ISSN: 1815-0640
Número 75. Diciembre 2025
Páginas 01-18

Modelo Praxeológico de Referencia asociado al REI del kiosco escolar

Modelo Praxeológico de Referência associado ao REI do quiosque escolar

Estefanía Laplace, María Rita Otero, Viviana Carolina Llanos

Fecha de recepción: 04-07-2025
Fecha de aceptación: 02-09-2025

Resumen	Este trabajo presenta el análisis a priori de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) centrado en la administración de un kiosco escolar, como dispositivo didáctico para resignificar la enseñanza del álgebra en la escuela secundaria. Se construye un Modelo Praxeológico de Referencia que articula diversas organizaciones matemáticas vinculadas con la modelización lineal y racional, el uso de variables y parámetros y la interpretación gráfica mediante herramientas digitales. El estudio avanza en tres etapas: generación de modelos algebraicos, análisis del uso de los parámetros y transformación de modelos. Se evidencia cómo el REI permitiría restituir el sentido a la enseñanza del álgebra escolar. **Palabras clave**: REI, álgebra escolar, modelización, TAD
Abstract	This work presents the a priori analysis of a Study and Research Path (SRP) focused on the administration of a school kiosk, as a didactic device to resignify the teaching of algebra in secondary school. A Praxeological Reference Model is constructed that articulates various mathematical organizations related to linear and rational modeling, the use of variables and parameters and graphical interpretation through digital tools. The study proceeds in three stages: algebraic model generation, parameter use analysis and model transformation. It is evident how the SRP would allow to restore meaning to the teaching of school algebra. **Keywords**: SRP, school algebra, modelling.
Resumo	Este trabalho apresenta a análise a priori de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) focado na administração de um quiosque escolar, como dispositivo didático para ressignificar o ensino da álgebra no ensino médio. Se constrói um Modelo Praxeológico de Referência que articula diversas organizações matemáticas ligadas à modelagem linear e racional, o uso de variáveis e parâmetros e a interpretação gráfica através de ferramentas digitais. O estudo avança em três etapas: geração de modelos algébricos, análise do uso dos parâmetros e

transformação de modelos. Evidencia-se como o PEP permitiria restituir sentido ao ensino da álgebra escolar.
Palavras-chave: PEP, álgebra escolar, modelagem, TAD

1. Introducción

En el contexto educativo actual, la enseñanza de las matemáticas y en particular del álgebra, enfrenta una profunda crisis de sentido, evidenciada en los altos niveles de fracaso escolar, el desinterés estudiantil y la fragmentación del conocimiento. Este fenómeno se relaciona con un paradigma de enseñanza dominante, que presenta el saber matemático como un cuerpo cerrado y acabado, accesible únicamente mediante la reproducción mecánica de definiciones, fórmulas y algoritmos. Dicho paradigma, es denominado monumental (Chevallard, 2004) o de visita a las obras, porque el saber se estudia “per se” o por razones de utilidad trascendente en lugar de inherente (Chevallard, 2017; Kim, 2015) sin problematización alguna. Particularmente, en la enseñanza del álgebra, los primeros aprendizajes se inscriben en una lógica formal y procedimental, derivada de la aritmética, que reduce el uso de letras a meros sustitutos de números en ecuaciones con única solución o en fórmulas sin utilidad aparente. En consecuencia, los estudiantes transitan por la matemática escolar como si se tratara de un saber ajeno y descontextualizado.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propone una transformación del modelo de enseñanza predominante orientada por el estudio de cuestiones del mundo (Chevallard, 2013). Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) son los dispositivos que mejor se adaptan al paradigma del cuestionamiento, ya que permiten resignificar los saberes escolares a través de la investigación y el estudio colectivo de preguntas genuinas, que habilitan el encuentro funcional con organizaciones matemáticas (OM) relevantes dentro del diseño curricular.

Este trabajo se sitúa en el marco de la escuela secundaria argentina y aborda el problema de cómo enseñar álgebra de manera que recupere su sentido como herramienta de modelización y análisis de situaciones reales. Se parte de la posibilidad de diseñar e implementar un REI que permita a los estudiantes involucrarse en la construcción de saberes algebraicos a partir del tratamiento de un problema que para ellos es relevante y pletórico de cuestiones como la administración de un kiosco escolar.

Se plantea entonces un problema doble: por un lado, el desfasaje entre el saber algebraico enseñado y su funcionalidad en contextos relativamente reales, y por otro, la dificultad para que los estudiantes integren las nociones: variables, parámetros, ecuaciones y funciones.

2. Objetivo general

Explorar las condiciones de posibilidad para una enseñanza del álgebra orientada a la modelización en la escuela secundaria, a través del análisis a priori de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) relacionado con la administración de un kiosco escolar.

2.1 Objetivos específicos:

a) Construir y describir un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) que permita articular diversas OM del álgebra escolar en torno a una pregunta generatriz.

b) Analizar cómo la progresión del REI conduce a la construcción de modelos algebraicos con variables y parámetros relevantes para el sistema.

c) Estudiar las transformaciones de los modelos algebraicos, a partir de la variación de parámetros y el análisis gráfico, integrando herramientas digitales.

d) Evaluar el potencial didáctico del REI para resignificar el saber algebraico y favorecer un vínculo significativo entre los estudiantes y la matemática.

3. Preguntas de investigación

1. ¿Es posible diseñar un REI que permita el encuentro con OM del álgebra escolar a partir de una situación relevante para los estudiantes?

2. ¿Qué modelos algebraicos pueden generarse a partir del estudio de la pregunta generatriz: *¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias?*

3. ¿Cómo incide la variación de parámetros en los modelos construidos y qué efectos produce sobre la interpretación matemática de la situación?

4. ¿Qué nuevas OM emergen al transformar el modelo de ganancia en función de metas específicas?

5. ¿Qué aportes realiza este REI al desarrollo de una enseñanza del álgebra basada en la modelización y el cuestionamiento?

4. Marco teórico

El trabajo se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard 1991, 1999, 2004) que permite analizar el saber escolar como resultado de prácticas institucionales. La TAD asume que todo saber enseñado es el producto de un proceso de transposición didáctica, mediante el cual el saber académico se transforma en saber escolar, que modifica para bien o para mal, su funcionalidad y sentido original.

Uno de los fenómenos centrales estudiados por la TAD es la monumentalización del saber, que consiste en presentar los saberes escolares como valiosos por sí mismos, cerrados, inmodificables y desprovistos de problematización. Este fenómeno es particularmente notorio en la enseñanza del álgebra escolar, donde los denominados contenidos del programa, fragmentan y descontextualizan el saber, con escasa relación con situaciones de interés para los estudiantes (Bosch & Gascón, 2005; Otero et. al 2014).

