

<https://union.fespm.es>

Evidencias de razonamiento geométrico en estudiantes de primero medio de enseñanza media en un colegio de la provincia de Concepción

Fabián Eduardo Quiroga Merino, Claudio Armando Méndez Arriagada, Juan Eduardo González Canales, Paulina Elizabeth Serrano Salas

Fecha de recepción: 8/13/2020
Fecha de aceptación: 31/12/2020

<p>Resumen</p>	<p>Esta investigación tiene por objetivo diagnosticar el nivel de razonamiento geométrico en la unidad de Homotecia a estudiantes de secundaria que se encuentran entre los 14 y 15 años de edad en un colegio de alto rendimiento (COAR), según el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), obteniéndose información mediante un diagnóstico, producciones escritas y transcripciones de audio, las que se analizaron según la teoría de Van Hiele, la teoría de registros semióticos de Duval y los paradigmas geométricos de Kuzniak, permitiendo evidenciar un bajo nivel del razonamiento en el contenido de Homotecia, y un cumplimiento parcial de los estándares esperados según el programa del MINEDUC tanto en el logro de objetivos como en el desarrollo de habilidades. Palabras clave: Matemática, geometría, razonamiento geométrico.</p>
<p>Abstract</p>	<p>This research aims to diagnose the level of geometric reasoning in the Homothety unit for high school students between 14 and 15 years old in a high performance school (COAR), according to the Ministry of Education of Chile (MINEDUC), obtaining information through a diagnostic test, written productions and audio transcripts, which were analyzed according to Van Hiele's theory, Duval's theory of semiotic registers and Kuzniak's geometric paradigms, allowing evidence of a low level of reasoning in the Homothety unit, and a partial fulfillment of the expected standards according to the MINEDUC program both on the achievement of objectives and on the development of skills. Key words: Mathematics, geometry, geometric reasoning.</p>
<p>Resumo</p>	<p>Esta pesquisa tem por objetivo diagnosticar o nível de raciocínio geométrico na Unidade de Homotecia a estudantes de ensino médio que encontram-se entre os 14 e 15 anos de idade em um colégio de alto rendimento (COAR), segundo o Ministério da Educação do Chile (MINEDUC), obtendo-se informação mediante um diagnóstico, produções escritas e transcrições de áudio, as quais foram analisadas de acordo com a teoria de Van Hiele, teoria de registros semióticos de Duval e os paradigmas geométricos de Kuzniak. Permitindo assim evidenciar um baixo nível de raciocínio no conteúdo de Homotecia e um cumprimento parcial</p>

dos padrões esperados segundo o programa do MINEDUC tanto no alcance de objetivos como no desenvolvimento de habilidades.
Palavras chave: Matemática, geometria, raciocínio geométrico.

1. Introducción

Al analizar los distintos establecimientos según nuestro contexto estudiantil, nos hemos dado cuenta que la mayoría de ellos presenta problemas en la asignatura de Matemáticas, encontrando que Geometría es uno de los sectores más descendidos, esto se puede observar en las distintas evaluaciones estandarizadas a las que son sometidas los establecimientos.

Por una parte, en el Simce¹ de Matemáticas, se presenta un gran porcentaje de estudiantes dentro del nivel insuficiente, según los resultados del Ministerio de Educación, dando a conocer el déficit en esta asignatura². Por otra parte, en la evaluación PSU³ se puede evidenciar las falencias que poseen los estudiantes en el eje⁴ de Geometría, dada la baja cantidad de respuestas correctas (preguntas 37 a 58) en comparación con los ejes de números y álgebra (Preguntas 1 a 36) según muestra la Figura 1.

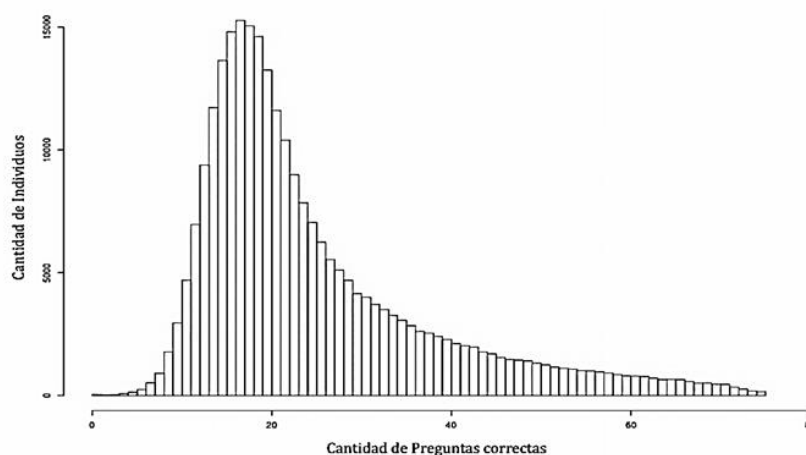


Figura 1. Distribución de individuos por cantidad de preguntas correctas en PSU de Matemáticas Admisión 2018.

