REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-17

https://union.fespm.es

Errores y dificultades acerca de las rectas notables del triángulo. Etapa preliminar para la elaboración de trayectorias de aprendizaje

Armando Morales Carballo, Angie Damián Mojica

Fecha de recepción: 24/02/2021
Fecha de aceptación: 7/04/2021

Resumen	En este trabajo se describen los errores y dificultades sobre las rectas notables del triángulo identificadas en estudiantes de universitario. El trabajo se fundamentó en las teorías sobre errores y dificultades que emergen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las definiciones y en la resolución de problemas. Las dificultades de tipo conceptual, espacial y de aplicación y los errores que emergieron durante la exploración se relacionan con los ejemplos sobre rectas notables en casos particulares de triángulos, dificultades en las representaciones no estándar, errores de identificación y representación, respuestas equívocas o parcialmente correctas. **Palabras clave**: Dificultad, error, recta notable, definición
Abstract	This paper describes the errors and difficulties about the notable lines of the triangle identified in university students. The work was based on theories about errors and difficulties that emerge in the processes of teaching and learning of definitions and problem solving. The conceptual, spatial and application difficulties and errors that emerged during the exploration are related to the examples of notable straight lines in particular cases of triangles, difficulties in non-standard representations, identification and representation errors, equivocal or partially correct answers. **Keywords:** Difficulty, error, remarkable line, definition
Resumo	Este trabalho descreve os erros e dificuldades sobre as notáveis linhas triangulares identificadas em estudantes universitários. O trabalho baseou-se nas teorias dos erros e dificuldades que surgem nos processos de ensino e aprendizagem das definições e na resolução de problemas. As dificuldades e erros conceptuais, espaciais e de aplicação que surgiram durante a exploração relacionam-se com exemplos de linhas notáveis em casos de triângulo particular, dificuldades em representações não padrão, erros de identificação e representação, respostas chyvónicas ou parcialmente corretas. **Palavras-chave:** Dificuldade, erro, notável reta, definição

1. Introducción

Los conceptos de rectas y puntos notables del triángulo han sido objeto de investigación desde edades escolares tempranas, muchas de las dificultades y errores que se han identificado en los estudiantes de ese nivel se espera que se superen con el tratamiento del contenido en los niveles superiores, secundaria y pre universitario. Sin embargo, en la mayoría de los casos no sucede así, como ejemplo, se ha constatado en los alumnos que han ingresado en las últimas tres generaciones a la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México; que su nivel de rendimiento académico es bajo, tal y como lo evidencian los resultados de los diagnósticos aplicados como parte del proceso de ingreso.

Esta problemática ha motivado la elaboración y desarrollo del proyecto “herramientas metodológicas y de tecnología educativa para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de la geometría en el pre universitario”. De este proyecto se desprende el presente trabajo, en el cual se plantea como objetivo: la identificación de errores y dificultades de estudiantes del pre universitario sobre las rectas y puntos notables del triángulo. Los hallazgos encontrados aportan elementos que sirven de sustento para la elaboración y puesta en funcionamiento de las Líneas Hipotéticas de Trayectorias de Aprendizaje de los puntos y rectas notables del triángulo, tales propuestas son basadas en el uso del software GeoGebra y en la resolución de problemas, las cuales favorecen el tratamiento de este contenido en la enseñanza de la geometría euclidiana en el pre universitario.

2. Investigaciones en el campo de la educación matemática acerca de las rectas y puntos notables del triángulo

Villamizar (2018) diseñó una secuencia didáctica fundamentada en el modelo de Van Hiele para caracterizar el nivel de razonamiento de los estudiantes de 13 a 17 años. Para la exploración se apoyaron en el uso de material reciclable como las tapas plásticas de gaseosa y cartón. Las actividades las actividades propuestas exigieron la identificación, representación y aplicación de cada recta notable. Por ejemplo, en el tratamiento de la mediatriz, el investigador propuso seis retos y al respecto se planteó como objetivo que los estudiantes identificaran el concepto como un conjunto de puntos con ciertas características (lugar geométrico), la intersección y la aplicación. Al analizar los resultados que se reportan, se pudo observar la evolución de la habilidad de tipo espacial, sin embargo, también se identificó la necesidad de fortalecer los desarrollos conceptuales que imbrican en la comprensión de dicho concepto. Por su parte, Jaime y Gutiérrez (2016) en su modelo de explicación sobre el aprendizaje de los conceptos geométricos en primaria, destacan que los estudiantes reciben dos tipos de información, verbal y gráfica, transmitida por el profesor, el libro de texto, entre otros. Producto de la revisión de libros de texto de primaria, constatan que la mayoría de ellos no define el concepto de altura ni para los cuadriláteros ni para los triángulos, sino que se limitan a dibujar las alturas de los polígonos (siempre en la posición vertical prototípica) cuando presentan sus fórmulas de cálculo de áreas, aunque, en algún caso, ni siquiera se dibuja la altura. Los investigadores destacan que intentar que los estudiantes de Primaria aprendan un concepto geométrico de manera implícita, a partir sólo de algunos casos (dibujos específicos), es un error didáctico ya que se suelen generar en los estudiantes imágenes conceptuales erróneas. La única definición de rectas y puntos notables del triángulo que los investigadores documentan haber encontrado en los textos es la de altura, como se muestra en la Figura 1.

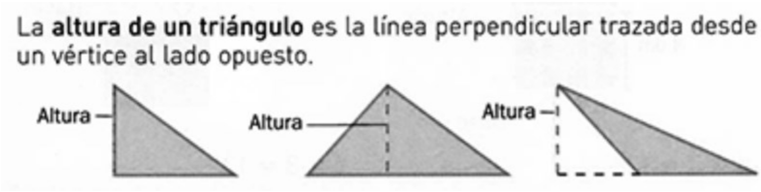


Figura 1. Definición de altura encontrada en textos de primaria, tomada de Jaime y Gutiérrez, 2016.