Frente a esta situación, la TAD propone un cambio de paradigma didáctico, que implica reemplazar el modelo dominante por un modelo orientado a la pregunta, la investigación y la producción de saberes. En esta línea se sitúan los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) (Chevallard, 2013; Chevallard & Bosch, 2014), dispositivos didácticos diseñados para reintegrar el saber en la vida y devolverle su funcionalidad.

Los REI suponen una ruptura con la secuencia tradicional de contenidos y permiten introducir modelización matemática contextualizada. En lugar de presentar conceptos aislados, se estudian organizaciones matemáticas (OM) en contextos donde dichos saberes emergen como necesarios para resolver un problema. Esta perspectiva se complementa con el uso de planillas de cálculo y software como GeoGebra, que amplían el repertorio técnico y representacional del estudiante (Otero, 2021).

El Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) permite identificar las OM involucradas en un REI, anticipar su tratamiento en el aula y prever algunos caminos posibles de investigación y estudio.

5. El REI

Se ha diseñado un REI que parte de la pregunta generatriz: *¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias?* Esta cuestión tiene una doble función: por un lado, instala una situación cercana a los intereses de los estudiantes; por otro, permite movilizar una variedad de OM presentes en el currículo del nivel secundario, particularmente aquellas vinculadas a la modelización algebraica.

Este REI habilita la formulación de ecuaciones, funciones, inecuaciones, gráficos, análisis de parámetros y la toma de decisiones. Así, el conocimiento se articula con prácticas sociales, y los modelos se transforman en herramientas para pensar, anticipar y justificar acciones. Además, el uso de planillas de cálculo y GeoGebra contribuye a profundizar el vínculo entre las representaciones algebraicas y gráficas, facilitando la comprensión del comportamiento de los modelos y habilitando simulaciones dinámicas del sistema kiosco. En suma, este REI permite desarrollar una enseñanza del álgebra situada, funcional y reflexiva, que reconstruye la relación entre los estudiantes y el saber matemático escolar.

5.1 Modelo Praxeológico de Referencia

La cuestión generatriz Q_0: *¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias?* genera numerosas y diversas cuestiones derivadas Q_i. De aquí surge un árbol de preguntas, que pueden conducir al encuentro o reencuentro con diferentes OM del currículum de la escuela secundaria. La administración del kiosco, requiere cuestionarse sobre los productos a comercializar, sobre qué y a qué costo comprar, vender, y cuánto se puede ganar con el negocio.

Inicialmente, se propone una lista de posibles productos $A_1, A_2, \dots, A_n$ que integrarán el stock del kiosco. Los productos tienen un costo o “precio de compra” y, además, en algunos casos, suponen un gasto adicional como puede ser el “envío”. Algunos se compran y venden por unidad y otros a granel. A continuación, se analiza y desarrolla el MPR vinculado a la pregunta generatriz:

Q_0: *¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias?*

Este análisis se realiza en tres partes que se corresponden con las etapas de modelización algebraica que el REI permite identificar (Laplace, Otero y Llanos, 2024).

5.1.1 Primera parte: Etapa de generación de modelos algebraicos

Esta etapa de modelización algebraica se denomina E_1: *Generación de modelos algebraicos*. Se generan modelos relacionados con fórmulas, ecuaciones e inecuaciones lineales en dos variables con parámetros explícitos. A su vez se distingue qué parámetros se caracterizan ocasionalmente como variables; se analizan las relaciones entre las variables y se identifican los valores conocidos del sistema kiosco como parámetros específicos.

En el esquema de la Figura 1 se sintetizan las preguntas que se tratan junto a las OM que se podrían estudiar en la primera etapa del REI.

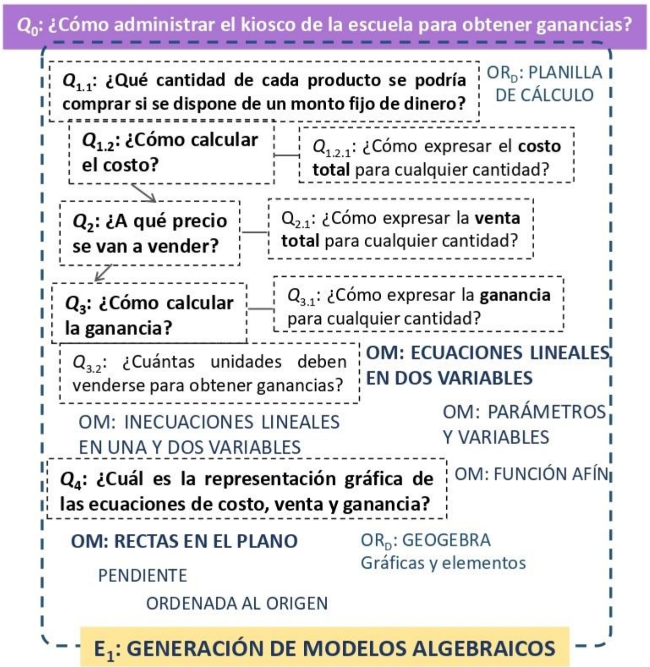

Figura 1: Esquema MPR Etapa E_1

El análisis de las preguntas del esquema, conduce a considerar tres modelos: de compra, venta y ganancia de los productos del kiosco. Las planillas de cálculo son un instrumento apropiado para tratarlos, dado que facilitan los cálculos y el proceso de construcción de los modelos algebraicos.

Modelo de COMPRA

Se eligen doce productos, $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ para el kiosco de una lista dada. A partir de $Q_{1.1}$: ¿Qué cantidad de cada producto se podría comprar si se dispone de un monto fijo de dinero? y $Q_{1.2}$: ¿Cómo se puede calcular el costo de los productos?, se calcula el costo total de cada producto utilizando una planilla de cálculo. (Anexo: Figura A.1). Este cálculo permitiría estudiar la OM_1: *Proporcionalidad directa* y, otras organizaciones como la OR_{D1}: *Planilla de cálculo* (OR_D refiere en adelante a los recursos digitales).

