

Nuevos conocimientos para una educación matemática del S. XX1: panorama internacional de la modelización en el currículo

César Trelles Zambrano, Ángel Alsina Pastells

Fecha de recepción: 23/05/2017

Fecha de aceptación: 24/09/2017

<p>Resumen</p>	<p>En este artículo se argumenta la importancia que ha ido adquiriendo la modelización matemática en las últimas décadas y se revisa el tratamiento curricular que se da a este conocimiento desde las principales organizaciones internacionales –NCTM e ICTMA- que trabajan en educación matemática y en particular en el tema de modelización, así como los documentos curriculares de Estados Unidos, Ecuador y España con el objetivo de identificar la incorporación de este tema en los planes de estudio oficiales de estos países. Los resultados muestran que a pesar de que la modelización está presente en diferentes medidas en los documentos curriculares desde edades cada vez más tempranas, todavía falta una mejor articulación de este componente en los diferentes niveles educativos, así como mejores orientaciones curriculares que permitan llevar el proceso a la práctica.</p> <p>Palabras clave: Modelización matemática, modelo, resolución de problemas, currículo, etapas educativas.</p>
<p>Abstract</p>	<p>This paper argues the importance of mathematical modeling in the last decades and reviews the curricular treatment in the main international organizations on mathematics education - NCTM and ICTMA - as well as the mathematics curricula of the United States, Ecuador and Spain to analyze how mathematical modeling is treated. The results show that although modeling is present in curricular documents from earlier ages, there is still a lack of better articulation in the different educational levels, as well as better curricular orientations that allow the process to be put into practice.</p> <p>Keywords: Mathematical modeling, model, problem solving, curriculum, educational stages.</p>
<p>Resumo</p>	<p>Este artigo discute a importância que foi adquirindo a modelagem matemática nas últimas décadas e se revisa o tratamento curricular que se dá a esse conhecimento desde as principais organizações internacionais-NCTM e ICTMA- que trabalham em educação matemática e em particular no tema da modelagem, assim como os documentos curriculares dos Estados Unidos, Equador e Espanha, com o objetivo de identificar a incorporação desse tema nos planos de estudos oficiais desses países. Os resultados mostram que, embora a modelagem esteja presente em diferentes destaques em documentos curriculares para idades cada vez menores, ainda falta uma melhor articulação dessa componente nos diferentes níveis de ensino, assim como melhores diretrizes curriculares que permitam levar o processo à prática.</p> <p>Palavras-chave: Modelagem matemática, modelo, resolução de problemas, currículo, estágios educacionais.</p>

1. Introducción

En los últimos años la incorporación de la modelización matemática ha cobrado considerable protagonismo en el currículo de matemáticas de diferentes países, debido principalmente al papel cada vez más importante que juega tanto en aplicaciones de la vida real (ingeniería, negocios, ciencias sociales, estudio climático, diseño avanzado, etc.) como dentro de la propia educación matemática. Esta mayor consideración ha dado lugar a que cada vez sea más común la modelización matemática tanto en los documentos curriculares como en el lenguaje empleado por el profesorado. Para Blomhøj (2008) la modelización matemática, junto con la introducción de la tecnología de la información, es probablemente uno de los rasgos comunes más prominentes en los planes de estudio de matemáticas alrededor del mundo en las últimas décadas. Pero ¿qué se entiende por modelización matemática? Si bien el objetivo de este artículo no es profundizar en la conceptualización de este tema, en términos muy generales podemos decir que es un proceso de construcción de un modelo que sirve para explicar o estudiar un fenómeno real o matemático (Alsina, García, Gómez y Romero, 2007), lo que requiere traducciones constantes entre la realidad y las matemáticas. En este sentido, varios autores proponen un conjunto de pasos con el objetivo de ejecutar el mencionado proceso en las aulas, denominado ciclo de modelización. Por ejemplo, Blum y Leiß (2007) plantean que un ciclo de modelización consta de los siguientes pasos: 1) construcción, 2) simplificación/estructuración, 3) matematización, 4) trabajo matemático, 5) Interpretación, 6) validación y 7) exposición. Además, es importante indicar que en la literatura existen muchas otras definiciones, pero la mayoría recogen aspectos y características comunes a las anteriormente mencionadas.

Por otro lado, los continuos avances que se dan en la investigación en lo referente a este tema dan cuenta de que a pesar de que la implementación de la modelización matemática en las aulas puede presentar algunas dificultades, los beneficios que ofrecen a los estudiantes pueden resultar muy interesantes. Blum y Borromeo (2009) manifiestan que a través de la modelización, los estudiantes pueden comprender mejor los contextos en los cuales se desenvuelven; se apoya el aprendizaje de las matemáticas y se promueve el desarrollo de algunas competencias, actitudes y visiones adecuadas hacia esta disciplina.