La investigación documenta que una segunda definición de altura de un triángulo de uso frecuente es *"la altura de un triángulo es el segmento trazado perpendicularmente desde un vértice hasta el lado opuesto o su prolongación"*. De una página web identificaron una tercera definición "una altura es cada una de las rectas perpendiculares trazadas desde un vértice al lado opuesto (o su prolongación)". Establecen que las tres definiciones son matemáticamente correctas, pero no son equivalentes. Mencionan que el término línea es ambiguo, mientras que el término recta es más general y útil, en esta dirección sugieren que en el nivel primaria conviene utilizar el término segmento. En relación a prolongar la base, establecen que didácticamente conveniente adherirla a la definición, ya que de esa manera se pueden disminuir los errores conceptuales en relación a la formación de la imagen conceptual de altura de un triángulo, por ello concluyen que la segunda definición identificada, es la más apropiada para estudiantes de primaria.

Por su parte Samper, Corredor y Echeverry (2014) reportan un estudio dirigido a estudiantes del preuniversitario, en el que se plantearon como objetivo estudiar los procesos de conceptualización del concepto de altura de triángulo. En la exploración, a través de un cuestionario que implementaron se identificó que en la pregunta ¿es la altura de un triángulo un segmento?, prevalece la influencia de las imágenes conceptuales acerca del concepto, ya que representan un segmento que visualmente satisface los invariantes de la definición, una minoría no hace reporte alguno. Los investigadores destacan que estas imágenes albergan errores conceptuales difíciles de remover, pues el término recta es más general y apropiado. En relación a la pregunta 2 ¿el pie de la altura es un punto entre dos vértices de un triángulo? Se identificó que más del 50% de la población con quien se experimentó mencionó que sí, sólo un número reducido estableció que sí; solo si se trata de triángulos acutángulos u obtusángulos. Se observa que la mayoría de los estudiantes asumen la definición de altura como *"es la línea perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto"* (Jaime y Gutiérrez, 2016). Esta concepción provoca errores conceptuales en algunos estudiantes, al asumir que no hay altura o que no es perpendicular a la base. En relación a la pregunta 3 que trata de la representación de un triángulo en una posición no estándar, en la que se pide explicar acerca de la altura (no planteada como altura). Se identificó que una población mayor al 50% presentó un espacio personal de ejemplos completos, mientras que un grupo reducido propuso respuestas análogas a las dadas en la pregunta 2. En relación a la pregunta 4, donde se pidió demostrar que "la altura relativa a la base de un triángulo isósceles es mediana". No se identificó producción en los estudiantes, los autores atribuyen esto a que no se dieron las condiciones para poder establecer una relación entre la definición personal, la definición del concepto, la imagen conceptual y la representación figural de altura de un triángulo en un contexto de demostración.

En la investigación que se ha descrito se identifica que la mayoría de los alumnos excluyeron el caso del triángulo rectángulo en el análisis del concepto de altura, esta dificultad posiblemente está asociada a la necesidad de evidenciar la presencia figural de los objetos, lado y altura, de manera independiente. El tipo de definición más frecuente fue la definición completa: se trata de una definición en donde el estudiante hace explícitos los invariantes del concepto, en el contexto de la geometría euclidiana y no en el de la medida y la definición incompleta: aquella que no hace referencia a la posición de los extremos del segmento altura, el primero en uno de los vértices del triángulo y el otro sobre la recta que contiene al lado opuesto a dicho vértice. Por tanto, se considera necesario hacer énfasis en todas las posibles representaciones figurales de la altura de un triángulo y en el análisis de sus propiedades invariantes.

Finalmente, Gutiérrez y Jaime (2012) reportaron que en la mayoría de los casos la actividad de los estudiantes está basada en el uso de sus imágenes conceptuales, ya que hay un número elevado de estudiantes cuya definición es inactiva (la saben recitar, pero no la usan cuando resuelven problemas) o no existe (la olvidaron o nunca aprendieron la definición). Como ejemplo, mostraron casos de estudiantes que cometen los mismos tipos de errores acerca del concepto de altura de un triángulo. En la fila superior de la Figura 2 se muestra el caso de un estudiante cuya concepción de altura de un triángulo es incorrecta, pues en los triángulos cuya altura no es interior dibuja la mediana en lugar de la altura. La fila inferior de la misma figura muestra el caso de otro estudiante cuya concepción de altura es correcta pero incompleta, pues en los triángulos obtusángulos dibuja una altura que no se corresponde con la pedida. Los investigadores coinciden que las diversas imágenes mentales del concepto de altura están asociadas a imágenes figurativas de objetos físicos, visualización mental de fórmulas o esquemas, imágenes de patrones, imágenes cinéticas e imágenes dinámicas (que son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan).

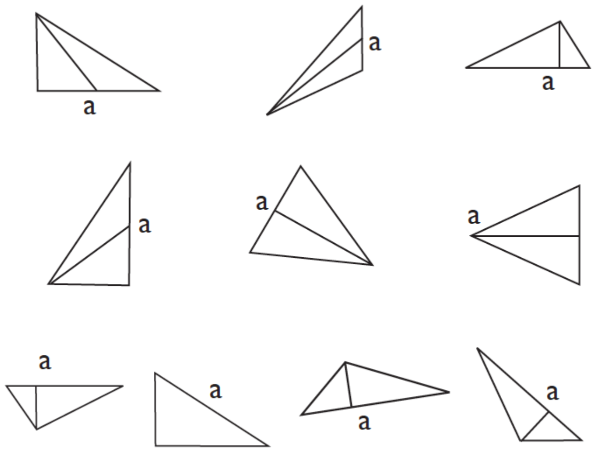


Figura 2. Representaciones de la altura dada por alumnos de primaria, tomada de Gutiérrez y Jaime, 2012, p. 67.

