

<http://www.fisem.org/www/index.php>
<https://union.fespm.es/index.php/UNION>

Matemáticas en contexto en Educación Primaria: conexiones con el entorno y la música

Ángel Alsina, Manoli Contreras y Joaquim Reyes

Fecha de recepción: 19/01/2021
 Fecha de aceptación: 17/11/2021

<p>Resumen</p>	<p>Se describe un enfoque competencial de la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a partir de actividades contextualizadas. Para ello, en la primera parte se fundamenta teóricamente el conocimiento pedagógico para la enseñanza de las matemáticas a partir de diversos modelos de conocimiento del profesorado y se presentan diversas recomendaciones para la implementación de actividades matemáticas competenciales, a partir del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM). En la segunda parte, se presentan dos actividades en contexto: “Matemáticas en la calle” y “Musicomáticas”, en las que se trabajan las matemáticas en conexión con el entorno y la música, respectivamente. Palabras clave: Conexiones matemáticas, matemáticas en contexto, enseñanza de las matemáticas, competencias clave, educación primaria.</p>
<p>Abstract</p>	<p>A competency-based approach to teaching mathematics in Primary Education is described through contextualised activities. To this end, the first part provides a theoretical basis for the teaching of mathematics based on various models of teacher knowledge and presents various recommendations for the implementation of mathematical competence activities, based on the Mathematics Teaching Itinerary Approach (EIEM). In the second part, two activities in context are presented: "Mathematics in the street" and "Musicomáticas", in which mathematics is worked on in connection with the environment and music, respectively. Keywords: Mathematical connections, mathematics in context, mathematics teaching, key competencies, primary education.</p>
<p>Resumo</p>	<p>Uma abordagem de competências para o ensino de matemática na Educação Primária é descrita a partir de atividades contextualizadas. Para o efeito, a primeira parte descreve o conhecimento pedagógico para o ensino da matemática com base em vários modelos de conhecimento do professor e apresenta várias recomendações para a implementação de atividades matemáticas de competência, com base na Abordagem do Itinerários de Ensino de Matemática (EIEM). Na segunda parte, são apresentadas duas atividades em contexto: “Matemática de rua” e “Musicomática”, em que a matemática é trabalhada no contexto da vida quotidiana e da música, respetivamente. Palavras-chave: Conexões matemáticas, matemática em contexto, ensino de matemática, competências-chave, educação básica.</p>

1. Introducción

Hace ya algunos años comprobé que la mejor manera de enseñar matemáticas es encontrar elementos significativos que interesen y motiven al alumnado y no presentar múltiples tareas sin un objetivo real. Para lograr que estos elementos sean significativos es conveniente que las actividades que ofrecemos al alumnado busquen siempre ser interdisciplinares. Las matemáticas no pueden ser una materia alejada de la realidad, han de estar relacionadas con el entorno cercano del alumnado para que puedan tener interés en ellas y las vean como una materia útil.

La relación existente entre la música y las matemáticas y el interés que este tema suscita son aspectos que se han estudiado e investigado a lo largo de la historia de la música y de las matemáticas. Fruto de esta trayectoria, algunos docentes se plantean desde ya hace años trasladar esta relación al ámbito educativo para observar y aclarar las repercusiones de la educación musical para el aprendizaje matemático y viceversa.

Estos fragmentos, que ilustran una visión integrada de la enseñanza de las matemáticas, forman parte de las comunicaciones que dos maestros en ejercicio con una amplia trayectoria docente (la segunda y el tercer autor de este artículo), presentaron en la tercera edición del *Congrés Català d'Educació Matemàtica* (<https://c2em.feemcat.org>), celebrado de forma *online* en Catalunya (España) durante el confinamiento como consecuencia de la pandemia ocasionada por la COVID-19. Este congreso, en el que participaron casi 800 maestros y maestras de Educación Infantil y Primaria, profesorado de Secundaria y Bachillerato, futuro profesorado y profesorado universitario, principalmente, fue una evidencia más de que los eventos de Educación Matemática que se celebran en todo el mundo –congresos, jornadas, simposios, seminarios, etc.– son un excelente espacio de intercambio de conocimientos tanto didácticos como disciplinares para mejorar la identidad profesional para enseñar matemáticas y fomentar el desarrollo profesional.

Este artículo, como se indica en el propio título, se focaliza en uno de estos conocimientos, enseñar matemáticas en contexto, al tratarse de un conocimiento pedagógico que puede tener un impacto positivo en el aprendizaje de las matemáticas del alumnado. Se usa intencionadamente el término condicional porque las matemáticas en contexto no son garantía de aprendizaje, si no van acompañadas de un diseño de las actividades y una gestión de la enseñanza eficaz.

Desde este prisma, el artículo se estructura en dos partes: en la primera parte, se fundamenta teóricamente el conocimiento pedagógico para la enseñanza de las matemáticas a partir de diversos modelos de conocimiento del profesorado (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo et al., 2018; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Shulman, 1986) y, seguidamente, se presentan diversas recomendaciones para la implementación de actividades matemáticas en contexto, principalmente a partir del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), planteado por Alsina (2018, 2019, 2020a). En la segunda parte, se describen dos actividades matemáticas competenciales en contexto implementadas en Educación Primaria: la primera actividad, “Matemáticas en la calle”, se ha llevado a cabo en los primeros niveles de Educación Primaria (6-8 años) con el propósito de presentar al alumnado actividades de numeración que vayan más allá de los típicos ejercicios de conteo de material de clase, piezas de construcción o similares; mientras que la segunda actividad, “Musicomáticos”, implementada en el último nivel de infantil y toda la primaria (5-12 años), tiene por objeto tratar de mejorar las competencias

matemáticas y musicales del alumnado a través del trabajo conjunto de ambas materias.

2. El conocimiento pedagógico para la enseñanza de las matemáticas: orientaciones para el diseño y la gestión de actividades matemáticas en contexto.

Proponer orientaciones didácticas implica, necesariamente, referirse al conocimiento pedagógico para la enseñanza de las matemáticas. Por esta razón, como se ha indicado, en esta primera parte se fundamenta este conocimiento del profesorado a partir de diversos modelos (Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018; Godino et al., 2017; Shulman, 1986) y, seguidamente, se presentan algunas recomendaciones para el diseño y la gestión de actividades matemáticas en contexto, principalmente a partir del ELEM (Alsina, 2018, 2019, 2020a).

