REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-21

https://union.fespm.es

Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria

María Elena Markiewicz, Silvia Catalina Etchegaray, Bettina Aylén Milanesio

Fecha de recepción: 26/11/2020
Fecha de aceptación: 11/07/2021

Resumen	En este trabajo se indaga en los procesos de validación que logran estudiantes del último año de la escuela secundaria, a través de herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. A partir de la propuesta de problemas que exigen la validación de propiedades matemáticas, se realiza un estudio de casos, analizando objetos y procesos que influyen y condicionan las prácticas argumentativas de los estudiantes. También se determinan los niveles de algebrización donde se sitúan dichas prácticas y conflictos semióticos efectivos que obstaculizan el avance hacia el tipo de validación deductiva pretendida en los primeros años de la universidad. **Palabras claves:** validación de propiedades, análisis ontosemiótico, conflictos semióticos, niveles de algebrización.
Abstract	This work investigates the validation processes achieved by students in the last year of high school, through theoretical tools of the Ontosemiotic Approach to mathematical knowledge and instruction. From the proposal of problems that require the validation of mathematical properties, a case study is carried out, analyzing objects and processes that influence and condition the argumentative practices of the students. The levels of algebrization where these practices and effective semiotic conflicts that hinder progress towards the type of deductive validation sought in the first years of university are also determined. **Keywords**: property validation, ontosemiotic analysis, semiotic conflicts, levels of algebrization.
Resumo	Este artigo investiga os processos de validação alcançados por alunos do último ano do ensino médio, por meio de ferramentas teóricas da Abordagem Ontosemiótica para o conhecimento e ensino matemático. A partir da proposição de problemas que requerem a validação de propriedades matemáticas, é realizado um estudo de caso, analisando objetos e processos que influenciam e condicionam as práticas argumentativas dos alunos. Também são determinados os níveis de algbrização onde essas práticas e conflitos semióticos efetivos que dificultam o avanço para o tipo de validação dedutiva buscada nos primeiros anos de universidade. **Palavras-chave**: validação de propriedade, abordagem ontosemiótica, conflitos semióticos, níveis de algbrização.

1. Introducción

La problemática sobre la validación en matemática ha suscitado gran preocupación e interés en la investigación en educación matemática. Tal como lo expresan Barreiro, Carnelli, Falsetti y Leonián (2012) el término validación adquiere importancia, en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, a partir de los trabajos de la Escuela Francesa, fundamentalmente los llevados a cabo por Brousseau (1995) y Balacheff (1987). En este contexto la validación consiste en “la utilización de recursos de tipo técnicos, teóricos disciplinares y argumentativos - por parte del que aprende - para garantizar la validez de un resultado formulado” (Barreiro et al, 2012, p. 149). Podemos entender así la validación como la actividad tendiente a justificar la eficacia o corrección de un procedimiento o un resultado, o a justificar el carácter de verdadero de una propiedad. En este trabajo de investigación nos centramos en la validación entendida en este último sentido, es decir, en la justificación de propiedades, como una actividad inherente y fundamental en el quehacer matemático.

En las últimas décadas se han realizado diversos estudios en torno a esta temática (Balacheff, 2000; Sowder y Harel, 1998; Mariotti, 2006; Recio y Godino, 2001; Boero, Douek, Morselli y Pedemonte, 2010; Stylianides, Bieda y Morselli, 2016; entre tantos otros). Estas investigaciones abordan diferentes aspectos relacionados a la validación, algunas de ellas caracterizando distintos tipos de argumentación y otras analizando la relación entre la argumentación y la prueba. En Argentina también se han realizado diversos trabajos (Panizza, 2005; Duarte, 2010; Barreiro et al, 2012; Mántica y Carbó, 2016), en los cuales se plantean cuestiones referidas a las validaciones de tipo no deductivas y a los procesos de formulación y validación de conjeturas en estudiantes de secundario e ingresantes a la universidad.

En nuestra investigación partimos de un problema didáctico vinculado a las grandes dificultades que manifiestan estudiantes que ingresan a la universidad en relación a la posibilidad de validar proposiciones matemáticas a las que se enfrentan en este nivel educativo superior, y en particular, de emplear modos deductivos de validación. Esto nos llevó a indagar en los procesos de validación que desarrollan estudiantes que cursan el último año de la escuela secundaria (6to.año, 17-18 años). Para ello decidimos realizar un estudio de campo que nos permitiera lograr una mayor comprensión de las prácticas validativas que despliegan dichos estudiantes. Se pretende, de este modo, aportar a un reconocido problema de articulación entre la escuela secundaria y la universidad, en lo referido a la justificación de propiedades matemáticas.

En el currículum de nivel medio, particularmente en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios de nuestro país, se plantea que el alumno del Ciclo orientado pueda lograr:

> -La identificación de los límites del trabajo empírico a partir de la confrontación de diferentes tipos de pruebas en función de su valor explicativo y su generalidad.
> -La interpretación de algunas formas de pruebas características de esta disciplina, tales como la referida al rol del contraejemplo para probar la invalidez de una afirmación y la demostración por el absurdo.
> -La producción e interpretación de conjeturas, admitiendo que es posible acudir a ejemplos o a dibujos para elaborarlas, pero que no es suficiente para validarlas.

> -La validación de conjeturas y afirmaciones de carácter general mediante propiedades matemáticas, acercándose así a las demostraciones. (Ministerio de Educación de la Nación, 2012, p.13-14)

Tomando como marco de referencia institucional lo proyectado en el currículum, nos planteamos algunos primeros interrogantes: ¿qué tipo de pruebas utilizan/desarrollan los estudiantes del último año del secundario?, ¿qué factores influyen y determinan sus procesos de validación?, ¿qué dificultades manifiestan en dichos procesos?, ¿desde qué lugar y cómo se pueden explicar dichos factores y dificultades? Tratar de dar respuesta a estas cuestiones es crucial para tensionar, recuperar y transformar problemáticas referidas a la validación en el necesario proceso de articulación entre el secundario y la universidad.

Es por todo lo anterior que nos propusimos, como objetivo central de nuestra investigación, explorar algunas características de los procesos de validación que pueden lograr estudiantes de 6to. año de la escuela secundaria, pero desde una perspectiva diferente a la de otros autores (tales como los ya mencionados), debido a que, en este trabajo, realizamos un análisis de las producciones de los estudiantes a partir del uso de herramientas didácticas que aporta el *Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS).* Consideramos que estas herramientas son potentes para llevar a cabo un análisis microscópico de la actividad matemática que nos permita explicar y valorar, desde una perspectiva ontosemiótica dichas producciones personales.

Para realizar esta exploración se plantearon a estudiantes de 6to. año de tres escuelas secundarias de nuestra ciudad un conjunto de problemas que exigen la validación de propiedades matemáticas inherentes a contenidos curriculares del nivel. Se analizaron las producciones de los estudiantes, identificando en ellas los distintos *objetos* matemáticos que ponen en funcionamiento y diferentes *procesos cognitivos* por los que transitan en sus prácticas, a fin de estudiar cómo los mismos influyen o condicionan los procesos de validación logrados. Esto nos permitió también indagar en los *niveles de algebrización* donde se sitúan sus prácticas argumentativas e identificar dificultades por las que atraviesan en las mismas, que explicamos en términos de *conflictos semióticos.* Para profundizar en el “tipo” de argumentación propuesta en cada caso, recurrimos también a la clasificación aportada por Balacheff (2000) en relación a los diferentes modos de prueba.