3. Fundamentación teórica y metodológica

La definición como parte de la estructura axiomática de la matemática juega un papel central para el desarrollo de la misma teoría y de su aplicación. Por tanto, la comprensión de los contenidos que conforman la disciplina matemática radica en buena parte en la comprensión de las definiciones.

Diversas investigaciones en el campo de la educación matemática dan cuenta de la importancia de las definiciones y de su tratamiento para incidir en los procesos de enseñanza y aprendizaje en los distintos niveles educativos. En tal dirección Hernández-Gómez, Locia-Espinoza, Morales-Carballo y Sigarreta-Almira (2019) y Ramos y López (2015) coinciden en establecer que los conceptos matemáticos son una categoría especial en la enseñanza de la Matemática, ya que constituyen la forma fundamental con que opera el pensamiento matemático, con su formación se contribuye a la consecución del importante objetivo de las matemáticas: representar la relación entre la matemática y la realidad objetiva. En esta misma línea Winicki (2006) sostiene que los conceptos y sus definiciones, los axiomas y teoremas son la base de las estructuras de las distintas ramas de la matemática. Por tanto, en los procesos de enseñanza y aprendizaje se espera un tratamiento especial a los procesos de formación y definición de conceptos como actividades esenciales de la enseñanza y para el aprendizaje.

En este trabajo no se persigue como objetivo los procesos de elaboración y comprensión de conceptos, interesa en una primera etapa, la identificación de los errores y dificultades sobre los conceptos, en particular, de rectas notables del triángulo y a partir de esa identificación, elaborar y poner en funcionamiento las líneas hipotéticas de trayectorias de aprendizaje para su tratamiento.

3.1 Errores y las dificultades

La investigación acerca de los errores y dificultades es una actividad fundamental que debe realizarse a la par del planteamiento de objetivos orientados hacia la elaboración de propuestas de enseñanza y aprendizaje de la matemática, en todos los niveles educativos. El conocimiento sobre los errores y dificultades genera una fuente de información relevante sobre los niveles de comprensión conceptual de los objetos matemáticos y aportan elementos que puede servir de ayuda al profesor para organizar las estrategias de su enseñanza y contribuir al objetivo de la mejora de los aprendizajes. Algunas de las razones por las que se generan los errores conceptuales tanto de profesores como de alumnos, se deben a la existencia de: 1. Errores conceptuales encontrados en los libros de texto. 2. Errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje, generados por no comprender correctamente el contenido matemático: definición de conceptos, formulación y demostración de propiedades, procedimientos y algoritmos de realización y operatividad, entre otros y en su preparación y tratamiento. Estos errores generan dificultades y obedecen a naturalezas distintas, generalmente se identifican en los procesos de desarrollo cognitivo, en la presentación del contenido, en las formas de pensamiento matemático y en los métodos de enseñanza.

Las investigaciones de Herrera (2010); Chavarría (2014); Morales, Marmolejo y Locia (2014); Del Puerto, Minnaard y Seminara (2004); Rico (1995); Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein (2004) y Socas (1997) en general, coinciden que tanto los errores como las dificultades deben ser situaciones consideradas para la planeación de la enseñanza–aprendizaje, y que tras el error o la dificultad no significa que haya limitación exclusiva de conocimiento, sino que más bien, en el caso del error significa que se está ante la presencia de un esquema cognitivo inadecuado (Socas, 1997). En el campo de la enseñanza de las matemáticas la palabra dificultad puede tener distintas acepciones, sin embargo, dada la naturaleza de la investigación que se proyecta, se coincide con la concepción de Bengoechea (1999) y se asumirá que la dificultad hace referencia al *“escaso dominio de la parte conceptual, operatoria y de aplicación de los objetos matemáticos”.*

Luego de revisar las concepciones sobre error en el aprendizaje de las matemáticas documentadas en la literatura, se coincide con la concepción sobre error que aporta Rico (1995), al considerar que *“cuando un alumno propone una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se plantea, se puede decir que su respuesta es errónea y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión planteada”*. Desde este punto de vista, el error es un aspecto importante para reflexionar y reorientar tareas que contribuyan a mejorar los esquemas cognitivos del estudiante y con ello lograr la solución correcta. Este trabajo se apoya en la clasificación de errores y dificultades planteadas por Herrera (2010) y Socas (1997). Este planteamiento se adaptó a las características propias del objeto de estudio: las rectas y puntos notables del triángulo. Por tanto, del trabajo de Socas (1997) se retoma la posición en que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se deben a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de la matemática de los objetos matemáticos, en tal dirección se consideró la siguiente clasificación: *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático*. Se relacionan con las rupturas implícitas en los modos de pensamiento matemático: los ejemplos, los dibujos en el pizarrón, las imágenes estandarizadas; pueden generar errores. *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas:* los métodos de enseñanza deben ser acordes con la organización institucional escolar y la secuencia curricular. *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos*: al momento de diseñar los recursos y estrategias en la enseñanza se deben considerar las etapas del desarrollo cognitivo de los estudiantes, sus características y capacidades.

En relación a los errores, Radatz (citado por Herrera, 2010) plantea que su análisis puede ayudar a clarificar cuestiones elementales del aprendizaje de las matemáticas, de esa propuesta se consideraron los siguientes tipos de errores: *Errores del lenguaje*. Los errores se derivan del uso inadecuado o erróneo de los símbolos y términos matemáticos, por lo que su aprendizaje se realiza inadecuadamente. *Errores para obtener información espacial*. Este tipo de error se genera de las representaciones icónicas inadecuadas de situaciones matemáticas. *Errores sobre aprendizaje deficiente de los prerrequisitos*: son causados por deficiencias en el manejo de conceptos y procedimientos para las tareas matemáticas adquiridas previamente. Errores de *asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento*: se relacionan con la inflexibilidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas, y se subdividen en cuatro tipos: por perseverancia, de asociación, de inferencia y de asimilación.