2.1. El conocimiento pedagógico para la enseñanza de las matemáticas: ¿qué es y qué implica?

Las prácticas de enseñanza determinan en buena medida lo que el alumnado aprende y cómo lo aprende, razón por la que la investigación educativa se ha interesado en estudiar el conocimiento que el profesorado manifiesta en sus prácticas docentes. Desde este prisma, una de las propuestas teóricas más relevantes fue desarrollada durante la década de los ochenta del siglo XX por Shulman (1986). Entre las categorías de conocimiento base para la enseñanza que propone este autor, se destaca la noción de conocimiento pedagógico del contenido (PCK, por su acrónimo en inglés) que se describe como aquel que permite al profesorado representar y formular una materia para hacerla comprensible a otros.

A partir de la propuesta de Shulman (1986) para analizar el conocimiento que pone en juego el profesorado en sus prácticas de enseñanza de las asignaturas escolares, han ido surgiendo diversos enfoques y modelos en el contexto de la investigación en educación matemática que tratan de ofrecer un marco para describir y analizar el conjunto de conocimientos del profesorado para enseñar matemáticas. Por su impacto, nos referimos sintéticamente a tres de ellos, y nos focalizamos exclusivamente en el dominio acerca del conocimiento pedagógico para la enseñanza.

El primer marco, desarrollado en Michigan (Estados Unidos), tenía como objetivo indagar qué hacía el profesorado y qué matemática utilizaban durante el proceso de enseñanza en Educación Primaria. Como consecuencia de sus hallazgos, los investigadores describen el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), un conjunto de conocimientos y habilidades que requiere el profesorado para gestionar las tareas y los problemas recurrentes en la enseñanza de las matemáticas (Ball et al., 2008). En este modelo, el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) se refiere a la comprensión de lo que puede pensar o hacer matemáticamente el alumnado, incluyendo los errores que cometen, el conocimiento del contenido y la enseñanza que el profesorado utiliza para gestionar tareas o secuencias de aprendizaje y, finalmente, el conocimiento del contenido y el currículo, que es un conocimiento acerca de los programas y los materiales instruccionales. Para Depaepe, Verschaffel y Kelchtermans (2013), el PCK descrito en el MKT es uno de los mayores aportes de este modelo a la conceptualización del conocimiento del profesorado de matemáticas.

El segundo marco, desarrollado principalmente en la Universidad de Granada (España), se basa en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Desde este planteamiento teórico, Godino et al. (2017) proponen el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM), que es una evolución del modelo de categorías de los conocimientos didácticos-matemáticos del profesor (CDM) descrito por Godino (2009) y Pino-Fan y Godino (2015). Muy sintéticamente, este modelo incluye tanto los conocimientos como las competencias del profesor de matemáticas, y se utilizan diversas herramientas de análisis de las prácticas matemáticas y didácticas introducidas en el EOS: las nociones de sistema de prácticas (análisis de significados globales), configuración ontosemiótica (análisis ontosemiótico de las prácticas), dimensión normativa (análisis normativo), trayectorias didácticas (gestión de configuraciones didácticas) e idoneidad didáctica (análisis de la idoneidad didáctica) se utilizan como base para delimitar sub-competencias de la competencia general de análisis e intervención didáctica, propia del profesor de matemáticas.

Finalmente, el tercer marco, desarrollado en la Universidad de Huelva (España), parte de la base que todo el conocimiento del profesorado es especializado. Desde esta perspectiva, Carrillo et al. (2018) plantean el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), que incluye, entre otros, un dominio de conocimiento didáctico del contenido (PCK) y un dominio de creencias del profesor sobre qué son las matemáticas, cómo se enseñan y cómo se aprenden. En el PCK se incluye el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, que agrupa teorías de enseñanza de las matemáticas, recursos de enseñanza y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos; el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas, que contiene teorías de aprendizaje, fortalezas y dificultades del alumnado, procesos y estrategias habituales o inusuales que utilizan y aspectos emocionales del aprendizaje; por último, el conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas incluye el conocimiento del profesorado de los contenidos que debería aprender el alumnado, la profundidad con que dichos contenidos deberían ser desarrollados y las secuenciación de los contenidos en un curso o nivel educativo en particular.

A modo de síntesis, en la Tabla 1 se presentan los principales aspectos del conocimiento pedagógico para la enseñanza que se consideran en cada uno de los marcos descritos y qué implicaciones tiene.

	MKT (Ball et al., 2008)	CCDM Godino et al. (2017)	MTSK (Carrillo et al., 2018)
Dominio/ Categoría	Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)	Competencia de análisis e intervención didáctica	Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Subdominios/ herramientas	Conocimiento del contenido y el alumnado Conocimiento del contenido y la enseñanza Conocimiento del contenido y el currículo	Sistema de prácticas Configuración ontosemiótica Dimensión normativa Trayectorias didácticas Idoneidad didáctica	Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje en Matemáticas
Principales implicaciones para la práctica docente	El profesorado debería conocer lo que puede pensar o hacer matemáticamente el alumnado, incluyendo los errores; la gestión de tareas o secuencias de aprendizaje; y, finalmente, los programas y materiales instruccionales.	El profesorado debería estar capacitado para abordar los problemas didácticos básicos que están presentes en la enseñanza. Además, en las prácticas didácticas puestas en juego en la resolución de problemas didácticos también intervienen objetos matemáticos y didácticos específicos (conocimientos), que deben ser conocidos por el profesor.	El profesorado debería conocer las teorías de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; los recursos y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos; las fortalezas y dificultades del alumnado; los procesos y estrategias de aprendizaje habituales o inusuales y los aspectos emocionales; y, finalmente, los contenidos que se deberían enseñar.

Tabla 1. Principales aspectos del conocimiento pedagógico para la enseñanza de las matemáticas

2.2. Planificación y gestión de actividades matemáticas en contexto.

Del conjunto de conocimientos pedagógicos descritos en la Tabla 1, se aborda la planificación y gestión de la enseñanza de las matemáticas en contexto por su posible impacto positivo en aspectos tanto cognitivos como actitudinales del alumnado, siempre que dicha planificación y gestión se ajusten tanto a sus necesidades reales de aprendizaje como a sus intereses.