Las reflexiones que intentaremos presentar aquí, basadas en estudio de casos, nos permiten delinear respuestas a los interrogantes planteados anteriormente y comenzar a pensar en cuestiones claves para atender a la problemática de la articulación entre la escuela secundaria y la universidad.

En el apartado 2 de este trabajo describiremos algunas de las herramientas teóricas y metodológicas que se han utilizado en esta investigación. En el apartado 3 presentaremos dos de los problemas planteados, las resoluciones de cuatro grupos de estudiantes a estos problemas y el análisis efectuado a cada una de dichas resoluciones. Finalmente, en el punto 4, esbozaremos algunas reflexiones finales.

2. Marco teórico y metodológico

Para abordar nuestra investigación, tal lo mencionado, hemos adoptado como marco teórico y metodológico el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2017), el cual constituye un sistema teórico para la Didáctica de la matemática que intenta articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje.

En el marco de este enfoque se introduce la noción de *práctica matemática* y de *significado* (personal e institucional) de un objeto matemático como un emergente de los *sistemas de prácticas* (que realiza una persona o compartidas en el seno de una institución) donde este objeto es determinante para su realización. Dichos *sistemas de prácticas* están constituidos por redes de relaciones en las que intervienen, a su vez, diferentes tipos de *objetos o entidades primarias*:

- *Situaciones-problemas* (tareas, ejercicios...)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo…)
- *Conceptos-definiciones*
- *Propiedades* (proposiciones o enunciados sobre conceptos)
- *Argumentos* (usados para validar o explicar las propiedades y procedimientos, deductivos o de otro tipo)
- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos)

Los problemas son el origen o ‘razón de ser’ de la actividad matemática y promueven la puesta en funcionamiento de ciertos procedimientos, definiciones y propiedades, como así también de argumentos para justificar los procedimientos y propiedades utilizadas. El lenguaje representa a las demás entidades y es instrumento para la acción, por lo que resulta en elemento esencial en la transformación de los significados tanto institucionales como personales.

Por otra parte, tanto los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas como los emergentes de las mismas pueden ser considerados, según el juego de lenguaje en el que participan, desde diferentes facetas duales. Estas, a su vez, dan lugar a *procesos cognitivos duales* que se consideran fundamentales en la actividad matemática, entre los que destacamos, a los fines de este trabajo, los siguientes:

- *Proceso de materialización-idealización* (asociado a la dualidad ostensivo-no ostensivo): un objeto ostensivo es utilizado para representar, evocar o visualizar un objeto no ostensivo o ideal. A su vez un objeto no ostensivo puede ser materializado mediante un ostensivo.
- *Proceso de particularización-generalización* (dualidad extensivo-intensivo): el pasaje de la consideración de un objeto particular (extensivo) a un objeto general (intensivo) y viceversa.
- *Proceso de descomposición-reificación* (dualidad sistémico-unitario): el problema global puede descomponerse en problemas elementales, es decir, los objetos (unitarios) intervinientes deben ser tratados como sistémicos. Pero, tras el proceso de estudio, los conceptos y propiedades emergentes deben ser reificados, es decir, vistos como objetos unitarios a fin de ser aplicados a la resolución de nuevos problemas.

- *Proceso de representación-significación* (dualidad expresión-contenido): consiste en atribuir contenido a una expresión, a través del establecimiento de *funciones semióticas* (relaciones entre un significante y un significado según un cierto criterio de correspondencia). Estos procesos son "densos" en la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la actividad matemática.

Los procesos antes mencionados pueden, a su vez, ser fuente de *conflictos semióticos*, es decir, de "disparidades o desajustes entre significados atribuidos por dos sujetos, ya sean estos personas o instituciones" (Godino et al, 2007, p.16), los cuales permiten anticipar/explicar las dificultades que podrían surgir (o las que efectivamente surgen) en el transcurso de los procesos de instrucción.

Además, al reconocer la existencia del proceso de algebrización producido en el desarrollo de la ciencia matemática que va transformado el significado de los objetos, el EOS ha avanzado en la categorización de diferentes *niveles de algebrización* para el análisis de la actividad matemática que se despliega en las prácticas personales (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015).

Los criterios para la determinación de dichos niveles están vinculados con la presencia de objetos intensivos de diferentes grados de generalidad, con el tratamiento que se aplica a dichos objetos y con el tipo de lenguaje utilizado.

En este sentido, se han determinado siete niveles de algebrización de los cuales, para los fines de nuestra investigación, describiremos los siguientes:

-Nivel 1: Intervienen objetos intensivos de grado dos (es decir, clases de intensivos de primer grado, como lo son los números), cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos objetos.

-Nivel 2: Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal.

-Nivel 3: Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia.

Por otra parte, tal como lo hemos mencionado, para poder caracterizar el tipo de argumentos planteados por los estudiantes, tomamos como marco referencial las investigaciones de Balacheff (2000). Este autor define los *procesos de validación* como la actividad (razonamiento) que tiene como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una *explicación*, una *prueba* o una *demostración.* Aporta una tipología de pruebas, en la que distingue entre *pruebas pragmáticas* (íntimamente ligadas a la acción y a la experiencia) y *pruebas intelectuales* (se toma distancia de la acción y se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones). Entre los tipos de prueba que caracteriza podemos mencionar:

-El *empirismo ingenuo*: consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos.

-La *experiencia crucial:* consiste en verificar la proposición en un caso para el cual se asume que "si funciona en dicho caso, entonces funcionará siempre".

-El *ejemplo genérico*: consiste en la explicación de las razones de validez de una aserción a través de la validación de operaciones o transformaciones de un objeto en calidad de representante característico de determinada clase.

-La *experiencia mental:* interioriza la acción, separándola de su ejecución sobre un representante en particular. Las operaciones y relaciones que inician la prueba no son escogidas por el resultado de su puesta en práctica.

El paso a la experiencia mental marca la transición de las pruebas pragmáticas a las intelectuales. Este aspecto es de especial interés en nuestra investigación dado que consideramos que el avance a este tipo de pruebas intelectuales es clave para lograr la mencionada articulación entre el trabajo en la escuela secundaria y en la universidad.

La metodología empleada en esta investigación (esencialmente descriptiva e interpretativa) es inherente y emergente del EOS (Godino, 2002, Godino et al, 2007; Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014). Más específicamente, realizamos un *estudio de casos,* técnica de investigación cualitativa que resulta pertinente cuando se desean analizar la singularidad y profundidad de casos particulares. A través del mismo se pretende detallar situaciones, recopilar, seleccionar, describir y analizar datos, observar minuciosamente las prácticas y experiencias de las personas consideradas como sujetos de investigación. Para llevar adelante el estudio de los casos considerados se utiliza la técnica de *análisis ontosemiótico* en sus dos primeros niveles: análisis de objetos primarios y de procesos duales.

3. Situaciones problemas y análisis de las resoluciones

En este apartado desplegaremos el estudio de casos realizado. Las tres escuelas secundarias seleccionadas tienen la particularidad de que los estudiantes, en su mayoría, continúan estudios universitarios. Consideramos esta característica muy significativa como criterio de selección de los casos, teniendo en cuenta el problema didáctico que nos llevó a realizar esta investigación.

Se plantearon a grupos de estudiantes de 6to. año cuatro problemas de gran fortaleza epistémica respecto de la problemática que pretendemos abordar. En efecto, los mismos comparten algunas características comunes: exigen la validación de ciertas proposiciones/propiedades matemáticas (en algunos casos son los propios estudiantes los que tienen que elaborar dichas propiedades) e involucran temáticas/objetos que están presentes en la enseñanza escolar previa (números enteros, suma y producto de números enteros, múltiplos, rectángulos, cuadrados, área y perímetro de los mismos, etc). Temáticas que, además, se retoman en las primeras asignaturas de matemática de la universidad.

