UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 75. Año 2025
Páginas 1-21

Competencia matemática y uso de tecnologia en Cálculo Diferencial de carreras de ingeniería
Competência matemática e uso de tecnologia em Cálculo Diferencial em cursos de engenharia

Betina Williner

Fecha de recepción: 26-05-2025
Fecha de aceptación: 21-07-2025

Resumen	Numerosas investigaciones evidencian que muchos estudiantes universitarios tienen dificultades para comprender profundamente conceptos clave del Cálculo, en parte por enfoques de enseñanza tradicionales centrados en procedimientos. En este contexto, en la materia Análisis Matemático II de ingeniería Informática, se desarrolló una situación de aprendizaje centrada en intervalos de crecimiento/decrecimiento y extremos relativos, integrando el uso de GeoGebra. La propuesta incluyó actividades de exploración, descubrimiento y cierre, con foco en el desarrollo de la competencia matemática y sus capacidades fundamentales. El análisis de las producciones mostró un desarrollo aceptable en todas las capacidades fundamentales con menor medida en la referida al manejo algebraico. **Palabras clave**: competencia matemática-GeoGebra-Cálculo
Abstract	Numerous studies show that many university students struggle to deeply understand key concepts in calculus, partly due to traditional, procedural-centered teaching approaches. In this context, in the Mathematical Analysis II course in Computer Engineering, a learning situation focused on intervals of growth/decrease and relative extremes was developed, integrating the use of GeoGebra. The proposal included exploration, discovery, and closure activities, focusing on the development of mathematical competence and its fundamental skills. Analysis of the students' work showed acceptable development in all fundamental skills, with a lesser degree in algebraic skills. **Keywords**: mathematical competence-GeoGebra-Calculus
Resumo	Muitas pesquisas mostram que muitos estudantes universitários têm dificuldade em compreender profundamente os principais conceitos do cálculo, em parte devido às abordagens de ensino tradicionais focadas nos procedimentos. Neste contexto, na disciplina de Análise Matemática II do curso de Engenharia Informática, foi desenvolvida uma situação de aprendizagem focada nos intervalos de crescimento/decréscimo e nos extremos relativos, integrando a utilização do GeoGebra. A proposta incluía atividades de exploração, descoberta e encerramento, com foco no desenvolvimento de competências matemáticas e competências fundamentais. A análise das produções mostrou um desenvolvimento

	aceitável em todas as capacidades fundamentais com menor extensão na referente ao tratamento algébrico. **Palavras-chave:** competência matemática-GeoGebra-Cálculo

1. Introducción

Numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática, tanto de décadas pasadas (Artigue, 1995; Salinas y Alanís, 2009; Sánchez-Matamoros García et al; 2008) como recientes (Báez Ureña et al, 2022; González Flores et al, 2024; Zayas-Batista et al, 2023), evidenciaron las dificultades que poseen muchos estudiantes que no logran una comprensión profunda de conceptos claves del Cálculo en una variable como límite, derivada e integral.

Una de las causas proviene de la enseñanza universitaria tradicional, que se basa predominantemente en la exposición de contenidos, con un enfoque centrado en procedimientos algorítmicos y fórmulas, relegando la comprensión conceptual o, en contraposición, un excesivo formalismo en el tratamiento de los temas. Diversos autores (Cuevas et al, 2014; García González, 2011 y Vrancken, 2011) coinciden en que, si bien los estudiantes adquieren cierto dominio técnico para resolver límites y derivadas, encuentran serios obstáculos al momento de interpretar su significado.

El contexto del presente artículo, la asignatura Análisis Matemático II de carreras de ingeniería en Informática de la Universidad Nacional de La Matanza, de la República Argentina, no es ajeno a lo mencionado anteriormente. Se tiene evidencia de dificultades para poder transferir lo aprendido a la resolución de problemas o ejercicios no rutinarios.

Frente a este desafío se inició una investigación con el objetivo de estudiar cómo mejorar la enseñanza y el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos, en este caso: intervalos de crecimiento de una función (IC), intervalos de decrecimiento de una función (ID) y extremos relativos de una función (ER) y su relación con el objeto matemático derivada. La elección de estos temas responde a su rol central en la resolución de problemas de optimización, los cuales contribuyen a desarrollar la competencia matemática, entendida como "la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye razonar matemáticamente y utilizar conceptos, procedimientos, herramientas y hechos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos" (OCDE, 2017, p.64).

Por otra parte, muchos estudios corroboran el potencial del software GeoGebra (GG) para favorecer en los estudiantes el desarrollo de dicha competencia. Ejemplos de éstos son: García López et al. (2021) y Williner (2024) sobre competencia matemática general; Costa Llobet (2011) sobre matematización; Juárez-Ruiz et al (2022), Barrera Mora y Reyes Rodríguez (2018) sobre manejo de representaciones y razonamiento; Romero y Camargo (2022) sobre elaboración de conjeturas; Gaona Jiménez y Guerrero Ramírez (2022), Granado Ortiz y Padilla Escorcia (2021) sobre modelización, etc.

Entonces, se decidió como alternativa a la clase expositiva tradicional, diseñar e implementar una situación de aprendizaje, es decir, un diseño didáctico que incluye las actividades que realizan los alumnos, su organización, su puesta en marcha y su finalización. Engler (2014) señala que una situación de aprendizaje "debe ser entendida como un diseño didáctico intencional que logre involucrar al alumno en la construcción de conocimiento" (p. 183). La propuesta buscó integrar actividades de exploración, de construcción de conceptos y finales. Todas las tareas involucraron el uso de tecnología y estaban orientadas a desarrollar la competencia matemática.

En este trabajo se muestra la situación de aprendizaje diseñada, sus actividades, el análisis preliminar de las mismas según las capacidades fundamentales promovidas, los resultados obtenidos y las conclusiones a las que se arribó.

2. Marco Teórico

El marco teórico en el que sustenta la investigación tiene los siguientes pilares: competencia matemática y uso de tecnología en el aula. Se desarrollan a continuación:

2.1. La Competencia Matemática

A la hora de evaluar el aprendizaje de los estudiantes se toma la corriente que se enfoca en el desarrollo de la competencia matemática como se definió en la introducción. Esta competencia global se articula con siete capacidades fundamentales: comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, uso de operaciones y lenguaje simbólico y uso de herramientas (OCDE, 2017):

Se definen las que se usan en este artículo:

- Comunicación (C): la lectura e interpretación de enunciados, preguntas, tareas u objetos le permite al estudiante formar un modelo mental de la situación. Durante el proceso de resolución, puede ser necesario resumir y presentar los resultados intermedios o finales.
- Representación (R): la competencia matemática suele implicar la selección, interpretación, traducción y la utilización de una variedad de representaciones (gráficos, tablas, diagramas, imágenes, materiales concretos, fórmulas y ecuaciones) para plasmar una situación, interactuar con un problema o para presentar un trabajo propio.
- Razonamiento y argumentación (RA): involucra hace referencia a procesos de pensamiento que exploran y conectan los elementos del problema para realizar inferencias a partir de ellos, comprobar una conclusión dada, o proporcionar una justificación de los enunciados o soluciones a los problemas.
- Utilización de operaciones y lenguaje simbólico y formal (UOL): significa la comprensión, interpretación, manipulación y utilización de expresiones simbólicas en un contexto matemático y uso de constructos formales basados en definiciones, reglas y propiedades.
- Uso de herramienta (UH): involucra conocer y saber utilizar herramientas (físicas o tecnológicas) como ayuda a la actividad matemática y ser conscientes de sus limitaciones.