En este artículo, se asume que un contexto es una situación más o menos problemática que puede ser objeto de estudio y que genera preguntas o problemas que requieren las matemáticas para contestarlas o resolverlas (Alsina, 2011). Desde esta perspectiva, un contexto no debería entenderse sólo como el contexto del aula, el contexto social o familiar de la escuela o del alumnado, o el contexto histórico, sino que es un término mucho más general que engloba todas aquellas situaciones y actividades que tienen sentido para el alumnado y fomentan su pensamiento matemático crítico (Niss, 1995).

Ante esta perspectiva, surgen algunas preguntas: ¿por qué es interesante utilizar contextos en la clase de matemáticas?; ¿qué funciones tienen?; ¿para qué sirven?; ¿qué tipos de contextos podemos utilizar?; ¿cómo trabajar? Reeuwijk (1997), investigador y educador del Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht (Países Bajos), expone cinco motivos para utilizar contextos:

1. Pueden motivar al alumnado. Asimismo, pueden ayudarles a comprender por qué las matemáticas son útiles y necesarias. Pueden aclarar por qué ciertos ámbitos de las matemáticas revisten importancia, y pueden contribuir a que los alumnos

entiendan el modo en que se emplean las matemáticas en la sociedad y en la vida cotidiana.

2. Pueden favorecer que el propio alumnado aprenda a usar las matemáticas en la sociedad, además de descubrir qué matemáticas son relevantes para su educación y profesión posteriores.
3. Pueden incrementar el interés del alumnado por las matemáticas y la ciencia en general.
4. Pueden despertar la creatividad del alumnado, impulsarlos a utilizar estrategias informales y de sentido común al afrontar, por ejemplo, la resolución de una situación problemática o de un juego.
5. Puede actuar como mediadores entre la situación concreta y las matemáticas abstractas.

Desde este prisma, en relación a las matemáticas en contexto, Alsina (2011, p. 14) indica que:

El uso de contextos en la clase de matemáticas, pues, puede contribuir a facilitar el aprendizaje de esta disciplina pero, sobre todo, a comprender cuál es el sentido de las matemáticas, cuáles son sus verdaderas funciones: formativa, teniendo en cuenta que los contextos permiten pasar progresivamente de situaciones concretas o situaciones abstractas (matematización progresiva); instrumental, al considerar que los contextos son, en realidad, herramientas que favorecen la motivación, el interés o el significado de las matemáticas; y aplicada, al fomentar el uso de las matemáticas en contextos no exclusivamente escolares y, por lo tanto, contribuir a la formación de personas matemáticamente más competentes.

Previamente, Alsina (2010) había planteado un diagrama piramidal en el que se comunicaba de forma sencilla el tipo de contextos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y su “frecuencia de uso” más recomendable, en función de la posición que ocupa cada contexto: de más o menos frecuencia desde la base hacia la cúspide. En este diagrama piramidal, más conocido como “Pirámide de la Educación Matemática”, no se descartaba ningún recurso, sino que solo se pretendía informar sobre la conveniencia de restringir algunos de ellos a un uso ocasional y, por eso, se consideró que podía ser una herramienta útil para el profesorado preocupado por hacer de su metodología una garantía de educación matemática.

En la base se situaban los contextos que necesita todo el alumnado para aprender matemáticas y que, por lo tanto, se podrían y deberían “consumir” diariamente: las situaciones problemáticas y los retos que surgen en la vida cotidiana de cada día, la observación y el análisis de los elementos matemáticos del entorno, la manipulación con materiales diversos y los juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después seguían los que deben “tomarse” alternativamente, como los recursos literarios y los recursos tecnológicos. Y, por último, en la cúspide, se ubicaban los recursos que deberían usarse de forma ocasional, concretamente los libros de texto, por las razones que ya se han expuesto en la introducción.

Con los años, este planteamiento ha evolucionado hacia el EIEM (Alsina, 2018, 2019), asumiendo que la palabra “itinerario” se refiere a una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres niveles

1. Enseñanza en contextos informales: la enseñanza del contenido matemático se inicia en situaciones reales o realistas, como por ejemplo el entorno inmediato, o bien materiales manipulativos y juegos, en los que el conocimiento de la situación y las estrategias se utilizan en el contexto de la situación misma, apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.
2. Enseñanza en contextos intermedios: la enseñanza del contenido prosigue en contextos que hacen de puente entre los contextos reales o realistas de la fase previa y los contextos formales de la fase posterior, como por ejemplo algunos recursos literarios (cuentos y canciones) y tecnológicos (*applets*, robots educativos programables, etc.), que a través de la exploración y la reflexión conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático.
3. Enseñanza en contextos formales: la enseñanza del contenido finaliza en contextos gráficos y simbólicos, como por ejemplo las fichas y los libros de texto, en los que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales para completar de esta forma el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico.

Como se indica en Alsina (2019), el EIEM se aleja de una visión de la enseñanza de las matemáticas basada en la repetición y la práctica de ejercicios que presentan los libros de texto como principales estrategias didácticas para “aprender” matemáticas, y en su lugar, plantea que es necesario fomentar la comprensión más que la mera memorización, la actividad heurística más que la pura ejercitación, o el pensamiento matemático crítico más que la simple repetición.

Para ello, Alsina (2020a) indica que esta visión contemporánea de la educación matemática requiere, primero, de un amplio dominio profesional de los conocimientos matemáticos a enseñar, puesto que no se puede enseñar bien lo que no se sabe y, segundo, un amplio dominio profesional acerca de las formas de enseñar dichos conocimientos, puesto que el alumnado de hoy no tiene las mismas necesidades para aprender matemáticas que el alumnado de años atrás, por lo que no tiene ningún sentido enseñar lo mismo que hace décadas y menos aún enseñarlo de la misma forma. Desde este prisma, describe diversas recomendaciones que se sintetizan a continuación (Alsina, 2020a): 1) planificar y gestionar la enseñanza de los contenidos a través de los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, representación y conexiones, es decir, promover una enseñanza que implique pensar y hacer, más que memorizar definiciones y procedimientos; 2) promover prácticas de enseñanza-aprendizaje que consideren tanto al alumnado como al profesorado, en las que haya espacio tanto para que el alumnado indague y construya su conocimiento, como para que el profesorado explique de forma directa un conocimiento matemático; 3) considerar contextos reales, intermedios y formales, con distinto protagonismo en función del nivel escolar; 4) garantizar el principio de abstracción progresiva, desde lo concreto hacia lo abstracto, de manera que, a lo largo de un itinerario, se considere la visualización, la manipulación, la simbolización y la abstracción; 5) disponer de criterios objetivos para la selección de los contextos de enseñanza de las matemáticas, a partir de distintas herramientas; y 6) promover la educación matemática inclusiva a través de itinerarios de enseñanza que consideren la diversidad del alumnado, en todas sus dimensiones (cognitiva, cultural, de género, motriz, sensorial, etc.).