Fuente: DEMRE

¹ Sistema de Medición de la Calidad de la Educación, es una evaluación externa que se aplica a los estudiantes en los establecimientos educacionales, cuyo principal propósito consiste en contribuir al mejoramiento de la calidad y equidad de la educación, informando sobre los logros de aprendizaje de los estudiantes en diferentes áreas de aprendizaje del currículo nacional, y relacionándolos con el contexto escolar y social en el que estos aprenden en Chile.

² Agencia de calidad de la educación (2015-2020), Simce, recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl/Conferencia_EERR_2018.pdf <https://www.agenciaeduc>

³ PSU; Prueba de Selección Universitaria, es una evaluación escrita implementada en Chile para el proceso de admisión universitaria.

⁴ En Chile la asignatura de Matemáticas se divide en 4 ejes temáticos: Números (asociado a los contenidos de aritmética) Álgebra y Funciones, Geometría, Estadística y Probabilidades.

Actualmente en Chile, los colegios privados son aquellos que obtienen los mejores resultados en las evaluaciones estandarizadas, obteniendo en la prueba Simce una diferencia de 60 puntos y 100 puntos en la PSU con respecto a los colegios municipales, pero aun así manifiestan el mismo patrón en Geometría.

A partir de estos datos surge la siguiente interrogante:

¿Por qué el eje de Geometría resulta ser más complicado de comprender para los estudiantes que Álgebra o Números?

Basándonos en nuestras experiencias encontramos que en Álgebra y Números existen técnicas y patrones para mecanizar la resolución de ejercicios, sin embargo, en Geometría se espera que el estudiante genere de forma espontánea una idea para poder desarrollar el ejercicio.

Cada una de las evaluaciones estandarizadas se centra sólo en los contenidos y las habilidades según la Taxonomía de Bloom, dejando de lado la forma en que los estudiantes razonan y como estructuran de manera lógica sus respuestas.

Según la teoría del desarrollo próximo diseñada por Vygotsky (Mind in society: The development of Higher Psychological processes, 1979), para que el estudiante comprenda, hay etapas por las cuales este transita, lo que no ocurre solamente de manera individual, sino que también al resolver problemas con alguien más capaz, resultando ser de gran interés en la educación, en especial si esta persona es el profesor. Respecto a lo anterior, Bruner en 1976 lo compara con un proceso de andamiaje, en el que el profesor diseña los distintos andamios sobre los que el alumno se apoya y por ende es aquí donde se requiere un proceso de evaluación que dé a conocer la posición del estudiante, a esto lo llama proceso de diagnóstico.

Según lo observado en profesores, los diagnósticos que se ocupan para medir el aprendizaje del estudiante se suelen centrar en identificar aquellos contenidos que los estudiantes no logran aplicar de manera correcta, para tomarlos como referencia al momento de planificar las clases siguientes, buscando por lo general recordarles la forma y/o el mecanismo para resolverlo. Sin embargo, es de común conocimiento que muchos de los estudiantes suelen realizar de manera correcta un ejercicio sin la necesidad de comprender completamente lo que hacen o por qué lo hacen. Con todo lo anterior, se identifica la necesidad de un diagnóstico que vaya más allá de la medición de un determinado contenido y que se enfoque en comprender el razonamiento que hay detrás de lo que contesta el estudiante.

Finalmente, es importante contar con un diagnóstico que mida adecuadamente el razonamiento geométrico, que permita, a futuro, diseñar mejor los andamios de la enseñanza. Dada esta estructura escalonada, resulta de interés la Teoría de Niveles de Razonamiento Geométrico propuesta por el matrimonio Van Hiele (1986), pues ésta consta de cinco niveles de razonamiento que se identifican mediante el cumplimiento de ciertas características asociadas a cada nivel.

Para comprender lo antes descrito, esta investigación se basa en responder la siguiente interrogante:

¿Cómo es el razonamiento geométrico empleado por los estudiantes de primero medio, en un determinado colegio de alto rendimiento de la comuna de Concepción?

2. El razonamiento en geometría

Para el autor Shigeo Katagiri(2017), el pensamiento matemático se puede clasificar en tres categorías importantes que son, el contenido matemático, el método matemático y la actitud con la que se desarrolla una actividad, en donde es esta última la que marca la diferencia entre pensamiento y razonamiento.

Dentro de este artículo se caracterizará el razonamiento geométrico en base a las siguientes habilidades:

- Establecer relaciones entre los distintos conceptos geométricos
- Argumentar de manera clara sobre las distintas propiedades o relaciones geométricas
- Comprender los elementos que forman parte de una teoría geométrica
- Comunicar en forma convincente los resultados obtenidos.