4. Método

4.1. Diseño y validación del instrumento de exploración

Inicialmente el diseño contuvo ocho actividades relacionadas a los puntos y rectas notables del triángulo y fue validado mediante su aplicación a un grupo piloto de diez estudiantes del pre universitario. Estos estudiantes provenían de diferentes escuelas de nivel medio superior (CBTis, COBACH, CECYTEG y Preparatorias de la Universidad Autónoma de Guerrero) del estado de Guerrero, México. Los alumnos fueron elegidos al azar de dos grupos que al momento de la validación asistían a un curso de homogenización de conocimientos matemáticos para ingreso a la Licenciatura en Matemáticas, en el ciclo escolar 2018-2019.

Como resultado del pilotaje se identificaron las siguientes problemáticas: Dificultades sobre la lectura y comprensión de las actividades del diseño. En los alumnos que respondieron a las actividades se encontraron limitaciones y dificultades para identificar y diferenciar los puntos y rectas notables del triángulo en el contexto geométrico, para definir dichos conceptos y para identificar en los problemas planteados, el tipo de conceptos a utilizar para su resolución.

El tiempo estimado que se utilizó durante la validación fue de cien minutos, que comprendió dos módulos de clase. Después de la validación se realizaron las siguientes adecuaciones: Se amplió el diseño a once actividades, esto con la finalidad de describir de manera adecuada las actividades relacionadas a la identificación, definición, interpretación, diferenciación y utilidad de los puntos y rectas notables.

El diseño final de exploración se estructuró por once actividades, con las cuales se planteó el objetivo de identificar las nociones sobre puntos y rectas notables del triángulo que tienen los estudiantes de nivel pre universitario, y en esas nociones la identificación de las dificultades y errores que prevalecen. Las actividades se relacionaron con la identificación, definición, representación y utilización de los conceptos de puntos y rectas notables del triángulo en la resolución de problemas.

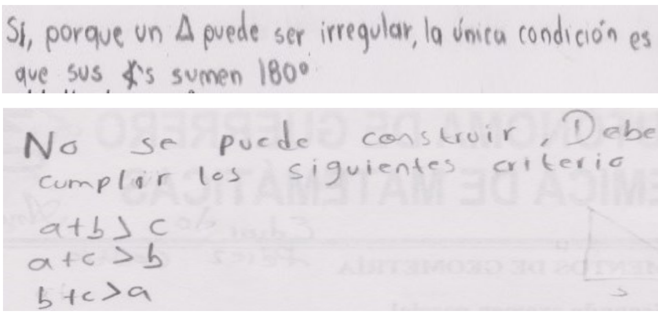
4.2. Población y dinámica de exploración

La población experimental estuvo formada por treinta y un estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, como antecedente; tales estudiantes ya habían cursado las unidades de aprendizaje de geometría, trigonometría, geometría analítica en el bachillerato y al momento de la exploración estaban culminando el primer semestre, del ciclo escolar 2018-2019.

En la primera etapa de la exploración el sistema de actividades fue trabajada de manera individual y en la segunda etapa, se propició un debate entre estudiantes y el responsable de la experimentación, con el propósito de conocer las argumentaciones acerca de sus respuestas. Esta segunda etapa se llevó a cabo con la finalidad de identificar si hubo o no correspondencia entre la producción y su interpretación o argumentación. El desarrollo de las actividades experimentales se llevó a cabo en ciento cincuenta minutos que corresponden a tres módulos de clase.

5. Discusión y resultados

Pregunta 1. ¿Es correcto afirmar que con tres segmentos de cualquier longitud se puede construir un triángulo?, ¿por qué?


Sí, porque un Δ puede ser irregular, la única condición es que sus ∡'s sumen 180°

No se puede construir, Debe cumplir los siguientes criterio
$a+b > c$
$a+c > b$
$b+c > a$

Imagen 1. Muestra de dos producciones acerca de la posibilidad de construcción

De los treinta y un alumnos que contestaron esta cuestión, veintiuno de ellos respondieron que sí se puede construir un triángulo dando tres segmentos cualesquiera, de estos; algunos no dieron justificación y otros propusieron respuestas equívocas y diez respondieron que no, de esos diez; dos estudiantes utilizaron como argumentación el cumplimiento de la desigualdad del triángulo: $a+b>c, a+c>b, b+c>a, a-b<c$ y como relaciones equívocas $a-c>b$ y $b-c>a$.

Como puede observarse en la imagen 1, en los alumnos que justificaron equívocamente existe un error conceptual, ya que al referirse a un triángulo irregular (haciendo alusión a los triángulos acutángulo, rectángulo y obtusángulo) se justifica que en ellos se cumple la propiedad de que la suma de sus ángulos interiores mide $180°$, sin embargo, esta propiedad no es un criterio para posibilitar que dados cualesquier tres segmentos se pueda construir un triángulo.

En los diez alumnos que establecieron que con cualesquier tres segmentos no se puede construir un triángulo se identifica implícitamente la noción de desigualdad triangular, a pesar de que solo dos establecen explícitamente esa condición.

Pregunta 2. ¿Qué rectas notables del triángulo conoces?

a)	Cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa, altura base
b)	Mediatriz, mediana, altura, bisectriz

Tabla 1. Se muestran dos respuestas sobre rectas notables en la concepción del estudiante

Veinte estudiantes escribieron en sus respuestas algunos nombres de las rectas notables del triángulo, además, escribieron los nombres de los lados de un triángulo rectángulo y la base, ver tabla 1, a). Estas respuestas evidencian que los estudiantes solo adquirieron en su momento ideas intuitivas acerca de las definiciones, por tanto, se identifica una dificultad de tipo conceptual sobre las rectas notables. En tanto que once estudiantes escribieron correctamente el nombre de las rectas notables ver tabla 1, b), lo anterior no prueba que necesariamente conocen la definición.

