión Q_{11} en términos de una técnica generalizable, será importante profundizar en la resolución del modelo. En general, dado que los estudiantes aún no tienen conocimiento de funciones de dos variables, y por la simplicidad de las ecuaciones, esto se realiza utilizando las técnicas de optimización del cálculo diferencial para funciones de una variable real.

En años anteriores, durante el desarrollo del REI, en esta misma etapa surgieron dificultades a la hora de justificar la existencia de un mínimo absoluto para la función área. A continuación, se muestra uno de los informes presentados por un grupo de estudiantes que participaron del taller desarrollado en el año 2019:



Buscamos el área en función del radio:

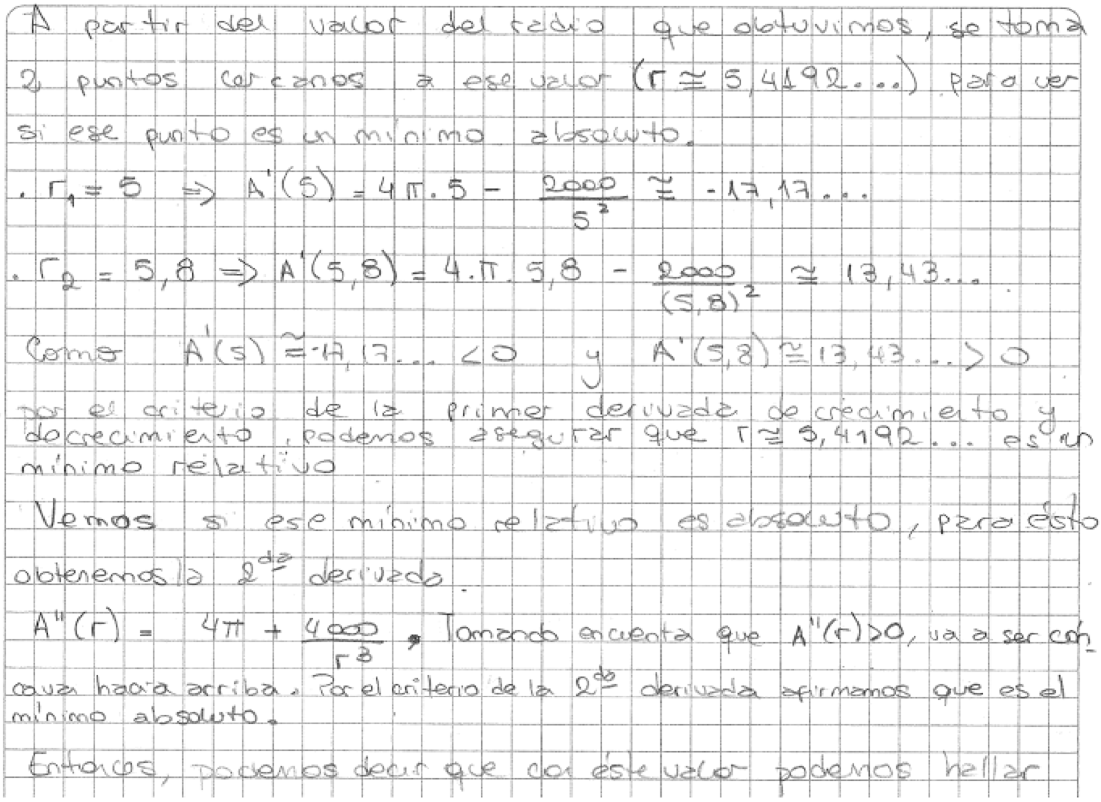
$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = \underbrace{2\pi r^2 + \frac{2000}{r}}$$

Derivamos para obtener resultados mínimos.

$$A'(r) = 4\pi r + (-1) \cdot \frac{2000}{r^2} = \underbrace{4\pi r - \frac{2000}{r^2}}$$

$$4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \rightarrow 4\pi r = \frac{2000}{r^2} \Longrightarrow 4\pi r^3 = 2000 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow r^3 = \frac{2000}{4\pi} \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$


A partir del valor del radio que obtuvimos, se toma 2 puntos cercanos a ese valor ($r \cong 5,4192...$) para ver si ese punto es un mínimo absoluto.

· $r_1 = 5 \Rightarrow A'(5) = 4\pi . 5 - \frac{2000}{5^2} \cong -17,13...$

· $r_2 = 5,8 \Rightarrow A'(5,8) = 4.\pi . 5,8 - \frac{2000}{(5,8)^2} \cong 13,43...$

Como $A'(5) \cong -17,13... < 0$ y $A'(5,8) \cong 13,43... > 0$

por el criterio de la primer derivada de crecimiento y decrecimiento, podemos asegurar que $r \cong 5,4192...$ es un mínimo relativo

Vemos si ese mínimo relativo es absoluto, para esto obtenemos la 2da derivada

$A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$, Tomando en cuenta que $A''(r) > 0$, va a ser cóncava hacia arriba. Por el criterio de la 2da derivada afirmamos que es el mínimo absoluto.

Entonces, podemos decir que con este valor podemos hallar

Figura 2: Informe presentado por un grupo de estudiantes.