Con base en estos antecedentes, a continuación, se describen dos actividades matemáticas competenciales en contexto que se han planificado considerando las conexiones con el entorno y la música, principalmente, y se gestionan a partir de una enseñanza basada en los procesos.

3. Ejemplos de actividades matemáticas competenciales en contexto en Educación Primaria.

3.1. Matemáticas en la calle.

Escuela/ Maestro	Escola Pública Turó de Guiera (Cerdanyola del Vallès, Barcelona)/ Joaquim Reyes
Niveles	1º-2º de Educación Primaria (6-8 años)
Objetivos	Conectar conocimientos de matemáticas con el entorno inmediato. Promover el desarrollo del sentido numérico. Explorar el entorno inmediato. Aprender a utilizar correctamente instrumentos de dibujo.
Contenidos	<p>Contenidos de matemáticas</p> <ul style="list-style-type: none"> - Estrategias de conteo. - Interpretación y representación de series. - Búsqueda de distintas soluciones a un problema. - Comparación de distintas cantidades numéricas. <p>Contenidos de conocimiento del medio</p> <ul style="list-style-type: none"> - El barrio, las calles, los edificios y sus partes. <p>Contenidos de educación artística</p> <ul style="list-style-type: none"> - Uso de la regla como elemento de dibujo.

Tabla 2. Datos descriptivos de la actividad “Matemáticas en la calle”.

Actividad 1. Observación y representación de la fachada de mi edificio.

Considerando que la escuela se ubica en un entorno urbano (Figura 1), la primera actividad empieza en el aula planteando diversas preguntas al alumnado: ¿cómo es el edificio donde vivís?, ¿cómo se ve desde la calle?, ¿qué cosas veis en el edificio?



Figura 1. Vista desde la ventana del aula.

Después de un primer diálogo en el que el alumnado habla de los edificios donde viven y de sus características principales, se pide que dibujen la fachada de su edificio intentando recordar el número de pisos, ventanas y balcones que hay.

Para realizar el dibujo se facilita un Din A3, que previamente doblan por la mitad, y en la primera mitad dibujan la fachada. Una vez realizada esta primera parte de la actividad, se pide al alumnado que, cuando lleguen a su casa, realicen un pequeño boceto de la fachada, contando realmente la cantidad y distribución exacta de los pisos, ventanas y balcones. No hace falta que sea un gran dibujo, sino simplemente un esquema atendiendo a los parámetros indicados. Es importante que, sobre todo, anoten los pisos que hay y la distribución de ventanas y balcones que, normalmente, es regular en todos los pisos (Figura 2).

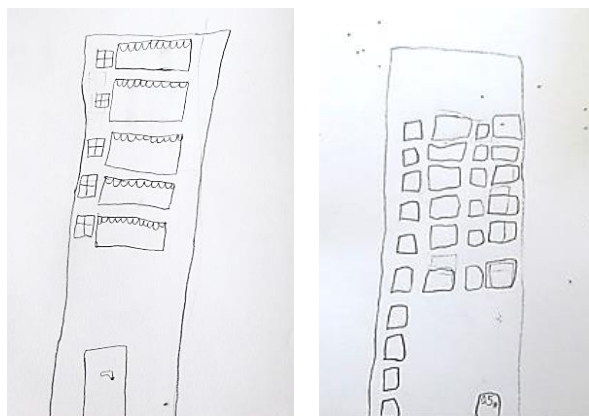


Figura 2. Dibujos inicial y esquemático.

En el dibujo esquemático de la Figura 2, se observa como este alumno se ha fijado en dibujar el número de pisos que hay en su edificio y en reflejar que la serie de ventanas y balcones es 1-1-1-1. Otros alumnos mayores lo representan algunas veces añadiendo números: dibujan solo la serie de un piso y anotan el número de pisos que hay.

Después de dos o tres días, cuando traen el esquema a la clase, rellenan la segunda parte del Din A3: deben repetir la fachada de su edificio, pero colocando los pisos, ventanas y balcones exactos que hay, consultando el esquema que han hecho en su casa. Al contrario que en el primer dibujo, en el que tenían libertad total para representar su idea, aquí se marcan unas consignas: a) debe ser un dibujo en el que las líneas del edificio se tracen correctamente y en el sentido adecuado, buscando, respectivamente, la perpendicularidad y paralelismo con el suelo; b) el edificio debe mantenerse en pie y no caerse, por lo que es necesario que esté en posición vertical; y c) los pisos deben tener los distintos elementos alineados, por lo que deben usar la regla como elemento de dibujo (Figura 3).



Figura 3. Uso de la regla para representar el edificio.

Una vez terminada la tarea, cada alumno dispone de un Din A3 con dos representaciones de sus edificios: una imaginaria y otra real (Figura 4).



Figura 4. Dibujo imaginado y real.

Actividad 2. Estrategias de conteo.

A continuación, se lleva a cabo una tarea de forma individual o por parejas para ayudar al alumnado a aprender estrategias que les sean útiles para contar los elementos de su edificio. Para ello, se utilizan piezas de mosaico o similares de distintos colores, hojas de papel y los dibujos previos del propio edificio:

- Primero representan su edificio (uno de los dos, si trabajan en parejas) con las piezas de mosaico, usando un color diferente para cada piso. No es necesario distinguir entre ventanas y balcones y, si su edificio es de más de 5 o 6 pisos, solo representan esta cantidad como máximo.
- Se plantean diversas preguntas, como ¿cuántas ventanas tenemos?, y la más importante y necesaria para encontrar estrategias de conteo rápido: ¿cómo podemos contar más rápido estas ventanas?
- Se introduce la noción de contar haciendo grupos y se pregunta qué grupos podrían realizar para conseguir un cálculo más rápido. Puesto que se ha insistido en representar cada piso de un color distinto, acostumbran a ver enseguida que hay unas estructuras horizontales regulares que pueden utilizar para agrupar cantidades y contar mejor. Una vez sumadas las cantidades horizontales, se les pregunta si habría otra forma de hacerlo, y algunos descubren que también pueden calcular utilizando las estructuras verticales.