2.2. Uso de Tecnología en el Aula de Matemática

La tecnología se ha integrado plenamente en la educación universitaria, ofreciendo a los docentes una amplia gama de herramientas. Este trabajo explora el uso del software matemático GG, junto con plataformas como Genially y Educaplay, además de recursos audiovisuales.

GG, un software de geometría dinámica de código abierto ampliamente utilizado durante las últimas dos décadas facilita la enseñanza de la matemática en diversos niveles. Su versatilidad abarca geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficos, estadística y cálculo, permitiendo la creación de actividades dinámicas. Su interfaz intuitiva y sus potentes funciones lo convierten en una herramienta de autoría valiosa para generar materiales interactivos como sitios web y applets. Además, GG ha cultivado una comunidad global de millones de usuarios que comparten recursos y experiencias, impulsando la innovación educativa en ciencia, tecnología, ingeniería y matemática a nivel mundial. Su disponibilidad en diversas plataformas móviles y de escritorio asegura su accesibilidad (GeoGebra, 2025)

Por otro lado, se dispone de herramientas que provee la web para crear momentos en el aula en donde se desarrolla teoría y se dan ejemplos. Estos recursos permiten, entre otras cosas, valorar la comprensión de los alumnos en forma autónoma de una manera amena y dinámica. Se considera que la combinación de éstos enriquece la clase y motiva tanto a alumnos como a docentes. Dentro de las aplicaciones mencionadas se tienen: Genially, Educaplay.

3. La situación de aprendizaje

3.1. Consideraciones de diseño

En el primer año de investigación se elaboró la situación de aprendizaje sobre los conceptos de IC, ID y ER de una función. Dado que la misma parte de los saberes previos de los alumnos y tiene como objetivo construir conocimiento a través de las actividades, se diseñaron:

- *Actividades de exploración*: su objetivo es indagar qué sabe el alumno sobre un determinado tema, ya sea desde sus ideas intuitivas como desde sus conocimientos previos. Dan una visión general, el punto de partida del proceso de aprendizaje para luego, mediante las actividades de descubrimiento, trabajar sobre los conceptos involucrados y sus relaciones.
- *Actividades de descubrimiento*: se organizan pensando en el proceso de aprendizaje como proceso de construcción de conocimiento. Pretenden que el alumno establezca relaciones para ir formándose la idea de los nuevos conceptos, propiedades y correspondencias que dan solución a la situación planteada. Las producciones de los alumnos constituyen la base de donde parte el docente para formalizar contenidos, propiedades, etc.
- *Actividades finales*: evalúan todo lo realizado anteriormente.

A su vez se tuvo en cuenta:

- Conocimientos previos: los alumnos ya cursaron Análisis Matemático I, por lo que sabían trabajar con funciones en contexto, derivar, conocían la interpretación geométrica de la derivada y sabían manipular el software GG.
- Objetivo general propuesto: identificar y calcular intervalos de monotonía de una función y extremos relativos.

- Modalidad de trabajo: en equipos de tres personas. Algunas sesiones fueron domiciliarias, otras presenciales.
- Soporte: la situación de aprendizaje se plasmó en una sección llamada "Autoguía" que tiene la plataforma de la Universidad y a la cual se puede acceder desde la computadora, dispositivo móvil o tableta.

La situación de aprendizaje está formada por cinco capítulos (para mayor detalle ver Williner y Suelves, 2024). En el capítulo 1, denominado "Introducción" se brinda una hoja de ruta, un video sobre la importancia de los conceptos tratados en contextos extra matemáticos y los objetivos propuestos.

El capítulo 2 comienza con la Actividad 1 considerada de exploración:

Actividad 1

Consigna: dada a través de: https://view.genially.com/65fd6e74a0add40014b71611

Descripción de la actividad: los alumnos se involucraron con una situación de modelización sencilla y guiada. Tuvieron que buscar los datos de la profundidad del agua en algún mareógrafo del sitio web indicado, armar la lista de puntos para realizar el ajuste en el software GG, elegir un ajuste adecuado y comunicar todo lo realizado en forma escrita. Trabajaron con distintos registros: verbal y numérico (a partir de la tabla de datos del sitio web), numérico, analítico y gráfico en GG.

Análisis preliminar de capacidades fundamentales: de acuerdo con las acciones a realizar por los estudiantes y las capacidades fundamentales asociadas a la competencia matemática brindadas en el marco teórico, se procedió a realizar un análisis preliminar de aquellas que estaban en juego cuando los estudiantes resolvían la actividad (Tabla 1)

Acciones	Capacidad fundamental asociada
Leer la introducción y la consigna de la actividad/Recopilar los datos del sitio web	C-UH
Incorporar los datos a GG a través de una tabla y lista de puntos	UH
Elegir, obtener y justificar la función que mejor modela los datos ingresados usando GG	RA/UH
Elegir modelo trigonométrico	RA
Definir la función obtenida como terna (registro gráfico a registro analítico en contexto)	R
Resumir y comunicar todo lo realizado	C

Tabla 1. Análisis preliminar de la Actividad 1.

Luego continúa la Actividad 2, también de exploración:

Actividad 2

Consigna: se dio mediante un mensaje de audio que contiene el siguiente texto "En esta actividad vamos a trabajar con el archivo de GG que contiene la función que modela la profundidad de la marea en un determinado lugar y día obtenida en la actividad 1. El dominio de esa función tiene que ser el intervalo [0,24]. Necesitan usar el software GG instalado en la computadora (GG clásico versión 5 o 6).

Busquen la herramienta "Inspección de funciones", elijan un intervalo de 12 horas dentro del dominio en el cual, usando esa herramienta, puedan identificar en qué momentos la marea tenía menor profundidad, en cuál la mayor y cuál fue la medida de esa profundidad en los dos casos. Además, en ese mismo intervalo elegido, queremos que indiquen los intervalos de tiempo donde la profundidad de la marea creció y en cuáles disminuyó. A su vez, en la pestaña Punto, van a poder ver la recta tangente en todos esos puntos. ¿Existe alguna relación entre el signo de esa pendiente y el crecimiento o decrecimiento de la profundidad de la marea? ¿qué sucede en los puntos de máxima o mínima profundidad? Elaboren un informe con todo lo analizado que será la producción de esta actividad. Lo realizado se entrega en un archivo PDF con nombre Equipo_n°Actividad2”

Descripción de la actividad: a través de pasos guiados y con diferentes registros, en forma intuitiva, todavía no formal, los alumnos se involucraron en las ideas de monotonía, extremos y la relación de éstos con el signo de la derivada o con la nulidad a través de la pendiente de la recta tangente o no existencia de la misma.

Análisis preliminar de capacidades fundamentales:

Acciones	Capacidad fundamental asociada
Identificar intervalos de monotonía en contexto	R-UH
Identificar extremos relativos en contexto	R-UH
Relacionar la pendiente de la recta tangente con los intervalos de monotonía	R-RA-UH
Relacionar la pendiente de la recta tangente con los extremos relativos	R-RA-UH
Resumir y comunicar todo lo realizado	C

Tabla 2. Análisis preliminar de la Actividad 2.

La situación de aprendizaje continua con el capítulo 3 que comienza con una infografía titulada “Algo de teoría”. En la misma se los invita a los estudiantes (mediante una consigna de voz) a recorrerla del modo que ellos quieran, se les indica que tiene definiciones, ejemplos y videos sobre el tema. Contiene las definiciones de función estrictamente creciente y decreciente en un intervalo (con muy buenos gráficos que se amplían al tocar), Luego se brinda un video sobre los mismos conceptos. A continuación, se definen extremos relativos y absolutos de una función. También se brinda un video y un ejemplo gráfico de una función continua en R (polinómica). Se completa con una autoevaluación en GG no obligatoria. Luego sigue la actividad 3.