Como se observa en la figura 2, hay errores que refieren a la justificación formal de la existencia de un mínimo absoluto en el punto crítico hallado. Es por esto que, para continuar con el desarrollo del REI, se propone dedicar una sesión del recorrido para trabajar en el estudio de máximos y mínimos absolutos de funciones de una variable real, lo que se denomina en la TAD, dialéctica “entrar y salir del tema”. (Parra y Otero, 2017)

Otra cuestión para destacar es que en la búsqueda de la respuesta a $Q_{1.1}$ se obtiene $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$, que es una expresión irracional, y por tal motivo, será necesario establecer acuerdos sobre el criterio de aproximación de cifras decimales (redondeo o truncamiento), y el número de cifras decimales a considerar. Una posible respuesta a $Q_{1.1}$, considerando redondeo con dos cifras decimales es:

$$R_{1.1}: \; r \approx 5{,}42\, cm \,,\, h \approx 10{,}84\, cm$$

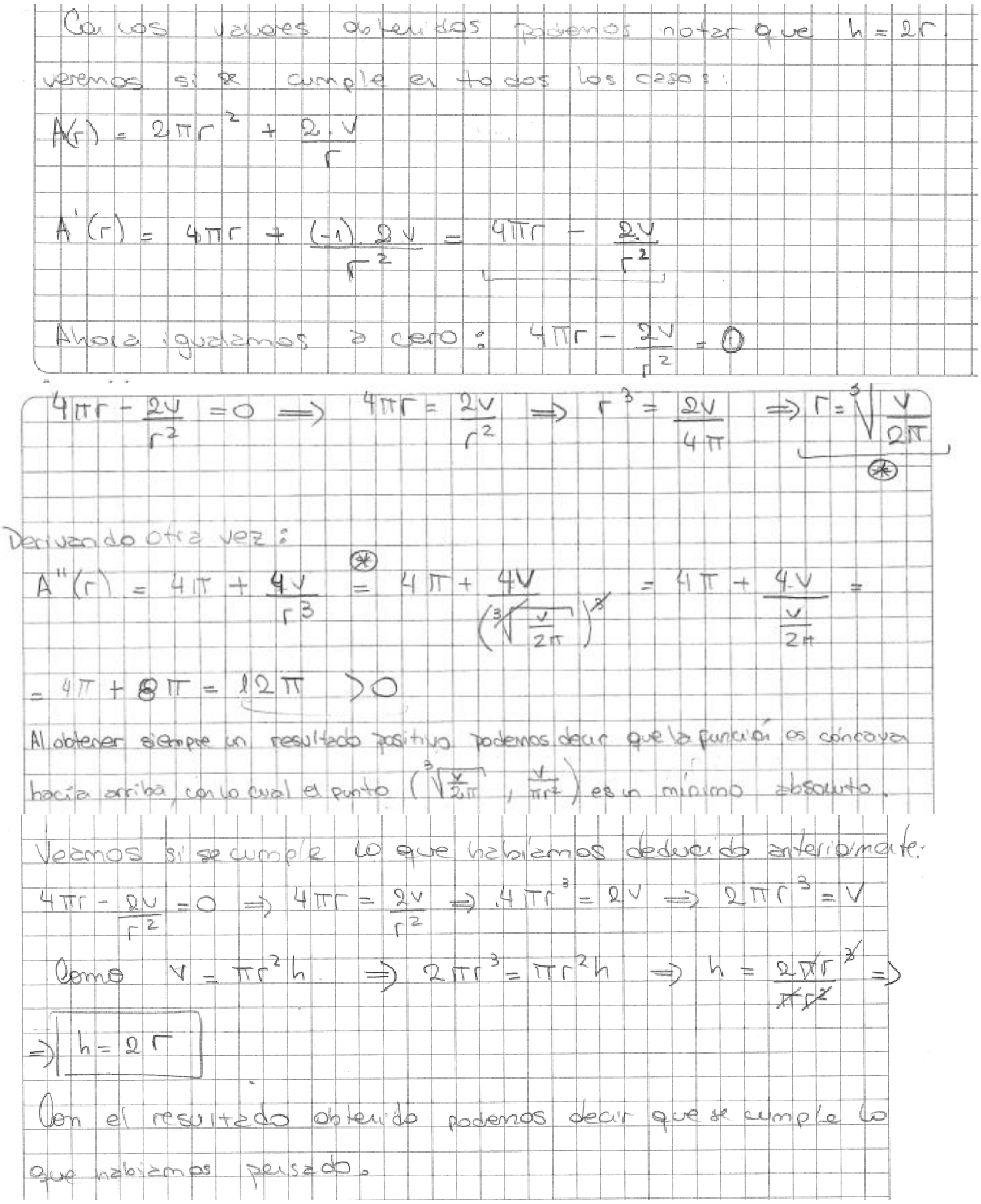
A partir de estos resultados, se puede observar que, para una lata de capacidad igual a un litro, la altura coincide con el doble del radio, es decir $h = 2r$. Se espera que surja entre los estudiantes la inquietud de verificar si la misma relación se mantiene para distintos volúmenes, por lo que proponemos que los docentes avancen en la generalización de este resultado a partir de la siguiente cuestión:

$Q_{1.1V}$: ¿Qué dimensiones debe tener la lata cilíndrica de volumen V de forma tal que el costo de material para fabricarla sea mínimo, sin considerar material extra para el cierre ni desperdicios en el corte?