Todo estudio se relaciona con un contexto estudiantil, sus creencias individuales o grupales, sus costumbres respecto al abordaje de un nuevo contenido, y con una forma distinta de ver el mundo del aprendizaje. Para distinguir de mejor manera el paradigma en el que se desarrolla su aprendizaje, Kuzniak (2004) desde el punto de vista de la geometría, y a partir de las habilidades que desarrolla un estudiante, define tres tipos de paradigmas:

La geometría natural (Geometría I), enfocado en lo visual, lo instrumental, lo tangible que puede conocer el alumno. La axiomática natural (Geometría II), enfocado en el uso de distintos elementos y propiedades derivadas de la geometría euclidiana. Y la axiomática formalista (Geometría III), cuyo enfoque es el desarrollo de toda la geometría incluyendo la no euclidiana. Las dos primeras se trabajan durante la época escolar y dado que sus características son muy similares a la de los primeros niveles de Van Hiele (1986), despiertan especial interés para comprender los resultados.

Hasta este punto se comprende lo que es razonar matemáticamente y cómo los paradigmas influyen en el desarrollo de este. Sin embargo, no se deben olvidar las características más particulares de la geometría, como lo son los constantes movimientos entre registros semióticos de distinta naturaleza, o en términos de las habilidades de Bloom (1971) la habilidad de representación. Por ejemplo, los estudiantes deben saber interpretar un elemento matemático en un lenguaje escrito, simbólico o algebraico, obtener información a partir de un gráfico o dibujo, e incluso transformar elementos desde un tipo de representación a otro, pero esto resulta complejo si el alumno no comprende cómo trabajar con las distintas representaciones que un objeto posee, y cómo poder obtener información a partir de estas.

Según Duval (1999) las representaciones semióticas son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, etc.) y son el medio que un individuo utiliza para exteriorizar sus representaciones mentales y volverlas accesibles a otros.

Duval (1999) presenta además dos conceptos importantes: Semiosis o la producción de una representación semiótica y la Noesis o la comprensión y discriminación de las distintas representaciones. La relación entre ellas es muy importante dado que en palabras del propio Duval(1999) “no hay Noesis sin Semiosis”(p.15) es decir, para que un alumno pueda decir que comprendió un tema

o para demostrarlo, si este entiende bien un concepto, debe ser capaz de moverse entre las distintas representaciones que el objeto posee.

El modelo de Van Hiele (1986) clasifica el razonamiento de los estudiantes en cinco niveles, a partir del tipo de respuesta que esta entrega y el cómo logra llegar a ella; y si bien no se basa directamente en lo correcto o lo incorrecto del resultado, sí otorga información para clasificarlo. Es un modelo secuenciado pues, para superar un determinado nivel, es necesario haber superado los niveles anteriores de manera ordenada, y también es local, es decir, puede variar según la unidad matemática que se está estudiando.

Jaime y Gutiérrez (1998), complementan la teoría de Van Hiele (1986) a partir de la distinción de los procesos involucrados en el razonamiento (reconocimiento, definición, clasificación y demostración) los que permiten una forma más sencilla de identificar los niveles de razonamiento y la teoría de los grados de adquisición, que ayuda en el caso de encontrar respuestas con características de dos niveles consecutivos, permitiendo discernir a qué nivel realmente pertenece una respuesta, lo anterior en base al análisis de lo completa o correcta que es la respuesta entregada por el estudiante.

3. Marco metodológico

Esta investigación es un estudio de caso cualitativo de campo, cuya muestra corresponde a 30 alumnos de primer año de enseñanza media (14 a 15 años) de un colegio científico-humanista de alto rendimiento en la provincia de Concepción, región del Biobío, Chile. Para el estudio de este nivel, se cuenta con los resultados Simce de octavo año (2017), que según los estándares de la agencia de calidad de educación en Chile los clasifica dentro de un nivel adecuado⁵ de aprendizaje.

Para comprender mejor la forma de razonar de los estudiantes, el estudio se separó en dos secciones, y por lo tanto utiliza dos tipos de instrumentos. El primero, es un test diagnóstico sobre Geometría que permitió recabar información acerca del nivel de razonamiento que los alumnos habían adquirido hasta la fecha. El segundo, se enfoca en obtener información durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la unidad de Homotecia.

Al inicio de este proceso de investigación, se aplicó un test elaborado por la Magister Estefanía Caamaño Bello, que se basa en los procesos mentales asociados a los razonamientos (Jaime y Gutiérrez, 1998), incluyendo ítems elaborados según los procesos de reconocimiento, definición, clasificación y demostración, considerando los siguientes atributos.

⁵ La Agencia de calidad de la educación en Chile clasifica el rendimiento en tres niveles: Insuficiente, Elemental y Adecuado, siendo este último el más alto.

Ítem	Proceso de razonamiento predominante	Niveles de Van Hiele en que transita.	Habilidad (Programa de matemática en Chile)
1.a	Reconocimiento	Niveles 1 y 2.	- Representar. - Argumentar y comunicar
1.b	Definición	Niveles 1, 2, 3 y 4.	- Representar. - Argumentar y comunicar
2	Definición	Niveles 1, 2, 3 y 4.	- Argumentar y comunicar.
3	Demostración	Niveles 1, 2, 3 y 4.	- Argumentar y comunicar.
4	Clasificación	Niveles 1, 2 y 3.	- Representar - Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.
5.a	Reconocimiento	Niveles 1 y 2.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.
5.b	Demostración	Niveles 1, 2, 3 y 4.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.