Actividad 3

Consigna: Usando el Applet de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/xtgwwhgr

1. Hallar el dominio de cada una de las funciones.
2. Ingresaren f_1 el Applet. ¿Cuándo es creciente? ¿Y decreciente?
3. Tildar / Ver $f'(x)$. ¿El gráfico de la derivada es correcto? ¿Por qué?
4. Teniendo en cuenta la respuesta del ítem 4, tildar $f'(x)>0$ y $f'(x)<0$.
5. ¿Hay alguna relación entre el signo de la derivada y el crecimiento y decrecimiento de f_1 ? Explica con tus palabras.
6. ¿ f_1 tiene extremos relativos? Hallarlos.
7. Repetir las consignas 2 a 6 para las demás funciones.

Descripción de la actividad: la actividad induce a encontrar la relación de los conceptos involucrados, pero no demostrar o justificar. Sólo consiste en mirar los resultados del software e ir escribiéndolos en lápiz y papel para luego, con ayuda del material siguiente, formalizar.

Análisis preliminar de las capacidades fundamentales:

Acciones (por cada función dada)	**Capacidad fundamental asociada**
Calcular dominio	UH-UOL
Calcular intervalos de monotonía	R
Calcular dominio de la derivada	R-UOL
Calcular extremos relativos	UH-R-UOL
Relacionar signo de la derivada con los intervalos de monotonía	R-RA

Tabla 3. Análisis preliminar de la Actividad 3.

A modo de cierre del capítulo 3 se brinda un video con un ejercicio resuelto del estudio de los IC, ID, ER de una función polinómica.

El capítulo 4 consiste en formalizar lo analizado hasta este momento. Comienza con la definición de punto crítico, continúa con un video interactivo en el que se muestra el método de cambio de signo de la derivada primera para saber si un punto crítico con derivada es o no extremo. Sigue una presentación en Genally con el caso de un punto crítico sin derivada y concluye con una infografía interactiva.

El capítulo 5 está formado por actividades finales, a saber:

Actividad 4

Consigna: Inventar una función con dos puntos críticos: uno con derivada y otro sin derivada. Al menos uno de ellos tiene que ser extremo relativo de dicha función. La producción para entregar debe ser en formato PDF (con nombre Equipo_n°Actividad4) y debe contener:

- la explicación de cómo inventaron esa función (si se ayudaron con GG explicar cómo)
- el cálculo de los puntos críticos
- el estudio de los extremos y los intervalos de monotonía

- el gráfico aproximado en GG

Nombre del archivo: Equipo_n°Actividad4

Descripción de la actividad: los alumnos deben inventar una función con características determinadas y justificar su elección. La tarea demanda que los estudiantes exploren diversas situaciones (con el software o en lápiz y papel), comprendan procesos matemáticos, verifiquen y comuniquen la idea producida.

Análisis preliminar de capacidades específicas:

Acciones	Capacidad fundamental asociada
Inventar una función con las características dadas. Punto crítico con y sin derivada	RA-UH
Justificar analíticamente dominio y asíntotas	UOL-RA
Justificar analíticamente puntos críticos	UOL-RA
Justificar analíticamente intervalos de monotonía	UOL-RA
Comunicar todo lo realizado	C

Tabla 4. Análisis preliminar de la Actividad 4.

Actividad 5

Consigna: Estudiar, usando GeoGebra, cómo cambian los extremos e intervalos de monotonía de la función *f:* $R \rightarrow R / f(x) = x^5 + ax^4 + ax^2$, a medida que varía el parámetro *a* real. Como producción tienen que entregar dos archivos: uno con todas las conclusiones y justificaciones analíticas que realizaron (en formato PDF impreso y por MIeL) y el otro el archivo de GeoGebra que usaron para estudiar la situación. Los archivos que entreguen se deben llamar Equipo_n°Actividad5. Vamos a evaluar: el uso del software, las conclusiones extraídas (claridad en la expresión) y la justificación de lo visualizado en el programa (en forma analítica).

Descripción de la actividad: requiere que los estudiantes exploren diversas situaciones con el software en forma libre (no pautada), comprendan y relacionen conceptos matemáticos, trabajen en dos registros al menos, verifiquen y comuniquen las ideas producidas. A su vez existe primero una etapa de manipulación y visualización con el programa, otra de establecer conjeturas y una última, en entorno de lápiz y papel, para formalizar lo analizado.

Análisis preliminar de capacidades fundamentales

Acciones	Capacidad fundamental asociada
Análisis de los extremos relativos e intervalos de monotonía a medida que varía el parámetro usando GG	UH
Comunicación en forma clara y precisa de la conjetura que extrajo sobre extremos/intervalos de monotonía	C-RA-R
Fundamentación en forma analítica en lápiz y papel de lo conjeturado.	RA-UOL

Tabla 5. Análisis preliminar de la Actividad 5.

4. Resultados

La experiencia se llevó a cabo en una comisión de la mañana de Análisis Matemático II de ingeniería en informática, formada por 72 alumnos. Esta materia, de carácter cuatrimestral, contempla los temas: aplicaciones de la derivada (teoremas y estudio de funciones), integrales indefinidas y definidas. Tiene una carga horaria de 4 horas por semana y se puede acreditar por promoción o examen final. El primer día de clase se les comentó a los estudiantes cómo se iba a trabajar con el tema estudio de funciones mediante la Autoguía en la plataforma de la Universidad. Se formaron 23 equipos de tres estudiantes cada uno. Para valorar cada una de las producciones se confeccionaron rúbricas acordes al análisis preliminar de las actividades y se usó el complemento CoRubric de Google para introducir los datos de cada equipo.

Se hicieron dos análisis: uno de frecuencias relativas y un Análisis de Componentes Principales.

4.1. Análisis de frecuencias relativas

Se muestran a continuación el primero de ellos (tener en cuenta las tablas presentadas sobre el análisis preliminar de capacidades fundamentales para cada una de las actividades):

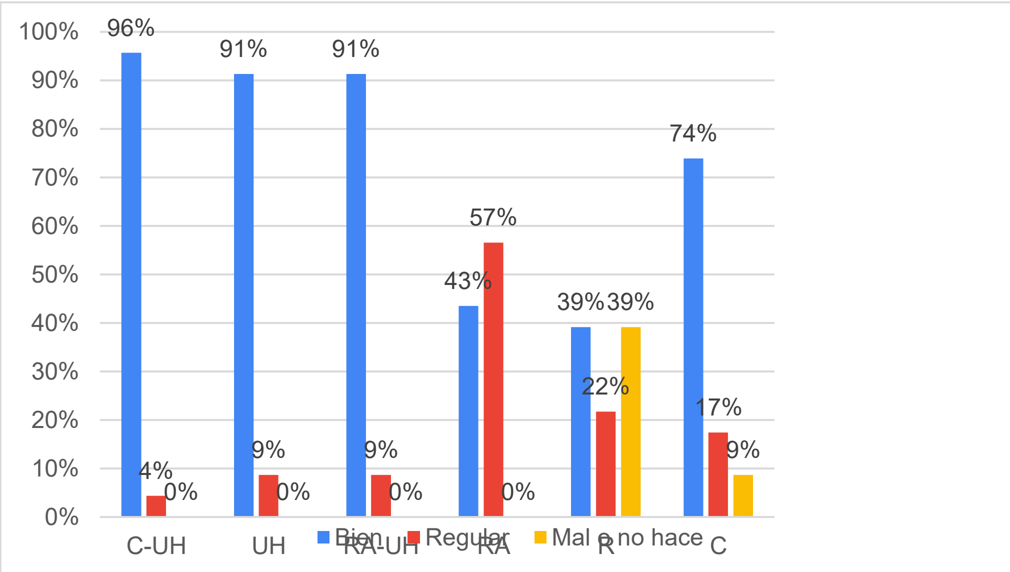


Figura 1. Frecuencias relativas Actividad 1. Fuente propia

Del resultado de las frecuencias relativas de la actividad 1 (Figura 1) se puede observar un muy buen desempeño en las capacidades que involucran el uso de GG: ingreso de datos en la tabla, acciones llevadas a cabo para obtener el ajuste que usaron y justificación del mismo. En cuanto a esto último se aclara que se valoró bien si la justificación era adecuada y clara, no así el modelo elegido. En la capacidad fundamental RA (sola) se valoró la elección de modelo trigonométrico. Muchos equipos eligieron polinómico (57%) sin observar el comportamiento más allá de los datos ingresados. Varios equipos no indicaron si habían probado con otro ajuste o no. Algunos equipos explicaron que el mejor ajuste era el trigonométrico pero que, si sólo miraban el intervalo que estudiaron, convenía el polinómico.