Pregunta 3. Define los conceptos: mediatriz, altura, mediana y bisectriz de un triángulo

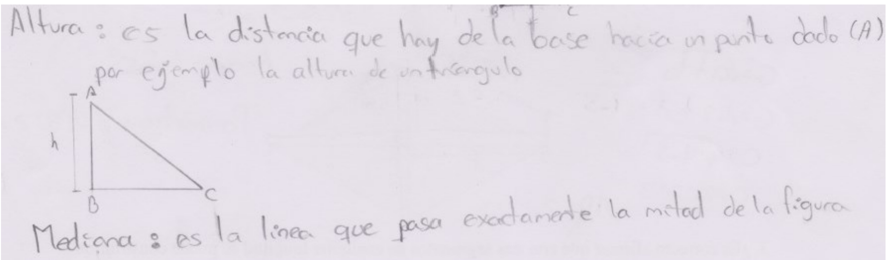


Imagen 2. Definiciones de altura y mediana dadas por un subgrupo 1 de la población total

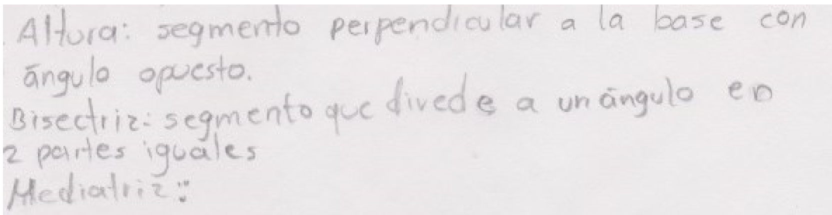


Imagen 3. Definiciones de altura y bisectriz por un subgrupo 2 de la población total

Veintidós alumnos respondieron esta pregunta, sin embargo, como se muestra en la imagen 2 y 3, los alumnos no definieron todas las rectas notables. En relación al concepto de altura, puede notarse que en los estudiantes prevalece la idea de la posición estándar de los triángulos (en donde la base es horizontal) y la definición en un caso particular de triángulo, sobre este concepto se identifica una dificultad de tipo espacial y conceptual. Con respecto a la definición del concepto de mediana y su representación, se identificó que hacen alusión a un caso particular de triángulo, el isósceles, esto reafirma la existencia de estas dificultades.

Como se aprecia en la imagen 3, existe una desconexión entre el objeto geométrico en el cual se pide definir el concepto de bisectriz (existencia de una ruptura implícita). En relación al concepto de mediatriz no se identificaron producciones acerca de su definición, situación que pone en evidencia la existencia de dificultades sobre la definición y utilización de estos conceptos.

Pregunta 4. ¿Cuántas mediatrices tiene cada uno de los triángulos que en seguida se te presentan?

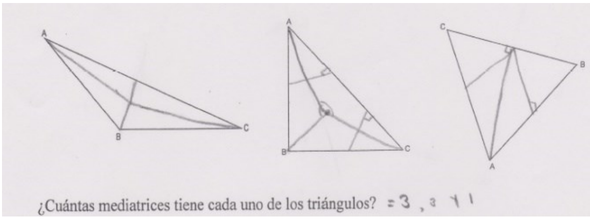
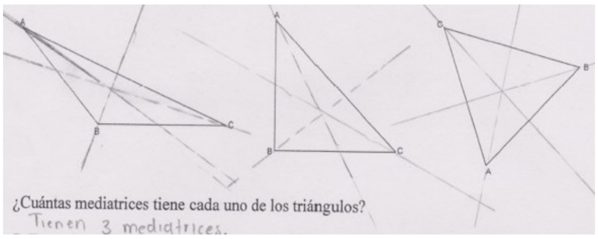
a)	
b)	

Imagen 4. Número de mediatrices y su representación dadas por dos subgrupos de la población total

En total, veinte estudiantes contestaron que un triángulo tiene tres mediatrices, como parte de sus argumentos representaron en el triángulo tales rectas. Sin embargo, como se observa en la Imagen 4, a) y b) once alumnos (unión de los subgrupos 1 y 2) dieron respuestas parciales (correctas) en la identificación del número de mediatrices, pero sus representaciones son erróneas (por lo que en ellos se identifican dificultades de tipo conceptual e imágenes espaciales mal construidas).

Pregunta 5. ¿Cuántas alturas tiene cada uno de los triángulos?

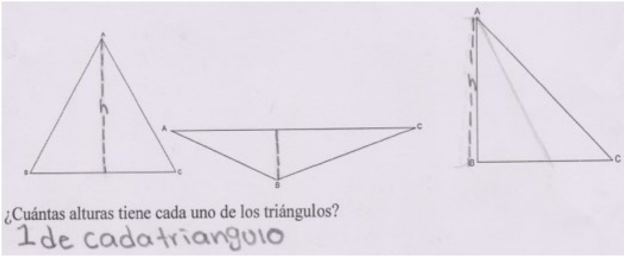
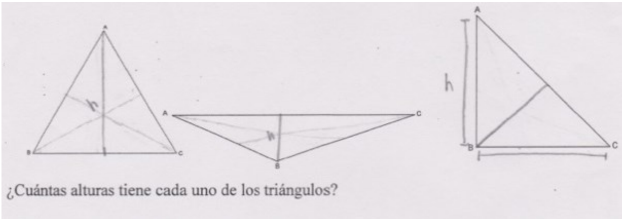
a)	
b)	

Imagen 5. Indicación y representación del número de alturas

En la imagen 5, se muestran las respuestas características en los dieciocho estudiantes que contestaron incorrectamente. Estos estudiantes mencionaron que dado un triángulo, solo ven una base, por lo tanto, tiene una altura, otros alumnos respondieron que depende del segmento (lado del triángulo) que se tome como base, pero no mencionaron que bajo esta dependencia hay entonces tres alturas.

