REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

ISSN: 1815-0640
Año XVII- Número 61- Abril 2021
Páginas 01-17

Superficies de revolución con GeoGebra

Bernat Ancochea Millet, José Manuel Arranz San José, José Muñoz Santonja

Fecha de recepción: 24/09/2020
Fecha de aceptación: 11/01/2021

Resumen	En este artículo se presenta una propuesta sobre cómo trabajar en el aula superficies de revolución. Utilizando los conocimientos de geometría y análisis, el alumnado podrá probar variaciones para trabajar con las superficies habituales en la enseñanza no universitaria y otras que se pueden encontrar en el entorno cotidiano. Para ello, explicaremos cómo utilizar el software de matemáticas GeoGebra, un programa de geometría dinámica que, con unas órdenes básicas, permite un amplio abanico de resultados fáciles de conseguir por el alumnado de primaria y secundaria, y que resultan muy atractivos. **Palabras claves**: Superficies de revolución, GeoGebra.
Abstract	In this article we present proposals about how to work in the classroom surfaces of revolution. Using the previous knowledge on Geometry and analysis, the students will be able to prove variations to work with the usual surfaces found in the non-universitary teaching, and others that can be found in daily life. For this, we will explain how to use the mathematical software Geogebra, a dynamic geometric programme that permits huge results easy to get by primary students using basic commands. These are very interesting and attractive. **Keywords:** Surfaces of revolution, GeoGebra.
Resumo	Este artigo apresenta uma proposta de como trabalhar superfícies de revolução em sala de aula. Usando o conhecimento de geometria e análise, os alunos poderão experimentar variações para trabalhar com as superfícies usuais no ensino não universitário e outras que podem ser encontradas no ambiente cotidiano. Para isso, vamos explicar como usar o software de matemática GeoGebra, um programa de geometria dinâmica que, com alguns comandos básicos, permite uma ampla gama de resultados fáceis de alcançar por alunos do ensino fundamental e médio, e que são muito atraentes. **Palavras-chave:** Superfícies de revolução, GeoGebra.

1. Matemáticas a nuestro alrededor

Aunque hay una parte de la sociedad que piensa, fundamentalmente por desconocimiento, que las matemáticas tienen poca utilidad, es innegable que vivimos en una sociedad difícilmente imaginable sin el soporte matemático. Incluso esas personas que suelen abominar de las matemáticas, no se ven libres de tener que utilizarlas continuamente, ya que están subordinados a todo tipo de medidas, de tiempo, de espacio, etc… Pero además todos utilizamos el azar de forma intuitiva para escoger, entre varias opciones, la que pensamos que es más probable, baste pensar en la elección de la hora de salida de un viaje en épocas en que hay muchos desplazamientos. Cada vez es más corriente que obtengamos de los medios de comunicación información en forma gráfica, y también en nuestra vida cotidiana y laboral, es usual hacer tablas o gráficas para recoger y mostrar los datos que manejamos.

Y, por supuesto, vivimos rodeados de geometría. No sólo la arquitectura, sino que las esculturas que pueblan nuestras rotondas son en muchas ocasiones meras expresiones geométricas, bien por cuerpos geométricos o superficies de todo tipo, que incluso superan a los conocimientos que se estudian en la enseñanza no universitaria.

Por referirnos a aquellos elementos que aprendemos a manejar todos en edades tempranas, en nuestra propia casa podemos encontrar los cuerpos geométricos que hemos conocido y manejado como el cilindro, la esfera o el cono.

Imagen 1: Cuerpos de revolución en nuestra casa.

Esos elementos geométricos son llamados cuerpos de revolución, pues se originan al girar ciertos elementos como veremos más adelante. Pero también convivimos a diario con otros cuerpos de revolución, que no estudiamos en la escuela y que sin embargo están ahí.

Imagen 2: Otras superficies de revolución.

En los estudios no universitarios se suelen reducir las superficies de revolución a las correspondientes a esos cuerpos de los que hablamos antes, y casi todo se reduce a reconocer las figuras y a aprenderse de memoria las fórmulas que nos dan superficies y volúmenes y poco más. Quizás porque ampliar a otras superficies pueda resultar complicado para el nivel educativo en el que nos movemos. Sin embargo, gracias a programas de geometría dinámica como GeoGebra, el alumnado puede reconocer e investigar otras superficies más complicadas de una forma muy simple. Así se pueden estudiar y construir superficies localizables en las bellas artes, con solo conocer unas pocas órdenes y tener una mínima vena creativa.

La idea de estas páginas es mostrar la facilidad con que pueden investigarse superficies muy atractivas y originales.

El objetivo de estas páginas es mostrar cómo es posible trabajar, de una manera fácil y rápida, superficies muy diferentes en la enseñanza no universitaria, promoviendo en todo caso la exploración por parte del alumnado y la búsqueda de variaciones que puedan resultar atractivas, para lo cual tienen que poner en acción los conocimientos que tienen sobre geometría y funciones.

2. Superficies de revolución con GeoGebra.

En matemáticas llamamos superficie de revolución a la superficie que se genera por la rotación de una curva plana, llamada generatriz, alrededor de un eje de rotación llamado recta directriz.

GeoGebra es un programa de geometría dinámica que se basa en la filosofía Creative Commons de forma que cualquier persona puede utilizarlo libremente e incluso participar en su desarrollo. Este programa está en constante evolución y en el año 2014 se presentó la versión 5 que poseía una ventana para construir gráficamente en tres dimensiones. Los que estuvimos trabajando con la versión beta anterior ya descubrimos sus muchas posibilidades en la enseñanza, no sólo para el trabajo con la geometría analítica de bachillerato, sino también para el trabajo con los cuerpos geométricos en curso inferiores, viendo las posibilidades de trocear poliedros o estudiar sus desarrollos planos. Pero en este caso nos vamos a centrar en el estudio de algunas superficies.

En GeoGebra es muy fácil trabajar en la ventana 3D superficies de revolución. Basta utilizar la versátil orden:

Superficie(<Curva>, <Ángulo>, <Recta>)

Donde <*Curva*> es el objeto que va a rotar, <*Ángulo*> es el valor del ángulo que queremos rotar el objeto, suele ser un valor entre 0º y 360º, aunque también puede darse en radianes, si es menor de 360º no se cerrará la superficie y si es mayor de 360º habrá partes que se dibujen más de una vez. Por último, el parámetro <*Recta*> es la recta directriz. Si no se coloca este último parámetro, GeoGebra entiende que la recta directriz es el eje X.

Veremos ahora que el elemento que se puede girar tiene una variedad tal de posibilidades, que hace que se puedan obtener multitud de resultados diferentes, algunos muy llamativos.