En la primera imagen de la Figura 5, por ejemplo, se observa como una alumna de 6 años primero encuentra, como medio de cálculo más eficiente, las estructuras verticales y va contando primero dos bloques ($3+3$), luego tres bloques ($3+3+3$) y al fin los cuatro bloques ($3+3+3+3$). En este momento, se le hace reflexionar sobre si puede encontrar otra forma de conteo rápido y si hay alguna manera de no tener que repetir cada vez sumas ya hechas. Cuando utiliza las estructuras horizontales, ya mantiene la cantidad contada en la primera suma para añadir el tercer bloque: $4+4 = 8$ y luego $8+4 = 12$ (no $4+4+4$, que es el sistema que se usa la primera vez). Es muy importante en estas edades incidir en el recuerdo de la cantidad contada y, a partir de ella, seguir sumando y no volver a empezar otra vez desde 0. En la segunda imagen de la Figura 5 aparece el resultado de otra alumna de 7 años que ya ha entendido el procedimiento del sumar “a partir de”.



Figura 5. Conteo con piezas de mosaico.

Actividad 3. Conteo y comparación de la cantidad de ventanas y balcones del propio edificio.

Una vez trabajadas las estrategias de conteo y después de que el alumnado haya asociado la noción de cálculo rápido a agrupar cantidades, se pide que cuenten todas las ventanas del edificio imaginado y luego todas las ventanas del edificio real y, a continuación, se sigue el mismo procedimiento con los balcones. En algunos casos, como en alumnado de menor edad o con dificultades de aprendizaje, es recomendable limitar el número de pisos.

A continuación, se pide al alumnado que comparen cantidades entre el edificio imaginado y el edificio real, utilizando los comparativos “más... qué” o “menos... que”, que suelen ser complejos para algunos. Para ello, se plantean diversas preguntas: ¿hay más ventanas en un piso del edificio real o en uno del piso imaginado?, ¿cuántas ventanas hay más (o menos) en un piso del edificio real que en uno del edificio imaginado?, ¿hay más balcones en el edificio imaginado o en el real?, ¿cuántos balcones hay más (o menos) en el edificio imaginado que en el real?, ¿cuántos pisos hay más (o menos) en un edificio que en el otro? y otras cuestiones que pueden ir surgiendo relacionadas con la comparación y conteo de los distintos elementos.

Actividad 4. Representación de edificios imaginarios, con consignas previas.

Finalmente, cuando el alumnado ya ha llevado a cabo las tareas previas descritas con los elementos de su propio edificio, se plantean nuevas preguntas para transferir lo aprendido a otras situaciones. Desde este prisma, se les plantean nuevos retos que consisten en representar un nuevo edificio con las piezas de mosaico, atendiendo a consignas dadas, promoviendo de esta forma la reversibilidad del pensamiento: en las situaciones previas, partían de un edificio real y buscaban el nº de ventanas, balcones, etc., mientras que en esta tarea, se les plantea la situación hipotética de un edificio con un determinado nº de ventanas, balcones, etc., y deben pensar estrategias numéricas para repartirlos de forma regular en diversos pisos. Por ejemplo, se les formulan situaciones como las siguientes: 1) Si debemos construir un edificio que tenga 16 ventanas, ¿cómo las podemos repartir? ¿en cuántos pisos? ¿cuántas formas distintas encontramos de repartirlas de forma regular?; 2) Si tenemos un edificio de 5 pisos, ¿cuántas ventanas necesitamos en cada piso para tener en total 20? ¿y 25? Con estas actividades, se introduce al alumnado en situaciones de reparto de objetos de forma regular y en las operaciones aritméticas de multiplicación y división.

Actividad 5. Observación y representación de un edificio significativo del entorno.

Con el objeto de consolidar los aprendizajes previos, a continuación, se busca un edificio significativo de la zona y que sea de fácil acceso para todo el alumnado, como por ejemplo la sede de una empresa, un edificio situado en una zona céntrica, una fábrica o cualquier otro que tenga alguna característica específica que lo convierta en peculiar y que sirva para trabajar los contenidos matemáticos descritos, como el que se muestra en la primera imagen de la Figura 6. Una vez concretado el edificio, se da aproximadamente una semana de tiempo para que todos tengan tiempo de ir a verlo fuera del horario escolar, solos o acompañados de sus amigos, familiares, etc.

Una vez transcurrida la semana, se les pide que intenten dibujar este edificio lo más detalladamente que puedan, intentando recordar el número de pisos, ventanas y balcones que tiene. Seguidamente, se organiza una “excursión” a este edificio para realizar el esquema, anotando con precisión el número y distribución de todos los elementos, tal como se observa en la segunda imagen de la Figura 6.



Figura 6. Edificio conocido situado en la plaza más céntrica del barrio.

Ya en clase, se llevan a cabo las mismas tareas de representación y conteo de los elementos del edificio, aplicando las estrategias aprendidas.

Cabe señalar que esta tarea permite llevar a cabo la actividad matemática competencial en contexto descrita también en entornos no urbanos. Se trata, simplemente, de localizar un edificio representativo del pueblo o incluso de un entorno más rural y llevar a cabo las tareas descritas.

Actividad 6. Juego de pistas con la numeración de las calles.

Esta última actividad, que forma parte de la misma unidad, consiste en localizar *in situ* los edificios de una calle a partir de los números que los identifican. Para llevar a cabo la actividad, previamente, el docente prepara pistas de edificios representativos: una panadería, un banco, una casa, etc.

Seguidamente, hacen una salida a la calle (se recomienda que sea peatonal y que permita poder desplazarse con seguridad): primero, se plantean diversas preguntas, como por ejemplo ¿cómo podemos saber el nombre de la calle?, ¿todos vivís en la misma casa?, ¿cómo explico dónde está mi casa?, etc. Con estas preguntas iniciales se pretende generar un diálogo para que el alumnado se dé cuenta de que la calle tiene un nombre, cada edificio un número que lo identifica, etc. A continuación, se observan los números de los edificios y se plantean nuevas preguntas para observar el sistema de numeración de las calles: ¿si estamos en el 42, por qué el siguiente es el 44? ¿Dónde está el 43? De esta forma, se fomenta el

aprendizaje de las series de números de 2 en 2, la clasificación de números en pares e impares, etc.