Trece alumnos establecieron que el triángulo tiene tres alturas, sin embargo, en la representación que realizan se identifica que no tienen claridad o no conocen la definición correcta de altura de un triángulo, pues este grupo, en sus representaciones resaltan la identificación en el triángulo rectángulo. También se identificó que sus imágenes figurales no están desarrolladas ya que implícitamente se induce que se apoyan en la posición estándar de las figuras; esto a pesar de que los triángulos que se le presentan tienen cierta posición estándar.

Pregunta 6. ¿Cuántas medianas tiene cada uno de los triángulos?

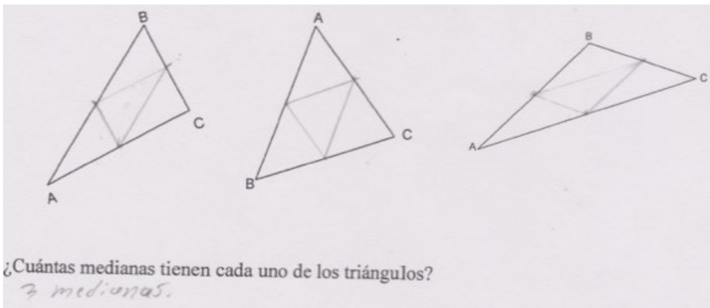


Imagen 6. Representación de las medianas

Veinticinco alumnos correctamente trazaron las tres medianas del triángulo y establecieron que cada triángulo tiene tres medianas. Sin embargo, seis alumnos contestaron que cada triángulo tiene tres medianas, pero en su representación se identificó que no tienen claridad en la definición, como se observa en la imagen 6, en cada caso, sólo ubicaron los puntos medios de cada lado del triángulo.

Pregunta 7. ¿Cuántas bisectrices tiene cada uno de los triángulos?

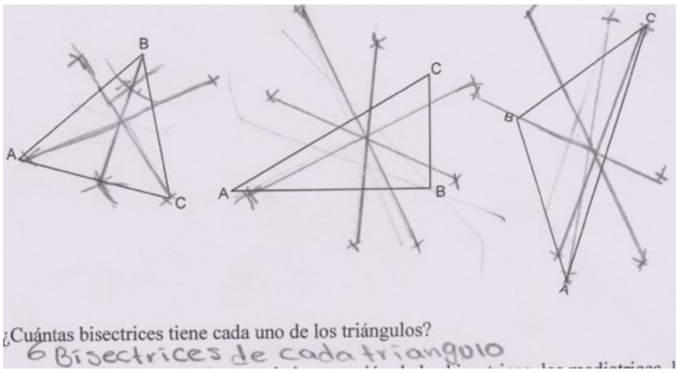
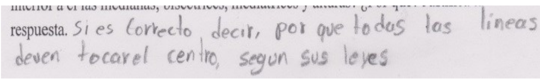


Imagen 7. Representación de bisectrices

Veinticinco alumnos establecieron que un triángulo tiene tres bisectrices (total de bisectrices internas) y representaron correctamente tales rectas. Sin embargo, seis alumnos respondieron que los triángulos cuentan con seis, cinco o cuatro bisectrices, lo cual evidencia que estos alumnos no tiene claridad en la definición y de la representación de la bisectriz en un triángulo (existe una ruptura implícita). En la respuesta de que existen seis bisectrices puede deberse a que estos alumnos consideran las bisectrices de los ángulos internos y los ángulos externos de un triángulo, en cuyo caso, se identifica en su procedimiento usos erróneos de la concepción de bisectriz en de un triángulo.

Pregunta 8. ¿Es correcto que, dado un triángulo cualquiera, siempre se cortan en un punto interior de él las medianas, bisectrices, mediatrices y alturas? ¿Por qué? Justifique su respuesta

Diecisiete alumnos respondieron que el punto de intersección de las rectas notables puede estar en el interior del triángulo, sin embargo, se puede apreciar en su afirmación que no excluyen la posibilidad de que el punto de intersección sea exterior al triángulo. Esta pregunta se proyectó con el propósito de indagar en los alumnos si consideran las rectas notables para un triángulo cualquiera. Once alumnos contestaron que el punto de intersección no se puede encontrar siempre en el interior del triángulo; y tres respondieron de manera equívoca. En la imagen 8, se identifican las producciones representativas de los estudiantes.

a)	 respuesta. Si es Correcto decir, por que todos las lineas deven tocar el centro, segun sus leyes

b)	respuesta. No, ya que pueden aber exepciones en las cuales las podemos localizar externamente al triángulo.

Imagen 8. Producciones representativas acerca de la ubicación del punto de intersección de las rectas notables

Pregunta 9. El punto G es el circuncentro (intersección de las mediatrices) del triángulo ABC. Clasifica los triángulos AGC, AGB y BGC, según sus lados y justifica tu respuesta

Once estudiantes clasificaron los triángulos en isósceles y equilátero, el resto de los estudiantes plantearon respuestas equívocas. De las respuestas dadas, se observa que los estudiantes no tienen dominio de la definición de mediatriz y del significado del punto de intersección entre ellas. De tener dicho dominio, se conjetura que pudieron haber identificado que las distancias del punto G a los vértices son iguales, por tanto, habría información para clasificar los triángulos, según sus lados.

Pregunta 10. En una ciudad se requiere construir un quiosco de tal manera que quede a la misma distancia del Edificio del Congreso, de la Subsecretaria de Educación y del centro de la ciudad. A fin de apreciar la información, se han ubicado puntos de referencia que indican la ubicación de dichos lugares como se muestra en la Imagen 9. Determina el punto representativo donde se deberá construir el quiosco.