Con estos antecedentes, los aspectos centrales que se exponen en este artículo pretenden evidenciar el nivel de importancia y el tratamiento que se le da a la modelización en las principales organizaciones que trabajan en educación matemática a nivel mundial, en concreto se analizan los lineamientos que establece el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) y los Estándares Estatales Comunes de Matemáticas (CCSSM) de Estados Unidos, así como cierta literatura generada desde la Comunidad Internacional de Profesores de Modelización Matemática y Aplicaciones (ICTMA) constituida como un grupo de estudio de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI). Finalmente se analiza cómo se ha incorporado la modelización matemática en el currículo educativo de Ecuador y España en los niveles educativos desde los 3 a los 18 años.

El criterio que se ha utilizado para la revisión ha sido la búsqueda del término “modelización matemática” o términos asociados como “modelo”, “modelos” o “modelación”. Para realizar este análisis, se ha usado la técnica de análisis de documentos. Los documentos analizados son documentos oficiales de los distintos organismos mencionados y de las respectivas administraciones públicas. Dentro de la gran variedad de enfoques posibles de análisis de textos (Vallés, 1997), hemos optado por el análisis interpretacional en el sentido de Tesch (1990), puesto que nuestro interés es la comprensión del sentido del texto, a partir del cual pretendemos identificar y categorizar los elementos y explorar sus conexiones. Con el propósito de analizar la progresividad y articulación de la modelización a lo largo de los diferentes niveles educativos se han establecido y codificado cinco categorías de análisis:

1. Estándares, contenidos o destrezas que plantean el uso de la modelización a través de modelos concretos (MC).
2. Estándares, contenidos o destrezas que plantean el uso de la modelización a través de modelos gráficos y/o visuales (MGV)
3. Estándares, contenidos o destrezas que plantean el uso de un modelo previamente establecido (MPE)
4. Estándares, contenidos o destrezas que plantean la creación de un modelo (CM)
5. Estándares, contenidos o destrezas que explícitamente involucran un proceso de reflexión en la implementación de la modelización (PRM)

Se espera que los tópicos tratados permitan generar análisis y reflexión tanto en los profesores de matemáticas como en la comunidad de investigadores, pues al ser un tema relativamente nuevo en el currículo se considera que existe todavía mucho por hacer tanto en investigación como en la práctica docente, siendo importante para avanzar en este objetivo, poder identificar algunas fortalezas y debilidades presentes en la actualidad.

2. La modelización matemática en el NCTM

El NCTM, como organización profesional con influencia internacional comprometida con la excelencia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, trata de orientar la mejora de la educación matemática para que todos los estudiantes puedan entender y ser capaces de usar las matemáticas en la vida diaria y en el trabajo. En este sentido, desde la publicación de *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989), *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991) y *Assesment Standards for school Mathematics* (1995), el NCTM ha ido incorporando conocimientos importantes para satisfacer esta necesidad.

La modelización matemática, como se ha argumentado en la introducción es, sin duda, uno de estos conocimientos, por lo que se ha procurado que progresivamente haya sido más visible en las orientaciones curriculares del NCTM. En *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989), por ejemplo, ya se asumió la necesidad de desarrollar la comprensión de modelos matemáticos aplicables a una variedad de disciplinas, y las orientaciones curriculares a partir de la etapa 5-8 (11-14 años) hacían hincapié en que contenidos matemáticos como los patrones y funciones, la estadística y la probabilidad o bien la geometría no deberían centrarse en la memorización, sino que deberían servir sobre todo para modelizar,

describir, analizar, evaluar y tomar decisiones sobre situaciones problemáticas. Desde entonces, el término “modelo” ha ido evolucionando y ampliándose en los distintos documentos mencionados hasta que en *Principles and Standards for School Mathematics* (2000), se presenta como una noción con diversos significados: a) para referirse a los materiales físicos con los que trabajan los alumnos (modelos manipulativos); b) para sugerir ejemplificación o simulación, como por ejemplo cuando se modeliza el proceso de resolución de un problema; y c) como, aproximadamente, sinónimo de representación. Desde esta visión, un modelo matemático se refiere a la representación matemática de los elementos y relaciones en una versión idealizada de un fenómeno complejo, y señalan que todos los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para usar representaciones que permitan modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos:

Desde prekindergarten hasta el nivel 2 (3-8 años), los alumnos pueden modelizar cómo distribuir 24 galletas entre 8 niños, utilizando teselas o bloques lógicos, de diferentes maneras. En la etapa 3-5 (9-11 años), empiezan a usar representaciones para modelizar los fenómenos del mundo que les rodea y les ayuda a reconocer patrones cuantitativos. En los niveles medios, cuando modelizan y resuelven problemas del mundo real y del matemático, aprenden a usar variables para representar incógnitas y emplear ecuaciones, tablas y gráficas para representar y analizar relaciones. Los alumnos de Secundaria crean e interpretan modelos de fenómenos referentes a una amplia gama de contextos, incluyendo los entornos físico y social, para identificar los elementos esenciales del contexto y diseñar representaciones que capten las relaciones matemáticas que existen entre estos elementos. (NCTM, 2003, p. 75).