Figura 7. Observación del nombre y los números de la calle.

Seguidamente se inicia el juego, que consiste en dar una tarjeta con un enigma a cada grupo de 3-4 alumnos y alumnas, como las que se muestran en la Figura 8, para que localicen un determinado edificio de la calle.

1- La tienda de Joyas y Bolsos está situada en un número menor que 30 y mayor que 20. ¿Cuál es?



10- ¿A qué número he de ir si necesito unas gafas? ¿Cómo se llama este sitio? ¿Cuántas decenas hay en su número de calle?



Figura 8. Tarjetas con las pistas.

Esta actividad permite trabajar de forma globalizada otros conocimientos como el lenguaje, puesto que el alumnado debe leer las pistas, indicar el nombre concreto del edificio (por ejemplo, un banco), explicar la solución a los demás, etc. Además, se trabaja también la educación en valores y la competencia ciudadana, ya que el alumnado no puede correr por la calle, debe respetar a las personas, no entrar en las tiendas, etc.

3.2. Musicomáticos.

Escuela/ Maestra	Escola Creixen Terrassa (Terrassa, Barcelona)/Manoli Contreras
Niveles	5-12 años
Objetivos	Conectar conocimientos de matemáticas y de música. Atender las inteligencias múltiples. Fomentar diferentes formas de pensar y hacer. Favorecer que el alumnado sea el agente activo de su propio aprendizaje.

Contenidos	<p>Contenidos de música</p> <ul style="list-style-type: none"> - Recuento de unidades melódicas. - Interpretación de células rítmicas. - Discriminación auditiva. - Tipos de sonidos. <p>Contenidos de matemáticas</p> <ul style="list-style-type: none"> - Recuento de unidades. - Lectura de tablas. - Simetría. - Patrones. - Representación de líneas. - Mínimo común múltiplo y máximo común divisor.
-------------------	--

Tabla 3. Datos descriptivos de la actividad “Musicomátics”

Esta actividad competencial se inscribe en el proyecto europeo *Sounding Ways Into Mathematics* del programa Comenius del *European Music Portfolio*, iniciado en 2014 por ocho escuelas de Catalunya que se unieron en red para desarrollar el trabajo interdisciplinar entre la música y las matemáticas, estudiar su viabilidad, definir las características y necesidades de su implantación, desarrollar y someter a prueba las actividades que lo configuren y evaluar su impacto en el aprendizaje. Una de las escuelas, Creixen Terrassa, decide implementarlo de forma permanente en el centro.

El alumnado de Educación Primaria lleva a cabo una sesión de Musicomátics semanal, además de las que realizan de matemáticas o de música. El funcionamiento de las sesiones se basa en el diseño por parte de la maestra de una situación a partir de la que el alumnado investiga, se plantea dudas y experimenta diferentes aspectos para dar respuesta a dichas situaciones y/u otras cuestiones que surgen durante el proceso, favoreciendo que cada alumno y alumna evolucione de acuerdo a su ritmo, sus necesidades y sus capacidades en el momento de llevar a cabo la actividad. A continuación, se describe una muestra de actividades diseñadas para alumnado de entre 5 y 12 años.

Actividad 1. Recuento de unidades y canción (5-6 años).

El alumnado tiene su primer contacto con el concepto de unidad matemática y melódica a partir del reconocimiento de canciones y melodías, relacionando la unidad matemática con la unidad melódica y empezando a diferenciar la parte del todo. Cuentan canciones que se van sucediendo (que el docente va interpretando en bucle) y ello les lleva a reflexionar qué es una unidad, qué parte de una unidad podría ser una estrofa de una canción, qué tipo de final (conclusivo o suspensivo) indica el final de una canción, etc. De forma contraria, también pueden reproducir canciones un número determinado de veces a partir de una simple caja de música (Figura 9).



Figura 9. Recuento de unidades y canción.

Actividad 2. Interpretación de células rítmicas y lectura de información de una tabla (5-6 años).

El alumnado se introduce en el mundo de la interpretación de pequeñas células rítmicas de entre cuatro y ocho pulsaciones a partir de cuadros y tablas de información (Figura 10) y descubren que son capaces de leer la información reflejada en estos cuadros y tablas y aplicarla en la producción y la interpretación musical. Esta tarea les permite, además, llevar a cabo pequeñas estadísticas y deducir probabilidades: qué instrumento ha sonado un mayor número de veces, qué ritmo ha sonado un menor número de veces, dónde deberían escribir su nombre para tocar el mismo instrumento o el mismo ritmo que un compañero, etc.



Figura 10. Interpretación de células rítmicas y lectura de información de una tabla.

Actividad 3. Simetría y danza (7-8 años).

Los alumnos y las alumnas descubren, experimentan, asimilan, se plantean y crean diferentes simetrías a partir del movimiento corporal y la danza, ya sea espontánea o coreografiada (Figura 11). Experimentar la simetría a partir del propio cuerpo hace que sea mucho más sensorial y la capacidad de reacción del alumnado ante el “error” es mucho más rápida e intuitiva.



Figura 11. Simetría lateral y danza.

Esta actividad puede ampliarse en cursos posteriores introduciendo la simetría de traslación y la simetría radial, a medida que las coreografías adquieren complejidad.

Actividad 4. Seriaciones (8-9 años).