En este trabajo presentaremos dos de dichos problemas, tomando como criterio de selección el cambio de contexto. En efecto, uno de ellos (Problema 1) está planteado en un contexto aritmético y el otro (Problema 2), en un contexto geométrico.

Problema 1 a) ¿Será cierto que siempre el producto de dos múltiplos de 5 es un múltiplo de 5? Justifica tu respuesta. b) La suma de un múltiplo de 4 y un múltiplo de 12, ¿es un múltiplo de 4?, ¿es un múltiplo de 12? En caso de que tu respuesta sea afirmativa, justifica. En caso de que sea negativa, da condiciones para que ocurra, justificando.
Problema 2 Si a un rectángulo se le triplica su base y su altura: a) ¿Es cierto que el área también se triplica? ¿Por qué? b) ¿Es cierto que el perímetro también se triplica? ¿Por qué? c) Si el rectángulo fuera un cuadrado, ¿qué pasaría con su área y su perímetro al triplicar el lado? d) ¿Cómo varía el área de un rectángulo cuando uno de sus lados se duplica y el otro se reduce a la mitad?

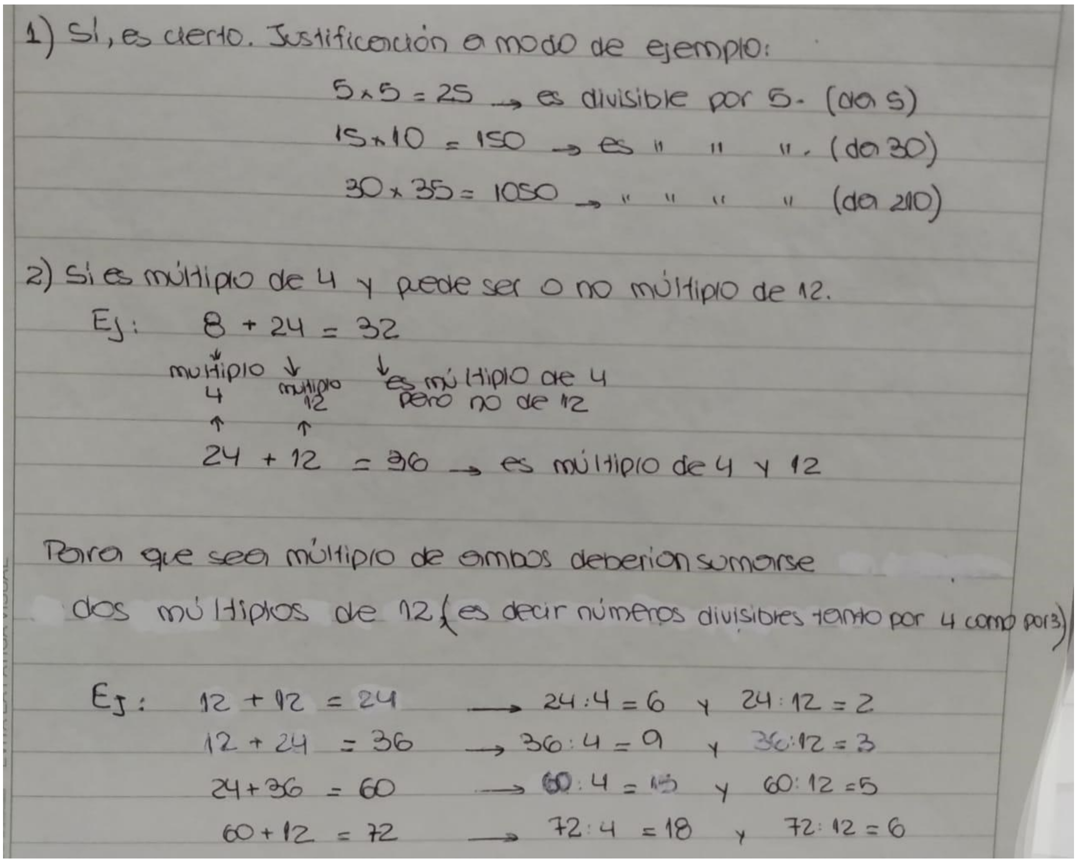
Tabla 1. Presentación del Problema 1 y Problema 2. Fuentes: Problema 1: reformulado de Saiz y Etchegaray, 2015, p.3. Problema 2: Illuzi y Sessa, 2014, p. 83)

Para este trabajo, seleccionamos las resoluciones de dos grupos de alumnos para cada uno de los problemas, que se diferencian tanto por la red de relaciones planteadas entre diferentes objetos como por la puesta en funcionamiento de distintos procesos duales.

3.1. Resoluciones y análisis del Problema 1

A continuación presentaremos las dos resoluciones del Problema 1, seguidas de sus correspondientes análisis.

Resolución Grupo 1



1) Si, es cierto. Justificación a modo de ejemplo:

5x5 = 25 → es divisible por 5. (da 5)

15x10 = 150 → es " " ". (da 30)

30x35 = 1050 → " " " " (da 210)

2) Si es múltiplo de 4 y puede ser o no múltiplo de 12.

Ej: 8 + 24 = 32

múltiplo 4 — múltiplo 12 — es múltiplo de 4 pero no de 12

24 + 12 = 36 → es múltiplo de 4 y 12

Para que sea múltiplo de ambos deberían sumarse dos múltiplos de 12 (es decir números divisibles tanto por 4 como por 3)

Ej: 12 + 12 = 24 → 24:4 = 6 y 24:12 = 2

12 + 24 = 36 → 36:4 = 9 y 36:12 = 3

24+36 = 60 → 60:4 = 15 y 60:12 = 5

60+12 = 72 → 72:4 = 18 y 72:12 = 6

Figura 1. Resolución Grupo 1

Para realizar el *análisis ontosemiótico* de esta producción hemos considerado dos unidades de análisis, que se corresponden con las prácticas realizadas para dar respuesta al inciso a) de la tarea (identificado por los estudiantes con 1) y aquellas realizadas para el inciso b) (punto 2 para los estudiantes). En la tabla siguiente se consignan los objetos primarios y los procesos duales en cada unidad de la práctica.

PRÁC-TICAS	OBJETOS PRIMARIOS	PROCESOS DUALES
1)	• Propiedad emergente: "si, es cierto" (que el producto de dos múltiplos de 5 es múltiplo de 5) • Argumento: mediante ejemplos particulares (empirismo ingenuo) • Procedimientos: Se multiplican múltiplos de 5. Se divide el resultado por 5. • Definiciones: -De "múltiplo" de un número como aquel que es divisible por dicho número, es decir, que el dividirlo por el número de cociente exacto.	• Particularización-Generalización: Se utilizan ejemplos particulares para justificar la propiedad general. • Representación-significación: Significan a la representación "múltiplo de 5" como un número que al dividirlo por 5 da cociente exacto. • Materialización-idealización: Ostensivos tales como "5x5 = 25… es divisible por 5 (da 5)" materializan la idea de que el producto de dos múltiplos de 5 es múltiplo de 5 ya que al dividirlo por 5 el cociente da exacto.