Tabla 1. Estructura de los ítems del Test Diagnóstico aplicado para la medición del nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes.

Para mejorar la recopilación durante la aplicación de la unidad de Homotecia, se adaptaron algunas preguntas de las guías a trabajar, evitando influir en el desarrollo normal de la clase planificada. Se obtienen también grabaciones de audio, cuyas transcripciones permiten enriquecer aún más la investigación.

Para revisar el test diagnóstico, a cada respuesta se le asignó un proceso, para ello se utilizó una rúbrica específica para el test, diseñada en base a los procesos de razonamiento mencionados. Para analizar el progreso durante la unidad, se utiliza una pauta general que permite distinguir los niveles de razonamiento geométrico asociados a respuestas en diversos contextos. El estudio de las transcripciones se realiza rescatando indicios de alguna característica asociada a un nivel de razonamiento, esto dado el carácter informal y espontáneo con que se producían los diálogos.

Una vez finalizado el ordenamiento de la información para cada método en que se recopilaban los datos, se indagó de forma transversal entre estos, buscando caracterizar el pensamiento del estudiante.

La siguiente tabla muestra la cantidad de evidencias halladas en las producciones de los estudiantes según la clasificación de niveles de Van Hiele.

Niveles	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	No Observado	Sin Respuesta
Test Diagnostico	112	15	35	11	37
Guía de aprendizaje	25	1	0	25	52
Test de homotecia	50	49	0	38	13
Evaluación	13	6	0	23	2
Registros de Audio	9	2	0	-	-

Tabla 2. Resultados según niveles de Van Hiele.

De un total de 317 evidencias encontradas en las producciones de los estudiantes, se aprecia en la figura 2, que el mayor porcentaje del razonamiento de los estudiantes se clasifica dentro del primer nivel de Van Hiele.



Figura 2. Gráfico de resultados por nivel de Van Hiele.

4. Análisis de resultados.

El análisis de resultados se desglosa en el siguiente esquema, que ordena los procesos de cada nivel según su predominancia, siendo los colores más oscuros, los que tuvieron mayor presencia en las producciones de los estudiantes.

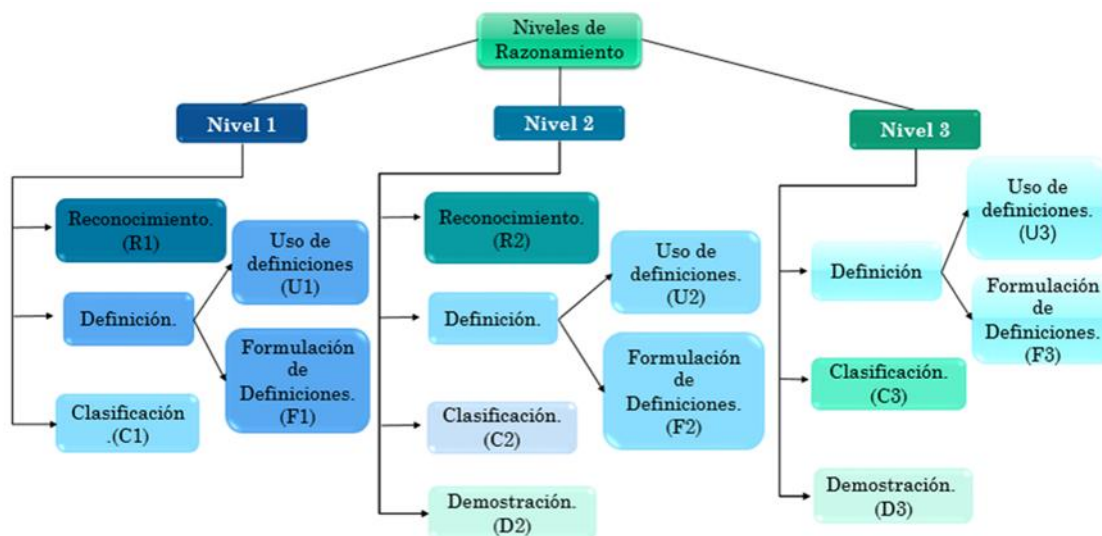


Figura 3. Procesos de cada nivel según predominancia.

Sin ignorar que cada nivel incluye al anterior, a continuación, se describen las características destacadas de cada nivel identificado, desglosado según los procesos establecidos por Jaime y Gutiérrez (1998) para evaluar los resultados según la escala de Van Hiele.

Nivel 1

Reconocimiento (R1)

1. Identifican características o componentes de una figura guiándose estrictamente de lo que observan.

2. Aún si emplean un lenguaje matemático, este suele no ser apropiado y tiene un significado visual.
3. Utilizan propiedades imprecisas de las figuras, entendiendo una propiedad imprecisa como una propiedad mal empleada.
4. Al aprender una técnica para resolver un ejercicio o problema no son capaces de aplicarlo a un contexto distinto.