El estudio de $Q_{1.1}$ y $Q_{1.2}$ en el aula genera “diversos kioscos” en los cuáles algunos de los productos elegidos podrían o no coincidir, así como la cantidad a comprar de los mismos. Elegir diferentes cantidades da lugar al cuestionamiento $Q_{1.2.1}$: ¿Cómo se puede expresar el costo total de los productos para cualquier cantidad? Para responder esta pregunta es necesario construir un modelo donde se asume como variables al costo total $T,\ T \in \mathbb{R}^+$ y la cantidad (en cajas o bolsas) $L, L \in \mathbb{N}$. De esta manera, el costo total para cualquier cantidad que se quiera comprar puede expresarse como:

A_1	$T = 3400 \cdot L$		A_7	$T = 3850 \cdot L + 750$
A_2	$T = 3927 \cdot L + 650$		A_8	$T = 2698 \cdot L + 850$
A_3	$T = 2280 \cdot L$		A_9	$T = 1650 \cdot L + 650$
A_4	$T = 5499 \cdot L + 850$		A_{10}	$T = 2974 \cdot L$
A_5	$T = 3234 \cdot L + 700$		A_{11}	$T = 7766 \cdot L + 1250$
A_6	$T = 1505 \cdot L$		A_{12}	$T = 2750 \cdot L + 900$

En este caso se han considerado doce productos como posibles opciones para incorporar al kiosco. En cada una de las ecuaciones A_1 a A_{12} cambian los precios y el gasto de envío, lo que lleva a la necesidad de asumir como parámetros a valores que no están fijos (menos en una economía con inflación mensual extraordinaria como es habitual en el contexto), sino que dependen del producto elegido. No obstante, dichos valores pueden obtenerse del sistema, en el cual están contemplados los proveedores del kiosco. A partir de las expresiones formuladas se asumen como parámetros al precio unitario (de productos embalados por caja o bolsa) $P, P \in \mathbb{R}^+$ y el gasto de envío $E, E \in \mathbb{R}^+$. Se encuentra de este modo implícitamente otra OM que llamaremos OM$_2$: *Parámetros* y *variables*. La selección, distinción y discusión entre el rol de parámetros y variables cobra entonces sentido a partir del tipo de tarea realizada.

Finalmente, una respuesta a $Q_{1.2.1}$ es la ecuación del costo total para cualquier cantidad que puede escribirse como:

$$T = P \cdot L + E$$

Esta ecuación es una *ecuación lineal en dos variables* (L, T) y en el contexto de nuestro estudio tiene el mérito de ser una expresión completamente algebrizada, gracias al modelo que se requiere construir.

Con respecto a Q_2: ¿A qué precio se van a vender los productos? Habitualmente en un kiosco la venta se realiza por unidades o en fracciones de peso, por lo que en primer lugar es necesario calcular el costo unitario de los productos, es decir, el precio de compra por unidad o por gramo. El cálculo se realiza utilizando las operaciones básicas de la planilla de cálculo (Anexo: Figura A2). De esta manera, el costo total también puede expresarse a partir del precio de compra por unidad o por gramo. Asumimos como variables al costo total T y la cantidad $q,\ q \in \mathbb{R}^+$ (cantidad en unidades $q_u \in \mathbb{N}$ o cantidad en gramos $q_g \in \mathbb{R}^+$), y como parámetros al precio de compra P_c, $P_c \in \mathbb{R}^+$ y el gasto de envío $E, E \in \mathbb{R}^+$. Ahora la respuesta a $Q_{1.2.1}$: ¿Cómo se puede expresar el costo total de los productos para cualquier cantidad? cambia, R$_{1.2.1}$: La ecuación del costo total para cualquier cantidad que se quiera comprar puede escribirse como:

$$T = P_c \cdot q + E$$

Esta ecuación es también una *ecuación lineal en dos variables* (q, T).

Modelo de VENTA

El precio al que se van a vender los productos es una decisión que depende de los gestores del kiosco, que puede ser consultada en diversas fuentes como portales de internet o en kioscos del barrio. Para calcularlo primero definimos el parámetro precio de venta como $P_v, P_v \in \mathbb{R}^+$ y llamamos $k, k \in \mathbb{R}^+$ al incremento sobre el precio de compra, entonces:

$$P_v = P_c \cdot k$$

Ahora cambia la pregunta: $Q_{2.1}$: ¿Cómo se puede expresar el total de la venta de los productos para cualquier cantidad? Para hallar el modelo de venta asumimos por conveniencia aquí que las variables son el total de la venta $V, V \in \mathbb{R}^+$ y la cantidad $q,\ q \in \mathbb{R}^+$y consideramos como parámetro a $P_v, P_v \in \mathbb{R}^+$. Los parámetros del sistema en el modelo de venta, son valores cognoscibles y no necesariamente fijos, ya que no todos los productos se venden al mismo precio y además hay inflación diaria. Es decir, el precio de venta no es constante (fijo) y es útil identificarlo por medio de P_v.

Entonces una posible $R_{2.1}$ queda determinada por la ecuación de venta de los productos para cualquier cantidad y se escribe como:

$$V = P_v \cdot q$$

Esta ecuación es una *ecuación lineal en dos variables* (q, V).

Modelo de GANANCIA

Finalmente, entre las preguntas vinculadas con las ganancias que genera el kiosco se agregan Q_3: ¿Cómo calcular la ganancia que se obtiene al vender los productos?, $Q_{3.1}$: ¿Cómo se puede expresar la ganancia de los productos para cualquier cantidad? El cálculo de la ganancia se obtiene de la diferencia entre los ingresos, que son las ventas y los costos de la compra de los productos. Así,

Ganancia = Ventas – Costos

$$G = \quad V \quad - \quad T$$

$$G = P_v \cdot q \ - (P_c \cdot q + E)$$

$$G = (P_v - P_c) \cdot q - E$$

Consideramos los parámetros precio de venta $P_v, P_v \in \mathbb{R}^+$, precio de compra $P_c, P_c \in \mathbb{R}^+$ y gasto de envío: $E, E \in \mathbb{R}^+$, que ya identificamos en los modelos de compra y venta. En este modelo adoptamos como variables a la ganancia $G, G \in \mathbb{R}^+$ y la cantidad $q,\ q \in \mathbb{R}^+$. Entonces, $R_{3.1}$: La ecuación de ganancia de los productos para cualquier cantidad es

$$G = (P_v - P_c) \cdot q - E$$

Esta ecuación es también una *ecuación lineal en dos variables* (q, G).

En síntesis, los modelos matemáticos para el costo, la venta y la ganancia de los productos del kiosco, se expresan por medio de *ecuaciones lineales en dos variables* que consideramos como OM_3.

COSTO	VENTA	GANANCIA
$T = P_c \cdot q + E$ (1)	$V = P_v \cdot q$ (2)	$G = (P_v - P_c) \cdot q - E$ (3)

Con relación a la ganancia podría plantearse también $Q_{3.2}$: ¿Cuántas unidades deben venderse para obtener ganancias? La variable ganancia puede tomar valores positivos y negativos. Si la ganancia admite valores negativos se consideraría una pérdida, entonces interesa conocer a partir de qué cantidad de productos vendidos el kiosco genera ganancia positiva, por lo que $G > 0$. La respuesta de $Q_{3.2}$ podría requerir el estudio de las *Inecuaciones líneas en una variable* que llamaremos OM_4. También a partir de OM_3 y OM_4 podría estudiarse las *Inecuaciones lineales en dos variables.*

Otros cuestionamientos típicamente escolares vinculados con OM_3 podrían ser Q_4*:* ¿Cuál es la representación gráfica de los modelos de compra, venta y ganancia?, $Q_{4.1}$: ¿Qué valores pueden tomar las variables de cada modelo? Responder a estas preguntas convoca al estudio de las *Rectas en el plano* dentro de la OM_3.