2.1. Cuerpos clásicos de revolución

Desde las primeras versiones de GeoGebra 5 existen comandos que nos permitían obtener los cuerpos geométricos más generales. Así, con sólo indicar dos puntos y el radio podemos dibujar un cilindro. Además, GeoGebra nos da el volumen del cilindro y su superficie lateral. Más exactamente, el programa dibuja la superficie lateral y las dos bases, indicando en el caso de los dos círculos bases, sus ecuaciones. Pero utilizando la orden superficie podemos recalcar que esa figura se obtiene rotando un segmento alrededor de un eje.

Para construir el cilindro bastaría representar en la vista 2D un segmento, por ejemplo, el que va de los puntos (2, -3) al (2, 3). Supongamos que GeoGebra lo nombre como f, bastaría incluir en la casilla de entrada la orden

Superficie(f, 360º, EjeY)

para obtener directamente el cilindro.

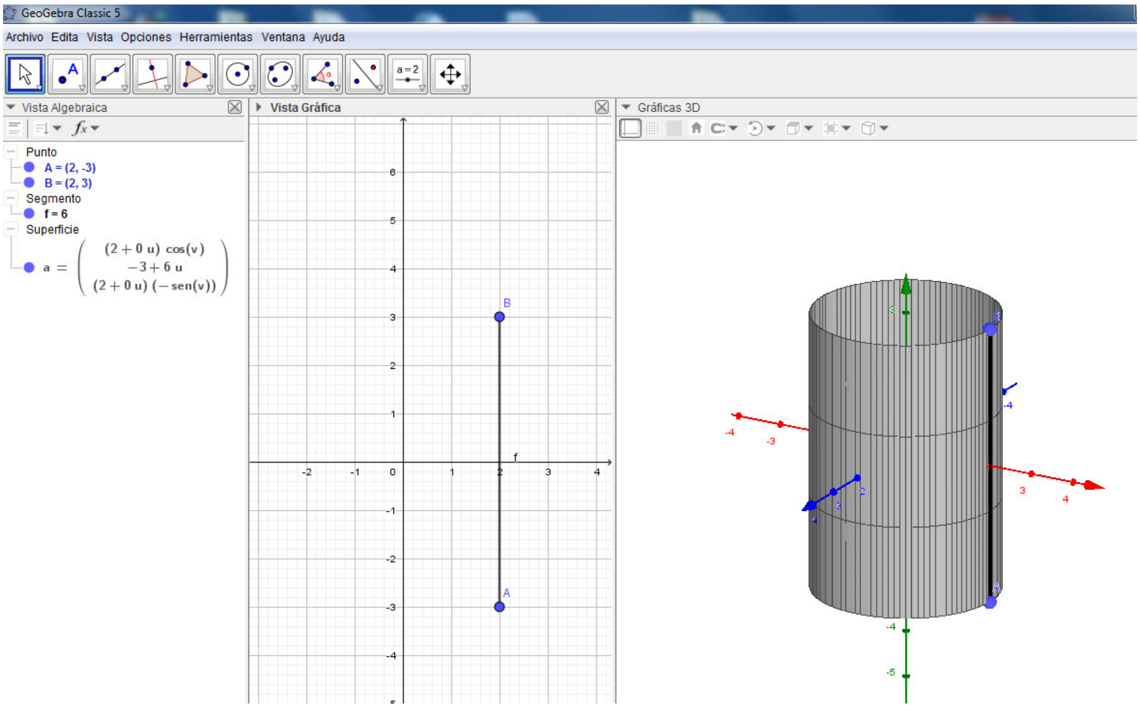

Imagen 3: Superficie lateral del cilindro.

Como observamos en la imagen, aparte de dibujarlo, el programa nos da la ecuación paramétrica de esa superficie. Para que se vea vertical el cilindro podemos, en las propiedades de la ventana 3D seleccionar la opción de eje-y-vertical.

Por supuesto, obtenemos solamente la superficie lateral del cilindro, que es la que se genera cuando el segmento gira alrededor del eje. Podemos obtener el cilindro completo si en lugar de girar el segmento giramos un rectángulo, aunque GeoGebra puede crear tiras grises, en la ventana 3D, en según qué condiciones.

Además, podemos visualizar cómo se va generando el cilindro utilizando un deslizador. Basta crear un deslizador de tipo angular entre 0º y 360º. Después se dibuja un polígono de vértices (2, -3), (2, 3), (0, 3), (0, -3), supongamos que se le ha dado el nombre c1. Basta introducir la orden

Superficie(c1, <Ángulo>, EjeY)

y moviendo el deslizador veremos cómo se va generando el cilindro completo, aunque sólo las superficies que lo forman.

Hay otra forma de generarlo pero lo veremos más adelante.

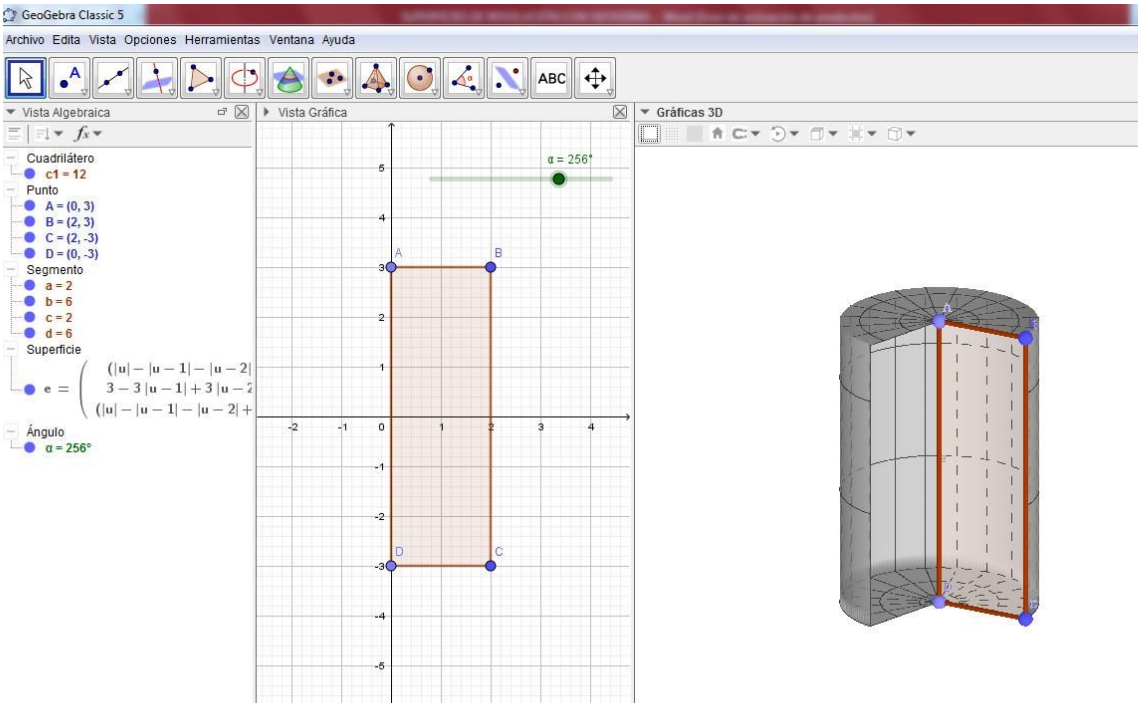

Imagen 4: Generación del cilindro.