Como puede apreciarse, el rango de edad a partir del que los alumnos deberían empezar a usar representaciones para modelizar fenómenos de diferente naturaleza baja hasta los 3 años y, a la vez, se intenta reforzar la idea que la modelización matemática debería aumentar en los diferentes niveles educativos. Las tablas 1 a 4 muestran la presencia de la modelización matemática en los últimos estándares para la educación matemática publicados hasta el momento (en todos los casos, se han omitido de las tablas las columnas de los niveles en los que no parecían términos asociados a la modelización matemática).

Etapa Pre-K-2	Etapa 3-5
Utilizar diversos modelos para desarrollar las primeras nociones sobre el valor posicional y el sistema decimal de numeración (p. 400). MC Relacionar los nombres de los números y los numerales, con las cantidades que representan, utilizando varios modelos físicos y representaciones diversas (p. 400). MC	Utilizar modelos, referencias y formas equivalentes para juzgar el tamaño de una fracción (p. 400). MC Utilizar modelos visuales, referencias y formas equivalentes para sumar y restar fracciones y decimales de uso común (p. 400). MG

Tabla 1. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de números y operaciones (NCTM, 2003).

Etapa Pre-K-2	Etapa 3-5	Etapa 6-8	Etapa 9-12
Modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos (p. 401). MC, MGV	Modelizar situaciones problema con objetos, y usar representaciones como gráficas, tablas y ecuaciones para extraer conclusiones (p. 402). MC, MGV	Modelizar y resolver problemas contextualizados usando representaciones diversas, como gráficas, tablas y ecuaciones (p. 403). MGV	Identificar relaciones cuantitativas fundamentales en una situación, y determinar la clase o clases de funciones que podrían modelizar estas relaciones. MPE Usar expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas, para representar relaciones provenientes de varios contextos. CM Extraer conclusiones razonables de una situación, una vez modelizada (p. 403). PRM

Tabla 2. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de álgebra (NCTM, 2003).

Etapa 3-5
Usar modelos geométricos para resolver problemas de otras áreas de las matemáticas, tales como los números y la medida (p. 404). MGV

Tabla 3. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de geometría (NCTM, 2003).

Etapa 3-5	Etapa 6-8
Identificar tendencias en datos bidimensionales, y hallar funciones que los modelicen, o los transformen para que puedan modelizarse (p. 409). MPE	Calcular probabilidades de sucesos compuestos sencillos, utilizando métodos como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área (p. 410). MPE

Tabla 4. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de estadística y probabilidad (NCTM, 2003).

El análisis de las tablas 1 a 4 muestra que, tal como sugieren Hirsch y McDuffie (2016), en términos generales se ha prestado una escasa atención a la modelización matemática en los documentos del NCTM de 1989 y de 2000. A pesar de que, de acuerdo con las categorías planteadas en nuestro análisis, las diferentes expectativas relacionadas con modelización evidencian una progresividad gradual de la misma, se observa una falta de articulación debido a que la modelización no aparece en todos los niveles, no se observa una mayor presencia en función del nivel, -- a pesar de que ésta es la intención--; y no se considera la modelización en todos los estándares de contenido, ya que por ejemplo se omiten estos conocimientos para el caso del estándar de contenido de medida. Para procurar subsanar esta situación, el NCTM ha publicado posteriormente otros documentos en los que se han ido concretando

algunos recursos y estrategias didácticas para impulsar, entre otros aspectos, la modelización matemática en los diferentes niveles. La colección *Navigations*, por ejemplo, está compuesta por 35 manuales para las diferentes etapas educativas, desde Prekindergarten hasta el grado 12 (3-18 años), que se han ido publicando a lo largo de la primera década del S. XXI. Estos manuales se centran en los cinco estándares de contenido matemático (números y operaciones, álgebra, geometría, medida, estadística y probabilidad) y en los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y conexiones. Cada libro incluye, además, un CD-ROM suplementario que ofrece actividades electrónicas interactivas para usar con los estudiantes, archivos PDF imprimibles de todas las páginas de actividades, artículos de revistas de NCTM y *applets* interactivos.

De la misma manera, la colección *Essential Understandings*, compuesta también por 35 manuales publicados a partir de 2010, aborda temas ampliamente reconocidos como desafíos para los maestros y para los estudiantes mediante la exploración, el desarrollo y la reflexión sobre las ideas y conexiones que permiten a los profesores responder a las preguntas de los estudiantes, corregir sus conceptos erróneos y escalar su progreso al siguiente nivel. Cada libro de esta serie desarrolla conceptos básicos que se identifican como las "grandes ideas" y las "comprensiones esenciales" relacionadas que desbloquean estos temas. Si bien no hay ningún manual específico de esta serie sobre modelización matemática, se trata mediante ejemplos en manuales dedicados al pensamiento algebraico; expresiones, ecuaciones y funciones; números; razones, proporciones y razonamiento proporcional; geometría y medición; estadística; o el razonamiento matemático.