Usando herramientas del cálculo diferencial se obtiene la siguiente respuesta a la cuestión $Q_{1.1V}$:

$$R_{1.1V}: r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \ , \ h = 2r$$

A continuación, mostramos lo desarrollado por uno de los grupos que participaron del taller en el año 2016:



Con los valores obtenidos podemos notar que h = 2r.
veremos si se cumple en todos los casos:

$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2 \cdot V}{r}$

$A'(r) = 4\pi r + \frac{(-1) \cdot 2V}{r^2} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$

Ahora igualamos a cero: $4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$

$4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{2V}{4\pi} \Rightarrow \underbrace{r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}_{(*)}$

Derivando otra vez:

$A''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3} \overset{(*)}{=} 4\pi + \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^{\cancel{3}}} = 4\pi + \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} =$

$= 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0$

Al obtener siempre un resultado positivo podemos decir que la función es cóncava hacia arriba, con lo cual el punto $\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \frac{V}{\pi r^2}\right)$ es un mínimo absoluto.

Veamos si se cumple lo que habíamos deducido anteriormente.

$4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Rightarrow 4\pi r^3 = 2V \Rightarrow 2\pi r^3 = V$

Como $V = \pi r^2 h \Rightarrow 2\pi r^3 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{2\cancel{\pi} r^{\cancel{3}}}{\cancel{\pi r^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{h = 2r}$

Con el resultado obtenido podemos decir que se cumple lo que habíamos pensado.

Figura 3: Informe presentado por un grupo de estudiantes

Como se observa en la figura 3, luego de obtener la fórmula del área de una lata de volumen V en función del radio r, los estudiantes buscaron el punto crítico de la función y aplicaron el criterio de la derivada segunda para justificar que en $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ se obtiene un mínimo absoluto. Cabe destacar que este procedimiento está incompleto ya que con este criterio sólo se asegura la existencia de un mínimo relativo.

A continuación, los docentes propondrán a los grupos que midan las dimensiones de diferentes tipos de latas reales (latas de pintura, de durazno al natural, de choclo, etc.) para que comprueben si se verifica la relación $h = 2r$. Lo que observarán es que en general las dimensiones de la altura y el radio no cumplen con la relación obtenida, por lo que se propondrá pensar: **¿por qué en las dimensiones de las latas "reales" no se cumple que $\boldsymbol{h = 2r}$?.**

Las conjeturas que emergieron, a partir de esta pregunta, durante el desarrollo de los dos talleres llevados a cabo en los años anteriores fueron:

- ✓ Porque no se tuvo en cuenta el desperdicio de material.
- ✓ Porque no se tuvo en cuenta el material necesario para cerrar la lata.
- ✓ Porque no se tuvo en cuenta el espacio requerido para su almacenamiento.

En base a estas conjeturas, se espera continuar el desarrollo del REI a partir de la pregunta:

¿Qué hipótesis podemos plantear y qué nueva cuestión podemos formular para que la respuesta obtenida se acerque más a la realidad?

Proponemos en esta instancia que los estudiantes busquen información en internet respecto a cómo se fabrican las latas, cuál es el material para elaborarlas, en qué formato se vende ese material, etc.

Para delimitar el problema, se puede considerar que la materia prima para la construcción de estos envases viene dispuesta en dos tipos de placas rectangulares de "dimensiones ideales" de manera que, para el recorte de las superficies laterales de los envases cilíndricos no exista desperdicio, mientras que para el recorte de las tapas, el desperdicio sea el que queda al recortar las mismas a partir de cuadrados de lado $2r$ (Ver figura 4), esto conducirá a formular una nueva hipótesis H_4, que reemplazará a H_3.

$\boldsymbol{H_4}$: Para el cálculo de las dimensiones de la lata se considera el desperdicio de material que surge al realizar los cortes para las tapas.

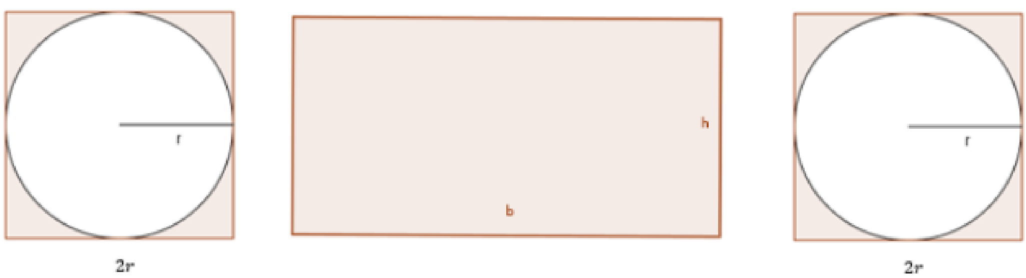


Figura 4. Esquema gráfico del corte de material. Fuente: Elaboración propia

A partir de esta nueva hipótesis se reformula la cuestión a estudiar de la siguiente manera:

$Q_{1.2}$: ¿Qué dimensiones debe tener una lata cilíndrica para contener 1 litro de un determinado líquido de forma tal que el costo de material para fabricarla sea mínimo, considerando el desperdicio de material que surge solamente al realizar los cortes de las tapas?