Se puede consultar la *construcción en: https://www.geogebra.org/m/fscusfdp*

De forma análoga a como hemos visto con el cilindro, podemos hacerlo con el cono, sin más que colocar una línea oblicua al eje de rotación o la esfera dibujando una semicircunferencia. La ventaja de utilizar como antes un deslizador, es que podemos dibujar elementos que actualmente (al menos a la hora de escribir estas líneas) no se pueden obtener directamente como una semiesfera o un huso esférico, como vemos en la siguiente imagen.

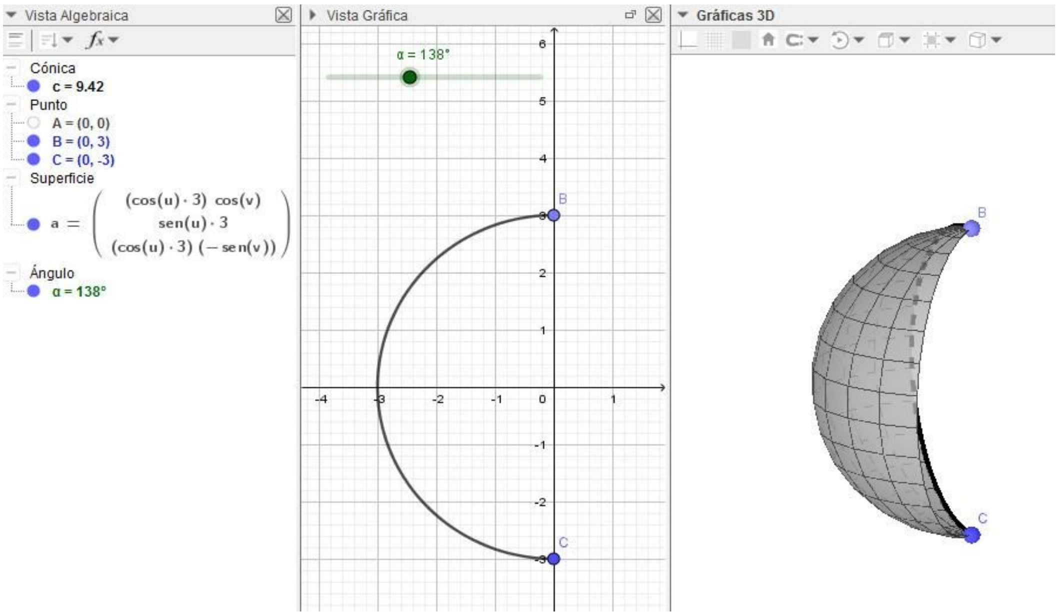

Imagen 5: Huso esférico.

Trabajar con la orden superficie permite construir figuras que no tienen una orden directa como con el cono o la esfera. Creamos un deslizador a desde 0 hasta 2 y creamos el segmento f que une los puntos (a, 3 – 3a/2) y (2,0). Con la orden Superficie(f, 360º, EjeY) obtenemos un cono y si movemos el deslizador obtenemos la superficie correspondiente a un tronco de cono.

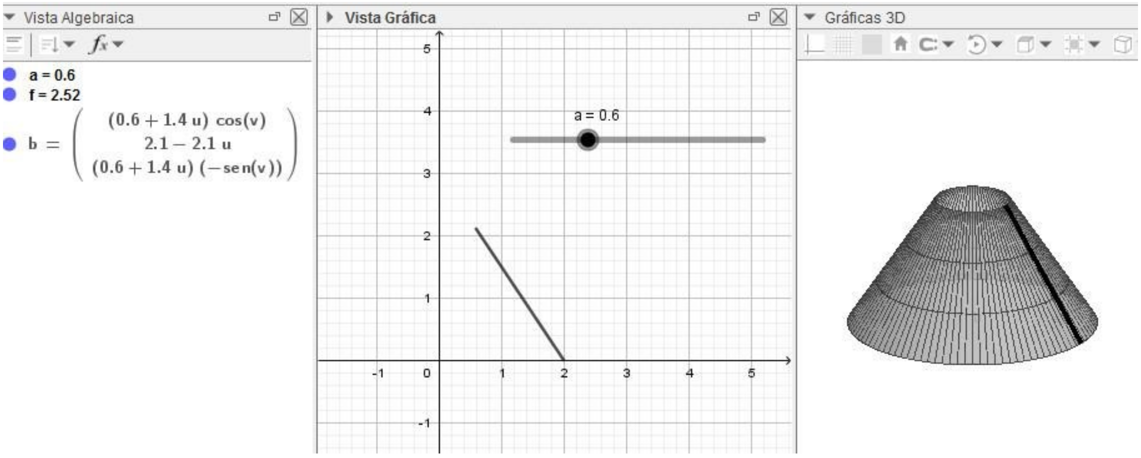

Imagen 6: Tronco de cono.

Puedes ver una construcción del tronco de cono en la dirección: https://www.geogebra.org/m/bbjh8qyv

Pero como dijimos al principio. Esta poderosa herramienta permite no solamente recrear los cuerpos geométricos que se suelen ver en secundaria, sino que podemos jugar con otras superficies más nuevas para los alumnos de una forma muy simple. Así, basta dibujar un triángulo isósceles y hacerlo girar alrededor de su lado desigual para obtener una boya o una circunferencia no centrada en el origen para que al girar podamos obtener una rosquilla (léase toro).