	• Lenguaje: simbólico-aritmético	
2)	• Propiedad emergente: "si es múltiplo de 4 y puede ser o no múltiplo de 12" • Procedimientos: Se suman múltiplos de 4 y de 12. Se dividen los resultados por 4 y por 12 . • Argumento: Se argumenta la propiedad emergente a partir de la observación de los dos casos particulares, viendo que en el primer caso la suma es múltiplo de 4 pero no de 12, y en el segundo caso (*) la suma es múltiplo de 4 y también de 12 (*empirismo ingenuo*) • Propiedad emergente: "Para que sean múltiplos de ambos deberían sumarse dos múltiplos de 12 (es decir números divisibles tanto por 4 como por 3)" • Procedimientos: Se suman múltiplos de 12 Se dividen por 4 y por 12 los resultados obtenidos. • Argumentos: Se argumenta la propiedad emergente a partir de la observación del caso particular previamente observado (*) (el cual permite la emergencia de la nueva propiedad) y con la observación de nuevos casos particulares que permiten contrastarla (*empirismo ingenuo)* . • Lenguaje: -Coloquial, por ejemplo al dar algunas condiciones: "para que sean múltiplo de ambos deberían sumarse dos múltiplos de 12" -Simbólico aritmético: al realizar las cuentas con los casos particulares.	• Particularización-Generalización: Se utilizan ejemplos particulares (8 + 24 =32, 24 + 12 =36) para justificar una propiedad general (la suma de un múltiplo de 4 y un múltiplo de 12 "si es múltiplo de 4 y puede ser o no múltiplo de 12"). A partir del segundo ejemplo se conjetura una propiedad general (Para que sean múltiplos de ambos deben sumarse dos múltiplos de 12) y se la verifica luego en otros casos particulares. • Materialización-idealización: Los ostensivos "8+24= 32" acompañados de flechas señalando al 8 como múltiplo de 4, al 24 como múltiplo de 12 y al 32 como múltiplo de 4 pero no de 12, y "24+12=36", indicando que este último si es múltiplo de 4 y de 12, materializa la idea de que la suma de un múltiplo de 4 más un múltiplo de 12 es múltiplo de 4 y puede ser o no múltiplo de 12. Se materializan de manera coloquial las propiedades emergentes. • Representación-significación: Significan al múltiplo de un número como aquel que dividido ese número da un cociente exacto. Significan al "24" (presente en la cuenta "8 +24") como un número que, no sólo es múltiplo de 4, sino también de 12. A los números "24, 36, 60 y 72" se los significan como múltiplos tanto de 4 como de 12. • Descomposición-reificación: Las explicaciones proporcionadas y el trabajo con los ejemplos, necesitan reificarse para lograr la emergencia de las propiedades mencionadas.

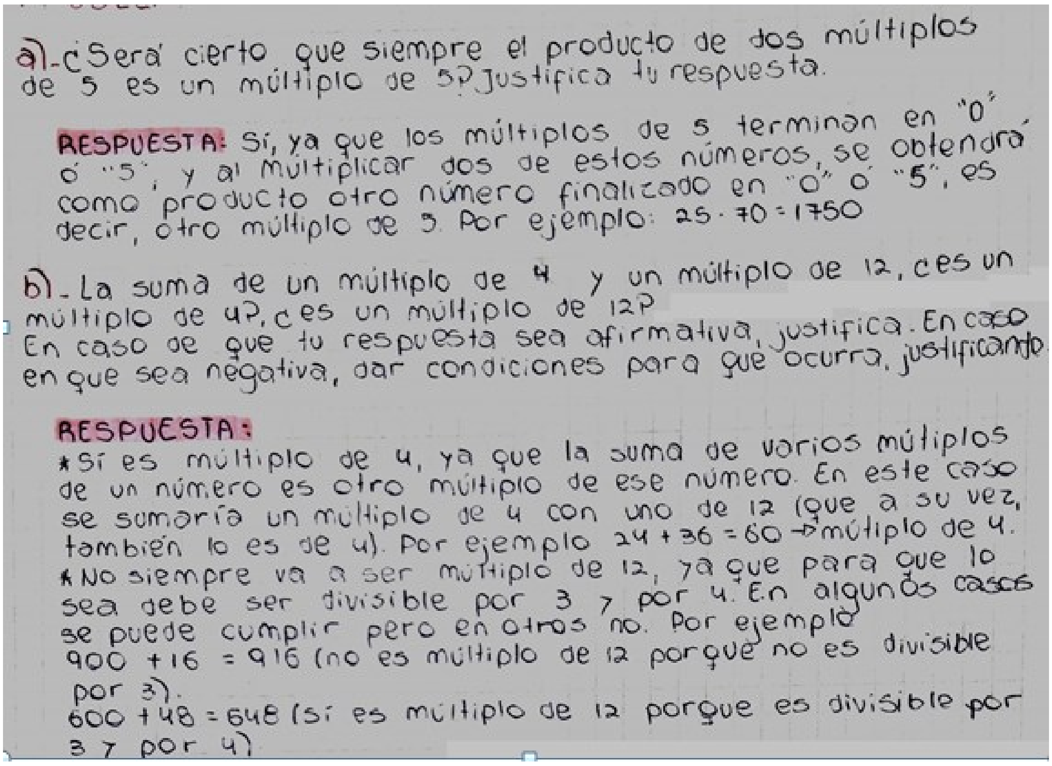
Tabla 2. Análisis de objetos primarios y procesos de la resolución del Grupo 1.

El principal *conflicto semiótico* en esta resolución está ligado al proceso de particularización-generalización, que se evidencia en la utilización de casos particulares para validar una propiedad general. El mismo, a su vez, está atravesado por conflictos vinculados al proceso de representación-significación, dado que no se logra significar a un múltiplo de 5, por ejemplo, como un múltiplo de 5 "cualquiera". También está influenciado por el significado que se le otorga a la definición de múltiplo, ligado a la división exacta, sin poder realizar la necesaria transformación de este significado que habilitaría la emergencia de una prueba de tipo intelectual. Este conflicto se vuelve a manifestar cuando a los múltiplos de 12 se los menciona teniendo en cuenta su descomposición multiplicativa (3.4) pero luego, para comprobar que un número es múltiplo de 12 se recurre al significado de múltiplo asociado a la división exacta.

Respecto al *nivel de algebrización*, la actividad matemática se puede situar en un nivel 1 dado que intervienen objetos intensivos de grado dos en un lenguaje coloquial y numérico, por ejemplo se entiende a los múltiplos de un número como aquellos que al ser divididos por dicho número dan cociente exacto, o al número 36 como múltiplo de 4 y múltiplo de 12. Además emergen otros intensivos, propiedades generales tales como: “la suma de dos múltiplos de 4 si es múltiplo de 4 y puede ser o no múltiplo de 12”, “Para que sean múltiplos de ambos deben sumarse dos múltiplos de 12…”, a partir de procesos de generalización, materialización, significación y reificación puestos a funcionar en dichos objetos particulares como se deja plasmado en la tabla 1.

La descripción del juego de lenguaje de esta práctica personal nos aporta información importante, en particular, sobre cuáles son los objetos que hay que transformar y cuál es el lenguaje que hay que construir para avanzar en una prueba intelectual que exige un trabajo de algebrización superior.

Resolución Grupo 2


a).¿Será cierto que siempre el producto de dos múltiplos de 5 es un múltiplo de 5? Justifica tu respuesta.

RESPUESTA: Sí, ya que los múltiplos de 5 terminan en "0" ó "5", y al multiplicar dos de estos números, se obtendrá como producto otro número finalizado en "0" ó "5", es decir, otro múltiplo de 5. Por ejemplo: 25 · 70 = 1750

b). La suma de un múltiplo de 4 y un múltiplo de 12, ¿es un múltiplo de 4?, ¿es un múltiplo de 12? En caso de que tu respuesta sea afirmativa, justifica. En caso en que sea negativa, dar condiciones para que ocurra, justificando.