Uso de definiciones (U1):

1. Los estudiantes de primer nivel no comprenden las definiciones.

Formulación de definiciones (F1):

1. No comprenden la estructura de una definición, en el mejor de los casos enlistan características físicas.

Clasificación (C1):

1. Clasifican figuras en base a su apariencia global.
2. No comprenden las definiciones de las figuras por tanto no clasifican de acuerdo a ellas.
3. No generalizan las características que identifican en una figura a otras de su misma clase.

Demostración (D1):

1. No saben demostrar, no siguen instrucciones ni un procedimiento lógico al probar algo. Por esta razón es que este proceso no se contempla en este nivel.

Nivel 2

Reconocimiento (R2):

1. Saben que las figuras geométricas poseen propiedades y las reconocen como características de ella.
2. Utilizan un vocabulario apropiado para describir los componentes de las propiedades.

Desde este nivel en adelante, según los autores Jaime y Gutiérrez (1998) este proceso presenta iguales características, lo que no quiere decir que los estudiantes que han alcanzado un nivel superior de razonamiento tengan ausencia de este proceso, por el contrario, existe, pero no se distingue del nivel dos.

Uso de definiciones (U2):

1. Rechazan o ignoran las definiciones que contradicen la que ellos tienen adquirida.

Formulación de definiciones (F2):

1. Aun no dominan la estructura lógica que lleva una definición, por lo que enlistan o enumeran propiedades y características que suelen ser insuficientes o innecesarias para identificar una figura.

Clasificación (C2):

1. Clasifican en base a las definiciones que ellos previamente tienen adquiridas, las que suelen ser exclusivas, por lo que no admiten inclusión de familias de figuras.

Demostración (D2):

1. Muestran ausencia de comprensión de una demostración.
2. Al comprobar la validez de una afirmación experimentan sin utilizar los ejemplos suficientes, finalmente suelen generalizar.
3. No manejan una estructura lógica en su procedimiento.

Nivel 3

Uso de definiciones (U3)

1. Comprenden, y son capaces de utilizar definiciones exclusivas e inclusivas.
2. Identifican definiciones distintas de un mismo concepto.

Formulación de definiciones (F3):

1. Son capaces de elaborar una definición siguiendo una estructura lógica.
2. Intentan no ser redundantes, al utilizar solo las propiedades y características suficientes para reconocer a la figura u objeto matemático.

Clasificación (C3):

1. Al comprender definiciones, son capaces de clasificar figuras respecto a ellas. Reconocen que existen familias de figuras que comparten características.

Este proceso no permite distinguir el cuarto nivel, pues es el tercero, donde han alcanzado el máximo logro de este proceso.

Demostración (D3):

1. A la hora de probar una situación son capaces de seguir una secuencia de deducciones lógicas que es respaldada por sus procedimientos.
2. Son capaces de dar razones informales para probar la veracidad de una propiedad, siendo los casos específicos solo una ayuda y no la demostración misma.

Ejemplos destacados

R1. La imagen siguiente muestra un ejemplo de respuesta a un ejercicio en donde se debe construir una homotecia, cuyo centro es un punto P distinto del origen.

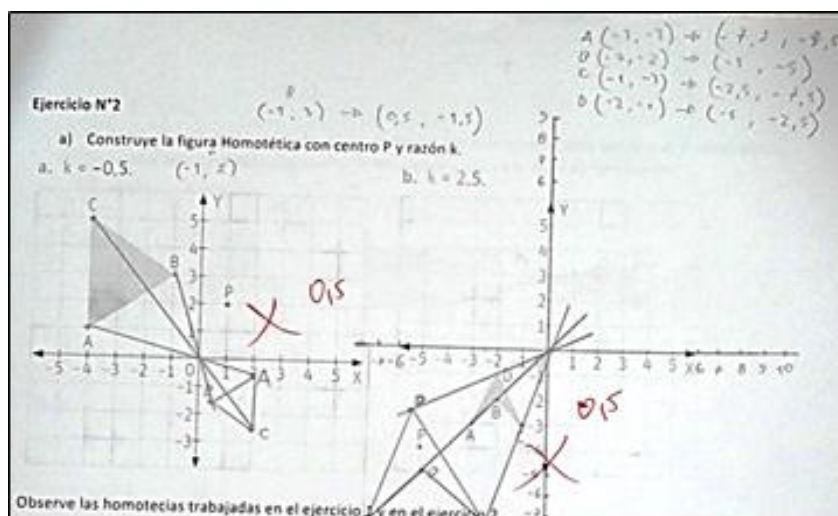


Imagen 1. Construcción de Homotecia con centro P.

Como se puede apreciar, los estudiantes replicaron el procedimiento que se realiza al construir una homotecia con centro en el origen, ignorando el punto P, siendo esto una muestra de cómo no son capaces de llevar un “método” de construcción a un contexto distinto.