En cuanto a la expresión de la función en contexto los resultados no fueron tan satisfactorios. En general no consideraron la función como terna, a pesar de la insistencia en clase, o, si la escribieron, mantuvieron la variable x dada por el software en vez de, por ejemplo, denominarla "t" como usualmente se describe el tiempo. En cuanto a la comunicación de todo lo realizado, si bien el porcentaje de Bien es alto, varios equipos escribieron de forma muy escueta y sintética, sin explayarse en todo lo que hicieron. Se muestran algunas producciones:

$$P: [0,24] \rightarrow [0.41,2.21]/P(t) = 1.13 + 0.56sen(0.54t - 2.82)$$

Esta función obtenida representa la profundidad que tenga la marea durante el tiempo transcurrido de 24hs.

Figura 2. Parte de la producción de un equipo. Fuente propia

Este equipo brindó la función resultante sin ningún tipo de explicación. En la figura 3 se muestra otra producción, en donde justifican la elección sobre el ajuste elegido y, se intuye que estuvieron investigando sobre este tipo de fenómenos, omiten la función como terna:

Lo siguiente fue utilizar la entrada Ajuste y elegir cual de todas las opciones utilizar. Decidimos que el ajuste adecuado era el "AjusteSeno" ya que, aunque había otras que parecían coincidir con los puntos como el "AjustePolinómico", según lo leído sobre la mareas al principio del trabajo y viendo el comportamiento de la profundidad de la marea al pasar el tiempo con los datos obtenidos la función seno nos pareció que representaba mejor este comportamiento. Como la diferencia entre la mayor y menor altura del mar dependen de la posición de la luna y el sol respecto a la tierra, se tiene un ciclo y un periodo que puede ser representado por la función seno que tiene estas características. Además los pleamares y bajamares (la entrada y salida del agua) asemejan el oscilamiento que ocurre en este tipo de función.

De esta forma obtuvimos la función:

$$m(t) = 0.7 + 0.19 \sin(0.54t + 0.009)$$

Figura 3. Parte de la producción de un equipo. Fuente propia

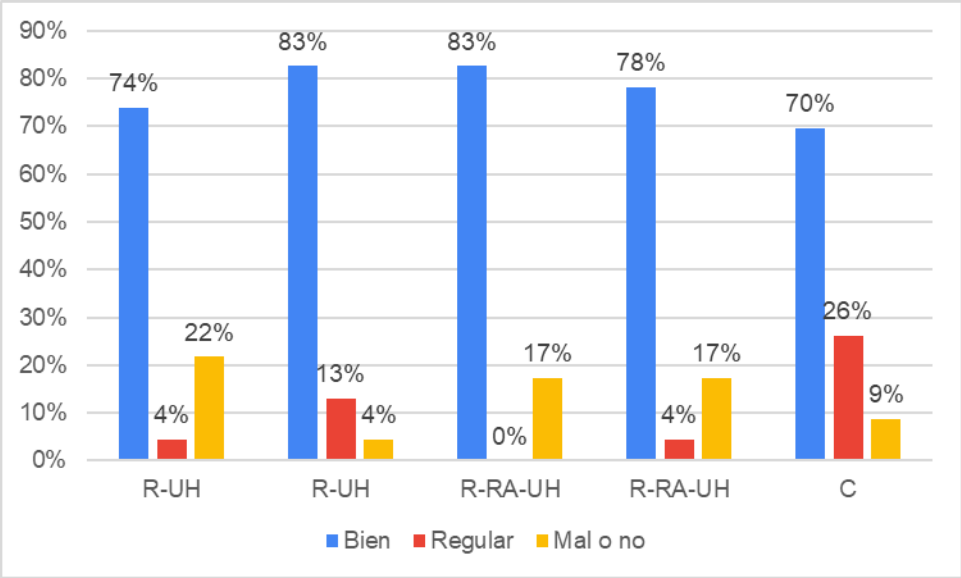


Figura 4. Frecuencias relativas Actividad 2. Fuente propia

En la actividad 2 (Figura 4) la mayoría de los equipos evidenció todas las capacidades fundamentales asociadas. Los pocos errores que cometieron se debieron a: o poner algún intervalo de monotonía cerrado, o si algún extremo en el intervalo elegido era absoluto y no relativo, no hacer diferencia o no explicar qué diferencia había en cuanto a la pendiente de la recta tangente en esos puntos. La relación entre el signo de la derivada y los intervalos de monotonía fue escrita por el 83% de los equipos, así como también entre la derivada cero y los extremos relativos. La tarea no pedía ningún trabajo analítico, sólo 2 equipos lo hicieron. Tampoco se pedía relacionar el cambio de signo de la derivada primera en los extremos relativos. La idea era un primer acercamiento a esta relación, en forma gráfica. Algunos trabajos fueron excelentes en cuanto a mostrar lo que iban obteniendo en GG y sus conclusiones y otros muy escuetos.

Se decidió dar el gráfico de frecuencias relativas de la Actividad 3 (Figura 5) a través de cada función ya que las capacidades analizadas son las mismas en cada una. El objetivo fue diferenciar cada tipo de función que intervenía en dicha tarea.

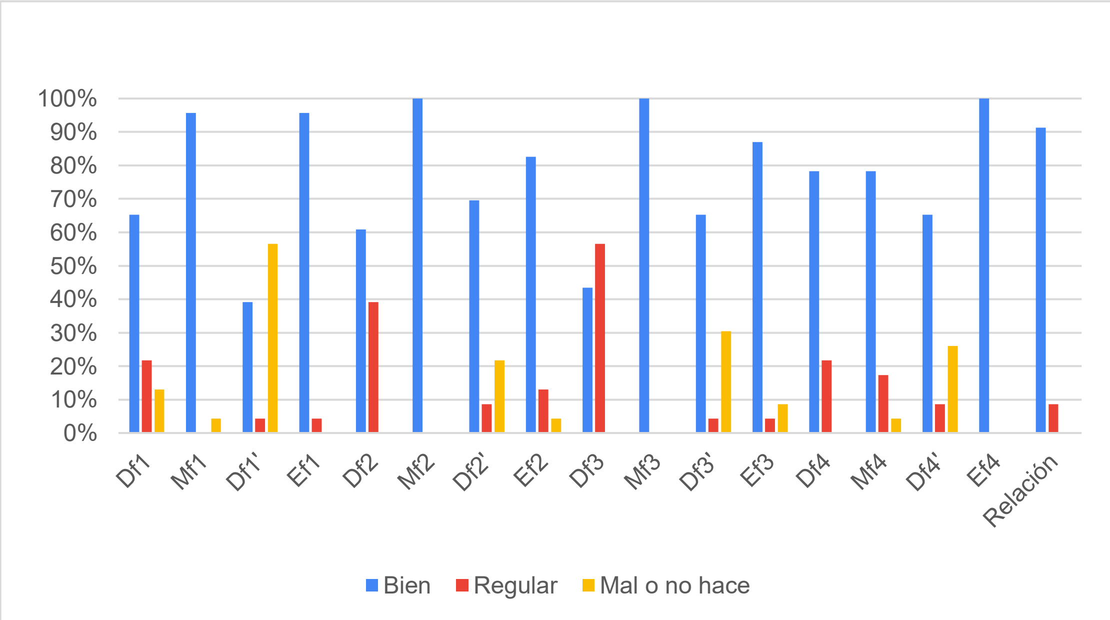


Figura 5. Frecuencias relativas Actividad 3. Fuente propia

Los resultados fueron muy buenos en casi todas las capacidades fundamentales. Analizamos aquellas donde los resultados no son tan favorables:

- Dominio de f_1': GG lo marca en forma errónea (proviene de una función logarítmica) y los estudiantes no analizaron tal situación a pesar de que tenían graficadas las dos funciones juntas (ven que la función original no está definida en el intervalo (-2,2) y su derivada sí y escriben mal el dominio de ésta)
- Dominio de f_2: si bien la mayoría indicó bien el dominio (R), algunos equipos no lo justificaron en forma adecuada o no lo justificaron, de allí la cantidad de valoración regular. Por ejemplo: "la función exponencial no tiene restricciones, por eso el dominio es R", "es composición de funciones continuas en R, por eso su dominio es R" (sin indicar cuáles eran las funciones que se estaban componiendo).
- Dominio de f_3: la valoración Regular se debe a que el equipo no justificó cómo calculó el dominio de la función o realizó una justificación no adecuada. Por ejemplo: "al ser una función exponencial el dominio es R" o "el dominio es R por ser un polinomio", etc.
- Dominio de f_3': varios equipos indicaron la función derivada sin calcular su dominio.

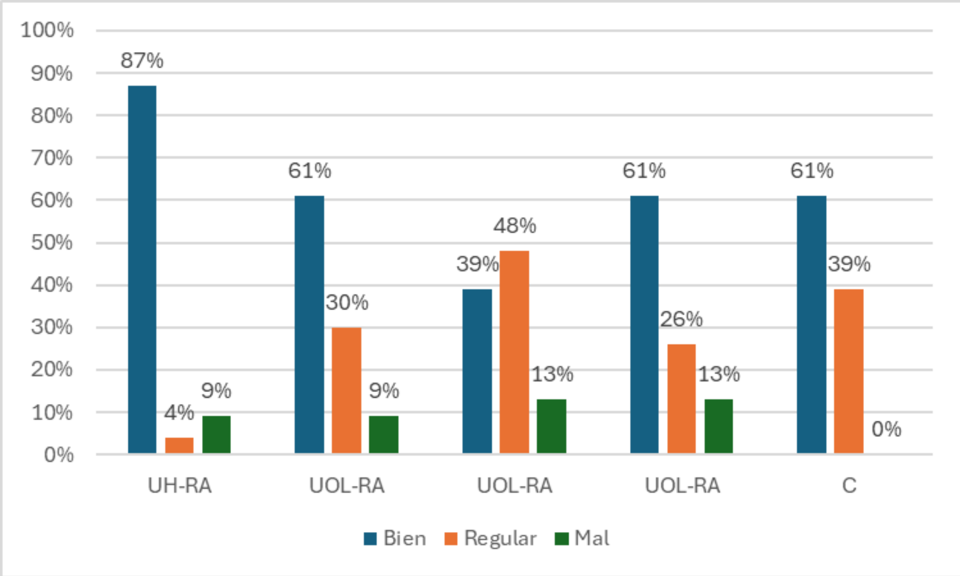


Figura 6. Frecuencias relativas Actividad 4. Fuente propia

En la actividad 4 (Figura 6) todos los equipos, salvo uno, explicaron cómo crearon la función con las características pedidas. Muchos combinaron algún polinomio con una función que contenía valor absoluto, otros apelaron a exponentes fraccionarios y otros a funciones definidas por tramos. Algunos equipos indicaron que se ayudaron con GG para ir viendo diferentes posibilidades, pero esto no quedó reflejado en el archivo que enviaron. En este ítem está valorada la explicación en sí misma de cómo crearon la función.

La función obtenida cumplió con las características solicitadas en el 87% de los equipos. Fueron dos los equipos que brindaron una función racional y consideraron como punto crítico al valor excluido del dominio. El equipo que tuvo valorado con Regular presentó una función definida por tramos, discontinua en un punto que no lo consideraron como punto crítico. Un error común fue considerar una función polinómica a aquella que tiene valor absoluto.

En cuanto al dominio la totalidad de los equipos lo calculó bien. La dificultad se encontró en la justificación de las asíntotas, es decir, en la capacidad fundamental RA y UOL. La mayoría de los equipos argumentó que la función no tenía asíntota vertical porque el dominio era el conjunto de números reales. En cuanto a las asíntotas horizontal u oblicua varios equipos las justificaron verbalmente, sin hacer el cálculo de los límites correspondientes.

En cuanto a los puntos críticos, si bien la mayoría (87%) de los equipos los señaló bien, el 48% justificó mal, o no lo hizo, al punto crítico sin derivada. Esto es no calcularon las derivadas laterales por definición o lo hicieron en forma incorrecta. El 13% que hallaron mal los puntos críticos correspondió a equipos que, o hicieron mal la derivada, o no estaban bien justificados ninguno de los dos o consideraron un punto crítico a aquel valor fuera del dominio de la función elegida.

En el caso de los intervalos de monotonía, la mayoría de los equipos hizo el cuadro de signo de f' sin considerar los factores de la derivada, es decir en forma directa. Por ejemplo, este equipo obtuvo como derivada $f'(x) = \frac{9x+16}{5x^{1/5}}$ y su cuadro de signo fue:

	$(-\infty; \frac{-16}{9})$	$\frac{-16}{9}$	$(\frac{-16}{9}; 0)$	0	$(0; +\infty)$
f'	+	0	-	No existe	+
f	$\uparrow$ *Creciente*	Máx relativo	$\downarrow$ *Decreciente*	Min relativo	$\uparrow$ *Creciente*

Figura 7. Parte de la producción de un equipo. Actividad 4. Fuente propia

Algunos equipos hicieron el cuadro de signo de la derivada primera, pero no explicitaron sus intervalos de monotonía, de allí la valoración Regular. En los gráficos presentados no se registró el uso de etiquetas o texto para aclarar mejor la situación presentada. Se percibió que copiaron tal gráfico como lo dio el programa.

En cuanto a la comunicación utilizaron frases largas, sin puntuación, y en muchos casos mal redactadas. Muchos presentaron sin una alineación justificada o espacios entre párrafos que no se mantuvieron a lo largo del escrito, etc.