RESPUESTA:
*Sí es múltiplo de 4, ya que la suma de varios múltiplos de un número es otro múltiplo de ese número. En este caso se sumaría un múltiplo de 4 con uno de 12 (que a su vez, también lo es de 4). Por ejemplo 24 + 36 = 60 → múltiplo de 4.
*No siempre va a ser múltiplo de 12, ya que para que lo sea debe ser divisible por 3 y por 4. En algunos casos se puede cumplir pero en otros no. Por ejemplo
900 + 16 = 916 (no es múltiplo de 12 porque no es divisible por 3).
600 + 48 = 648 (sí es múltiplo de 12 porque es divisible por 3 y por 4)

Figura 2. Resolución Grupo 2.

Si bien no vamos a desplegar, en el cuerpo de este artículo, la descripción minuciosa de objetos y procesos que se ponen a funcionar en esta práctica, esbozaremos una síntesis del análisis que dicha descripción nos permitió realizar.

Este grupo propone un argumento para la propiedad dada en el enunciado del inciso a), en el cual utiliza la definición de múltiplo de 5 como “aquel número que termina en 0 o en 5” y una propiedad que parecen tener disponible: “el resultado de un producto de dos números terminados en 0 o en 5 siempre terminará en 0 o en 5”, la cual no justifican. El significado dado a la expresión “múltiplo de 5” y la utilización de propiedades les permite avanzar hacia un tipo de prueba intelectual (*experiencia mental*), no obstante lo cual los estudiantes consideran necesario la verificación de la propiedad en un ejemplo particular.

En el inciso b) proponen un argumento para justificar por qué la suma de un múltiplo de 4 más un múltiplo de 12 es múltiplo de 4 utilizando también propiedades disponibles: “la suma de varios múltiplos de un número, es múltiplo de ese número” y “un múltiplo de 12 también es múltiplo de 4”. Argumentan también que la suma “no siempre va a ser múltiplo de 12”, a partir de la propiedad: “para que un número sea múltiplo de 12 debería ser divisible por 3 y por 4” y explicando que eso puede ocurrir o no. Aquí es preponderante el uso de un lenguaje coloquial. Si bien en ambos casos luego recurren a ejemplos particulares (en un lenguaje simbólico-aritmético) para ejemplificar o apoyar sus argumentos, consideramos que las argumentaciones planteadas tienen las características de una *experiencia mental,* dado que en una primera instancia el razonamiento se realiza para múltiplos cualesquiera, no circunscribiéndose a la acción sobre un representante en particular.

Aunque estos estudiantes, a diferencia del grupo anterior, no parten de casos particulares, hay *conflictos semióticos* ligados a los procesos de significación y materialización, dado que, al no poder dar contenido ni hacer uso de un ostensivo que materialice la idea de múltiplo como un producto de ese número por otro natural, no pueden avanzar en la comunicación de otro tipo de argumentación, más cercana a una demostración.

Esta actividad matemática bascula entre un *nivel 1 y 2 de algebrización*. Posee características de un nivel 1 ya que intervienen objetos intensivos de grado dos en un lenguaje natural y numérico, por ejemplo, se entiende al múltiplo de 5 a partir de su propiedad de terminar en 0 o en 5. Al igual que se entiende a los múltiplos de 12 como aquellos que son divisibles por 3 y por 4 (haciéndose uso efectivo de esta propiedad para determinar si un número es múltiplo de 12 o no). Asimismo, emergen otros intensivos, propiedades generales, a partir de procesos de generalización, materialización, significación y reificación puestos a funcionar en dichos objetos. Posee características de un nivel 2 ya que intervienen indeterminadas y se establecen generalizaciones comprensivas que emergen de las relaciones establecidas entre las acciones realizadas sobre los objetos y se asocian a validaciones que superan la verificación empírica (Barallobres, 2017).

Como primeras conclusiones de los análisis realizados a las producciones de ambos grupos podemos mencionar que la puesta en relación de diferentes objetos primarios (procedimientos, definiciones, propiedades, argumentaciones, lenguaje), está regulada esencialmente por el significado de “múltiplo” puesto a funcionar en cada práctica. En sus producciones, los grupos de estudiantes transitan por diferentes procesos de particularización-generalización (dado que este proceso se realiza a partir de distintos particulares: ejemplos en un caso / particulares arbitrarios en el otro), de materialización-idealización (ya que utilizan diferentes ostensivos para representar, por ejemplo, la idea de múltiplo y las argumentaciones propuestas), de representación-significación (ya que, como hemos mencionado, otorgan distinto contenido a ciertas expresiones, particularmente a la de múltiplo). En ambos casos han transitado por procesos de reificación (en las dos producciones, de un modo u otro, han tenido que unificar lo realizado, sean las observaciones en casos particulares o las justificaciones dadas para lograr el reconocimiento de nuevas propiedades y de su validación). Todo esto permite la emergencia de diferentes tipos de argumentaciones situadas en distintos niveles de algebrización.

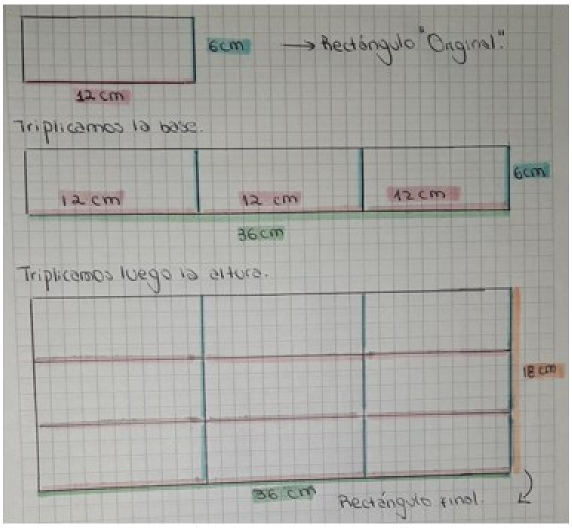
3.2. Resoluciones y análisis del Problema 2

En este apartado mostramos las resoluciones de dos grupos al Problema 2 y sus correspondientes análisis.

Resolución Grupo 3

a) ¿Es cierto que el área también se triplica? ¿Por qué?

Podemos afirmar que cuando se triplica no solamente un lado sino dos (base y altura) no se triplica el área, sino que se da lugar a que existan nueve veces el rectángulo, tal como se muestra en la imagen.



Área de Rect. "Original" = 12cm x 6cm = 72 cm^2

Área de Rect. "Final" = 36cm x 18cm= 648 cm^2 → 9 veces A= 72 cm^2

b) ¿Es cierto que el perímetro también se triplica? ¿Por qué?