Para responder a esta pregunta se construye un segundo modelo para el cual el área total a minimizar (en cm^2) es

$$A(r) = 8r^2 + \frac{2000}{r} \tag{3}$$

A continuación, mostramos lo desarrollado por uno de los grupos participantes del taller:

$$A_T = b \times h + 2 \times 4r^2$$

Sabiendo que: $V = h.\pi r^2 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi . r^2}$, considerando $V = 1000\ cm^3$

$$b = 2\pi r$$

Entonces $A_T = 2\pi r . \frac{1000}{\pi r^2} + 8r^2 = \frac{2000}{r} + 8r^2$

Como el dominio de $A_T = R^+$, la función es continua y derivable en todo su dominio.

Luego, derivamos e igualamos a cero, buscando los puntos críticos.

$A_T'(r) = \frac{-2000}{r^2} + 16r \Rightarrow \frac{-2000}{r^2} + 16r = 0$

Los puntos son r=0 y r=5, pero como r=0 no pertenece al dominio de la función lo descartamos y nos quedamos solo con el r=5

Ahora derivamos otra vez y la evaluamos en r=5 para ver si es un máximo o mínimo absoluto.

$$A_T''(r) = \frac{4000}{r^3} + 16 A_T''(5) = 48$$

Como $A_T''(5) > 0$ podemos asegurar que es un mínimo absoluto.

Sabiendo que r = 5 lo reemplazamos en la siguiente ecuación y obtenemos la altura,

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi . 5^2} \cong 12,73$$

Entonces la relación entre la altura y el radio es, $h \cong 2,546r$ ó $r \cong \frac{h}{2,546}$

Figura 5: Informe presentado por uno de los grupos

Finalmente, utilizando las técnicas de optimización del cálculo diferencial para funciones en una variable, se obtiene como respuesta a $Q_{1.2}$:

$$R_{1.2}\text{: } r \approx 5\ cm\ \ ,\ h \approx 12{,}73\ cm\ .$$

Este modelo se puede generalizar para un volumen V cualquiera, lo que conduce a la redacción de una nueva cuestión:

$Q_{1.2V}$: ¿Qué dimensiones debe tener la lata cilíndrica de volumen V de forma tal que el costo de material para fabricarla sea mínimo, considerando el desperdicio de material que surge solamente al realizar los cortes de las tapas?

Mediante un análisis similar al realizado para la respuesta a $Q_{1.1V}$, se obtiene la respuesta a $Q_{1.2V}$:

$$R_{1.2V}\text{: }\ r = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}\ ,\ \ h = \frac{8}{\pi} r$$

Como se observa en la respuesta a $Q_{1.2V}$, la relación entre h y r ha cambiado al considerar la nueva hipótesis H_4.

A continuación, se muestra lo desarrollado por uno de los grupos que realizó el taller:

$A_T(r) = \frac{2V}{r} + 8r^2$

Derivo $A_T(r)$

$A_T'(r) = \frac{-2V}{r^2} + 16r$

igualo a 0

$-\frac{2V}{r^2} + 16r = 0 \rightarrow 16r^3 = 2V \rightarrow 8r^3 = V \rightarrow r = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}$

reemplazo r en h

$h = \frac{V}{\pi\left(\frac{\sqrt[3]{V}}{2}\right)^2}$

entonces $h = \frac{8}{\pi} r \rightarrow h \approx 2{,}54 \cdot r$ 1

Figura 6: Informe presentado por uno de los grupos

A partir de indagar en internet cómo es el cierre de las latas de diferentes productos, se espera que en los grupos surja la propuesta de considerar material extra para el cierre de las tapas. La figura 7 muestra el mecanismo de doble cierre utilizado en las latas herméticas. Este sistema consiste en un plegado controlado del borde de la tapa y del cuerpo de la lata, que se enrollan juntos mediante una operación mecánica para formar un sello hermético. El proceso genera una región curva, que requiere una cierta superficie adicional de material tanto en la tapa como en el cuerpo de la lata, lo que implica que el radio efectivo de la tapa no coincide con el radio exterior visible, ya que parte del material se utiliza en el cierre. Esta consideración es clave en este problema de optimización, ya que afecta directamente al cálculo de las superficies y volúmenes involucrados.

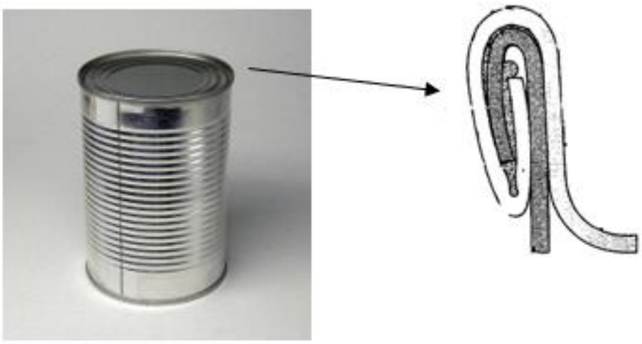


Figura 7: Mecanismo de doble cierre de una lata hermética.