Recientemente se ha publicado el libro *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (NCTM, 2016), que incluye 25 capítulos agrupados en siete secciones: 1) comprensión de modelos y modelización; 2) uso de modelos para representar matemáticas; 3) enseñanza y aprendizaje sobre modelización matemática; 4) la modelización matemática como vehículo para el aprendizaje STEM; 5) diseño de tareas orientadas a la modelización y planes de estudios; 6) evaluación de la modelización matemática; y 7) apoyo al aprendizaje de los maestros sobre la modelización matemática. En los distintos capítulos de este libro se incluyen reflexiones sobre el significado y la práctica de la modelización, estudios de casos, observaciones que provienen de la investigación y estrategias para su implementación en el aula y en la formación del profesorado de todos los niveles. En muchos casos, estas aportaciones se apoyan en los planteamientos descritos en el documento CCSSM (2010), por lo que en el próximo subapartado se hace una descripción de este conjunto de planteamientos.

3. La modelización matemática en el CCSSM

El documento CCSSM (2010) que ha sido adoptado por más de 40 de los 50 estados de los Estados Unidos de América tiene como propósito fundamental unificar criterios respecto a lo que los estudiantes necesitan saber y ser capaces de hacer en matemáticas a lo largo de los diferentes grados educativos desde *Kindergarten* hasta el grado 12 (5 a 18 años). En relación a la modelización matemática, desde una perspectiva genérica se considera como "el uso de la matemática o de la estadística

para realizar una descripción (i.e., modelo) de una situación real del mundo y deducir información adicional acerca de la situación mediante cálculos y análisis matemáticos o estadísticos” (Common Core Standards Writing Team, 2013, p. 5).

Los CCSSM están divididos en estándares para la práctica matemática y en estándares para el contenido matemático, en lo que respecta a los primeros, el modelado con matemáticas es uno de los estándares explícitos para todos los grados educativos, en él se manifiesta:

Los estudiantes matemáticamente competentes pueden aplicar las matemáticas que conocen para resolver problemas de la vida cotidiana (...) ellos interpretan rutinariamente sus resultados matemáticos en el contexto de la situación y reflexionan sobre si los resultados tienen sentido, posiblemente mejorando el modelo si no ha cumplido su propósito. (National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers [NGACBP y CCSSO], 2010, p. 7).

El uso estratégico de herramientas apropiadas es otro de los estándares para la práctica matemática en donde se plantea tanto el uso de modelos concretos para la resolución de problemas matemáticos, así como el uso de la tecnología para visualizar los resultados al momento de realizar modelos matemáticos.

Por su parte los estándares para el contenido matemático están organizados por dominio y de acuerdo al grado educativo. A continuación, se presenta la información por grados educativos concerniente a la modelización matemática y de acuerdo a los dominios en la que se presenta.

En el *Kindergarten*, los dominios son: cantidades y números cardinales; operaciones y pensamiento algebraico; números y operaciones en base diez; medición y datos; y geometría. En los grados primero y segundo los dominios son los mismos a excepción de cantidades y números cardinales.

Nivel	Estándares por dominio	
	Número y operaciones en base 10	Geometría
Kindergarten (5 años)		Realizan modelos con figuras geométricas que existen en el mundo a través de la construcción de figuras con diferentes materiales (por ejemplo, palitos y bolas de arcilla o plastilina) y dibujan figuras geométricas. (p. 12) MC. MGV

Primer grado (6 años)	<p>Suman hasta el 100, incluyendo el sumar un número de dos dígitos y un número de un dígito, así como el sumar un número de dos dígitos y un múltiplo de 10, utilizan modelos concretos o dibujos y estrategias basadas en el valor de posición, las propiedades de las operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta; relacionan la estrategia con un método escrito, y explican el razonamiento aplicado. Entienden que al sumar números de dos dígitos, se suman decenas con decenas, unidades con unidades; y a veces es necesario el componer una decena. (p. 16). MC, MG V</p> <p>Restan múltiplos de 10 en el rango de 10 a 90 a partir de múltiplos de 10 en el rango de 10 a 90 (con diferencias positivas o de cero), utilizando modelos concretos o dibujos, y estrategias basadas en el valor de posición, las propiedades de operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta; relacionan la estrategia con un método escrito y explican el razonamiento utilizado. (p. 16). MC, MG V</p>	
Segundo grado (7 años)	<p>Suman y restan hasta 1000, usando modelos concretos o dibujos y estrategias basadas en el valor de posición, las propiedades de las operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta; relacionan la estrategia con un método escrito. Comprenden que al sumar o restar números de tres dígitos, se suman o restan centenas y centenas, decenas y decenas, unidades y unidades; y a veces es necesario componer y descomponer las decenas o las centenas (p. 19). MC, MG V</p>	

Tabla 5. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el Kindergarten, Primer y Segundo grado.

En los grados tercero cuarto y quinto los dominios son: operaciones y pensamiento algebraico; números y operaciones en base diez; números y operaciones – fracciones; medición y datos; y geometría.