El perímetro afirmamos que Sí se triplica, este (perímetro) es la suma de los lados del rectángulo. Los lados del rectángulo son cuatro, uno es la altura que se multiplica por 3 y como el lado opuesto es de la misma medida también se triplica; y los dos lados restantes es la base que también se multiplica por tres, por ende, el lado opuesto también lo hace. De esta manera se demuestra que todos los lados se triplican sus medidas, que sería lo mismo que al perímetro del rectángulo original se multiplicara por tres:

P Rect. "Original" = 6cm + 6cm + 12cm + 12cm = 36cm

P Rect. "final" = 36cm + 36cm + 18cm + 18cm = 108 cm → 3 x 36cm

c) Si el rectángulo fuera un cuadrado, ¿qué pasaría con su área y su perímetro al triplicar el lado?
Si se cambia la figura de un rectángulo a un cuadrado, sucedería lo mismo, debido a lo único que cambian son las medidas, no obstante las fórmulas de Área (base x altura) y Perímetro (suma de los lados) no cambian.

d) ¿Cómo varía el área de un rectángulo cuando uno de sus lados se duplica y el otro se reduce a la mitad? Justifica.
Si a un rectángulo se duplicara un lado ,la base, por ejemplo y se le cortara la mitad de otro lado, la altura, el área no varía en nada ya que el rectángulo va a seguir ocupando el mismo espacio. Se procede a explicar mediante un ejemplo:

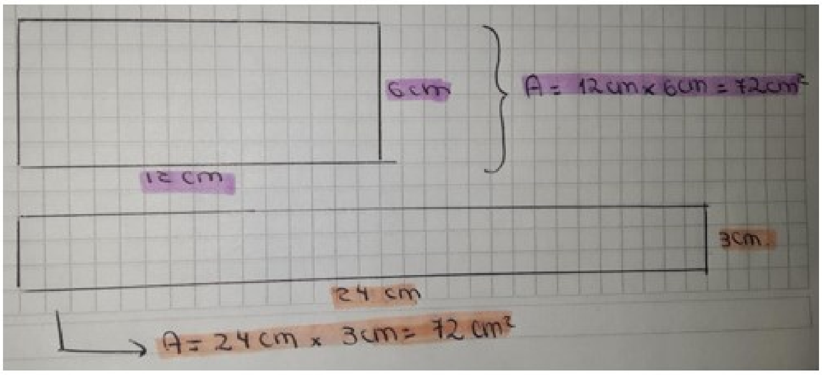


Figura 3. Resolución Grupo 3

Análisis ontosemiótico de la resolución del Grupo 3:

PRÁC-TICAS	OBJETOS PRIMARIOS	PROCESOS
a)	• Propiedad (emergente): "Cuando se triplica, no solamente un lado, sino dos (base y altura) no se triplica el área sino que se da lugar a que existan nueve veces el rectángulo" • Procedimientos: Se dibuja un rectángulo particular de base 12 y altura 6. Se le adosan a la derecha dos rectángulos iguales y se multiplica 12 por 3. Se le adosan a esta figura dos figuras iguales arriba, multiplicando 6 por 3. Se calcula el área del rectángulo original (12x6) y la del rectángulo final (36x18), comparando los resultados. • Argumentos: Se argumenta a través de la secuencia de procedimientos mencionados anteriormente. La argumentación utilizada es de tipo *ejemplo genérico.* • Definiciones:	• Particularización-generalización: Se particulariza con el ejemplo de un rectángulo de base 12 y altura 6, para argumentar la propiedad general emergente. • Representación-significación: Al área de una figura se la significa como el espacio que ocupa, lo cual se pone de manifiesto cuando expresan "se da lugar a que exista 9 veces el rectángulo" y también como el producto de la base por la altura. Se significa al 36 como el triple de 12 y a 18 como el triple de 6. A 648 se lo significa como "9 veces el 72" y a esta última expresión como 9 x 72. • Materialización-idealización: La idea de triplicar la base de un rectángulo se evoca adjuntando dos rectángulos de la misma base a la derecha del rectángulo origina (y también a través de la multiplicación de su base por 3). De similar manera la idea de triplicar la altura. Se materializa el área del rectángulo original con la expresión: 12cmx6cm =72 cm y con la expresión: 36cm x 18 cm = 648 cm el área del rectángulo con la base y la altura

	-Base y altura de un rectángulo. -Área de una figura (como el espacio que ocupa una figura y como base por altura). -Definición de "triplicar" como multiplicar el número por 3. • Lenguaje: Gráfico (es el que mayormente regula esta práctica) y simbólico aritmético. También se utiliza lenguaje coloquial	triplicada. El ostensivo: 648cm → 9 veces A=72 cm evoca la idea de que el área del rectángulo con base y altura triplicada es nueve veces el área del rectángulo original. • Descomposición-reificación: Lo expresado coloquialmente, lo observado gráficamente, y los cálculos realizados en el ejemplo considerado se ratifican para dar lugar a la propiedades emergentes como objetos unitarios
b)	• Propiedades: -"El perímetro afirmamos que si se triplica" (emergente) Propiedades disponibles: -Los lados opuestos del rectángulo tienen la misma medida -Si la altura del rectángulo se multiplica por 3 entonces el lado opuesto también se triplica. • Definiciones: Perímetro de un rectángulo (como la suma los lados), lados opuestos. • Argumento: Se plantea una justificación para un rectángulo en general que, por el uso que realiza de las propiedades disponibles, la convierte en una *experiencia mental.* También verifican con un ejemplo. • Lenguaje: Predomina el lenguaje coloquial en la argumentación planteada, aunque se recurre a un lenguaje simbólico aritmético cuando se verifica.	• Representación-significación: Significan el perímetro como la suma de los lados del rectángulo, a uno de los lados como la base (y a su opuesto como un lado de la misma medida) y a otro como la altura. Significan el 36 como el triple de 12 y el 18 como el triple de 6 Al "108" se lo significa como "3x36", es decir el triple de 36. • Materialización-idealización: Se materializa la propiedad emergente de manera coloquial al igual que el argumento propuesto. Se materializa con la expresión: 6cm+6cm+12cm+12cm = 36 cm el perímetro de un rectángulo de base 6 y altura 12 y con la expresión: 36cm+36cm+18cm+18cm = 108 cm el perímetro del rectángulo con los lados triplicados. Se evoca la idea de que 108 es el triple de 36 con el ostensivo: 108 cm → 3x36 cm
c)	• Propiedad emergente: "Si se cambia la figura de un rectángulo a un cuadrado sucedería lo mismo…" (en referencia a que el área no se triplica sino que aumenta 9 veces y el perímetro si se triplica) • Argumento: Dan una *explicación* expresando que lo único que cambian las medidas pero no las fórmulas. • Definiciones -De cuadrado -Área de un cuadrado: base x altura -Perímetro de un cuadrado: suma de los lados • Lenguaje: coloquial	• Representación. significación: Se significa a un cuadrado como un rectángulo con medidas de lados iguales • Materialización-idealización: Se materializan a través de un lenguaje coloquial la propiedad emergente y su argumentación.

d)	• Propiedad emergente: Si a un rectángulo se le duplicara un lado y se le cortara a la mitad el otro, el área no varía. • Procedimientos: Dibujan un rectángulo particular y calculan el área, Dibujan otro rectángulo, con las condiciones pedidas. Calculan el área de este nuevo rectángulo. • Argumentos: Expresan que la propiedad vale porque el rectángulo "va a seguir ocupando el mismo espacio". Luego proponen un ejemplo particular, apoyándose en gráficos (*ejemplo genérico*) • Definiciones: -"reducir a la mitad" como "cortar la mitad de un lado" y también como dividir por 2. -"duplicar" como multiplicar por 2. . • Lenguaje: Coloquial, gráfico y simbólico aritmético.	• Representación-significación: Al área de una figura se la significa como el espacio que ocupa, lo cual se pone de manifiesto cuando expresan que los rectángulos van a seguir ocupando el mismo espacio. También como el producto de la base por la altura. Se significa al 24 como 12 x 2 y al 3 como la mitad de 6 (6 dividido 2) • Materialización-idealización: Se materializa la idea de duplicar la base de un rectángulo y reducir a la mitad la altura, con otro rectángulo cuya base es la del original multiplicada por 2 y su altura es la del original dividida por 2. • Descomposición-reificación:: Lo expresado coloquialmente, lo observado gráficamente, y los cálculos realizados en el ejemplo considerado se reifican para dar lugar a la propiedad emergente como objeto unitario

Tabla 3. Análisis de objetos primarios y procesos del Grupo 3.