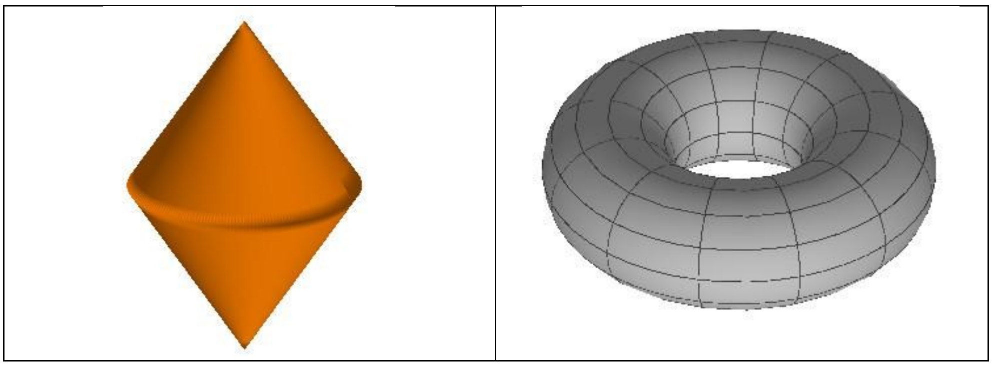

Imagen 7: boya y toro

Una vez que los alumnos han comprobado lo fácil que es cambiar las condiciones para obtener figuras nuevas, se les debe animar a que investiguen otras posibilidades. Siempre hay alguno a quien se le ocurre alguna variedad y en caso contrario debe ser el profesor el que les plantee retos para que sean ellos los que descubran qué pasa en esas situaciones. En estos casos se debe pedir al alumnado que, antes de trabajar con el programa hagan un pronóstico sobre qué puede ocurrir.

Veamos un ejemplo. Se les puede plantear qué le ocurre a una figura, por ejemplo un cono generado al girar una línea oblicua alrededor de un eje, cuando ese eje se traslada de forma paralela a su posición inicial.

Para ello basta dibujar un segmento, por ejemplo, de extremos (0, 2) y (3, 0), crear un deslizador a desde 0 hasta 3 y hallar la *Superficie(f, 360º, x=a)*, siendo f el segmento. Moviendo el deslizador podemos ver cómo le afecta al cono inicial que termina invertido.

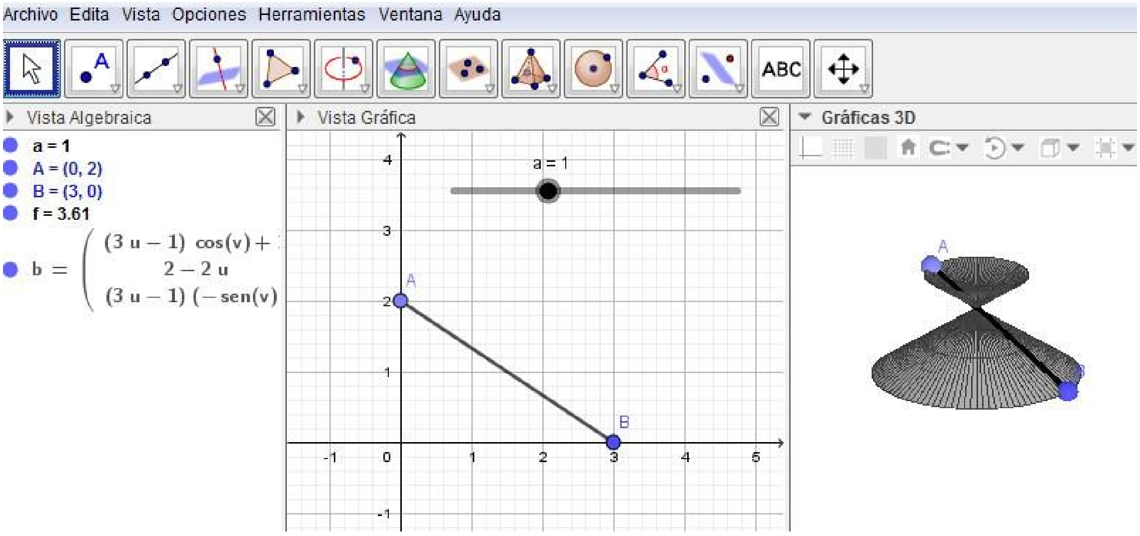

Imagen 8: traslación del eje

Ver la construcción en: https://www.geogebra.org/m/nhsgpdcf

Para acabar con este epígrafe en el que hemos visto posibilidades de figuras al girar elementos geométricos como segmento, polígonos o circunferencias, vamos a citar un nuevo ejemplo trabajando directamente sobre la ventana 3D. Aunque inicialmente se necesitaba que los elementos a girar estuviesen en el mismo plano que el eje de rotación, esa restricción se puede actualmente saltar. Para ello, creamos en la ventana 2D un deslizador a entre 0 y 3, directamente en la ventana 3D dibujamos el segmento que une los puntos (2, a, 3) y (2, – a, –3). Creamos la superficie con la orden

Superficie(f, 360º, EjeZ)

Basta mover el deslizador, para que obtengamos una superficie reglada, en este caso un hiperboloide.

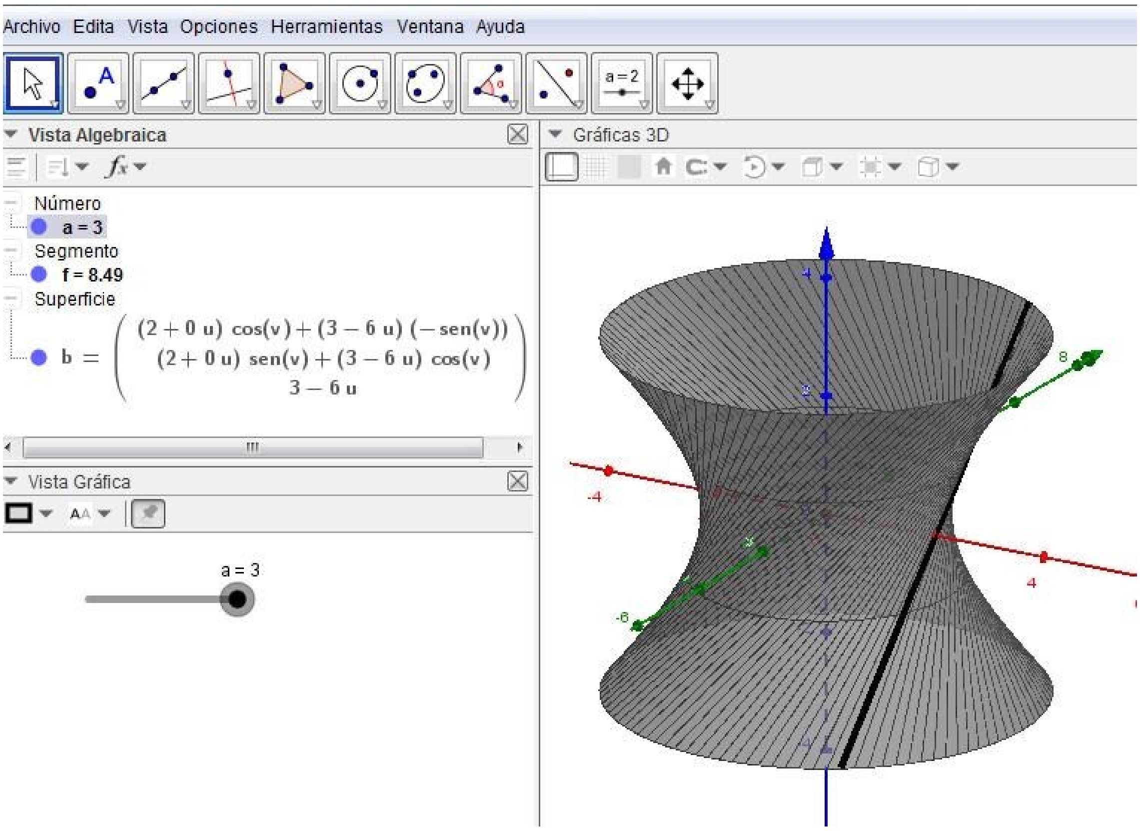

Imagen 9: Hiperboloide de una hoja.