El estudio de la OR_{D2}: *GeoGebra. Gráficas y elementos* está vinculado a la OM_3. Mediante el uso del software, se obtienen las rectas asociadas a las ecuaciones de compra, venta y ganancia. Los parámetros de estos modelos involucran, en la mayoría de los casos, valores que son positivos por lo que la representación gráfica es válida solo en el primer cuadrante. Por su parte, la ganancia puede considerarse positiva o negativa por lo que la gráfica es válida en el primer y cuarto cuadrante. En los tres modelos generados, la cantidad q se trata como variable para dar respuesta al sistema. Además, en el caso de los productos que se comercializan por unidad, la cantidad es una variable discreta, por lo que su representación gráfica se corresponde con un conjunto de puntos alineados y, para los productos que se comercializan a granel, la variable es continua y su representación gráfica es una recta.

Podrían plantearse, además, $Q_{4.2}$: ¿Cómo se puede calcular el precio de compra y el gasto de envío de un producto si se conocen algunos costos totales y las cantidades correspondientes?, $Q_{4.2.1}$: ¿Cómo se puede calcular la pendiente de la recta?, $Q_{4.2.2}$: ¿Cuál es valor en el que las rectas cortan al eje y? La respuesta a cada una de estas preguntas conduce a estudiar OM: *Pendiente de la recta* y OM: *Ordenada al origen*.

El estudio de las funciones abarca gran parte de la escuela secundaria. Si bien este MPR realiza un recorrido por las OM vinculadas al álgebra escolar, este REI también podría conducir al encuentro con la $OM_{3.1}$ *Función Afín* que también es parte del diseño curricular del año escolar donde se desarrolla el REI. De esta manera, podría preguntarse $Q_{4.3}$: ¿Los modelos hallados son funciones? ¿Qué tipo de función se corresponde con cada uno? ¿Cuál es su dominio? En cada modelo es posible establecer una relación de dependencia lineal entre ambas variables que cumple con las condiciones de una Función Afín. En los tres modelos la variable independiente es la cantidad de los productos, por lo que en algunos casos será discreta y las funciones estarán definidas de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, y en otros la variable será continua entonces las funciones se definen de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Las funciones afines asociadas a cada modelo se proponen en la tabla siguiente. Se considera el caso de la variable cantidad como variable discreta para los productos por unidad y, por otro lado, como variable continua para los productos que se comercializan a granel.

Función	*Variable discreta*	*Variable continua*
Costo	$T: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad T(q) = P_c \cdot q_u + E$	$T: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad T(q) = P_c \cdot q_g + E$

Venta	$V\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad V(q) = P_v \cdot q_u$	$V\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad V(q) = P_v \cdot q_g$
Ganancia	$G\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, G(q) = (P_v - P_c) \cdot q_u - E$	$G\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, G(q) = (P_v - P_c) \cdot q_g - E$

El desarrollo del REI se enmarca en la primera etapa de modelización algebraica, denominada **E_1: Generación de modelos algebraicos**. En esta etapa, se construyen modelos que involucran fórmulas, ecuaciones e inecuaciones lineales en dos variables con parámetros explícitos. A su vez se distingue qué parámetros se caracterizan ocasionalmente como variables; se analizan las relaciones entre las variables y se identifican los valores conocidos del sistema kiosco como parámetros específicos.

5.1.2 Segunda parte: Etapa de análisis del uso de los parámetros

Se consideran aquí un conjunto de preguntas vinculadas con los modelos algebraicos generados en la etapa anterior. Para cada uno de los modelos de compra, venta y ganancia se identificaron los parámetros y cuáles de ellos se podrían considerar variables y de qué tipo. A partir del modelo de ganancia se realizará el análisis de sus parámetros especificables y del efecto que provoca en el sistema kiosco la variación de los mismos. En el esquema de la Figura 2 se sintetizan las preguntas junto a las OM estudiadas en la segunda parte del REI, asociadas a la etapa E_2.

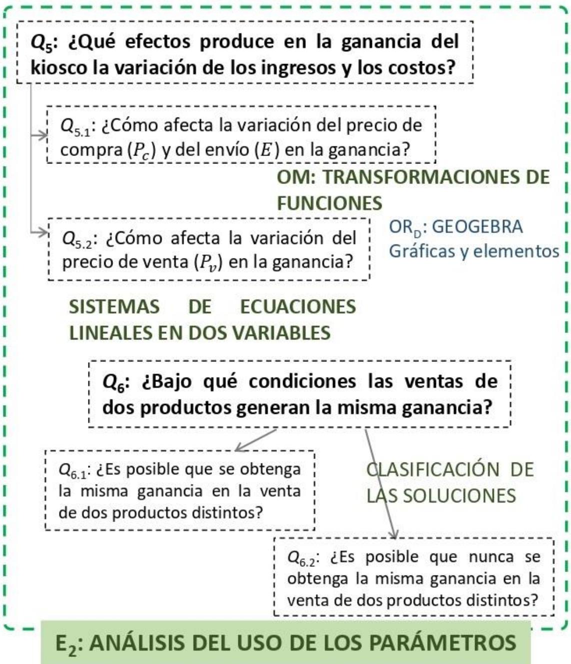

Figura 2: Esquema MPR Etapa E_2

Como la actualización de los precios es una tarea habitual en un kiosco, se considera la pregunta Q_5: ¿Qué efectos produce en la ganancia del kiosco la variación de los ingresos y los costos? Dado que la ganancia se calcula como la diferencia entre ventas y costos, cualquier variación en estos valores incide directamente en el resultado final. En particular, con respecto a los costos, $Q_{5.1}$: ¿Cómo afecta la variación del precio de compra (P_c) y del envío (E) en la ganancia? Se analiza en primer lugar, la variación del parámetro especificable del sistema P_c a partir de la técnica de control de parámetros. Un análisis similar puede realizarse con el parámetro E y para los ingresos con P_v, el cual puede consultarse en Autor 1 (2024).