En las ediciones del taller llevadas a cabo anteriormente, se hizo necesario en esta instancia discutir sobre la cantidad de material extra que se agregaría. Se consideró que el material extra sería un anillo circular de radio ε. (Ver figura 8)

A partir de esto, los docentes podrán proponer una nueva hipótesis, considerando que el cierre en ambas tapas se realizará de la misma manera:

H_5: Para el cálculo de las dimensiones de la lata se considera el desperdicio de material que surge al realizar los cortes para las tapas y el material extra para el cierre de estas.

Esta hipótesis posibilitará el planteo de una nueva cuestión a estudiar:

$Q_{1.3}$: ¿Qué dimensiones debe tener la lata cilíndrica para contener 1 litro de un determinado líquido de forma tal que el costo de material para fabricarla sea mínimo, considerando el desperdicio de material que surge al realizar los cortes para las tapas y el material extra para el cierre de estas?

Para responder a esta pregunta se construye un tercer modelo para el cual el área total a minimizar (en cm^2) es:

$$A(r) = 8(r+\varepsilon)^2 + \frac{2000}{r} \tag{4}$$

En la figura 8 se muestran las dimensiones consideradas para elaborar el modelo anterior:

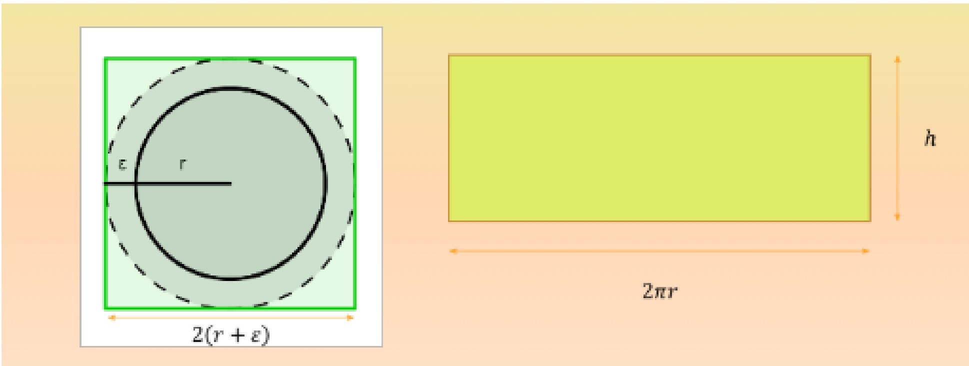


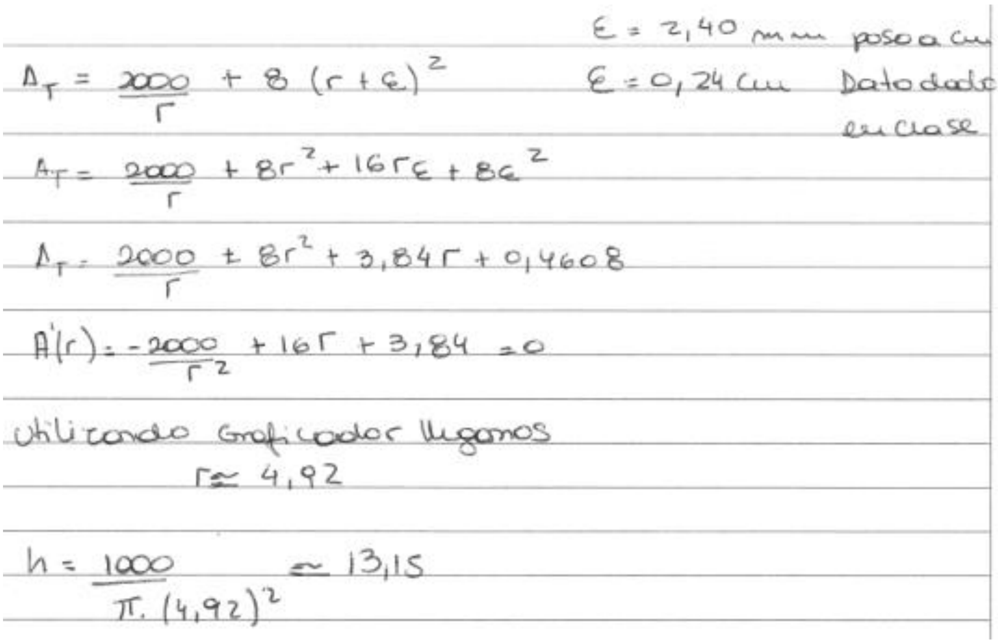
Figura 8. Esquema gráfico del corte de material y sus dimensiones. Fuente: Elaboración propia

El valor de ε variará según el material y el tipo de cierre como se especifica por ejemplo en la página web Mundolatas.com (https://mundolatas.com/). A modo de ejemplo, en los talleres desarrollados se consideró un valor de $\varepsilon = 0{,}24\ cm$ y se llegó a dar como respuesta a $Q_{1.3}$ la siguiente:

$R_{1.3}$: $r \approx 4{,}92\ cm$ y $h \approx 13{,}15\ cm$

Cabe destacar que la resolución de la ecuación (4) que se obtiene para hallar los puntos críticos de la función área no es trivial. En las instancias llevadas a cabo para su resolución, algunos grupos utilizaron GeoGebra y otros transformaron la ecuación en una ecuación cúbica ayudándose de una calculadora científica que resuelve ecuaciones cúbicas.