Si cambiamos la segunda componente del segundo punto, sustituyendo el valor –a directamente por 0 obtenemos un hiperboloide asimétrico que nos da la imagen de muchas papeleras de oficina.

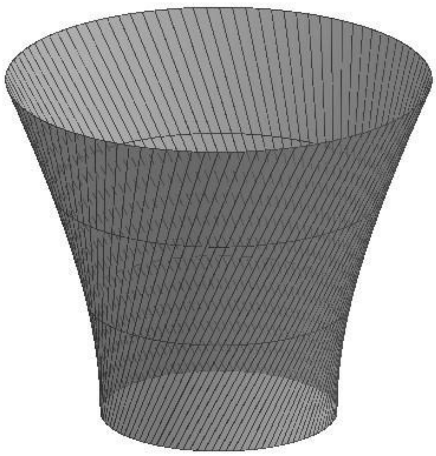

Imagen 10: Hiperboloide asimétrico.

Los dos ejemplos anteriores puedes consultarlos en la dirección: https://www.geogebra.org/m/rhvtcdgt

2.2. Superficies a partir de funciones.

Utilizando la orden básica que hemos visto, se puede conseguir superficies de revolución a partir de funciones. Para ello basta definir una función y hallar la superficie. Para que no se nos llene la pantalla y podamos ver bien la superficie conseguida, suele ser interesante acotar la función. Veamos un ejemplo.

Definimos la función *f=Función(x^2,0,2)* y, a partir de ella, podemos conseguir dos superficies distintas según giremos alrededor del eje X o del eje Y.

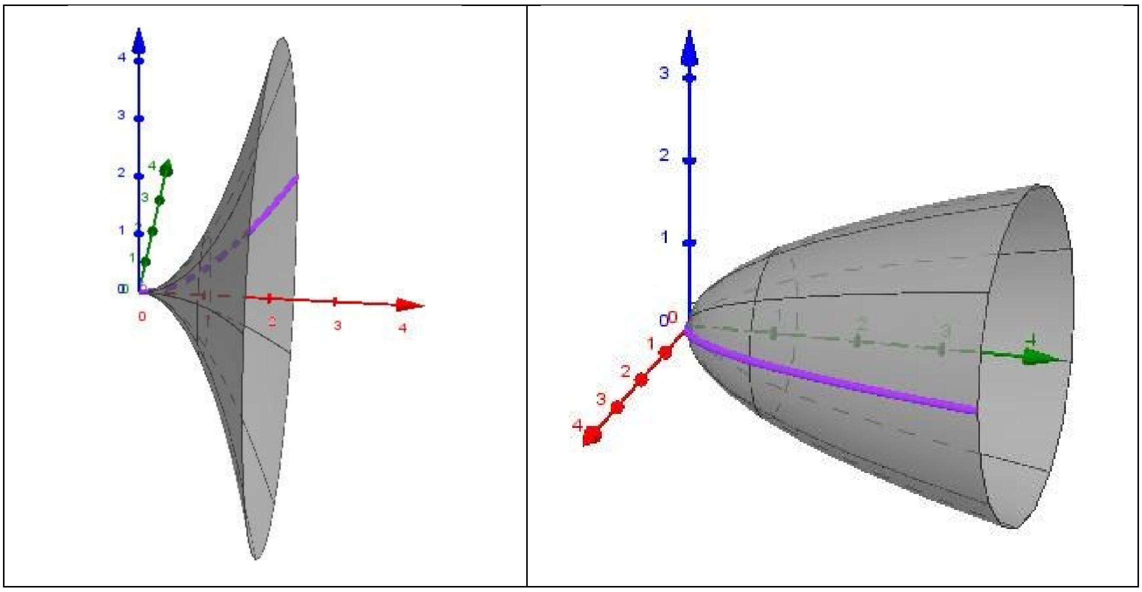

Imagen 11: Superficies de revolución de x^2 alrededor de los ejes X e Y.

Se puede consultar la actividad en la siguiente dirección: https://www.geogebra.org/m/szfwc2df

Una cuestión que se puede plantear es qué ocurre si giramos la función x^2 que hemos definido directamente respecto al eje Z. Salen respuestas muy curiosas pero lo cierto es que dado que la función está en el plano XY, lo que obtenemos es un círculo plano.

Si quisiéramos obtener la superficie de revolución respecto al eje Z debemos modificar un poco la orden y utilizar la expresión:

Superficie(u cos(v), u sen(v), f(u), u, xm, xM, v, 0, α)

siendo xm y xM los valores máximos que queremos representar de la función y α el valor máximo del ángulo de giro. En nuestro ejemplo, la función puede ser directamente u^2.

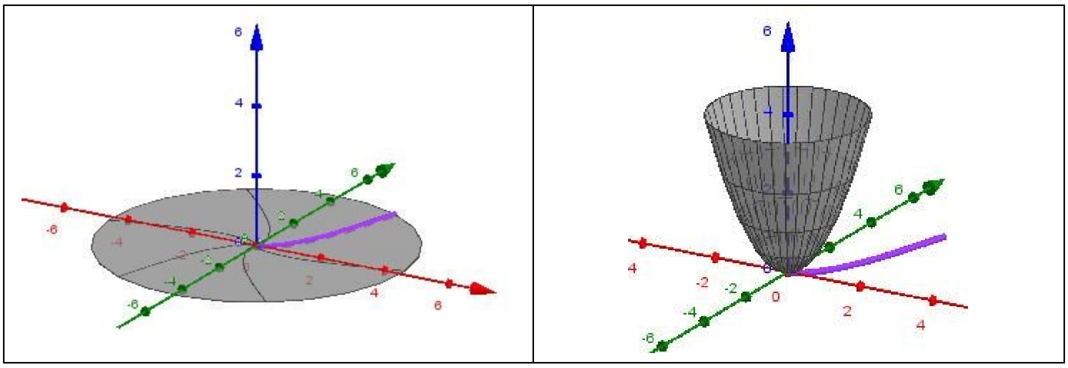

Imagen 12: x^2 alrededor del eje Z.