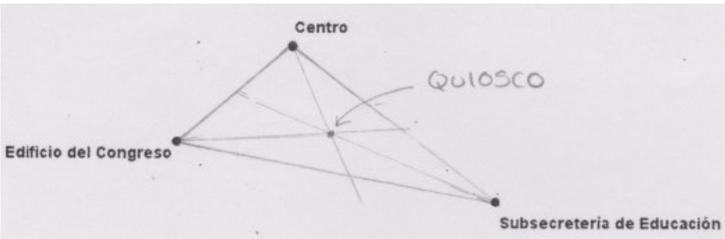


Imagen 9. Representación de la situación que exige determinar la ubicación deconstrucción del quiosco

Ningún estudiante identificó que la definición del concepto de mediatriz es fundamental para atender el problema. Ello los condujo a cometer errores de interpretación, representación y ubicación espacial del punto representativo (lugar en donde debe construirse el quiosco). Veinte alumnos aportaron respuestas equívocas, éstas hacen alusión a que los alumnos concuerdan que el quiosco debe de estar fuera del triángulo de referencia (lo formaron al unir los puntos de referencia) para que de ese modo quede a la misma distancia de los tres puntos mencionados en el problema. Como se puede notar, estos alumnos tienen dificultad para identificar el concepto, aunque su imagen espacial les permite argumentar sobre la ubicación del lugar donde debe construirse el quiosco.

Pregunta 11. Se tiene un terreno de forma triangular y en él se desea construir una fuente de forma circular, de tal manera que sea tangente a cada lado del terreno. Construir el centro de la fuente

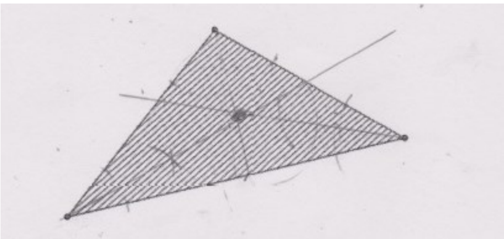


Imagen 10. Representación de la ubicación de construcción de la fuente

La mayoría de los estudiantes indicó que debían trazar un círculo inscrito. Esto favoreció que nueve de los alumnos mencionaran el concepto de bisectriz y la intersección, posterior a ello, lograron representar la ubicación que se pide en el problema. El porcentaje de alumnos que respondieron correctamente es bajo. De la mayoría que aporta respuestas parciales evidencian que tanto su imagen conceptual como la definición de bisectriz en un triángulo y su representación no están desarrolladas.

5.1. Representación e interpretación cuantitativa

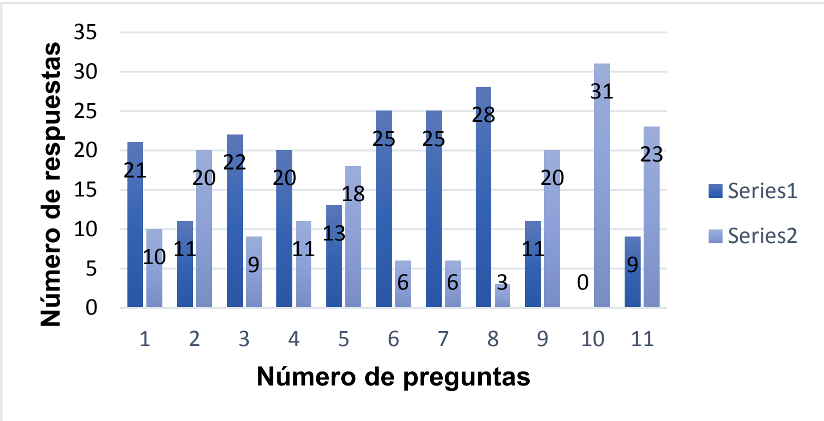


Figura 1. Representación del número de respuestas correctas e incorrectas acerca de las nociones de rectas notables del triángulo

Como se identifica en la figura 1, las respuestas incorrectas (indicadas con la leyenda serie 2) tienen un comportamiento creciente. Esta tendencia puede indicar que en situaciones de aplicación la exigencia en cuanto al dominio de contenido es mayor; en esta etapa se exigen tanto el dominio de la definición; como su identificación y las conexiones matemáticas en su entorno, que pongan en condiciones al resolutor a llevar a cabo la resolución. Por otra parte, el número de respuestas correctas (identificadas con la leyenda serie 1) tiene un comportamiento decreciente, esta tendencia pone en evidencia que en general, es bajo el número de la población experimental que muestra elementos de comprensión de los conceptos objeto de estudio (por comprensión se hace referencia: al dominio de la definición, identificación, representación y aplicación).

Las dificultades encontradas se identifican con las asociadas a los procesos del pensamiento matemático: emergieron ejemplos sobre rectas notables en casos particulares de triángulos, las representaciones no estándar de las figuras fueron factor de dificultad para el estudiante, lo que los llevó a cometer errores en la representación o construcción. Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza para el aprendizaje se manifestaron en cada respuesta a las preguntas del diseño de exploración, ya que las respuestas equívocas o parcialmente correctas ponen en evidencia la necesidad de contribuir con herramientas de planeación para mejorar los aprendizajes del contenido matemático en juego. La exploración realizada permitió identificar las características cualitativas en cuanto a dominios y capacidades de los estudiantes acerca de las rectas notables, esto deberá considerarse en la ruta del planteamiento de alternativas para el aprendizaje, a fin de disminuir las dificultades de tipo conceptual y de aplicación.