A continuación, se muestra lo desarrollado por uno de los grupos:


ε = 2,40 mm paso a cm

$A_T = \frac{2000}{r} + 8(r+\varepsilon)^2$

ε = 0,24 cm Dato dado en clase

$A_T = \frac{2000}{r} + 8r^2 + 16r\varepsilon + 8\varepsilon^2$

$A_T = \frac{2000}{r} + 8r^2 + 3{,}84r + 0{,}4608$

$A'(r) = -\frac{2000}{r^2} + 16r + 3{,}84 = 0$

Utilizando Graficador llegamos

$r \simeq 4{,}92$

$h = \frac{1000}{\pi.(4{,}92)^2} \simeq 13{,}15$

Figura 9: Informe presentado por uno de los grupos

Se podría pensar en generalizar este modelo para un volumen V cualquiera, planteando a los estudiantes la siguiente cuestión:

$Q_{1.3V}$: ¿Qué dimensiones debe tener la lata cilíndrica de volumen V de forma tal que el costo de material para fabricarla sea mínimo, considerando el material extra para el cierre de las tapas y el desperdicio de material que surge al realizar los cortes para las tapas?

Para determinar el modelo se puede utilizar la figura 8, en este caso se obtiene que el área a minimizar es:

$$A(r) = 8(r+\varepsilon)^2 + \frac{2V}{r} \qquad (5)$$

y al derivar e igualar a cero para buscar puntos críticos se obtiene la ecuación:

$$A'(r) = 16(r+\varepsilon) - \frac{2V}{r^2}$$

que se resuelve en forma algebraica transformándola en una ecuación polinómica de grado 3:

$$16r^3 + 16\varepsilon r^2 - 2V = 0$$

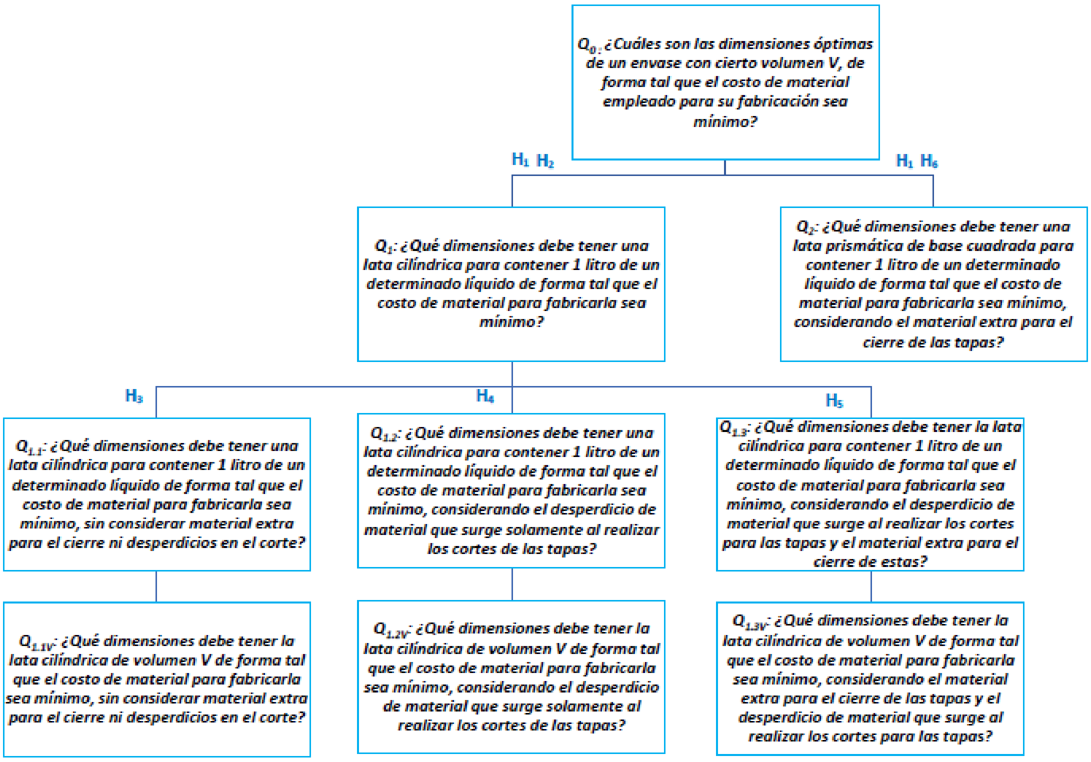
Para resolver esta ecuación cúbica, en la que V es un parámetro, es necesario poner en juego cuestiones matemáticas no triviales. Cabe destacar que, en las implementaciones del REI de los años 2016 y 2019, no se abordó esta cuestión.

Para finalizar el recorrido se propondrá que entre todos los grupos se construya un cuadro comparativo, que dé cuenta de las cuestiones abordadas y las respuestas obtenidas según los modelos planteados. Un posible cuadro se muestra en la Tabla 1.