Como actividad, te proponemos que tomes una rama de hipérbola y la hagas girar alrededor de la bisectriz del segundo cuadrante, así obtendrás un hiperboloide oblicuo.

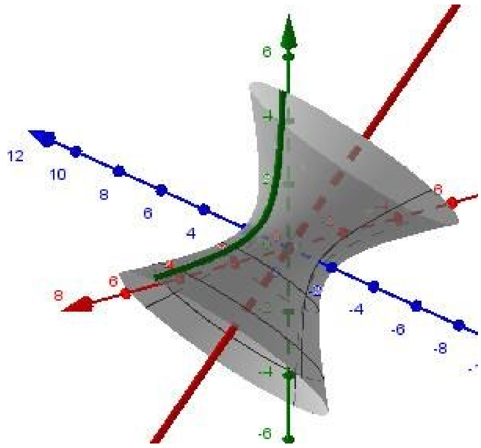

Imagen 13: Hiperboloide oblicuo.

Puede verse la construcción en: https://www.geogebra.org/m/vbxzsv6r

La más interesante es comenzar a jugar con las funciones para conseguir superficies cotidianas, por ejemplo, la de una botella de vino. En este caso hemos creado dos superficies para colocar también la base de la botella y que no se derrame el vino.

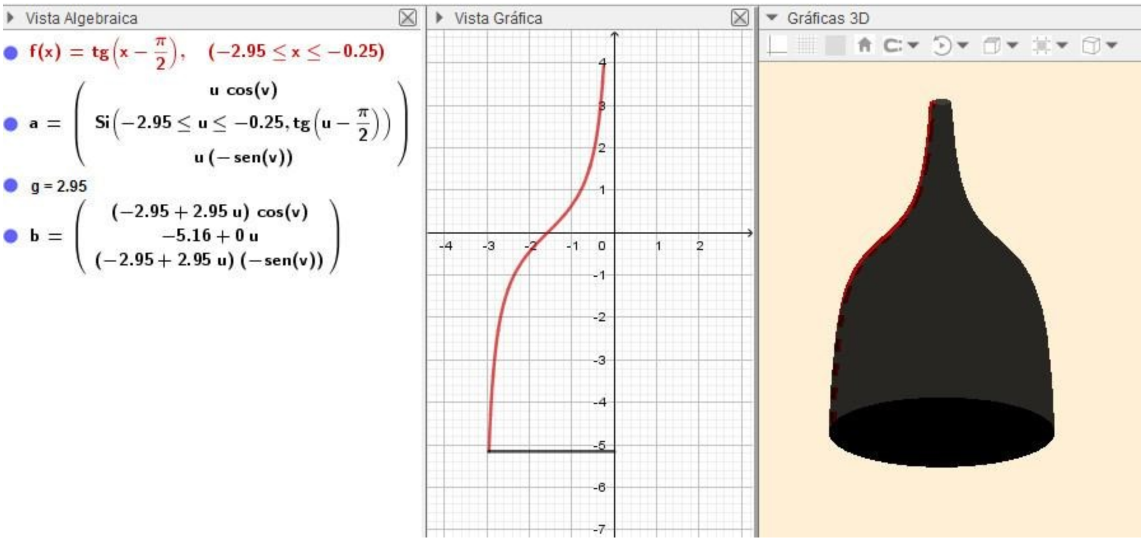

Imagen 14: Superficie con la función tangente.

Construcción en la dirección: https://www.geogebra.org/m/wnwff7te

Las funciones que se utilizan para hallar una superficie pueden ser también funciones a trozos. Basta definir la función a trozos y hacerla girar alrededor del eje que queramos.

Imagen 15: Superficie con función a trozos.

Consulta la construcción en: https://www.geogebra.org/m/thg2nx2v

2.3. Poligonales y comando SPLINE.

GeoGebra permite también definir poligonales abiertas que se manejan exactamente igual que las funciones, con la ventaja de que podemos tener varios valores diferentes para el mismo valor de x, algo imposible en las funciones.

Basta definir los puntos y construir la poligonal para poder construir la superficie directamente sobre esa poligonal.

Veamos un ejemplo simple. Basta definir los puntos (0,2), (2,2), (0,0), (2,-2) y (0,-2) y construir la poligonal que une cada punto con el siguiente y hallar la superficie correspondiente al girar alrededor del eje X. Obtendremos un diábolo.

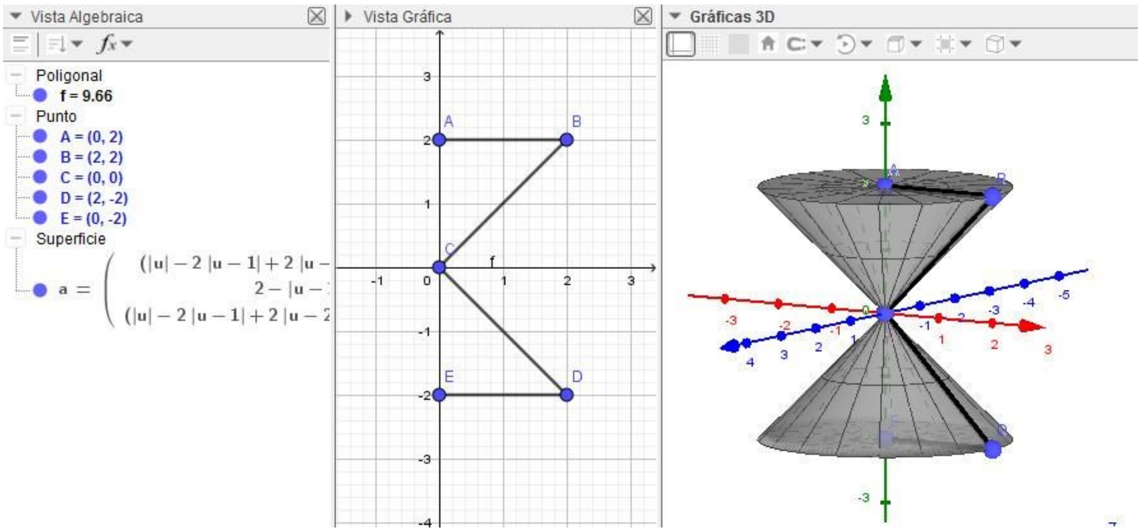

Imagen 16: Superficie desde poligonal.

Ver construcción en: https://www.geogebra.org/m/wzp5fmcw

Si en la ventana gráfica 2D movemos cualquiera de los puntos se puede observar cómo se modifica directamente la superficie obtenida adaptándose a los cambios producidos.

El comando SPLINE que se usa en varios programas de diseño, sirve para dibujar una curva que pase o se acerque a una serie de puntos. En cierta forma lo que hace es suavizar las líneas rectas que forman una poligonal. Así, las superficies que se obtienen mediante una SPLINE, redondean las aristas más duras que se forman en la figura con una poligonal.