6. Conclusiones y reflexiones

Las dificultades y errores identificados en la exploración sobre las rectas y puntos notables del triángulo en la población de estudiantes de universitario, permitieron corroborar lo que han reportado las investigaciones en torno a los problemas de enseñanza y aprendizaje de estos conceptos desde el nivel básico al pre universitario. Esta identificación sirve como punto de partida para la elaboración y puesta en funcionamiento de una trayectoria hipotética de aprendizaje como parte del proyecto “herramientas metodológicas y de tecnología educativa para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de la geometría en el universitario”.

Fundamentados en los errores y dificultades que se han encontrado en la producción de los estudiantes acerca de los conceptos de rectas notables del triángulo, esencialmente y de los aportes teórico-metodológicos de las líneas hipotéticas de trayectorias de aprendizaje (THA) (Simon y Tzur, 2004; León, Díaz y Guilombo, 2014; Morales, Marmolejo y Locia, 2014 y Morales-Carballo, Marmolejo-Valle, Ríos-Parra y Damián-Mojica, 2019), se pueden proyectar algunas ideas para la elaboración de las THA para el tratamiento de los conceptos explorados aquí, por ejemplo, una posible propuesta de trayectoria de aprendizaje del concepto de altura de un triángulo apoyada en el uso del software GeoGebra puede componerse de las siguientes fases:

Actividad de aseguramiento. En esta fase se proyectan actividades para ejemplificar nociones sobre el cálculo de áreas de triángulos que no están representados en la forma estándar y sobre conceptos asociados al triángulo.

Actividad inicial. Se favorece el trabajo con las transformaciones isométricas del plano: traslación y rotación y se ejemplifican en la transformación isométrica de un conjunto de triángulos.

Actividad intermedia. Se plantea enlistar y describir fórmulas diversas para el cálculo del área de un triángulo y generar la discusión del uso de la fórmula clásica *"la mitad de la base por altura dividida por dos"* en un triángulo que no ocupa una posición estándar y del papel que juega el concepto de altura. Luego, se plantea identificar, representar y describir los conceptos de altura de un conjunto de triángulos representados no necesariamente en la posición estándar.

Actividad de fijación. Se muestra un cuadrado y en él se inscribe un conjunto de triángulos en la posición no estándar. Se pide identificar las alturas y determinar la longitud de ellas.

La altura como lugar geométrico. Se propone una actividad en la que se identifica la condición que cumple la altura de un triángulo en una relación de igualdad. Finalmente, se ejemplifican aplicaciones de las rectas y puntos notables del triángulo tanto en el plano euclidiano como en el terreno analítico.

Bibliografía

Bengoechea, P. (1999). *Dificultades del aprendizaje escolar.* Oviedo, España: Universidad de Oviedo.

Chavarría, G. (2014). *Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. Uniciencia*, 28(2), 15-44.

Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L. y Seminara, S. A. (2006). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. Revista Iberoamericana de Educación*, 38(4), 1-13.
https://doi.org/10.35362/rie3842646

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). *Los errores en el aprendizaje de matemática. Revista Premisa*, 6(23), 23-32.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). *Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. Tecné Episteme y Didaxis: TED,* (32), 55-70. https://doi.org/10.17227/ted.num32-1859

Hernández-Gómez, J. C., Locia-Espinoza, E., Morales-Carballo, A., y Sigarreta-Almira, J. M. (2019). *El Contraejemplo en la Elaboración de la Definición de Función Convexa por Estudiantes Universitarios. Información tecnológica*, 30(1), 185-202.
https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642019000100185

Herrera, M. L. (2010). *Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales. En Lestón, P. (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 247-255. México, CDx: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2016). *El aprendizaje de conceptos geométricos en la Educación Primaria. En J. Carrillo y otros (Eds.), Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria*,197-215). Madrid: Paraninfo.

León, O. L., Díaz C. F., y Guilombo, M. (2014). *Diseños didácticos y trayectorias de aprendizaje de la geometría de estudiantes sordos, en los primeros grados de escolaridad. Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 9-28.

Morales-Carballo, A., Marmolejo-Valle, J. E., Ríos-Parra, B. y Damián-Mojica, A. (2019). *Propuesta teórico-didáctica para la enseñanza y aprendizaje del concepto del área. Revista Premisa* 21 (81), 5-20.

Morales, A., Marmolejo, J. E., y Locia, E. (2014). *El software GeoGebra: Un recurso heurístico en la resolución de problemas geométricos. Premisa* 16 (63), 20-28.

Ramos, G. y López, A. (2015). *La Formación de Conceptos: Una Comparación Cognitivista y Histórico-Cultural. Educação e Pesquisa* 41(3), 615-628.

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L.; Gómez, P. (Eds.), Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia, 69-108.* Bogotá: una empresa docente.

Samper, C., Corredor, O. A. y Echeverry, A. (2014). *Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. Tecné Episteme y Didaxis: TED,* (35), 63-86. https://doi.org/10.17227/01213814.35ted63.86

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). *Explicating the Role of Mathematical Task in Conceptual learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. Mathematical Thinking and Learning,* 6(2), 91-104.

Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico, L. Dir., Castro, E., Coriat, M., Martín, A., Puig, L., Sierra, M., Socas, M.M. (Ed.). La Educación Matemática en la Secundaria*.: ice-Horsori. pp 125-154

Villamizar, R. D. (2018). *Diseño de una propuesta didáctica para el fortalecimiento del pensamiento espacial en estudiantes de grado octavo. NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 99, 51-69.

Winicki, G. (2006). *Las Definiciones en Matemáticas y los Procesos de su Formulación: Algunas Reflexiones. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 19, 528-537.

Autores:

Armando Morales Carballo, Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Profesor-investigador en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Incide en los programas de Doctorado y maestría con orientación a la matemática educativa y en la Licenciatura en Matemáticas. armandomorales@uagro.mx

Angie Damián Mojica, Maestra en Ciencias Área: Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Profesora-investigadora en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Incide en la Licenciatura en Matemáticas. adamian@uagro.mx