Nivel	Estándares por dominios		
	Números y operaciones en base diez	Número y operaciones - Fracciones	Medición y datos
Tercer grado (8 años)		<p>Reconocen y generan fracciones equivalentes simples. Explican por qué las fracciones son equivalentes, por ejemplo, al utilizar un modelo visual de fracciones. (p. 24). MG V</p> <p>Comparan dos fracciones con el mismo numerador o el mismo denominador al razonar sobre su tamaño. Reconocen que las comparaciones son válidas solamente cuando las dos fracciones hacen referencia al mismo entero. Anotan los resultados de las comparaciones con los símbolos $>$, $=$ o $<$, y justifican las conclusiones, por ejemplo, usando un modelo visual de fracciones. (p. 24). MG V</p>	<p>Utilizan fichas cuadradas para demostrar concretamente que el área de un rectángulo cuyas longitudes laterales son números enteros a y $b + c$, es la suma de $a \cdot b$ y $a \cdot c$. Utilizan modelos de área para representar la propiedad distributiva en el razonamiento matemático. (p. 25). MC</p>

Cuarto grado (9 años)	<p>Multiplican y dividen un número entero de hasta cuatro dígitos por un número entero de un dígito, y multiplican dos números de dos dígitos, Ilustran y explican el cálculo utilizando ecuaciones, matrices rectangulares, y/o modelos de área. (p. 30). MGV</p>	<p>A través de la utilización de modelos visuales:</p> <p>Explican equivalencia de fracciones, comparan dos fracciones con numeradores y denominadores distintos, descomponen de varias maneras una fracción en una suma de fracciones con el mismo denominador, resuelven problemas verbales sobre sumas y restas de fracciones, entienden que un múltiplo de a/b es un múltiplo de $1/b$, resuelven problemas verbales relacionados con la multiplicación de una fracción por un entero, comparan dos decimales hasta las centésimas al razonar sobre su tamaño (p. 30). MGV</p>	
Quinto grado (10 años)	<p>Hallan números enteros como cocientes de números enteros con dividendos de hasta cuatro dígitos y divisores de dos dígitos. Ilustran y explican el cálculo utilizando ecuaciones, matrices rectangulares y/o modelos de área. (p.35). MGV</p> <p>Suman, restan, multiplican y dividen decimales hasta las centésimas utilizando modelos concretos. (p. 35). MC</p>	<p>A través de la utilización de modelos visuales:</p> <p>Resuelven problemas verbales de suma y resta de fracciones que se refieran a un entero, incluyendo casos de denominadores distintos; resuelven problemas verbales relacionados a la división de números enteros que resulten en fracciones o números mixtos; Interpretan el producto $(a/b) \cdot q$ como tantas partes a de la repartición de q en partes iguales de b; resuelven problemas del mundo real relacionados a la multiplicación de fracciones y números mixtos; Interpretan la división de una fracción unitaria entre un número entero distinto al cero, y calculan sus cocientes; Interpretan la división de un número entero entre una fracción unitaria y calculan sus cocientes; Resuelven problemas del mundo real relacionados a la división de fracciones unitarias entre números enteros distintos al cero y la división de números enteros entre fracciones unitarias. (p. 36; p. 37). MGV</p>	

Tabla 6. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el tercer, cuarto y quinto grado.

En sexto y séptimo grado, los dominios son: razones y relaciones proporcionales; el sistema numérico; expresiones y ecuaciones; geometría; y estadísticas y probabilidad.

Nivel	Estándares por dominios		
	Sistema numérico	Geometría	Estadísticas y probabilidad

Sexto grado (11 años)	Interpretan y calculan cocientes de fracciones, y resuelven problemas verbales relacionados a la división de fracciones entre fracciones, utilizando modelos visuales de fracciones y ecuaciones para representar el problema. En general, $(a/b) \div (c/d) = ad/bc$. (p. 42). MGV	Representan figuras tridimensionales utilizando modelos planos compuestos de rectángulos y triángulos, y utilizan los modelos planos para hallar el área total de estas figuras. Aplican estas técnicas al contexto de la resolución de problemas matemáticos y del mundo real. (p. 45). MC	
Séptimo grado (12 años)			<p>Investigan los procesos estocásticos y desarrollan, utilizan y evalúan modelos de probabilidad. (p. 50). MPE</p> <p>Desarrollan un modelo de probabilidad y lo utilizan para hallar la probabilidad de eventos. Comparan probabilidades a partir de un modelo de frecuencias observadas; si la coincidencia no es buena, explican las posibles causas de dicha discrepancia. (p. 51). CM, PRM</p> <p>Desarrollan un modelo de probabilidad uniforme al asignar la misma probabilidad a todos los resultados, y utilizan el modelo para determinar las probabilidades de eventos. Por ejemplo, si un estudiante es seleccionado al azar en una clase, hallan la probabilidad de que Juana sea seleccionada y la probabilidad de que una de mujer sea seleccionada. (p. 51). CM</p> <p>Desarrollan un modelo de probabilidad (el cual puede no ser uniforme) al observar frecuencias en datos generados a partir de un evento fortuito. (p. 51). CM</p>

Tabla 7. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el sexto y séptimo grado.