Se plantea la composición y posteriormente la discriminación de series a partir de elementos musicales (instrumentos, ritmos, notas musicales...) que pueden verse, pero también escucharse (Figura 12). De esta manera, se añade el valor de la audición y la discriminación auditiva a la propia lógica de las seriaciones. Los alumnos y las alumnas, ya sea individualmente o en grupo, pueden componer sus propias series y, además, interpretarlas ampliando de esta forma la percepción del concepto. Con las series creadas, el alumnado puede acompañar piezas musicales existentes o crear las suyas propias. Puede realizarse también de forma inversa si invitamos a los alumnos y a las alumnas a descubrir qué series se ocultan en determinadas piezas musicales (los violines de *Viva la vida* de Coldplay, el bajo de *Billy Jean* de Michael Jackson o incluso la percusión del *Bolero* de Ravel). En cursos inferiores, se puede comenzar con un trabajo más simple donde se produzcan series con pocos elementos. Como en cualquier otro trabajo de seriaciones, se puede trabajar a partir de una variable (únicamente instrumento o únicamente ritmo) o combinando varias de ellas (instrumento y ritmo o instrumento y nota)

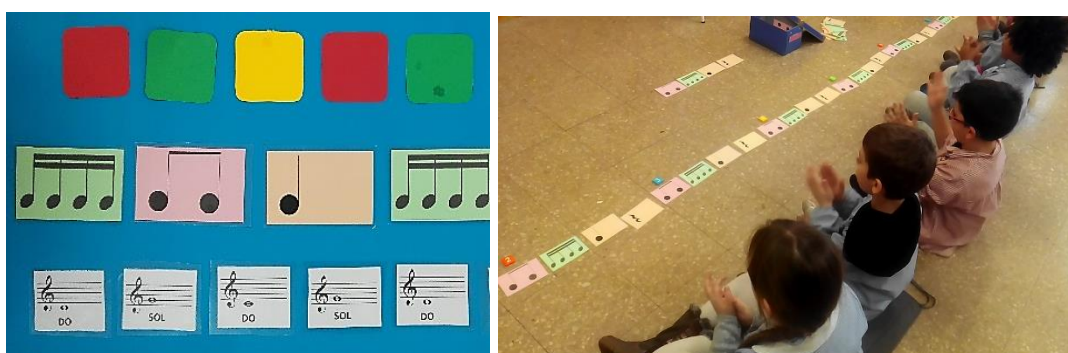


Figura 12. Seriaciones.

Actividad 5. Geometría y cualidades del sonido (8-9 años).

Esta actividad se basa en el vocabulario común existente entre la geometría y las cualidades del sonido. En ambas áreas, los alumnos y las alumnas pueden usar conceptos como largo, corto (conceptos que se pueden medir tanto matemática como musicalmente); ascendente, descendente, horizontal (referidos a la orientación

espacial pero también a la direccionalidad del sonido); etc. Esto permite trabajar aspectos de la geometría a partir de la discriminación auditiva y aspectos del sonido a partir de la geometría y las líneas. Un sonido que modula de grave hacia agudo y que tiene una duración de cuatro pulsaciones puede representarse gráficamente como una línea ascendente con una longitud de cuatro unidades (ya sean estas unidades centímetros, palmos o cuadros de una cuadrícula). De la misma forma, una sucesión de sonidos podría dar lugar a la representación de un polígono. Así, una sucesión de tres sonidos con la misma duración, uno ascendente, seguido de uno descendente y otro que se mantiene, se verían representados con un triángulo equilátero si indicamos al alumnado que cierren la línea poligonal, como se observa en la primera imagen de la Figura 13.

Se puede invertir el sentido de esta actividad haciendo que sea el alumno o la alumna el responsable de producir un sonido, es decir, de interpretar musicalmente el polígono deseado. Una flauta de émbolo sería un buen recurso dada su sencillez, como se muestra en la segunda imagen de la Figura 13. En cursos inferiores, se podría comenzar con el trabajo de sensibilización de líneas y sonidos sencillos.

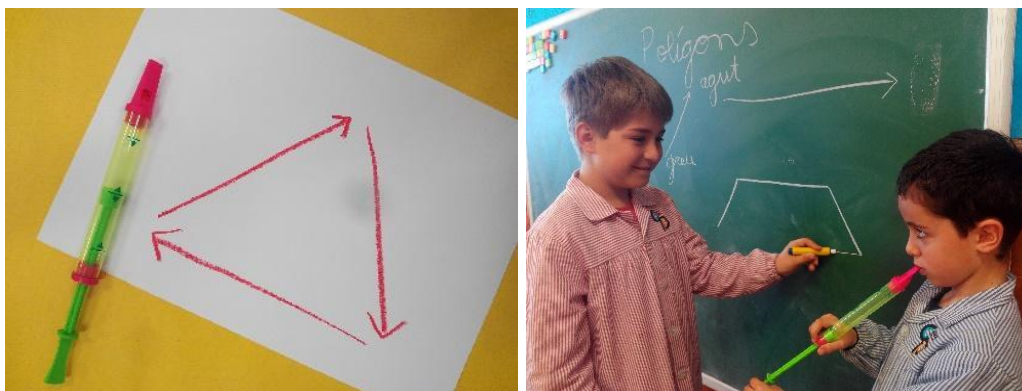


Figura 13. Geometría y cualidades del sonido.

Actividad 6. Polirritmia, mínimo común múltiplo y máximo común divisor (11-12 años).

El alumnado puede descubrir el concepto de mínimo común múltiplo y máximo común divisor a partir de la práctica de polirritmias, ya sean proporcionadas por el docente o de propia creación. La actividad consiste en pedir a un grupo de alumnos y alumnas que interprete, por ejemplo, un ritmo binario con percusión corporal mientras que a otro grupo se le pide que interprete, siguiendo con el ejemplo, un ritmo ternario dando a todos ellos la instrucción de acabar cada compás con una negra que interpretarán con una palmada. Fácilmente, el alumnado descubre que las palmadas de un grupo y otro coinciden de forma regular, lo que les permite indagar acerca de cuál es el mínimo común múltiplo de 2 y 3, o de múltiplos posteriores (Figura 14). La actividad puede combinar tantos factores como se deseen y puede servir también para buscar divisores y múltiplos de cualquier otro número o grupos de números. De forma inversa, pueden también llegar a la creación de polirritmias a partir del estudio y observación de los factores comunes de diferentes números.

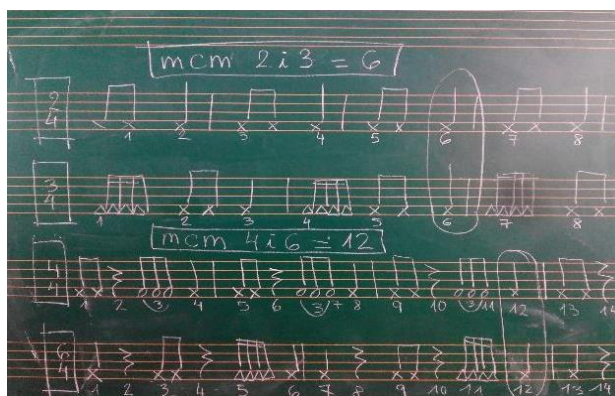


Figura 14. Poliritmia y mínimo común múltiplo.