Se considera que la ganancia será positiva a partir de una cierta cantidad de productos vendidos. Este valor se determina resolviendo la ecuación $G = 0$ a partir de la expresión (3),

$$(P_v - P_c) \cdot q - E = 0$$
$$q = \frac{E}{P_v - P_c} \quad \text{siendo } P_v - P_c > 0$$

Como en este caso P_v y E son específicos, se analiza como incide la variación de P_c en el valor de la cantidad (q) que permite comenzar a obtener ganancias. Sean P_{c_0} y P_{c_1} dos valores distintos de P_c tales que $P_{c_0} < P_{c_1}$ entonces,

$$\begin{gathered} P_{c_0} < P_{c_1} \\ -P_{c_0} > -P_{c_1} \\ P_v - P_{c_0} > P_v - P_{c_1} \\ \frac{1}{P_v - P_{c_0}} < \frac{1}{P_v - P_{c_1}} \\ \frac{E}{P_v - P_{c_0}} < \frac{E}{P_v - P_{c_1}} \\ q_0 < q_1 \end{gathered}$$

Por lo tanto, para cualquier $P_c \in \mathbb{R}^+$ tal que $P_{c_i} < P_{c_j}$, se obtiene $q_i < q_j$. Es decir que, para obtener ganancias (positivas), cuanto menor es el precio de compra (P_c) entonces menor será la cantidad de productos a vender (q). En el Anexo (Figura A.3) se presenta una gráfica que ejemplifica el comportamiento del modelo de ganancia para el producto A_2, con distintos valores de P_c y valores específicos de P_v y E. De esta manera, una respuesta parcial a $Q_{5.1}$ requiere también considerar el análisis del parámetro envío (E) que, al igual que P_c, incrementa la ganancia cuando su valor disminuye. En efecto, al reducirse los costos, la ganancia aumenta o bien disminuye la cantidad de productos necesarios para alcanzar una determinada ganancia.

El análisis de la variación de los parámetros P_v, P_c y E podría conducir al estudio de las *Transformaciones elementales* ($OM_{3.2}$). El uso de un software, como puede ser GeoGebra, para graficar las rectas contribuye a vincular los aspectos algebraicos y geométricos de las ecuaciones lineales en dos variables, además de facilitar la comprensión de los efectos que se producen con la variación de dichos parámetros, a partir del uso de deslizadores, por ejemplo. En este sentido es que esta tarea también permite el estudio de OR_{D2}: *GeoGebra. Gráficas y elementos*. Destacamos en este trabajo el tratamiento algebraico junto a los resultados obtenidos con GeoGebra.

Por otro lado, el cuestionamiento sobre los beneficios del kiosco podría orientarse a identificar qué productos ofrecen mayor ganancia en su comercialización. La pregunta Q_6: ¿Bajo qué condiciones las ventas de dos productos generan la misma ganancia? remite al estudio de los *Sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables* (OM_5), con parámetros que representan la diferencia entre el precio de venta y el precio de compra ($d = P_v - P_c$); y el gasto de envío. El sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables puede escribirse de la forma:

$$\begin{cases} G = d_1 \cdot q - E_1 \\ G = d_2 \cdot q - E_2 \end{cases}, \quad d = P_v - P_c$$

Se analiza la existencia y naturaleza de soluciones para (q, G), donde q es la cantidad y G la ganancia, variables del sistema. $Q_{6.1}$: ¿Es posible que se obtenga la misma ganancia en la venta de dos productos distintos? $Q_{6.2}$: ¿Es posible que nunca se obtenga la misma ganancia en la venta de dos productos distintos?

-Si $d_1 \neq d_2$, existe un único par $(q; G)$ que es solución de ambas ecuaciones en forma simultánea, esto indica que hay una única cantidad de productos para la cual ambos generan la misma ganancia ($R_{6.1.1}$). En este caso, el sistema tiene una única solución y es del tipo *Compatible determinado*.

-Si $d_1 = d_2$ y $E_1 = E_2$, las ecuaciones generan la misma recta, entonces existen infinitos pares $(q; G)$ que satisfacen las dos ecuaciones en forma simultánea. Esto indica que cualquier cantidad produce la misma ganancia en ambos productos ($R_{6.1.2}$). El sistema tiene más de una solución, es decir es de tipo *Compatible indeterminado*.

-Si $d_1 = d_2$ pero $E_1 \neq E_2$ las rectas no se intersecan y no existe ninguna cantidad para la cual se obtenga la misma ganancia ($R_{6.2}$). El sistema no tiene solución y es del tipo *Incompatible*.

Las preguntas Q_6, $Q_{6.1}$ y $Q_{6.2}$ convocan a una ampliación del estudio de la ganancia y en consecuencia al estudio de la *Clasificación de las soluciones de los Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables*. El análisis algebraico que se realiza de los modelos obtenidos en cada caso, también podría complementarse con el análisis de las rectas a partir del software, profundizando el estudio de la OR_{D2}.

Tanto el estudio de Q_5 como el de Q_6 posibilitan el desarrollo de otra etapa de modelización algebraica, que denominamos **E_2: Análisis del uso de los parámetros**. En esta etapa se distinguen los parámetros que se tratan como variables de los que no, pero principalmente, se analiza cómo la variación de los parámetros produce modificaciones en el modelo, otorgando nueva información de las características del sistema que representan.

5.1.3 Tercera parte: Generación y análisis de nuevos modelos (E3)

La tercera etapa (E_3) del proceso de modelización algebraica involucra otro conjunto de preguntas, que requieren de la elaboración de modelos derivados del modelo de ganancia, a partir de su transformación. El eje de esta etapa se centra en cómo obtener una ganancia previamente fijada en el contexto del kiosco escolar. De este modo, la ganancia -que hasta el momento era tratada como variable- pasa a ser considerada como un parámetro y se especifica. Por su parte, los parámetros correspondientes al envío (E), precio de veta (P_v) y precio de compra (P_c) tomados individualmente, serán considerados variables oportunamente. En el esquema de la Figura 3 se sintetizan las preguntas junto a las OM estudiadas en la segunda parte del REI, asociadas a la etapa E_3.

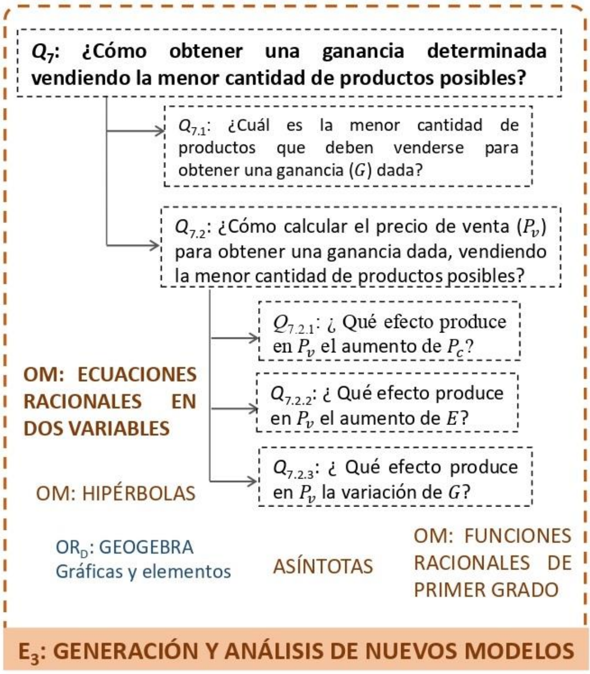

Figura 3: Esquema MPR Etapa E_3

En esta nueva etapa el enfoque se modifica: la ganancia deja de ser una variable a calcular y se fija como un parámetro. A partir de esta redefinición surge una nueva pregunta, Q_7: ¿Cómo obtener una ganancia determinada vendiendo la menor cantidad de productos posibles?