Intervienen en la práctica objetos intensivos de manera coloquial, aritmética y gráfica, por ejemplo se entiende al 648 como nueve veces el 72 y a un rectángulo se lo entiende tal como se lo materializa en la figura. Además, emergen otros intensivos, en este caso se ratifican propiedades generales como objetos unitarios, tales como las mencionadas en la segunda columna de la Tabla 3. Dado que la contextualización que realizan los estudiantes les permite generalizar y transformar ciertos objetos particulares en objetos generales, como el rectángulo y el cuadrado, podemos concluir que esta práctica bascula entre *un nivel 1 y un nivel 2 de algebrización.*

Con respecto a los *conflictos semióticos*, se visualizan aquí algunos asociados al proceso de particularización-generalización ya que, por ejemplo en a), la producción se basa en el uso del ejemplo genérico, al cual no se lo hace funcionar como generador del caso general sino que se lo muestra como el elemento que justifica el razonamiento. Además, se advierten dificultades para materializar, por ejemplo, la base y la altura de un rectángulo con símbolos, lo cual habilitaría la realización de transformaciones y operaciones con los mismos, y permitiría avanzar en una validación de un nivel superior de algebrización. .

Resolución Grupo 4

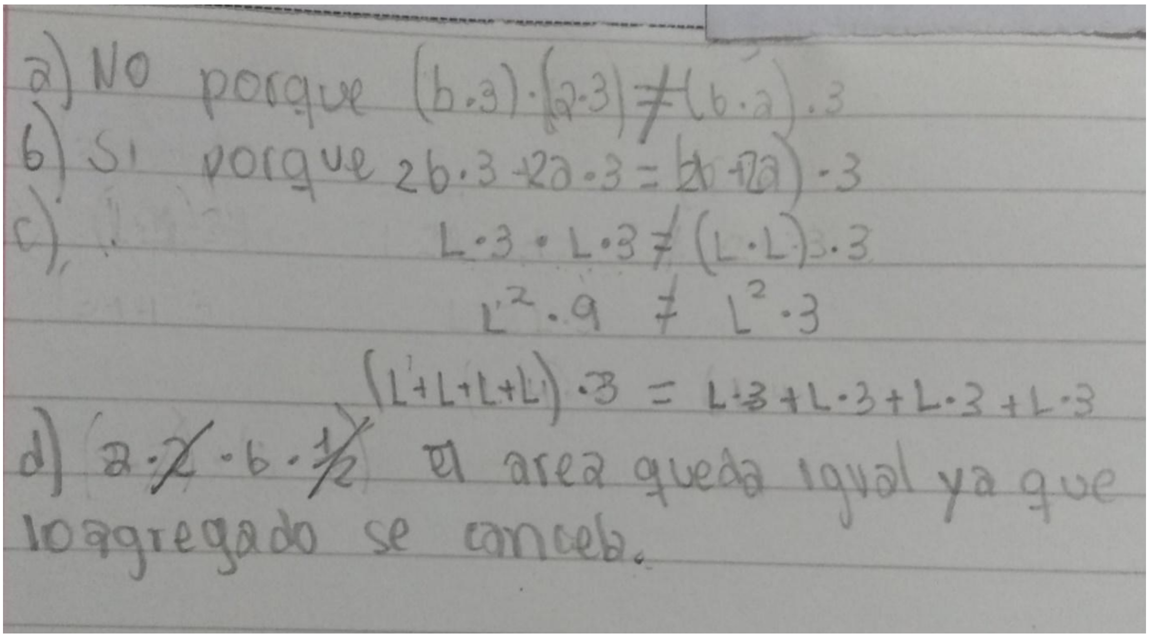

a) No porque $(b.3).(a.3) \neq (b.a).3$
b) Si porque $2b.3 + 2a.3 = (2b + 2a).3$
c) $L.3 \cdot L.3 \neq (L.L).3$
$L^2.9 \neq L^2.3$
$(L+L+L+L).3 = L.3+L.3+L.3+L.3$
d) $(a.\cancel{2}.b.\frac{1}{\cancel{2}})$ el area queda igual ya que lo agregado se cancela.

Figura 4. Resolución Grupo 4

Análogamente a lo realizado en el caso del Grupo 2 con el Problema 1, no desplegaremos la tabla que explicita objetos y procesos llevados adelante por los estudiantes sino que expondremos una síntesis de dicho análisis ontosemiótico.

Esta producción se caracteriza por el uso casi exclusivo de lenguaje simbólico algebraico, evocando con “b” a la base y con “a” a la altura. Las definiciones de área y perímetro de un rectángulo y de un cuadrado están implícitas, aunque se manifiesta que se entienden ligadas a sus fórmulas. También observamos que, en general, no explicitan las propiedades disponibles que les permiten realizar las transformaciones de las expresiones algebraicas utilizadas.

Es de destacar que en esta práctica no se particulariza a través de ejemplos, ni siquiera para refutar algunas de las afirmaciones. Se transitan por diferentes procesos de materialización y significación, por ejemplo, en el inciso a), a partir de significar el área de un rectángulo como el producto de la base por la altura y el triple de un número como dicho número multiplicado por 3, logran materializar el área de un rectángulo con los lados triplicados con la expresión “(b.3).(a.3)” y plantean que la misma es diferente de la expresión “(b.a).3” (que evoca el triple del área del rectángulo original). De este modo argumentan que al triplicar los lados el área no se triplica.

Toda la práctica se caracteriza por argumentaciones próximas a demostraciones, y aunque se utiliza un lenguaje simbólico-algebraico que permite atrapar la generalidad no se explicita el razonamiento que lleva a plantear las igualdades (o desigualdades) ni las definiciones y/o propiedades que las justifican.

En esta actividad matemática se generan, mediante un lenguaje algebraico, objetos intensivos de grado dos, por ejemplo, “a” representa la altura de un rectángulo, "a.b" se entiende como el área del rectángulo original, y se opera con ellos conservando la equivalencia de las expresiones por ejemplo: "L.3.L.3 = L^2.9". Emergen, aunque de manera implícita, propiedades generales (nuevos intensivos) tales como: "si se triplica la base y altura de un cuadrado, el perímetro también se triplica". Lo cual nos lleva a reconocer en esta práctica rasgos esenciales de un *nivel 3 de algebrización*.

Los análisis realizados nos permiten ver que, en este problema, ambos grupos de estudiantes utilizan las mismas definiciones de base, altura, lado, pero el modo de significar al área como el espacio que ocupa la figura le permite al Grupo 3 lograr un tipo de argumentación más cercana al ejemplo genérico, que podría constituirse en un avance en la transición entre una pruebas pragmática y una intelectual. Por otra parte, el establecimiento de funciones semióticas que permitieron poner en relación la forma de calcular el área y el perímetro con una simbolización que atrapa estos objetos, permitió al Grupo 4, operar con estos representaciones utilizando (implícitamente) definiciones y propiedades, acercándose así a demostraciones de las propiedades generales.

Más allá de la complejidad ontosemiótica que exige un trabajo matemático personal de mayor algebrización (que se pone de manifiesto en el análisis de la práctica del último grupo), observamos cómo el establecimiento de determinadas funciones semióticas, que permiten reconocer pertinentes simbolizaciones que atrapen los rasgos estructurales de los objetos y operativizar transformaciones de los mismos, resultan factores necesarios para avanzar en los tipos de pruebas.