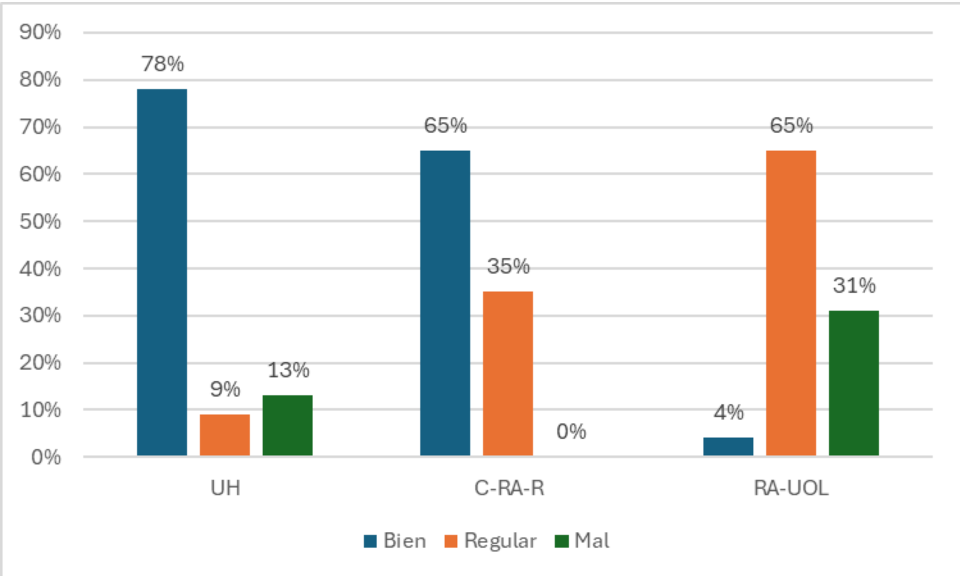


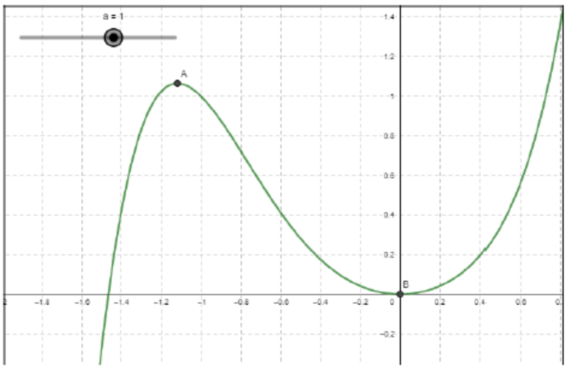
Figura 8. Frecuencias relativas Actividad 5. Fuente propia

En la actividad 5 la derivada de la función es un polinomio de grado 4, con una raíz en x = 0 y otra real que es complicada de obtener en forma analítica ya que anula un polinomio de grado 3 cuyo único cero real no es inmediato o fácil de obtener. Se podría haber aplicado la regla de signos de Descartes para raíces reales de polinomios, obteniendo que si *a > 0* existe una única raíz real negativa y si *a < 0* una única raíz real positiva. Lo que se pretendía era que, con ayuda del GG, el alumno pueda analizar diferentes situaciones y justificarlas, sin necesidad de calcular dicha raíz. Se sabía que no iban a poder despejar ese punto crítico, pero la intención era observar cómo lograban argumentar.

En cuanto a los resultados (Figura 8): el 78% de los equipos identificó los tres casos y explicó correctamente qué sucedía en cada uno. Los valorados con Mal (13%) no escribieron las tres situaciones o la descripción fue incorrecta. Los valorados con Regular (9%) lo hicieron parcialmente (es decir omitieron algún caso). La comunicación fue buena en la mayoría de los equipos. Continuaron trabajando con frases largas, sin signos de puntuación, falta de tildes, etc. En cuanto a la fundamentación: un único equipo argumentó analíticamente por qué si *a* era positivo la otra raíz era negativa y viceversa. Los otros trabajaron con casos particulares (65%). Cabe agregar que ningún equipo mencionó que el polinomio de grado 3 que quedaba luego de la factorización de la derivada tenía sólo una raíz real.

Se muestra la fundamentación del único equipo que lo hizo en forma genérica:

Por otro lado, observamos que para valores tales que $a > 0$, el máximo relativo se encuentra entre los valores negativos de "x" pero positivos de "y" (2do cuadrante), mientras que el mínimo relativo se encuentra en el punto (0,0) de forma fija. Cuanto más aumenta "a" más aumentan los valores de "y" y más disminuyen los de "x".



Analíticamente esto lo podemos ver ya que la derivada de f' con "a" distinto a 0 es:

$$f'(x) = 5x^4 + 4ax^3 + 2ax$$

A simple vista podemos ver que si a>0, entonces para que f(x)=0 "x" debe ser 0 o debe ser un número negativo (dependiente de "a") para transformar a $4ax^3 + 2ax$ en una resta a $5x^4$ (que no importa x, va a dar positivo) y poder llegar a 0.
Por ejemplo, si a=1 entonces $f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 2x$ y sus raíces son x=0 y x=-1.1193

Figura 9. Parte de la producción de un equipo. Actividad 5. Fuente propia

4.2. Análisis de Componentes Principales

Con el fin de resumir la información cuantitativa de los resultados obtenidos en el apartado anterior se realizó un Análisis de Componentes Principales (ACP). El mismo es una técnica estadística de síntesis de los datos o reducción del número de variables tratando de perder la menor cantidad de información posible. Los nuevos componentes principales o factores son una combinación lineal de las variables originales, y además son independientes entre sí. Un aspecto clave en esta técnica es la interpretación de los factores, ya que ésta no viene dada a priori, sino que es deducida tras observar la relación de los factores con las variables iniciales (Terrádez, s.f.). Se utilizó el programa estadístico InfoStat (Di Rienzo et al, 2017) del cual se exponen las salidas. Cada equipo tiene una puntuación para cada capacidad fundamental analizada en cada una de las actividades acorde a las tablas presentadas. La puntuación Bien se valoró con 2, la Regular con 1 y la Mal o No lo hace con 0. De esta manera cada equipo tiene una puntuación para cada capacidad fundamental que se obtiene promediando los niveles logrados en todas las actividades. Esas nuevas variables se llaman “Promedio”.

Medidas resumen

Variable	n	Media	D.E.	Mín	Máx
Promedio UH	23	1,69	0,18	1,23	1,93
Promedio C	23	1,80	0,24	1,25	2,00
Promedio RA	23	1,61	0,28	1,00	2,00
Promedio R	23	1,74	0,24	1,13	2,00
Promedio UOL	23	1,59	0,19	1,14	1,82

Figura 10. Medidas de resumen de las variables “Promedio”. Salida InfoStat

La variable con mayor media es la Comunicación y la menor el manejo algebraico. El razonamiento y argumentación tiene la mayor desviación estándar.

En primer lugar, se analizó la relación entre las variables originales a través del Coeficiente de Correlación Lineal de Pearson. La matriz de coeficientes de correlación entre las variables junto con sus significancias se muestra en la tabla 6.

	Promedio UH	Promedio C	Promedio RA	Promedio R	Promedio UOL
Promedio UH	1	0.0001	0.0001	<0.0001	<0.0001
Promedio C	0.73	1	<0.001	<0.001	0.0082
Promedio RA	0.72	0.77	1	<0.001	0.0080
Promedio R	0.77	0.75	0.88	1	0.0058
Promedio UOL	.0.89	0.54	0.54	0.56	1

Tabla 6. Matriz de coeficientes de correlación/probabilidades. Fuente propia.

En la parte triangular inferior se presentan los coeficientes y en la superior los p-value de cada uno de ellos. Si el p-value es menor a 0,05 la correlación es significativa y si es menor a 0,01 es altamente significativa.

Entonces se observa que existe una alta relación directa entre las calificaciones obtenidas en todas las variables. Esto significa que a altas (bajas) calificaciones en una de las capacidades implica altas (bajas) en la otra.