<p>Observe las homotecias trabajadas en el ejercicio 2 en el ejercicio 2</p> <p>a) ¿Qué diferencias y/o similitudes se encontraron en dichos ejercicios? <i>5 similitudes que ninguna de las sea 2 para por el punto P. y que ambas cambian de tamaño.</i></p> <p>b) ¿Cómo afecta la ubicación del centro de homotecia al procedimiento que se debe realizar? Argumente su respuesta. <i>Afecta que no sirve otro punto de centro que no sea el punto cero, porque todos los vectores pasan por el punto cero.</i></p>	<p>a) “Similitudes que ninguna de las dos pasa por el punto P y que ambas cambian de tamaño”</p> <p>b) “Afecta que no sirve otro punto de centro que no sea el punto cero, porque todos los vectores pasan por el punto cero”</p>
--	---

Imagen 2. Conclusiones construcción de Homotecia con centro P.

R1. Estas respuestas nos dejan claro que su razonamiento corresponde a un primer nivel, puesto que la identificación de características que realizan, son solo respecto a una construcción errónea de homotecia (Imagen 1).

R2. Una de las preguntas del test diagnóstico solicita a los estudiantes que caractericen una figura (cuadrado) y posterior a ello determinen el nombre que llevaría. Un estudiante respondió lo siguiente:

<p>a) Haz un listado de las características de la figura y asóciate uno o más nombres.</p> <p><i>2 pares lados paralelos</i> <i>4 ángulos de 90° exactos</i> <i>4 vértices</i> <i>4 lados de la misma medida.</i> La figura es un(a): <i>Cuadrado</i></p>	<p><i>2 pares de lados paralelos</i></p> <p><i>4 ángulos de 90° o rectos</i></p> <p><i>4 vértices</i></p>
---	---

Imagen 3. Test Diagnóstico, ítem 1

La mención de ‘2 pares de lados paralelos’ que hace referencia a una propiedad, es la única característica de las mencionadas que determina que esta respuesta se encuentre en nivel dos, pues reconoce las propiedades como características de una

figura, sin embargo, no deja de lado otras características de origen visual. En definitiva, sin aquella mención al paralelismo de lados, esta respuesta, habría correspondido al primer nivel.

R2 (D3). En una de las preguntas del Test Diagnostico se solicita identificar los errores de la figura 4.

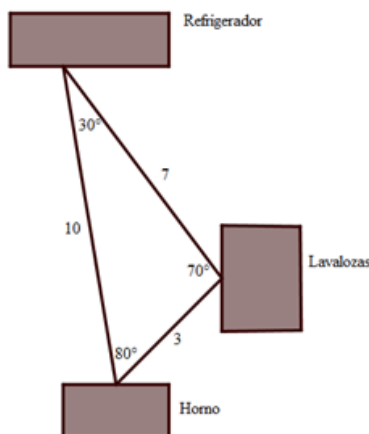


Figura 4. Triángulo de cocina.

A lo que un estudiante responde lo siguiente:

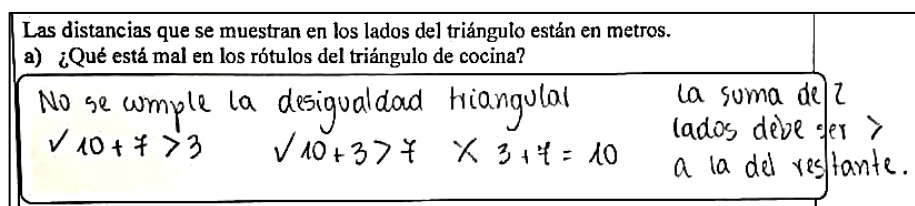


Imagen 4. Respuesta Test Diagnóstico, ítem 5.

Según el proceso predominante en las respuestas esperadas a esta pregunta (reconocimiento) esta respuesta se considera de nivel dos, pues se menciona la propiedad que falla debido a los rótulos (desigualdad triangular). Pero si evaluamos únicamente respecto al proceso de reconocimiento, ignoramos la posibilidad de que su razonamiento sea superior en otro proceso implicado, de hecho, en esta respuesta también está presente el proceso de demostración, pues además de mencionar y describir la propiedad, el estudiante mostró, cómo es que no se cumple la propiedad mencionada, llegando a un nivel tres (D3) pues su procedimiento muestra una deducción lógica y correcta.

5. Discusión

5.1. Analogía con otras teorías

Se identifica que hay diferencias entre el paradigma observado en la estructura de las clases realizadas por la profesora y el que adoptan los estudiantes; quienes lejos de utilizar razonamientos basados en axiomas o lógica deductiva, se preocupaban más de las medidas inexactas que presentaban algunas figuras, a causa de eso, algunos mencionaban que “el ejercicio estaba errado”.

Es interesante esta observación dado que la Geometría I, tiene características asociables al nivel 1 de Van Hiele, que recordemos, se basa en la observación, manejo tangible del objeto de trabajo e instrumentos que apoyan el desarrollo de las actividades, como regla o compás.