En el octavo grado, los dominios son: sistema numérico; expresiones y ecuaciones; funciones; geometría; y estadísticas y probabilidad.

Nivel	Estándares por dominios		
	Funciones	Geometría	Estadísticas y probabilidad

Octavo grado (13 años)	<p>Construyen una función para representar una relación lineal entre dos cantidades. Determinan la tasa de cambio y el valor inicial de la función a partir de una descripción de una relación o a partir de dos valores (x, y), incluyendo leerlas en una tabla o en una gráfica. Interpretan la tasa de cambio y el valor inicial de una función lineal en términos de la situación que modela, y en términos de su gráfica o de una tabla de valores. (p. 55). CM</p>	<p>Entienden la congruencia y semejanza utilizando modelos físicos, transparencias, o programas de geometría. (p. 55). MGV</p>	<p>Saben que líneas rectas se utilizan ampliamente para modelar relaciones entre dos variables cuantitativas. Para diagramas de dispersión que sugieren una asociación lineal, ajustan informalmente una línea recta, y evalúan informalmente el ajuste del modelo juzgando la cercanía de los puntos de datos a la línea. (p. 56). MPE</p> <p>Usan una ecuación de un modelo lineal para resolver problemas en el contexto de datos bivariados de medición, interpretando la curva y la intercepción. Por ejemplo, en un modelo lineal para un experimento de biología, interpretan que una pendiente de 1.5 cm/h significa que una hora adicional de luz solar cada día está asociada con un 1.5 cm adicionales en la altura de una planta madura. (p. 56). MPE, PRM</p>
-------------------------------	---	--	--

Tabla 8. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el octavo grado.

Finalmente, en el caso de *High School* (14-18 años) los estándares están organizados en seis categorías conceptuales: número y cantidad; álgebra; funciones; modelización; geometría; y estadísticas y probabilidad.

Los estándares relacionados con la modelización matemática en cada categoría conceptual se presentan en la tabla 6, a excepción de la propia categoría de modelización que se analizará por separado.

Estándares por dominio	
Número y cantidades	<p>Define cantidades apropiadas para el propósito de un modelado descriptivo (p. 60). MPE</p> <p>Representa y modela con cantidades vectoriales (p. 61). CM</p>
Álgebra	<p>Representa restricciones por ecuaciones o inecuaciones o sistemas de ecuaciones o inecuaciones e interpreta las soluciones como viables o no en un contexto de modelado. Por ejemplo representa desigualdades que describen restricciones nutricionales y de costos en combinaciones de diferentes alimentos (p. 65). CM</p>

Funciones	<p>En una función que modela una relación entre dos cantidades, interpreta las características claves de los gráficos y las tablas en términos de las cantidades, y dibuja gráficos que muestran las características claves dada una descripción verbal de la relación. Las características claves incluyen: intercepciones; intervalos donde la función es creciente, decreciente, positiva o negativa; máximos y mínimos relativos; simetrías; comportamiento final; y periodicidad (p. 69). MG, CM</p> <p>Construye una función que modela una relación entre dos cantidades (p. 70). CM</p> <p>Combina tipos de funciones estándar utilizando operaciones aritméticas. Por ejemplo, construye una función que modela la temperatura de un cuerpo de enfriamiento agregando una función constante a una exponencial en descomposición y relaciona estas funciones con el modelo (p. 70). CM</p> <p>Escribe secuencias aritméticas y geométricas tanto recursivamente como con una fórmula explícita, las utiliza para modelar situaciones y traduce entre las dos formas (p. 70). CM</p> <p>Distingue entre situaciones que pueden modelarse con funciones lineales y con funciones exponenciales (p. 70). MPE</p> <p>Para los modelos exponenciales, expresa como logaritmo la solución de $ab^{ct} = d$ donde a, c y d son números y la base b es 2, 10 o e; Evalúa el logaritmo utilizando la tecnología (p. 71). MPE</p> <p>Interpreta expresiones para funciones en términos de la situación que modelan (p. 71). MPE</p> <p>Elije funciones trigonométricas para modelar fenómenos periódicos con amplitud y frecuencia especificadas (p. 71). MPE</p> <p>Utiliza funciones inversas para resolver ecuaciones trigonométricas que surgen en contextos de modelado. Evalúa las soluciones utilizando la tecnología y las interpreta en términos del contexto (p. 71). MPE, PRM</p>
Geometría	<p>Usa formas geométricas, sus medidas y sus propiedades para describir objetos (por ejemplo, modelar un tronco de árbol o el torso humano como un cilindro) (p. 78). MG, V</p> <p>Aplica conceptos de densidad basados en área y volumen en situaciones de modelado (por ejemplo, número de personas por milla cuadrada, BTUs por pie cúbico). (p. 78). CM</p>
Estadística y probabilidad	<p>Ajusta una función a los datos; utiliza funciones adaptadas a los datos para resolver problemas en el contexto. utiliza funciones dadas o elige una función sugerida por el contexto. Enfatiza los modelos lineales, cuadráticos y exponenciales (p. 81). MPE, CM</p> <p>Interpreta la pendiente (tasa de cambio) y la intercepción (término constante) de un modelo lineal en el contexto de los datos (p. 81). MPE</p> <p>Decide si un modelo especificado es coherente con los resultados de un determinado proceso generador de datos, por ejemplo, utilizando simulación. Por ejemplo, un modelo dice que una moneda giratoria cae hacia arriba con probabilidad 0.5. ¿Un resultado de 5 colas en una fila le hará cuestionar el modelo? (p. 81). PRM</p> <p>Utiliza los datos de una encuesta por muestreo para estimar una media o proporción de la población; Desarrollar un margen de error mediante el uso de modelos de simulación para el muestreo aleatorio (p. 82). MPE</p> <p>Encuentre la probabilidad condicional de A dado B como la fracción de los resultados de B que también pertenecen a A, e interpreta la respuesta en términos del modelo (p. 82). MPE, PRM</p> <p>Aplica la regla de suma $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, e interpreta la respuesta en términos del modelo (p. 82). MPE, PRM</p> <p>Aplicar la Regla de Multiplicación general en un modelo de probabilidad uniforme, $P(A \cap B) = P(A)P(B A) = P(B)P(A B)$ e interpreta la respuesta en términos del modelo (p. 82). MPE, PRM</p>