Como se ha podido observar, a lo largo de la implementación del proyecto y la creación y puesta en práctica de las actividades se usan materiales propios de cualquier clase de música (instrumentos de pequeña percusión, flautas, tarjetas con representaciones gráficas de figuras rítmicas, equipo de audio, cajas de música, etc.) y de cualquier clase de matemáticas (dados, reglas, piezas geométricas de plástico, etc.). También se han creado materiales propios, como tarjetas para la identificación de figuras geométricas en una audición, tarjetas con figuras rítmicas, notas e instrumentos para la creación y discriminación de series, palitos para representar de manera conjunta una unidad de longitud común y la duración de un sonido, etc., que son materiales de muy fácil elaboración.

Consideraciones finales

Desde el punto de vista del desarrollo profesional del profesorado de matemáticas, uno de los cambios que ha ocasionado la pandemia ocasionada por la COVID-19 es la posibilidad de participar, ya sea de forma sincrónica o asincrónica, en múltiples *Webinars* de acceso abierto y en muchas ocasiones gratuito que se organizan en todo el mundo. En estas actividades *online* se puede acceder a una amplia gama de conferencias, comunicaciones, talleres, etc. impartidos tanto por reconocidos expertos en educación matemática como por profesorado anónimo que comunica sus experiencias en dichos eventos, que a menudo son de una gran calidad profesional, como las dos actividades descritas en la segunda parte de este artículo. En dichas actividades se ha evidenciado un amplio conocimiento pedagógico para enseñar matemáticas en contexto, de forma interconectada con otras áreas de conocimiento como la música, el conocimiento del medio, la educación artística, el lenguaje, etc., haciendo especial hincapié en que estas actividades competenciales permiten un enriquecimiento mutuo de las distintas disciplinas involucradas, en lugar de considerar que una de ellas es una herramienta para el aprendizaje de la otra.

Algunos de los rasgos comunes de las actividades descritas tienen que ver con la planificación y la gestión de la práctica docente. En relación a la planificación, se trata de tareas a partir de contextos cercanos y de interés para el alumnado, como puede ser el propio edificio, una calle próxima a la escuela, materiales manipulativos diversos, música actual y danzas atractivas para el alumnado, etc. Así, pues, se pone de manifiesto el uso de los contextos descritos en los distintos niveles del ELEM (Alsina, 2018, 2019, 2020a) con el propósito de que el alumnado primero visualice las ideas matemáticas en contextos informales (contextos reales, materiales manipulativos, etc.) y progresivamente, avancen en la esquematización y

formalización a través de otros contextos como la música o la representación gráfica. Respecto a la gestión, se caracteriza por promover una enseñanza a través de prácticas productivas que impliquen pensar y hacer, más que memorizar definiciones y procedimientos (Alsina, 2020b): se plantean preguntas en forma de retos que el alumnado debe resolver; se promueve el razonamiento y la argumentación; la comunicación a través de la interacción, la negociación y el diálogo; la representación; y, como no, las conexiones interdisciplinarias y con el entorno.

En definitiva, se ha evidenciado lo que puede pensar o hacer matemáticamente todo el alumnado desde un marco inclusivo; la planificación y la gestión de tareas o secuencias de aprendizaje a través de recursos, estrategias, técnicas y tareas contextualizadas; los diversos aspectos del currículum, incluida la evaluación; y, por supuesto, la capacidad de abordar algunos de los problemas didácticos básicos que están presentes en la enseñanza de las matemáticas (como por ejemplo el uso de materiales descontextualizados como el libro de texto como único recurso para enseñar matemáticas), ofreciendo alternativas mucho más ajustadas a los intereses del alumnado, a partir de las actividades matemáticas en contexto descritas. Estos conocimientos, en su conjunto, forman parte del conocimiento pedagógico para enseñar matemáticas que describen los diversos modelos de conocimiento del profesorado (Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018; Godino et al., 2016, 2017; Shulman, 1986), que son imprescindibles para poder llevar a cabo una enseñanza eficaz. Una enseñanza que, de acuerdo con las directrices contemporáneas, debe promover el desarrollo de habilidades que permitan al alumnado de Educación Primaria usar de forma comprensiva y eficaz el conocimiento matemático en todas las situaciones de su vida cotidiana, que es una de las principales finalidades del enfoque competencial de las matemáticas.

Bibliografía

- Alsina, Á. (2010). La "pirámide de la educación matemática". Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.
- Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años*. Barcelona: ICE-Horsori.
- Alsina, Á. (2018). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio. Itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros*, 376, 13-20.
- Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Graó.
- Alsina, Á. (2020a). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática*, 3(2), 127-159.
- Alsina, Á. (2020b). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar*, 28, 1-13.
- Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D... Muñoz-Catalán, M^a.C. et al. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20, 236–253.

- Depaepe, F., Verschaffel, L., y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 34, 12-25.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Niss, M. (1995). Las matemáticas en la sociedad. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 6, 45-58.
- Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Reeuwijk, M.V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 12, 9-16.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Autores:

Alsina, Ángel: Profesor Catedrático de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina. Email: angel.alsina@udg.edu

Contreras, Manoli: Maestra de Educación Musical y Matemáticas en la etapa de Educación Infantil y Primaria en la escuela Creixen Terrassa (España). Participa en el proyecto Musicomàtics del *European Music Portfolio* desarrollando labores de investigación desde 2014 y de formación del profesorado en diferentes centros de recursos pedagógicos de Catalunya desde 2017. Email: manoli.contreras@gmail.com

Reyes, Joaquim: Maestro de Educación Primaria en la Escuela Turó de Guiera de Cerdanyola del Vallés (España). Ponente en el Congrés Català d'Educació Matemàtica (C2EM) de los años 2016 y 2020 con sendas propuestas sobre innovación en la enseñanza de las matemáticas. Autor de artículos sobre distintas cuestiones relacionadas con la enseñanza. Impulsor de un cambio metodológico en la enseñanza matemática en la Escuela Las Seguidillas de Badia del Vallés. Email: jreyes4@xtec.cat