Desde el ámbito de las representaciones semióticas se pudieron notar dos tipos interesantes de respuestas. La primera es la que presenta dificultad para poder reproducir algún tipo de representación gráfica o geométrica y la segunda, corresponde a la existencia de diversas representaciones bien elaboradas, o a veces incompletas, que no tienen ningún razonamiento explicitado o no dan respuestas a las preguntas. Esta podría ser otra de las causas por la que los alumnos no alcanzan un razonamiento geométrico de mayor nivel, ya que en palabras de Duval (1999) “*No hay noesis sin semiosis*” (p.15).

Otro punto a destacar, es que los alumnos intentaron reproducir métodos. Esto se refleja en múltiples casos y puede ser una de las causantes que limiten su razonamiento y se adhieran a un trabajo mecánico (Imagen 1 y 2).

5.2. Resultados y sesgos en otros estudios.

Sarrín (2019) estudia en una escuela pública de Perú las rotaciones de figuras según el modelo de Van Hiele, obteniendo resultados de nivel 2 en transición al nivel 3, Fuentes, Wilches y Robles (2015) trabajan en una escuela rural de Colombia aplicando las fases de Van Hiele para revisar procesos geométricos, obteniendo un desarrollo hacia el nivel 2 y 3 con algunas respuestas de nivel 4 que no estaban presentes al inicio. Otras muestras de diagnósticos o análisis se pueden ver con Rivera y Ordaya (2018) en un documento que incluye un cuadro comparativo entre el test diagnóstico y la aplicación de fases en un estudio con un método cuantitativo obteniendo inicialmente estudiantes de secundaria en nivel 2 y posteriormente pasando a promediar sobre el nivel 3.

Este tipo de resultados son los más recurrentes en secundaria y primaria, sin embargo, se sustentan en establecimientos públicos, rurales o de bajo rendimiento. Y por tanto si bien permiten tener una idea generalizada de distintos países con respecto a la situación puntual y a la efectividad de los procesos de enseñanza sugeridos por Van Hiele, se identifica una clara inclinación a la investigación en sectores de riesgo y no al análisis en los sectores supuestamente destacados en educación.

5.3. Comparación de lo esperado para el curso y sus resultados

Los resultados que se obtuvieron de los alumnos respecto, lo que se espera por el ministerio de educación de Chile son los siguientes:

Indicadores de evaluación	Habilidades y procesos	Nivel esperado	Nivel alcanzado
•Reconocen las propiedades de la homotecia, como paralelismo, conservación del	Reconocimiento	2	2

ángulo y conservación de razones.			
•Conjeturan sobre el factor de la homotecia	Argumentación. Reconocimiento. Formulación de definiciones.	3	2
•Realizan homotecias mediante el centro y el factor dado.	Representar Uso de definiciones.	3	1 y 2
•Aplican la homotecia en modelos ópticos, como la "cámara oscura", el ojo humano y fenómenos de la Tierra y el universo.	Resolución de problemas Representación Argumentación Modelación Reconocimiento	3	2

Tabla 3. Relación Nivel esperado-Nivel alcanzado según indicadores para el contenido de Homotecia en el Curriculum Chileno.

Como se puede apreciar, en general el tipo de razonamiento que se espera alcanzar es de nivel 3, puede ser superior, pero se considera 4 como un nivel sobresaliente. Con respecto a estos indicadores se puede ver que los alumnos se encuentran desarrollando el pensamiento de nivel 2, es decir son capaces de contestar de forma incompleta o no bien estructurada respecto a las preguntas solicitadas. Este razonamiento tiene como consecuencia el no lograr utilizar bien las definiciones salvo que el alumno entienda claramente cada elemento de esta.

6. Conclusiones

Buscando cumplir con los objetivos de la investigación se han podido obtener las siguientes conclusiones:

1. Se puede apreciar que más de la mitad de los estudiantes, en la unidad de Homotecia, razonan según las características del primer nivel del modelo de Van Hiele, lo que se ve reflejado tanto en el test diagnóstico aplicado como en el transcurso de la unidad observada. Los alumnos que superaron este nivel se encuentran en un proceso de adquisición del nivel dos de Van Hiele, siendo el nivel tres un razonamiento logrado sólo en casos específicos durante el proceso.
2. Los alumnos evidenciaron la necesidad de medir y de contar con medidas exactas de las figuras propuestas, situación que demuestra el apego instrumental y físico que caracteriza a los razonamientos de bajo nivel.
3. Los alumnos no han superado los estándares del Ministerio, en primer lugar, se observó que los estudiantes no logran cumplir con todos los indicadores asociados a los objetivos de la unidad de homotecia, aquellos que cumplen con lo esperado deberían razonar según las características de un nivel 3 o superior, pero como ya se mencionó los alumnos aún se encuentran desarrollando el segundo nivel. Aún más, al revisar las habilidades

involucradas en este trayecto es posible notar que los alumnos solo consiguen un desarrollo parcial en estas, ya que no lograron ni comprender ni aplicar el concepto de homotecia en su totalidad, ni tampoco lograron cumplir con una argumentación matemática adecuada.