Tabla 9. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en High School.

El análisis minucioso de las tablas 5 a 9 muestra que la modelización matemática tiene más presencia que en los planteamientos del NCTM, se evidencia también que al igual que en estos últimos existe una progresión gradual de la implementación de la modelización a lo largo de los diferentes niveles educativos a pesar de que a nuestro criterio aún es escasa la presencia de estándares que involucren un proceso de reflexión en la implementación de la modelización, más aún cuando el documento de CCSSM es claro al manifestar que ésta debe ser entendida como un proceso y no como una colección de temas aislados.

El ciclo de modelado básico Implica: (1) identificar variables y seleccionar aquellas que representan características esenciales, (2) formular un modelo mediante la

creación y selección de representaciones geométricas, gráficas, tabulares, algebraicas o estadísticas que describan las relaciones entre las variables, (3) analizar las variables (4) interpretar los resultados de las matemáticas en términos de la situación original, (5) validar las conclusiones comparándolas con la situación, y luego de ser posible mejorar el modelo y (6) informar sobre las conclusiones y el razonamiento detrás de ellas. (NGACBP y CCSSO, 2010, p. 72).

Sin embargo, a pesar de que en los niveles superiores la modelización matemática toma mayor protagonismo, se puede evidenciar que no existe un tratamiento transversal de la misma, pues en los diferentes niveles educativos existen dominios que no poseen estándares relacionados con un proceso de modelización.

4. La modelización matemática en el ICTMA

ICTMA fue creada desde el año 1983 con el objetivo de fomentar la investigación y la enseñanza de la modelización matemática y sus aplicaciones en los diferentes niveles educativos a nivel internacional, desde primaria hasta la educación universitaria. Un aspecto a destacar de esta comunidad es que reúne tanto a educadores como a profesionales de la modelización matemática a nivel científico, hecho que se convierte en una fortaleza ya que el diálogo entre matemáticos y educadores matemáticos es una necesidad cada vez más latente.

Varios son los tópicos que se han tratado en las diferentes conferencias del ICTMA que son celebradas cada dos años, sin embargo un aspecto clave de las últimas reuniones ha sido a nuestro juicio la generación de importante literatura en torno a la construcción de una teoría que permita unificar criterios que permitan llevar la modelización matemática a las aulas. Al momento se han podido establecer parámetros generales como:

(...) una teoría global para la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática, en el sentido de un sistema de puntos de vista vinculados que cubran todos los niveles didácticos, es decir: los objetivos de aprendizaje, las razones fundamentales para alcanzar estos objetivos en los diferentes niveles de los sistemas educativos, ideas probadas sobre cómo apoyar a los profesores en la implementación de objetivos de aprendizaje y los reconocidos retos y dilemas didácticos relacionados con diferentes formas de organizar la enseñanza, análisis teóricos y empíricos de las dificultades de aprendizaje relacionadas con la modelización e ideas sobre diferentes formas de evaluar el aprendizaje de los estudiantes en las actividades de modelado y los obstáculos relacionados. (Kaiser, Blomhøj y Sriraman, 2006, p. 82).

Por otra parte, la actividad investigativa mediante la implementación de varias actividades de modelización en las aulas ha permitido plantear varias perspectivas. Kaiser y Sriraman (2006) las clasifican en:

- Perspectiva realista, cuyo objetivo principal tiene un enfoque pragmático utilitario hacia la resolución de problemas del mundo real.
- Perspectiva contextual: se centra en los objetivos psicológicos, otorgando mucha importancia a la resolución de problemas de palabras.
- Perspectiva educacional: persigue objetivos pedagógicos y disciplinares, tanto en la estructuración de los procesos de aprendizaje como en la introducción y el desarrollo de conceptos.
- Perspectiva socio crítica: busca la comprensión crítica del mundo circundante.