Sería el equivalente a crear una poligonal, pero donde los puntos están unidos mediantes curvas suaves. El comando de GeoGebra tiene la siguiente sintaxis: Spline(<lista de puntos>,<grado ≥3>). El grado es un número, mayor que 3, que modifica el ajuste a los puntos. Si no se incluye GeoGebra lo toma directamente como 3. Siempre tiene que ser menor que el número de puntos que forman el Spline. Si se escribe el grado, la lista de puntos debe ir, como todas las litas, entre llaves, que no hacen falta si no se escribe el grado.

En las imágenes siguientes vemos la diferencia de resultados si se utiliza con unos puntos una poligonal o una spline.

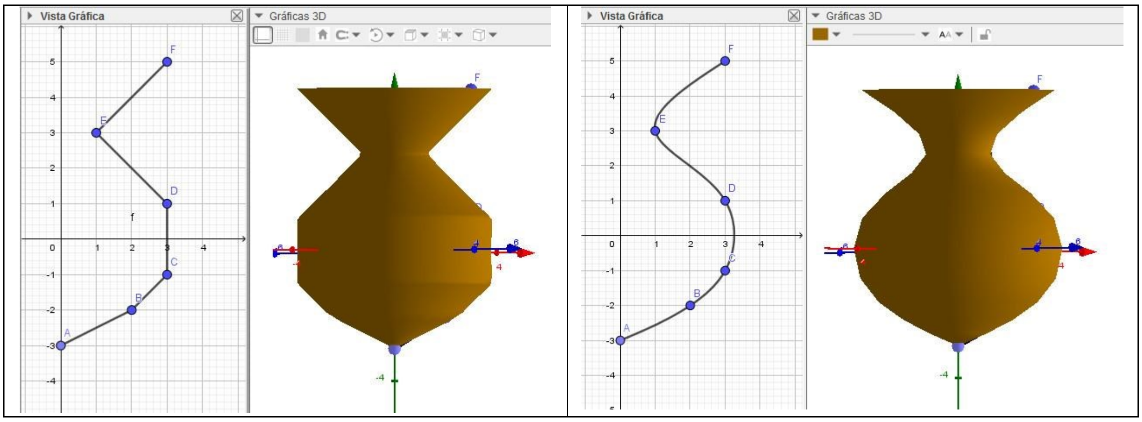

Imagen 17: Diferencia entre poligonal y spline.

Ver construcción para comparar las diferencias en:
https://www.geogebra.org/m/ry9hcezu

2.4. Superficies de una curva cualquiera.

Ya hemos visto la facilidad con que se pueden obtener superficies de elementos muy diversos. Si queremos ahondar un poco más, podemos obtener superficies de cualquier curva que dibujemos, con lo que podemos obtener resultados muy vistosos trabajando, por ejemplo, con curvas mecánicas. Lo que se debe tener presente es que previamente debemos dibujar la curva que queramos y para ello necesitaremos su expresión paramétrica y utilizar la orden que dibuja curvas planas que es la siguiente:

Curva(<Expresión>, <Expresión>,<Parámetro>,<Valor inicial>,<Valor final>)

Las dos primeras expresiones corresponden a las coordenadas paramétricas de la curva plana.

Veamos un ejemplo con la Lemniscata de Gerono, también conocida como Lemniscata de Huygens o curva en forma del ocho. Siendo r un número que nos indica la amplitud que le queremos dar a la curva, la orden que debemos introducir es la siguiente: Curva (r cos(t),r sen(t) cos(t),t,0,2π). Así obtenemos la curva siguiente.

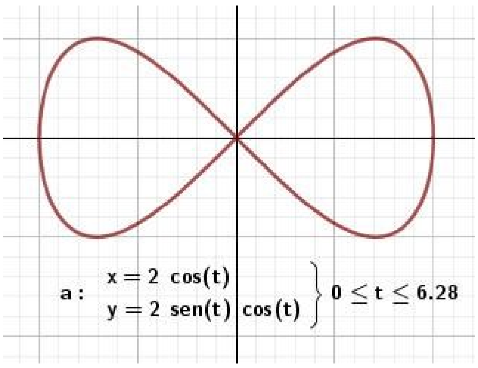

Imagen 18: Lemnistaca de Gerono.

Una vez conseguida la curva basta hallar las superficies al girar alrededor del eje X y del Y.

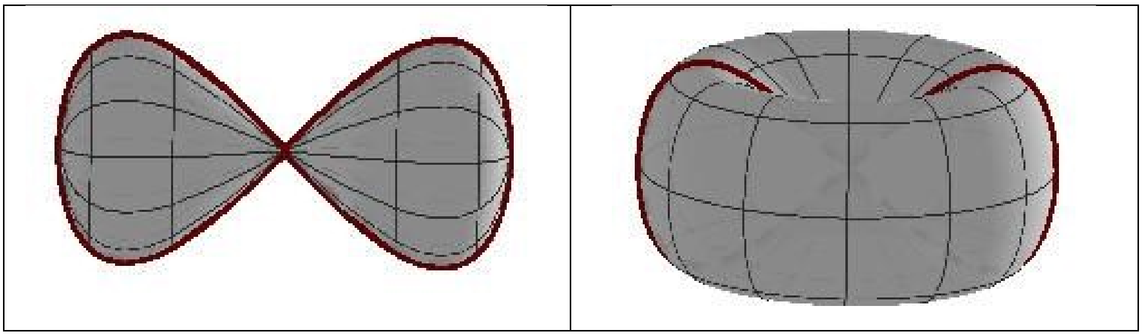

Imagen 19: Lemniscata alrededor del eje X y del eje Y.

Ver construcción en: https://www.geogebra.org/m/ktpa8gwd

2.5. Superficies artesanales.

Para acabar, veremos una opción que suele tener mucha aceptación ya que no es necesario conocer las ecuaciones ni la fórmula de ningún elemento, basta dibujarlo a mano alzada.

Lo que nosotros llamamos superficies artesanales son las que se consiguen con una línea dibujada utilizando la opción de figura a mano alzada.

Al utilizar esa opción, si la línea que dibujamos se asemeja a parte de una función conocida, el programa la ajusta automáticamente a esa función. Si no es algo conocido, siempre que respetemos la condición para función de que no haya más de un valor para cada abscisa, el programa crea una función llamada boceto(x) con la que se puede trabajar. Veamos un ejemplo en la siguiente imagen.