4. Los resultados no difieren de los que comúnmente se obtienen en la educación pública de Latinoamérica, los que usualmente se clasifican en nivel 2 y que alcanzan el nivel 3 tras procesos guiados, sin embargo, la carencia de estudios empíricos realizados en establecimientos privados y/o de alto rendimiento deja un vacío teórico respecto a la importancia de alcanzar o no un determinado nivel de razonamiento. Se pudo confirmar en este caso particular que no es necesario alcanzar altos niveles para destacar en las pruebas estandarizadas de Chile, y por ende sería conveniente expandir el espectro de investigación, pues quizá lo considerado eficiente no responde a las estructuras mentales esperadas.

Estas últimas conclusiones llevan directamente a plantear una serie de interrogantes: ¿Cómo es posible que estudiantes que obtienen resultados sobresalientes en las pruebas estandarizadas, no puedan razonar adecuadamente en geometría? ¿Por qué es posible conseguir buenos resultados sin lograr un desarrollo correcto de las habilidades? ¿Puede ser que la estructura de dichos instrumentos permita prescindir de estas capacidades? ¿Ocurre la misma situación en los establecimientos de alto rendimiento en otros países? Podría ser interesante realizar un análisis que permita identificar por qué fue posible esta situación.

Bibliografía

- Beltrametti, M., Esquivel, M. y Ferrarri, E. (2005). Evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes de profesorado en Matemática
- Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17 n° 1, pp. 31-48.
- Bloom, B. (1971), et al. Taxonomía de los objetivos de la educación: la clasificación de las metas educacionales: manuales I y II. Traducción de Marcelo Pérez Rivas; prólogo del Profesor Antonio F. Saloniá. Buenos Aires: Centro Regional de Ayuda Técnica: Agencia para el Desarrollo Internacional (A.I.D).
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (eds.). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*. An International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study [Chapter 2.2]. The Netherlands: Dordrecht, Kluwer, pp. 37-52.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis Issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (eds.). *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*. Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University, pp. 3-26.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

- Fuentes Hernández, N. M., Portillo Wilches, J. C., & Robles, J. R. (2015). Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele y su relación con los estilos de aprendizaje. *Panorama*, 9(16), 44–54.
- Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), pp. 237-251.
- Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics. Special Issue Elements of Geometry in the Learning of Mathematics* 20(2-3), 27-46
- Isoda M. y Katagari S. (2017). *Pensamiento matemático: cómo desarrollarlo en la sala de clases*. Singapore. World Scientific Publishing. coord. de Roberto Araya; traducción de Alexis Jéldrez. LB 1501 I83P.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento (Tesis Doctoral)*. Universidad de Valencia, España.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Linares; M. Sánchez, (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática. Colección Ciencias de la Educación*, 4, 295-384. Sevilla, España: Alfar.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels [Un modelo para evaluar los niveles de Van Hiele]. En J. da Ponte & J. Matos (Eds.), *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME-18th) [Actas de la Conferencia Internacional para la Psicología de la Educación Matemática (PME-18th)]*, 41- 48. Lisboa, Portugal.
- Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques. Note pour l'habilitation à diriger des recherches*. Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Université de Paris VII – Diderot.
- Kuzniak, A (2006) *Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie*, *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 6:2, 167-187, DOI:
- Palomino Rivera, A. A. ., & Berrocal Ordaya, C. . (2018). El Modelo de Van Hiele en aprendizaje de geometría en estudiantes de los PAGPA, 2017. *Investigación*, 26(2), 19 -.
- Sarrín Suárez, M. M. (2019). Rotaciones y niveles de razonamiento, según el modelo de Van Hiele: resultados de una experiencia. *Educación*, 28(54), 127-158.
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. London: Accademic Press.
- Van Hiele-Geldof (1957): *De didaktik van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.* (Tesis doctoral no publicada, Univ. of Utrecht).
- Vygotsky, L.M; Cole, M. (1979) *Mind in society: The development of Higher Psychological proceses*.
- Wood, D., Bruner, J. S. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17, 89-100.

Autores:

Fabián Quiroga Merino: Magister en Educación, Departamento de Curriculum e Instrucción, Facultad de Educación, Universidad de Concepción. fquiroga@udec.cl

Claudio Armando Méndez Arriagada: Profesor de Matemática y Computación (Colegio Adventista de concepción, nivel medio), egresado de la Universidad de Concepción (2019), Sede Concepción, curso en innovación en la enseñanza de las Probabilidades. clmendez@udec.cl

Juan Eduardo González Canales: Profesor de Matemática y Computación (Colegio del Sagrado Corazón), egresado de la Universidad de Concepción (2019), Sede Concepción, con cursos de perfeccionamiento en Neurociencia aplicada a la Educación, Modelamiento, Lenguaje Digital e innovación en la enseñanza de las Probabilidades. juangonzalez.ed@gmail.com

Paulina Elizabeth Serrano Salas: Profesora de Matemática y Computación (Liceo Industrial de la Construcción HVL), Egresada de la Universidad de Concepción (2019) sede Concepción. pauliserranosalas@gmail.com