En el ACP se realiza una reducción de dimensionalidad con pérdida mínima de información. En este caso, se parte de una estructura de datos que contiene 5 variables cuyas relaciones van a ser analizadas en un plano bidimensional. Por lo tanto, en primer lugar, se debe analizar de qué magnitud es la explicación de estos dos primeros ejes.

Autovalores

Lambda	Valor	Proporción	Prop Acum
1	3,87	0,77	0,77
2	0,67	0,13	0,91
3	0,27	0,05	0,96
4	0,13	0,03	0,99
5	0,05	0,01	1,00

Figura 11. Resultados InfoStat. Fuente propia.

En la Figura 11, el número remarcado 0,91 indica que los dos primeros ejes que se obtienen en el análisis mencionado explican un 91% de la variabilidad total (se está admitiendo una pérdida del 9%), lo cual es altamente aceptable.

Autovectores

Variables	e1	e2
Promedio UH	0,47	0,36
Promedio C	0,44	-0,30
Promedio RA	0,45	-0,39
Promedio R	0,46	-0,33
Promedio UOL	0,40	0,72

Figura 12. Autovectores. Salida InfoStat. Fuente propia.

Las componentes principales son combinaciones lineales de las variables originales cuyos coeficientes son las coordenadas de los autovectores de la matriz de correlación. En la Figura 12 se observan las coordenadas de los dos primeros autovectores que representan las cargas de las variables en las dos primeras componentes. Para decidir la formación de gradientes, uno de los criterios consiste en analizar las correlaciones variable-componente, cuya salida también la proporciona InfoStat:

Correlaciones con las variables originales

Variables	CP 1	CP 2
Promedio UH	0,93	0,30
Promedio C	0,86	-0,25
Promedio RA	0,89	-0,32
Promedio R	0,91	-0,27
Promedio UOL	0,79	0,59

Figura 13. Salida InfoStat. Fuente propia.

Usando este criterio, se ve que la variable “Promedio UOL” forma un gradiente oblicuo, del tercer al primer cuadrante, mientras que las demás forman un gradiente horizontal hacia la derecha. Esto es: todas las capacidades estudiadas se agrupan salvo la que corresponde al trabajo algebraico de los estudiantes.

El programa también proporciona un gráfico llamado Biplot en el cual se pueden graficar los gradientes y se ven los equipos simbolizados con puntos. Por cuestión de espacio no se puede brindar un gráfico donde se puedan ver los números de equipo, pero la que suscribe tuvo acceso a esto. Se caracterizaron así tres grupos (marcados en la Figura 14):

Grupo 1: formado por tres equipos (6, 14 y 19). La característica que tienen es que poseen bajas puntuaciones en todas las capacidades incluyendo UOL.

Grupo 2: formado por cinco equipos (1, 4, 8, 10 y 22). Se caracterizan por calificaciones promedios altas para las capacidades que forman el gradiente horizontal y más baja para UOL. Tuvieron buen desempeño en el uso de la herramienta, en la comunicación, en el pasaje de registros y en la argumentación, pero desciende ese desempeño en el manejo algebraico.

Grupo 3: formado por 7 equipos (2, 3, 7, 11, 12, 15, 21) que tienen altas valoraciones en todas las capacidades.

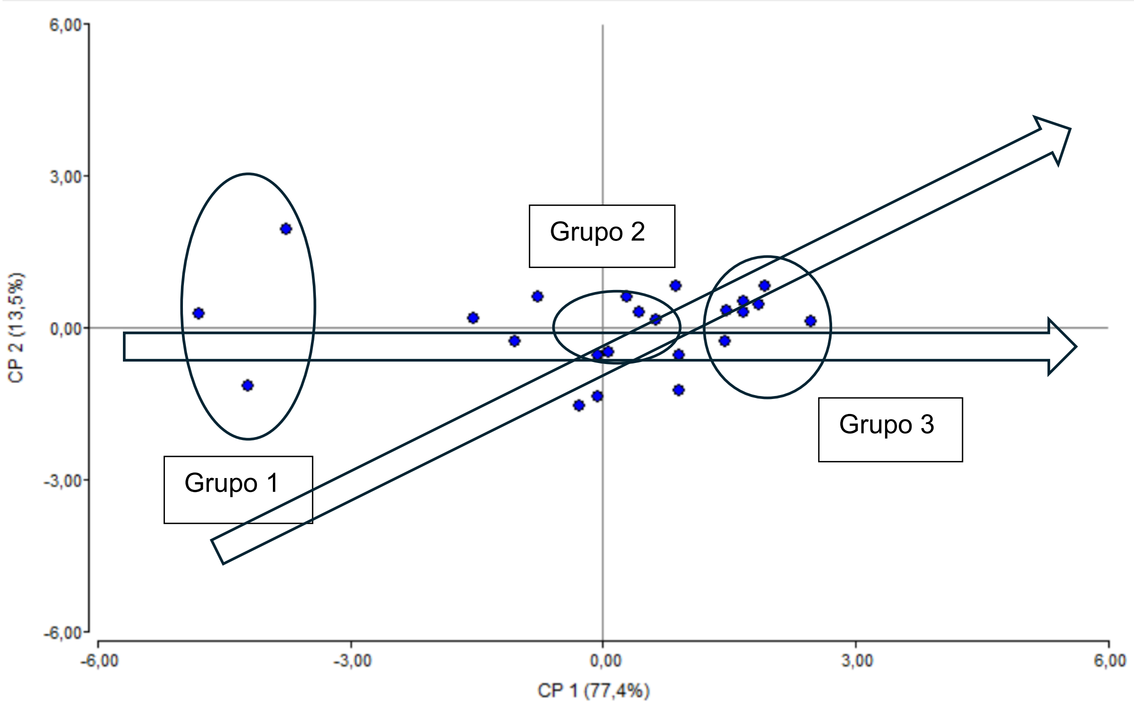


Figura 14. Gráfico Biplot con gradientes y grupos. Fuente propia

5. Conclusiones

En primer lugar, se pudo diseñar e implementar una situación de aprendizaje con uso de tecnología como alternativa a la clase expositiva tradicional para construir los conceptos de IC, ID y ER de una función y se logró mostrar que es posible desarrollar en el alumnado capacidades fundamentales inherentes a la competencia matemática.

Respecto a las capacidades fundamentales, la mayoría de los equipos alcanzó niveles altos de UH en todas las actividades, teniendo la variable “Promedio UH” una media de 1,69. Se coincide con Costa Llobet (2011) que indica que cuando los estudiantes trabajan en entornos interactivos, visualizando y manipulando, los resultados son altos. Se concuerda con el autor que las producciones de los estudiantes son homogéneas en este entorno y se diferencian más en el entorno de lápiz y papel. A su vez trabajan generalmente por default, es decir no cambian aspectos del programa como: agregar texto a lo presentado, color o grosor al gráfico de una función, intervalo de un deslizador, entre otros. Esto se observó también en Williner (2024). Otro aspecto para reflexionar es que cuando los alumnos realizan las actividades fuera del aula y entregan un archivo en formato ggb., no se puede apreciar todo lo que hicieron en esa producción para llegar al resultado final ni tampoco lo explican en su producción escrita. Referencia de esto es la actividad 4. Para construir una función con las características pedidas seguramente probaron con varias reglas de asignación, sin embargo, se puede ver sólo la respuesta al ejercicio.