V= 1 Litro	r	h	h/r	A(r)
LATA REAL	5,25 cm	13 cm	2,47	601,7 cm^2
$Q_{11}(H_1-H_2-H_3)$	5,42 cm	10,84 cm	2	553,58 cm^2
$Q_{12}(H_1-H_2-H_4)$	5 cm	12,73 cm	2,54	574 cm^2
$Q_{13}(H_1-H_2-H_5)$ (ε = 0.24)	4,92 cm	13,15 cm	2,67	619.51 cm^2

Tabla 1. Cuadro comparativo de las distintas respuestas obtenidas.

A continuación, compartimos un esquema que resume las hipótesis y cuestiones que se abordan en el REI propuesto.



H_1: El producto a envasar es un líquido.
H_2: El envase es una lata cilíndrica.
H_3: No se considera material extra para el cierre ni desperdicios en el corte.
H_4: Para el cálculo de las dimensiones de la lata se considera el desperdicio de material que surge al realizar los cortes para las tapas.
H_5: Para el cálculo de las dimensiones de la lata se considera el desperdicio de material que surge al realizar los cortes para las tapas y el material extra para el cierre de estas.

Figura 10. Esquema del REI

4. Aspectos a destacar en la implementación del REI

Durante el desarrollo de un REI, se pueden observar sistemáticamente algunas características propias de la implementación de estos dispositivos didácticos, las que describiremos a continuación:

La limitación de las técnicas conocidas

Mediante el desarrollo del REI los estudiantes pueden poner a prueba las técnicas de optimización para funciones de una variable real que han estudiado en el trayecto de la carrera. El recorrido permite que surjan elementos tecnológicos-teóricos para justificar dichas técnicas, pues el contrato didáctico establece que cada respuesta a las cuestiones planteadas sea acompañada por su justificación. Por ejemplo, la dificultad que surge para dar una respuesta a la cuestión $Q_{1.3}$, en la que se tienen que determinar las raíces de una ecuación cúbica, propiciará, como sucedió en experiencias anteriores, que el grupo de estudiantes proponga el uso de las TIC para resolver la ecuación. El desafío que tienen frente a sí será cómo justificar que los valores encontrados son extremos absolutos y así responder a la cuestión planteada.

La emergencia de más de una técnica para dar respuesta al problema de optimización

Los estudiantes que cursan el taller en general tienen trayectorias académicas diferentes, esto puede dificultar el proceso de articulación en el trabajo grupal, sin embargo, esta realidad da la posibilidad de que durante el desarrollo del REI emerjan distintas técnicas para dar respuesta a las cuestiones planteadas, haciendo necesaria su justificación, estableciendo criterios de selección de las mismas, pensando en su fiabilidad, economía, pertinencia, entre otros aspectos.

Para dar respuesta a las cuestiones planteadas en este REI, es posible que alguno de los grupos utilice técnicas de optimización para funciones en dos variables. Por ejemplo, en una de las experiencias anteriores uno de los grupos propuso usar la técnica de Multiplicadores de Lagrange para dar respuesta a $Q_{1.1V}$.

La ventaja de utilizar TIC

La utilización de herramientas tecnológicas disponibles (entre ellas GeoGebra) es muy importante para realizar los análisis correspondientes y así obtener conclusiones durante el recorrido. Asimismo, es importante destacar que la decisión sobre la elección de las herramientas a utilizar debe quedar bajo la responsabilidad de cada grupo. Esto habilita a un nuevo reparto de responsabilidades entre el estudiante y el profesor, y contribuye a la formación de los futuros profesores.

La riqueza de la evaluación como parte del proceso de estudio

La modalidad de trabajo en este tipo de dispositivos demanda el diseño e implementación de instrumentos de evaluación y acreditación que evidencian nuevas modalidades de estudio y permiten hacer un verdadero diagnóstico del proceso de estudio individual y grupal, en su totalidad. Se piensa en instrumentos de evaluación que den cuenta de:

- *La autonomía y responsabilidad del trabajo de los estudiantes*. A través de una evaluación continua del proceso de estudio, junto con una evaluación final destinada a la acreditación, ambas de carácter escrito e individual, y con la posibilidad de utilizar todo el material generado a lo largo del curso (apuntes, informes, entre otros), se puede determinar el nivel de progreso de cada estudiante.
- *La riqueza del trabajo en grupo*. La entrega de informes al finalizar cada sesión de trabajo y la realización de una exposición grupal como grupo secretario, permite evaluar la dinámica de trabajo de los grupos, como así también los logros semanales de cada uno.
- *La completitud del proceso de modelización.* La exposición grupal sobre el modelo construido y la necesidad de justificar sus decisiones y resultados, y además comunicarlos, permite evaluar la totalidad de un proceso de modelización en cada uno de los grupos.

Pérdida de la ilusión de control

En las modalidades de clases teóricas y prácticas comúnmente utilizadas en la universidad, se genera una falsa ilusión de control sobre lo que los estudiantes son capaces de hacer o no. La creencia de los docentes de que, a partir de las explicaciones teóricas y la posterior ejercitación práctica, bastan para asegurar el éxito en la resolución de problemas queda refutada a diario en las aulas.