Este planteo requiere reconsiderar la relación entre ingresos y costos con el objetivo de conseguir una ganancia determinada con el menor número de ventas posibles. Para responder, se vuelve necesario identificar qué variable del sistema -el precio de compra, el de venta o el gasto de envío- resulta más determinante en la cantidad de productos requeridos. Se formula la pregunta $Q_{7.1}$: ¿Cuál es la menor cantidad de productos que deben venderse para obtener una ganancia dada?

El análisis parte de la transformación de la ecuación de ganancia (3), para estudiar ahora cómo varía la cantidad (q) en función de cada uno de esos tres parámetros. Esta exploración permite construir distintos modelos (algebraicos y gráficos) y compararlos para establecer cuál de ellos ofrece mejores condiciones para lograr la ganancia deseada con el menor esfuerzo comercial. Entonces, de la ecuación (3) se obtiene:

$$q = \frac{G + E}{P_v - P_c} \qquad (4)$$

Al fijarse la ganancia como un valor específico proporcionado por el sistema (en este caso, los administradores del kiosco), la cantidad de productos a vender queda determinada por el gasto de envío (E), del precio de compra (P_c) o del precio de venta (P_v). Para responder a $Q_{7.1}$ se analizan las relaciones entre estas variables y su impacto en la cantidad requerida. El estudio se divide en tres casos: la relación entre cantidad y gasto de envío; entre cantidad y precio de compra, y entre cantidad y precio de venta. Cada uno de estos casos se aborda desde una perspectiva algebraica y gráfica diferente y retoman el estudio de la OR_{D2}.

- *Cantidad en función del gasto de envío*

A partir de $Q_{7.1.1}$: ¿Qué gasto de envío (E) permite obtener la menor cantidad (q) de ventas? y con la ecuación (4) se obtiene una ecuación lineal en dos variables (E, q) y con parámetros G, P_v y P_c.

$$\boldsymbol{q} = \frac{G + \boldsymbol{E}}{P_v - P_c} \quad , \quad P_v \neq P_c$$

$$\boldsymbol{q} = \frac{1}{P_v - P_c}\boldsymbol{E} + \frac{G}{P_v - P_c}$$

$q, E, G, P_v, P_c \in \mathbb{R}^+$

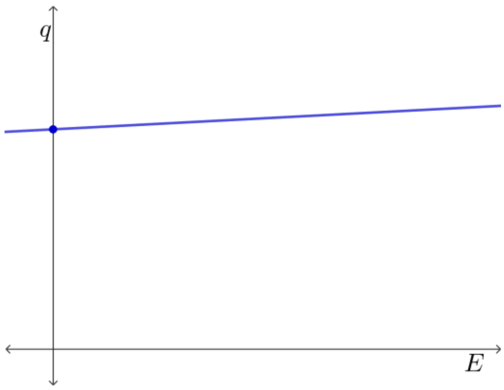

Figura 4.1: Variación de q respecto de E

Desde el punto de vista gráfico, esta ecuación se representa con una recta creciente que sólo tiene sentido para $E \geq 0$. A mayor gasto de envío, mayor debe ser la cantidad de productos vendidos para alcanzar la ganancia deseada. En consecuencia, $R_{7.1.1}$: la menor cantidad posible se obtiene cuando el envío es gratuito $(E = 0)$. La cantidad de ventas que deben realizarse está determinada por el número $\frac{G}{P_v - P_c}$ y se obtiene cuando $E = 0$. (Ver Figura 4.1)

- *Cantidad en función del precio de compra*

En este segundo caso se estudia cómo varía la cantidad cuando cambia el precio de compra, a partir de $Q_{7.1.2}$: ¿Qué precio de compra (P_c) permite obtener la menor cantidad de ventas? De la ecuación (4) se obtiene una ecuación racional en dos variables (P_c, q) y parámetros $G, P_v, E \in \mathbb{R}^+$.

$$\boldsymbol{q} = \frac{G + E}{P_v - \boldsymbol{P_c}} \quad , \quad P_v \neq P_c$$

$q, E, G, P_v, P_c \in \mathbb{R}^+$

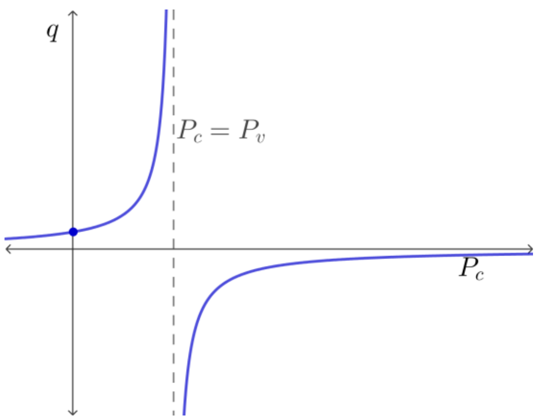

Figura 4.2: Variación de q respecto de P_c

La gráfica de la ecuación es una hipérbola que tiene sentido sólo para valores positivos de q. Tiene una asíntota vertical $\boldsymbol{P_c} = P_v$ lo cual indica que, si el precio de compra se acerca al de venta, la cantidad necesaria crece indefinidamente. La cantidad de productos necesarios disminuye a medida que el precio de compra se reduce. El menor valor se daría cuando $P_c = 0$, que no tiene sentido. Por lo tanto, $R_{7.1.2}$: cuanto mayor sea el precio de compra, mayor será la cantidad de ventas necesarias para alcanzar la ganancia deseada. (Ver Figura 4.2)

- *Cantidad en función del precio de venta*

Por último, se analiza la influencia del precio de venta en la cantidad, a partir de la pregunta $Q_{7.1.3}$: ¿Qué precio de venta (P_v) permite obtener la menor cantidad de ventas? En este caso también se obtiene una ecuación racional en dos variables (P_v, q) y parámetros $G, P_c, E \in \mathbb{R}^+$.

$$\boldsymbol{q} = \frac{G+E}{\boldsymbol{P_v} - P_c} \quad , \quad P_v \neq P_c$$

$$q, E, G, P_v, P_c \in \mathbb{R}^+$$

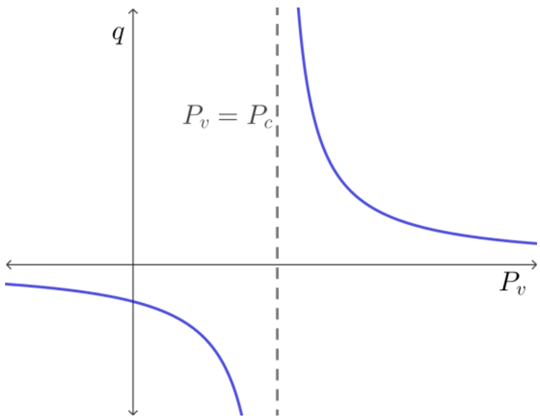

Figura 4.3: Variación de q respecto de P_v

La hipérbola correspondiente a esta ecuación es decreciente y válida únicamente para $P_v > P_c$ con $q > 0$. De la misma se deduce que, a medida que el precio de venta aumenta, la cantidad que se necesita vender para obtener la ganancia deseada disminuye, por lo que, $R_{7.1.3}$: la menor cantidad de ventas se obtiene para valores altos del precio de venta. (Ver Figura 4.3).