La capacidad fundamental RA, resumida en Promedio RA, tiene una media de 1,61, con un mínimo de 1 y máximo de 2 y la desviación estándar más alta. Esto muestra desempeños más heterogéneos que para UH. El desempeño más bajo se tiene en la elección de un ajuste adecuado para los datos de la profundidad de la marea y cuando se relaciona con la capacidad fundamental UOL (que tiene la media más baja de 1,59). Se destacan dos situaciones: la justificación de los extremos e intervalos de monotonía de la actividad 4 (más precisamente en el punto de no derivabilidad), y en la actividad 5 cuando tienen que justificar analíticamente las diferentes posibilidades. Autores como Costa Llobet (2011), Cervantes-Barraza; et al (2017) y Ríos-Cuesta (2023) señalan que cuando el alumno refleja por escrito aspectos de la resolución con GG los resultados son menos favorables. Subrayan que los estudiantes utilizan argumentos esquemáticos que están asociados con la visualización, pero carecen de sustento matemático y se alejan del formalismo, cuestión que también se evidencia en este estudio. Los alumnos pudieron visualizar la influencia del parámetro en la actividad 5, pero no consiguieron justificarla analíticamente en lápiz y papel. Se piensa también que no existe un interés de profundizar o buscar en la bibliografía argumentos válidos, sólo dejan en su producción lo que pudieron hacer.

Hay que destacar que a lo largo de la experiencia el desarrollo de la capacidad fundamental C (con una media de 1,8) fue mejorando, así como también la presentación de las producciones.

Las actividades realizadas incidieron positivamente en el desarrollo de la competencia matemática en casi todos los equipos. La situación de aprendizaje contribuyó a mejorar la motivación por el aprendizaje, a favorecer el protagonismo en los estudiantes en la formación de un concepto nuevo con base en sus conocimientos previos. Reflexión común en otros estudios (Zayas-Batista et al, 2024; Romero y Camargo, 2022)

Mediante la técnica de ACP se pudieron agrupar las variables: por un lado, el uso de la herramienta, la representación, comunicación y argumentación y por el otro el manejo algebraico. En ciertas ocasiones se tomó bien la argumentación si era coherente en su expresión, no así el desarrollo algebraico para justificarla. Como indica Costa Llobet (2011) la traducción matemática con lápiz y papel de lo realizado con medios tecnológicos visuales y manipulativos no es automática en los estudiantes, hay una brecha que las separa.

Se acuerda con OCDE (2005) que expresa que usar las herramientas de forma interactiva requiere algo más que el simple acceso a ésta y la habilidad técnica requerida para manejar la situación. Esto implica comprender la manera en que uno puede interactuar y cómo puede usarse para alcanzar las metas planteadas. En este sentido, continúa: “una herramienta no es solamente un mediador pasivo, es un instrumento para un diálogo activo entre el individuo y su ambiente” (p.9).

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica.

Báez Ureña, N., Blanco Sánchez, R. y Heredia Soriano, W. (2022). Los problemas de optimización en el cálculo diferencial de una variable. *Transformación, 18* (2), 317-336.

Barrera Mora, F. y Reyes Rodríguez, A. (2018). El rol de la tecnología en el desarrollo de entendimiento matemático vía la resolución de problemas. *Educatio Siglo XXI*, *36* (3), 41-72.

Cervantes-Barraza, J., Cabaña-Sánchez, G. y Ordoñez-Cuastumal, J.S. (2017). El poder persuasivo de la refutación en argumentaciones colectivas. *BOLEMA, 31* (59), 861-879.

Costa Llobet, J. (2011). Plataforma de matematización en un entorno GeoGebra dentro de un planteamiento didáctico “desde abajo hacia arriba”. *Enseñanza de las ciencias, 29* (1), 101-114.

Cuevas, A., Rodríguez, A y González, O. (2014). Introducción al concepto de derivada de una función real con apoyo de las tecnologías digitales. *Actas Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 2335-2345.

Di Rienzo, J.A., Casanoves, F., Balzarini, M.G., Gonzalez, L., Tablada, M., Robledo, C.W. *InfoStat versión 2017*. Grupo InfoStat, FCA, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. http://www.infostat.com.ar

Engler, A. (2014). *Construcción del concepto de derivada a través de dinamizar la regla de los cuatro pasos. Aproximación socioepistemológica* [Tesis de doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional] https://es.slideshare.net/slideshow/engler-examen-doctoral-2014-aspectos-generales/42067981

Gaona Jiménez, S. M. y Guerrero Ramírez, S. (2022). GeoGebra para el aprendizaje de modelización matemática en ingeniería: estudio de caso (modalidad en línea). *Ride. Revista Iberoamericana para la investigación y el desarrollo educativo, 12* (24)

García González, M. (2011). *Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto de derivada* [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Guerrero] DOI: 10.13140/2.1.5087.0566

García López, M., Romero Albaladejo, I. y Gil Cuadra, F. (2021). Efectos de trabajar con GeoGebra en el aula en la relación afecto-cognición. *Enseñanza de las Ciencias, 39* (3), 177-198.

GeoGebra. (2025) ¿Qué es GeoGebra? https://www.geogebra.org/about?lang=es

Gonzáles Florez, Y., Montoro Medina, A.B., Ruiz Hidalgo, J. F (2024). Significado del límite expresado por estudiantes universitarios. *Educación Matemática 36,* 242-273.

González Flores, Y., Montoro Medina, A.B. y Ruiz Hidalgo, J.F. (2022). Significado del límite expresado por estudiantes universitarios. *Educación Matemática 36* (3), 242-273.

Granado Ortiz, C. A. y Padilla Escorcia, I.A. (2021). El aprendizaje gráfico de la recta tangente a través de la modelación de las secciones cónicas utilizando GeoGebra. *Revista Científica, 40* (1)*,* 118-132*.*

Juárez-Ruiz, E., Sánchez González, L. y Juárez López, J.A. (2022). Identificación del desarrollo de habilidades visuales espaciales en representaciones y conversión entre registros para calcular volúmenes. *Educación Matemática*, *34* (1), 157-185.

OCDE (2005). *La definición y selección de competencias claves. Resumen ejecutivo.*https://www.deseco.ch/bfs/deseco/en/index/03/02.parsys.78532.downloadList.94248.DownloadFile.tmp/2005.dscexecutivesummary.sp.pdf

OCDE (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias, Versión preliminar*. https://www.guao.org/sites/default/files/biblioteca/ebook%20-%20PISA-D%20Framework_PRELIMINARY%20version_SPANISH.pdf

Ríos-Cuesta, W. (2023). Tasks to promote argumentation in math class based on Dynamic Geometry Software. *Rastros Rostros, 25* (2), 1-17.

Romero, L. y Camargo, L. (2022). Potencial del modelo de tareas tecno-pedagógicas para promover procesos de conjeturación en estudiantes universitarios. *PNA, 16* (2), 141-166.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (3), 355-382.

Sánchez-Matamoros García, G., García Blanco, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11* (2), 267-296.

Terrádez, M. (s.f.). Análisis de componentes principales. Recuperado el 2 de mayo de 2017 de https://www.uoc.edu/in3/emath/docs/Componentes_principales.pdf.

Vrancken, S. (2011). *La construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional del Litoral] http://hdl.handle.net/11185/588

Williner, B. (2024). Influencia de tareas con software GeoGebra en el desarrollo de la competencia matemática en estudiantes de ingeniería. *BOLEMA, 38,* 1-22.

Williner, B. y Suelves, N. (2024). Diseño de una Situación de Aprendizaje para Promover la Competencia Matemática con Apoyo de Tecnología, en Carreras de Ingeniería en Informática. XII *Congreso Nacional de Ingeniería Informática-Sistema de la información.* En prensa

Zayas-Batista R., Escalona-Reyes, M., Estupiñán-González, R. y Cedeño-Intriago, R. (2023). El proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de la matemática superior en las carreras de Ingeniería. *Revista Transdisciplinaria de Estudios Sociales y Tecnológicos*, *3(1),* 37-46.