La implementación de los REI permite romper con esta ilusión de control, dado que el avance en el proceso de estudio depende totalmente de la producción matemática de los estudiantes. Es importante mencionar que, ante la imposibilidad de avanzar de los estudiantes, se generan fuertes sentimientos de ansiedad en los profesores que no están acostumbrados a lidiar con la incertidumbre y los tiempos reales que se necesitan para llevar a cabo el momento del primer encuentro y el momento exploratorio dentro de un REI, a fin de construir las técnicas y respuestas necesarias.

5. Conclusiones

La implementación de Recorridos de Estudio e Investigación (REI) es muy importante en la formación de profesores. Estos recorridos son metodologías que permiten a los futuros docentes profundizar en los procesos de enseñanza y aprendizaje a través de la investigación, la reflexión crítica y la práctica.

A continuación, se presentan algunas ventajas clave de los REI en la formación de profesores:

Aprendizaje activo: Los REI facilitan un marco de aprendizaje en el que los futuros docentes asumen un papel activo en su proceso formativo. Al involucrarse en la indagación y la exploración de temas de relevancia educativa, estos futuros profesores no solo construyen conocimientos, sino que también desarrollan habilidades pedagógicas críticas a través del diálogo, la reflexión y la interacción con diversos saberes.

Desarrollo de competencias investigativas: A través de la investigación que se lleva a cabo en un REI, los docentes en formación aprenden a formular preguntas, recolectar y analizar datos, lo que les ayuda a desarrollar habilidades críticas que podrán aplicar en su carrera profesional.

Reflexión sobre la práctica: Los recorridos fomentan la reflexión crítica sobre la enseñanza y el aprendizaje, permitiendo a los futuros profesores evaluar y mejorar sus propias prácticas educativas.

Colaboración y aprendizaje entre pares: Los recorridos suelen implicar trabajo en grupo, lo que fomenta la colaboración y el aprendizaje mutuo entre los futuros docentes, creando un ambiente de apoyo y desarrollo profesional.

Preparación para desafíos educativos: Al involucrarse en investigación y estudio crítico, los futuros profesores están mejor preparados para abordar los desafíos contemporáneos en la educación, incluyendo la diversidad, la inclusión y el uso de tecnologías.

El diseño y la implementación de un REI es un trabajo muy arduo, pero sin duda genera aportes significativos al paradigma del cuestionamiento del mundo. No obstante, es muy importante destacar que luego de la implementación de un REI, se hace necesario revisar la planificación de las actividades desarrolladas con el objetivo de plantear con mayor precisión las cuestiones a abordar, tal como lo hemos realizado en este trabajo, y de esta manera evitar interpretaciones erróneas que pudieran generar desvíos significativos en el desarrollo.

En síntesis, aunque la creación y ejecución de un REI requiere de un esfuerzo considerable, su impacto en la formación de estudiantes críticos y reflexivos es invaluable. Estas experiencias no solo transforman el aprendizaje individual, sino que también influyen en la manera en que los futuros profesores se comprometen con todo el proceso de la enseñanza de la matemática.

6. Referencias bibliográficas

Barquero, B. (2009). Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas. [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona]. https://ddd.uab.cat/record/63192.

Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I., y Ruiz-Munzón, N. (2021). Study and research paths in the frontier between paradigms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1988166

Barquero, B., Bosch, M. y Florensa, I. (2022). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *AIEM Avances de investigación en educación matemática*, 21 , 87 106 . https://doi.org/10.35763/aiem 21 4232.

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: A model for inquiry. *Proceedings of the International Congress of Mathematics* (pp. 4001-4022). ICM.

Bolea, P. (2002), El proceso de alterización de organizaciones matemáticas escolares. [Tesis doctoral] Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza. España

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/Horsori.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 221-266.*

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2(2), 161-182. doi: 10.4471 /redimat.2013.26.*

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En L.Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas: Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Universidad de Jaén.

Parra, V., y Otero, M. R. (2017). Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las “dialécticas”. *Educación Matemática*, 29(3), 9-49.

Parra, V., y Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 13(2), 1-18.

Ruíz-Munzón, N. (2010). La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. [Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona].

Ruíz-Olarría, A. (2015). La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza. [Tesis Doctoral no publicada. Universidad Autónoma de Madrid].

Ruiz-Olarría, A., Bosch, M. y Gascón, J. (2019). Construcción de praxeologías para la enseñanza en la institución de formación del profesorado, *Educación Matemática*, 31(2), 132-160. http://doi.org/10.24844/EM3102.06

Olivero, F. J., Martínez, M., & Santori, M. L. (2020). El problema de la modelización matemática en la formación de profesores: una propuesta de cambio curricular desde la TAD. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *22*(4), 517-530.

Universidad Nacional del Comahue. (2020). Modificación del Plan de Estudios de la carrera Profesorado Universitario en Matemática (Plan PUMAT). Consejo Superior. Ordenanza Nº 0695/2020. Disponible en: https://faeaweb.uncoma.edu.ar/oferta_academica/profesorado-universitario-en-matematica/ (consultado noviembre de 2024).