4. Reflexiones finales

La investigación realizada nos permite poner en evidencia que los objetos primarios disponibles (puestos en escena a través de los significados que se les asignan) y los procesos duales transitados son factores que influyen y condicionan fuertemente el tipo de validación lograda por los estudiantes de la escuela secundaria.

En ambos problemas, los significados personales atribuidos a los objetos intervinientes (esto es, el funcionamiento personal de los procesos de representación-significación), el uso de ejemplos o de particulares arbitrarios para validar una propiedad general (es decir, las características personales que adquiere el proceso dual de particularización-generalización), el lenguaje utilizado para representar y evocar los objetos ideales (es decir, el modo de haber transitado los procesos de materialización), se constituyeron en factores determinantes del tipo de prácticas argumentativas logradas.

En particular, se pudo observar cómo el proceso de generalización está influenciado, no sólo por el tipo de particulares "de los que se parte" sino también por los avances o limitaciones en el funcionamiento de los otros procesos: de materialización, significación y reificación.

Las diferentes redes de relaciones de objetos y procesos generaron una variedad de prácticas validativas (pragmáticas e intelectuales), situadas en distintos niveles de algebrización, algunas de ellas claramente en un nivel 1, otras que basculan entre un nivel 1 y un nivel 2 y otras más cercanas a la demostración situadas en un nivel 3 de algebrización. Esto nos coloca, como docentes, ante la necesidad de recuperar las distintas prácticas de los estudiantes, no solo como "diferentes procedimientos" sino teniendo en cuenta toda la trama de objetos y procesos que se ponen en funcionamiento.

Los conflictos semióticos efectivos vinculados a cada uno de los procesos duales permitieron explicar ciertas dificultades recurrentes que obstaculizaron el avance en el tipo de validación. Esto nos permite, a su vez, delimitar algunos aspectos que serían necesarios movilizar a fin de destrabar dichos conflictos y permitir el avance en el tipo de prueba y en el nivel de algebrización. Entre los más relevantes podemos mencionar: la transformación del significado de los elementos de los que se parte, que requieren ser entendidos como "elementos cualesquiera", la construcción de un lenguaje algebraico que permita materializar esos elementos generales (lo cual apunta a la generación de intensivos de grado dos expresados en lenguaje simbólico literal) y la utilización de definiciones y propiedades que permitan transformar y operar con esos intensivos.

Los análisis realizados en nuestra investigación ponen al descubierto la complejidad ontosemiótica de los procesos de validación de los estudiantes y proporcionan un marco de referencia para pensar cómo afrontar el tema de la validación en un escenario educativo muy especial como lo es la entrada a la universidad, generando criterios para seleccionar tipos de problemas que nos permitan recuperar las prácticas de los estudiantes, sus significados personales y que nos posibiliten trabajar con ellos sobre los aspectos que mencionamos anteriormente.

Por último, cabe destacar que este estudio nos permite afirmar que la validación es un "mega-proceso", así como lo son la resolución de problemas o la modelización matemática, en tanto involucra el complejo funcionamiento de una serie de procesos que la atraviesan y condicionan. Consideramos que el conocimiento de esta complejidad, respecto al desarrollo de uno de los procesos más relevantes del hacer matemático por parte de los profesores tanto de secundaria como de los primeros años de la universidad, tendría que ser tenida en cuenta para repensar actividades de articulación entre ambos subsistemas educativos.

5. Referencias

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*. 18 (2), 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los alumnos de matemática*. Colombia: Una empresa docente.

Barallobres, G. (2017). Ciertos fenómenos didácticos que caracterizan las dificultades de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51, 27-47. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2017/51/01.pdf

Barreiro, P., Carnelli, G., Falsetti, M., Leonián, P. (2012). Acercamiento a la validación en Matemática de estudiantes de pre-grado en clases ordinarias *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología*, 3 (2) Recuperado el 1 de junio de 2021 de: http://www.exactas.unca.edu.ar/riecyt/VOL%203%20NUM%202/Archivos%20Digitales/RieCyT%20V3%20N2%20Set%202012%20Doc%20-7-.pdf

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M. M. Pinto, y T. F. Kawasaky (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* 1, 179-204. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Brousseau, G. (1995). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publisher.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Duarte, Betina (2010). *Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en matemática. La Función Exponencial, el Razonamiento Matemático y la Intervención Docente en la Escuela Media*. [Tesis Doctoral. Universidad de San Andrés. Buenos Aires. Argentina]

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2-3), 237-284. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: https://revue-rdm.com/2002/un-enfoque-ontologico-y-semiotico/

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico. del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Recuperado el 1 de junio de 2021 de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino.pdf

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32 (1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J.D., Batanero, C., y Font, V (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. Versión ampliada en español recuperada el 1 de junio de 2021 de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/JDGodino_CBatanero_VFont_sintesis_EOS%202009.pdf

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8,177-142. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_RAE-PRI-SEC.pdf

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34* (2/3), 167-200. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_ID-_EOS_31mayo2014.pdf

Illuzi, A. y Sessa, C. (2014) Aportes para la enseñanza. Nivel secundario. Ministerio de educación. Buenos Aires Ciudad. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/matematica_cuadratica_13_06_14.pdf

Mantica, A.M. y Carbó, A.L. (2016). Estudio de procesos de formulación y validación de conjeturas con estudiantes de secundaria en interacción con pares . *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 48* ,79-102. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2016/48/146-706-4-Corrigido.pdf

Mariotti, M. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez, & P. Boero, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future.* 173-204. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: http://math.unipa.it/~grim/YESS-5/PMEbook_MariottiNew.pdf

Ministerio de Educación. (2012) Núcleos de aprendizaje prioritarios. Campo de Formación general. Ciclo orientado Educación Secundaria. Matemática. http://entrama.educacion.gob.ar/uploads/nap/6-Matem%C3%A1tica%20OR_%20completa.pdf

Panizza, M. (2005). *Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Recio, A. y Godino, J.D. (2001). Institucional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48,83-99. https://doi.org/10.1023/A:1015553100103

Saiz, I y Etchegaray, S. C. (2915) Módulo: Enseñanza de la aritmética.Nuestra Escuela. Programa Nacional de Educación Permanente. Ministerio de Educación y deportes. Argentina. Recuperado el 1 de junio de 2021 de: https://docplayer.es/74002050-Modulo-ensenanza-de-la-aritmetica-y-enteros.html

Stylianides, A., Bieda, K. y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. En: A.,Gutiérrez; G. Leder y P. Boero, (eds). *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, Rotterdam*, The Netherlands: Sense Publishers , 315-351, http://dx.doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6

Sowder, L. y Harel, G. (1998). Types of Students' justifications.*The Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Autores:

Markiewicz, María Elena. Profesora Adjunta en la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina). Magister en Didáctica de la Matemática. (UNRC). Docente investigadora en el área de Didáctica de la Matemática. Co-directora de proyecto de investigación. Cuenta con publicaciones sobre temas del área. Email: mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar

Silvia Catalina Etchegaray Profesora titular en la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina). Magister en Didáctica de la Matemática. (UNRC). Ha dirigido numerosos proyectos de investigación en Didáctica de la Matemática. Cuenta con publicaciones sobre temas relacionadas al dicha área de conocimiento. Email: setchegaray@exa.unrc.edu.ar

Bettina Aylén Milanesio. Profesora en Matemática por la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina). Se desempeña como Becaria de Conicet para el Doctorado en Cs. De la Computación. Ha realizado cursos de posgrado y una beca de investigación, vinculados a la Didáctica de la Matemática. Email:bettinamilanesio@gmail.com