Los tres modelos analizados se obtienen del modelo de ganancia y brindan información nueva del sistema, considerando a la ganancia como un parámetro específico. Los costos nunca serán cercanos a cero e irán aumentando con el pasar del tiempo. Para alcanzar la ganancia deseada, será necesario establecer una cantidad “aceptable” de ventas y analizar qué precio de venta es el adecuado. Una respuesta posible a Q_7 podría ser R_7: para obtener una ganancia dada, vendiendo la menor cantidad de productos, es necesario saber cómo determinar el precio de venta de los productos ($Q_{7.2}$).

Con la pregunta $Q_{7.2}$: ¿Cómo calcular el precio de venta (P_v) que permite obtener una ganancia dada, vendiendo la menor cantidad de productos?, es posible analizar qué información puede obtenerse del modelo del precio de venta. De la ecuación de ganancia (3) consideramos como parámetros a la ganancia (G), el precio de compra (P_c) y el gasto de envío (E); y asumimos como variables del modelo al precio de venta (P_v) y la cantidad (q). La fórmula para P_v, que permite obtener una cierta ganancia, queda determinada por,

$$\boldsymbol{P_v} = \frac{G+E}{\boldsymbol{q}} + P_c \quad , \qquad q \neq 0 \qquad (5)$$

siendo $G, P_v, P_c, q, E \in \mathbb{R}^+$ y donde $P_v > P_c$. La ecuación (5) es una ecuación racional en dos variables (q, P_v) y brinda información útil para estimar el precio de venta de los productos. Entonces, $R_{7.2}$: Para obtener una ganancia determinada, el precio de venta (P_v), debe ser igual al precio de compra (P_c) más el sumando $\left(\frac{G+E}{q}\right)$, el cual se corresponde con lo que se quiere recuperar (ganancia + envío) dividido la cantidad que se “quiera” vender. Y si aumenta la cantidad (q) de productos vendidos entonces P_v será cada vez menor.

La pregunta Q_7 y sus derivadas permitirían el encuentro con otras OM como OM_6: *Ecuaciones racionales en dos variables*. *Hipérbolas*. *Asíntotas,* además de $OM_{6.1}$: *Funciones racionales de primer grado, Dominio de funciones racionales* y *Optimización* si se profundiza en el estudio de funciones.

Además, con la ecuación (5), también es posible analizar cómo afectan al precio de venta las variaciones de parámetros como precio de compra (P_c), (con las alteraciones por efectos inflacionarios), el gasto de envío (E) o incluso la ganancia deseada (G), que puede ajustarse según los objetivos del sistema. Este tipo de análisis permite formular nuevas preguntas vinculadas a las transformaciones del modelo de venta (4), en las que los parámetros del modelo original se convierten ahora en variables del nuevo modelo.

El estudio de estas relaciones conduce al análisis de transformaciones elementales, esta vez aplicadas a funciones racionales. De este modo, la pregunta Q_7 y sus derivadas surgen de fijar un parámetro —la ganancia— que en el modelo inicial era una variable, dando lugar a un conjunto de nuevos modelos. Esta transición marca el inicio de la etapa del proceso de modelización algebraica **E_3: Generación y análisis de nuevos modelos**. En esta etapa, se retoma el tipo de análisis realizado en las etapas E_1 y E_2, pero ahora aplicado a modelos derivados, lo que enriquece la comprensión del fenómeno y amplía las herramientas de interpretación disponibles.

6. Conclusión

El REI propuesto en este trabajo constituye una alternativa didáctica potente para resignificar el aprendizaje del álgebra escolar, enmarcado en los principios de la TAD. A partir de una pregunta generatriz de interés para los estudiantes —¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias? — se diseñó un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) que permitió organizar y anticipar un itinerario de trabajo donde se articulan distintas OM y recursos didácticos (OR_D).

La primera etapa del recorrido (E_1) permitió generar modelos algebraicos vinculados a expresiones lineales y funciones afines, cuya construcción no respondió a una lógica expositiva tradicional, sino a la necesidad de resolver problemas genuinos en un contexto realista. Esta fase permitió a los estudiantes transitar desde la exploración de datos empíricos (costos, precios, cantidades) hasta la elaboración de modelos simbólicos, utilizando herramientas digitales como la planilla de cálculo.

En la segunda etapa (E2), el análisis del uso de los parámetros abrió la posibilidad de estudiar la variabilidad del sistema y comprender la funcionalidad del álgebra como instrumento para anticipar, comparar y decidir. Este momento del REI puso en juego técnicas gráficas y algebraicas para interpretar los efectos de modificaciones en costos, precios de venta, gastos de envío y también la ganancia.

La tercera etapa (E3) profundizó la modelización al transformar el modelo de ganancia y generar nuevos modelos con estructuras más complejas, como funciones racionales y análisis de optimización. Al establecer metas (por ejemplo, alcanzar una ganancia determinada), se intercambiaron las variables y los parámetros, lo que favoreció una comprensión más profunda de las relaciones funcionales y el sentido estratégico del uso del álgebra.

Este trabajo muestra que el análisis a priori que conduce a la elaboración de un posible MPR para proyectar un REI es una herramienta didáctica central para superar la monumentalización del saber matemático y para restablecer el lazo entre las matemáticas y el mundo.

7. Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie : voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico*. Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19 (2), pp*. 221-266.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemática en la Sociedad de mañana: alegato a favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics, 2(2),* 161-182. doi:10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 20(1),* 159-169.

Chevallard Y. & Bosch M. (2014). Didactic Transposition in Mathematics Education. In: Lerman S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 170-174). Springer, Dordrecht.

Kim, S. (2015). Les besoins mathématiques des Non-Mathématiciens quel destin institutionnel et social Études d'écologie et d'économie didactiques des connaissances mathématiques. (Thèse doctorale). Université Aix-Marseille.