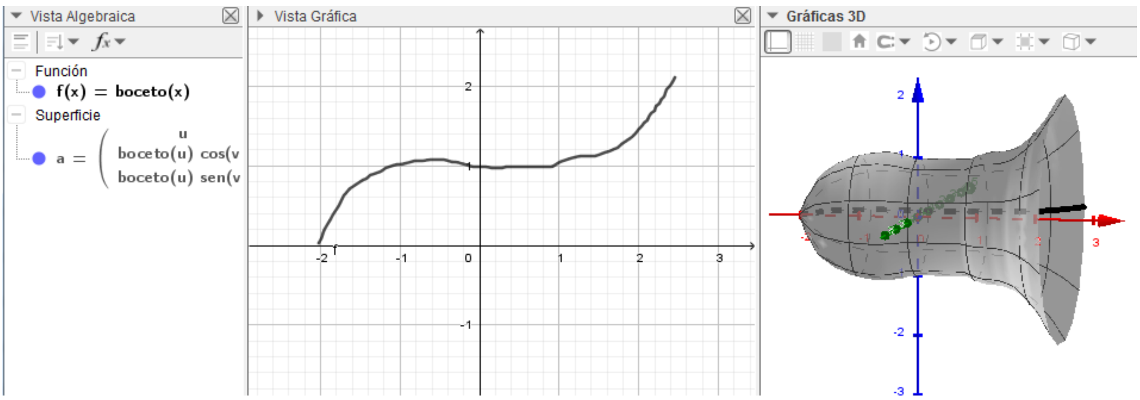

Imagen 20: Superficie "artesanal".

Construcción en la dirección: https://www.geogebra.org/m/wmacv7pn

2.6. La herramienta superficie alrededor del eje X.

Como muchas otras cosas en la vida cotidiana, hay elementos que comienzan a tomar importancia cuando se diferencian del resto y son más visibles y asequibles. Eso ocurre con los comandos de GeoGebra que gozan de mayor prestancia cuando coinciden un icono propio y ser incluidos dentro de las herramientas que figuran en uno de los desplegables de la Barra de Herramientas.

En las últimas versiones de GeoGebra 5 se ha añadido una nueva herramienta al bloque de figuras geométricas.

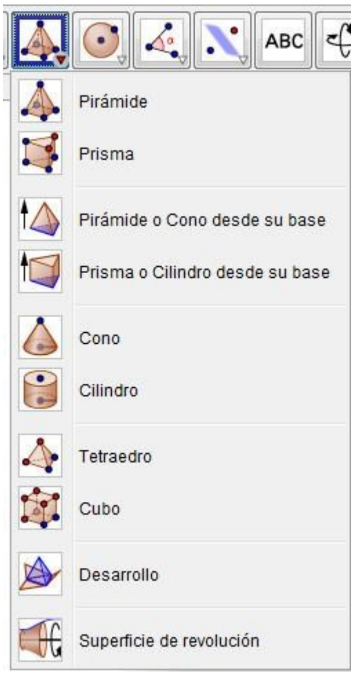

Imagen 21: Herramienta superficie.

Tras construir una curva, bien la ventana 2D o 3D, basta seleccionar la herramienta, estando en la ventana 3D, y tras pulsar en la curva la rotamos alrededor del eje X los grados que queramos. Una vez dejemos de arrastrar y soltemos el ratón se nos construirá la superficie correspondiente.

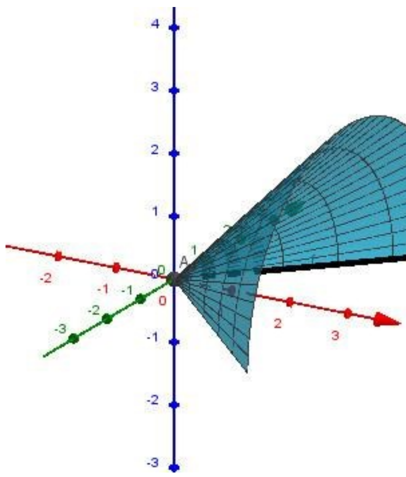

Imagen 22: Superficie alrededor del eje X.

3. Hasta aquí hemos llegado.

Hemos intentado mostrar cómo es posible que el alumnado, sin necesidad de tener un conocimiento profundo sobre la fundamentación matemática de algunas superficies, pueda construir figuras elaboradas según su imaginación. Es posible montar proyectos para estudiar superficies de revolución que se pueden encontrar en el arte y en los entornos cotidianos de nuestras ciudades e incluso en nuestras casas. La versatilidad del programa permite que, con unas pocas órdenes, el alumnado pueda desarrollar su inventiva para obtener resultados imprevistos.

Pero las posibilidades de este tema no acaban aquí. El mundo de las superficies no termina en las de revolución. Existen muchas opciones interesantes y atractivas: estudiar superficies regladas, utilizar órdenes para representar directamente funciones de tres dimensiones en forma implícita o explícita, colocar superficies sobre elementos impensables, como una esfera, estudiar las superficies de Bezier, clasificar y generar cúpulas, etc…

Bibliografía

Superficie de Revolución. (20 de noviembre de 2020). En *Wikipedia*. https://es.wikipedia.org/wiki/Superficie_de_revoluci%C3%B3n

Comando Superficie. Manual oficial de GeoGebra. Recuperado el 28 de abril de 2021, de https://wiki.geogebra.org/es/Comando_Superficie

Ancochea, B., Arranz, J.M., Muñoz, J. (2019). Superficies. 19 JAEM. https://www.geogebra.org/m/gqgdmyhd

Bernat Ancochea Millet. Licenciado en Ciencias Físicas por la Universidad Autónoma de Barcelona. Master en Investigación en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Barcelona. Profesor jubilado de Matemáticas. Presidente de la ACG (Associació Catalana de GeoGebra) y de la FEEMCAT (Federación de Entidades de Enseñantes de Matemáticas de Cataluña). HYPERLINK "mailto:bancoche@gmail.com" bancoche@gmail.com

José Manuel Arranz San José. Licenciado en Ciencias Físicas por la Universidad de Salamanca. Profesor de matemáticas en el IES Álvaro Mendaña de Ponferrada. Miembro de la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzman”. Miembro del Instituto GeoGebra de Castilla y León. Colaborador en los recursos informáticos con GeoGebra para la editorial SM. Profesor en el Proyecto ESTALMAT (EStímulo del TALento MATático) de Castilla y León. HYPERLINK "mailto:josemarranz@gmail.com" josemarranz@gmail.com

José Muñoz Santonja. Licenciado en Ciencias Exactas por la Universidad de Sevilla. Miembro fundador de la Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas THALES. Miembro del Instituto de GeoGebra de Andalucía. Profesor en el Proyecto ESTALMAT (EStímulo del TALento MATático) de Andalucía. Perteneciente a la RED DIMA (Divulgación Matemática). HYPERLINK "mailto:josemunozsantonja@gmail.com” josemunozsantonja@gmail.com