Laplace E. (2022). Análisis matemático y didáctico de una pregunta generatriz para enseñar afinidades y ecuaciones lineales en dos variables en la escuela secundaria. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*. 17 (2), 73-80. https://doi.org/10.54343/reiec.v17i2.365

Laplace, E. (2024). *Recorrido de estudio e investigación para enseñar la modelización algebraica en la escuela secundaria.* [Tesis de doctorado]. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. https://www.ridaa.unicen.edu.ar/handle/123456789/4242

Laplace, E.; Otero, M. R. y Llanos, V. C. (2024). El álgebra escolar y la modelización en la escuela secundaria a partir de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI). *Revista Internacional de Pesquisa em Didática das Ciências e Matemática (RevIn). Itapetininga*, 5, 1-25. e024005.

Otero, M. R.; Llanos, V.; Parra, V., Sureda, P. (2014). Enseignement et recherche éducative par PER à l‟école secondaire. Anglais*. Review of Science, Mathematics and Ict Education* (*ReSMICTE) 8(1),* 7-32.

Otero, M. R. (2021). *La formación de profesores: recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento*. Libro digital. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos.

8. Anexo

G4 =+D4*F4+E4

Costo Total = Precio · Cantidad (Cajas o bolsas) + Envío

	A	B	C	D	E	F	G
1-2	Productos	unid. por caja / gramos por bolsa		Precio	Envío	Cantidad (Cajas o bolsas)	Costo Total
3	A_1	40	u	$ 3.400	$ 0	12	$ 40.800
4	A_2	50	u	$ 3.927	$ 650	12	=$ 47.774
5	A_3	30	u	$ 2.280	$ 0	6	$ 13.680
6	A_4	36	u	$ 5.499	$ 850	6	$ 33.844
7	A_5	16	u	$ 3.234	$ 700	10	$ 33.040
8	A_6	12	u	$ 1.505	$ 0	5	$ 7.525
9	A_7	18	u	$ 3.850	$ 750	10	$ 39.250
10	A_8	1000	g	$ 2.698	$ 850	5	$ 14.340
11	A_9	800	g	$ 1.650	$ 650	8	$ 13.850
12	A_{10}	907	g	$ 2.974	$ 0	4	$ 11.896
13	A_{11}	2500	g	$ 7.766	$ 1.250	2	$ 16.782
14	A_{12}	480	g	$ 2.750	$ 900	9	$ 25.650
15						Total:	$ 298.431

Figura A.1: Hoja de cálculo. Costo total a partir del monto fijo

$$\text{Precio de compra} = \frac{\text{Costo total}}{\text{unidades} \cdot \text{caja}}$$

$$\text{Precio de compra} = \frac{\text{Costo total}}{\text{gramos} \cdot \text{bolsa}}$$

H7 =+G7/(B7*F7)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1-2	Productos	unid. por caja / gramos por bolsa		Precio P	Envío E	Cantidad (Cajas o bolsas) L	Costo Total T	Precio de compra
3	A_1	40	u	$ 3.400	$ 0	12	$ 40.800	$ 85,00
4	A_2	50	u	$ 3.927	$ 650	12	$ 47.774	$ 79,62
5	A_3	30	u	$ 2.280	$ 0	6	$ 13.680	$ 76,00
6	A_4	36	u	$ 5.499	$ 850	6	$ 33.844	$ 156,69
7	A_5	16	u	$ 3.234	$ 700	10	$ 33.040	= $ 206,50
8	A_6	12	u	$ 1.505	$ 0	5	$ 7.525	$ 125,42
9	A_7	18	u	$ 3.850	$ 750	10	$ 39.250	$ 218,06
10	A_8	1000	g	$ 2.698	$ 850	5	$ 14.340	$ 2,87
11	A_9	800	g	$ 1.650	$ 650	8	$ 13.850	$ 2,16
12	A_{10}	907	g	$ 2.974	$ 0	4	$ 11.896	$ 3,28
13	A_{11}	2500	g	$ 7.766	$ 1.250	2	$ 16.782	$ 3,36
14	A_{12}	480	g	$ 2.750	$ 900	9	$ 25.650	$ 5,94
15						Total:	$ 298.431	

Figura A.2: Hoja de cálculo. Precio de compra por unidad/gramo

La gráfica de la Figura A.3 corresponde al modelo de ganancia del producto A_2 para distintos valores de P_c, con valores específicos para el precio de venta (P_v) y el gasto de envío (E). Se consideran $P_{c_0} = 79{,}62;\ P_{c_1} = 30; P_{c_2} = 60; P_{c_3} = 102;\ P_{c_4} = 140$ y se representan las rectas cuyas ecuaciones se obtienen de

$$G = (160 - \boldsymbol{P_c}) \cdot q - 650$$

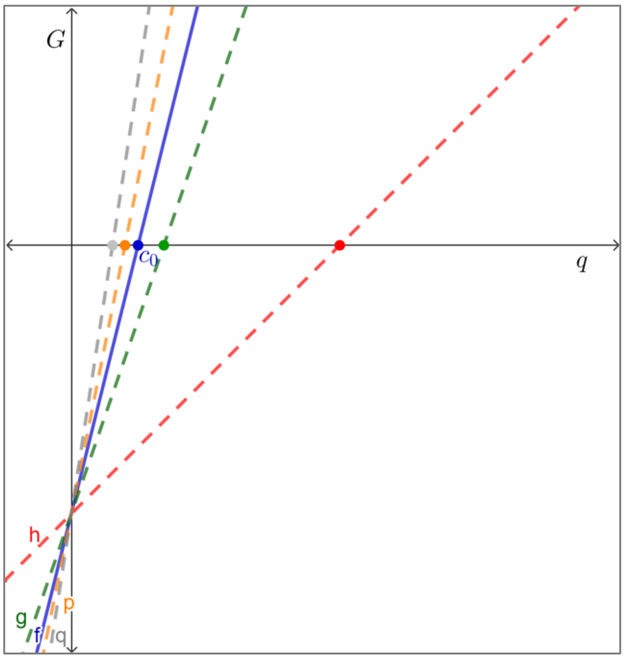

Figura A.3: Variación del parámetro P_c en el modelo de Ganancia G

En la figura, la recta f (azul) representa gráficamente la ecuación $G = (160 - \boldsymbol{P_c}) \cdot q - 650$ con $P_{c_0} = 79{,}62$. La recta q (gris) corresponde a $P_{c_1} = 30$ y la recta p (naranja) a $P_{c_2} = 60$, mientras que la recta g (verde) a $P_{c_3} = 102$ y la recta h (roja) a $P_{c_4} = 140$.

Se observa que la rectas cuyos valores de P_c son menores a P_{c_0} se produce una inclinación de la recta hacia el eje de las ordenadas (la pendiente positiva aumenta) y corta al eje de abscisas en valores de q menores a q_0, lo que significa que disminuye la cantidad de productos que deben venderse para obtener ganancias. En el caso de las rectas cuyo P_c es mayor a P_{c_0} se produce una inclinación de la recta hacia el lado derecho (la pendiente positiva disminuye) y corta al eje de abscisas en valores de q mayores, aumentando la cantidad de ventas necesaria para obtener ganancias.