- Perspectiva epistemológica: se centra en los desarrollos teóricos del proceso de modelado.
- Perspectiva cognitiva: tiene las características más bien de una meta perspectiva y se centra en objetivos de investigación a través del análisis y comprensión de los procesos cognitivos que ocurren durante el modelado, así como en objetivos psicológicos mediante la promoción de los procesos de pensamiento matemático utilizando modelos como imágenes mentales o incluso como imágenes físicas, enfatizando a la modelización como un proceso mental tanto de abstracción como de generalización.

Sin embargo para (Blomhøj, 2008) las perspectivas no son mutuamente excluyentes y todas tienen características distintivas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática.

Blum & Borromeo (2009) bajo la perspectiva cognitiva, recomiendan el siguiente esquema para un proceso de modelización a ser trabajado por los estudiantes: 1) Entendimiento de la tarea, para ello plantean que es necesario leer el texto con precisión e imaginar la situación claramente, 2) Establecer un modelo, para lo cual se buscarán los datos necesarios así como las relaciones matemáticas, 3) Usar procedimientos matemáticos adecuados y llegar a un resultado, 4) Explicar el resultado y en caso de ser necesario regresar al paso 1.

5. La modelización matemática en el currículo ecuatoriano

El nivel de Educación General Básica (EGB) en Ecuador está dividido en cuatro subniveles: preparatoria (5 años de edad), básica elemental (6-8 años de edad), básica media (9-11 años de edad) y básica superior dirigida a estudiantes de 12-14 años de edad (Decreto 1241/2012). En el currículo vigente, a partir del subnivel Elemental y hasta el Bachillerato inclusive, la asignatura de matemáticas está organizada en tres grandes bloques: 1) álgebra y funciones; 2) geometría y medida; y 3) estadística y probabilidad (Ministerio de Educación del Ecuador [MinEduc], 2016).

El tratamiento metodológico que se da a la matemática en los primeros subniveles posee un carácter lúdico, poniendo especial énfasis en el manejo de material concreto como recurso didáctico que facilite alcanzar los aprendizajes en los estudiantes, mientras que a partir del subnivel medio se otorga un tratamiento más abstracto, teniendo siempre presente la resolución de problemas de la vida real como elemento orientador en todos los subniveles.

En el nivel de Educación General Básica, en especial en los subniveles de preparatoria y elemental la enseñanza del área está ligada a las actividades lúdicas que fomentan la creatividad, la socialización, la comunicación, la observación, el descubrimiento de regularidades, la investigación y la solución de problemas cotidianos; el aprendizaje es intuitivo, visual y, en especial, se concreta a través de la manipulación de objetos para obtener las propiedades matemáticas deseadas e introducir a su vez nuevos conceptos. A partir del subnivel medio y superior de EGB se van complejizando de forma sistemática los contenidos y procesos matemáticos, los estudiantes utilizan definiciones, teoremas y demostraciones lo que conlleva al desarrollo de un pensamiento reflexivo y lógico que les permite resolver problemas de la vida real. (MinEduc, 2016, p. 218).

Si bien el término “modelización matemática” aparece poco de forma explícita a lo largo de todo el currículo de EGB, términos asociados como “modelo”, “modelos funcionales” y “modelos matemáticos” son utilizados con más frecuencia, por ejemplo, el primer objetivo general de la asignatura establece que, al terminar la escolarización obligatoria, los estudiantes serán capaces de:

Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de *modelos funcionales*, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto. (MinEduc, 2016, p. 228).

A continuación, se presenta el tratamiento que se da a la modelización matemática en cada subnivel educativo de EGB y en el nivel educativo de Bachillerato, considerando que cada uno contempla los siguientes componentes: objetivos, destrezas con criterios de desempeño por bloque curricular, criterios de evaluación, orientaciones metodológicas para la evaluación de los criterios, e indicadores de evaluación.

5.1. Subnivel de EGB Preparatoria

A diferencia de los demás subniveles, en preparatoria no se trabajan los tres grandes bloques debido a que se trabaja con un ámbito de desarrollo y aprendizaje denominado relaciones lógico-matemáticas. En ninguno de los componentes de este subnivel se evidencia un tratamiento de la modelización matemática.

5.2. Subnivel de EGB Elemental

El objetivo de este subnivel relacionado con la modelización matemática es:

“Utilizar objetos del entorno para formar conjuntos, establecer gráficamente la correspondencia entre sus elementos y desarrollar la comprensión de modelos matemáticos” (MinEduc, 2016, p. 509).

En la tabla 10 se muestran los demás componentes del subnivel asociados a la modelización matemática (cabe señalar que no se indican criterios e indicadores de evaluación, por lo que se han omitido de la tabla 10).

Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas para la evaluación de los criterios
Reconocer y diferenciar los elementos y propiedades de cilindros, esferas, conos, cubos, pirámides de base cuadrada y prismas rectangulares en objetos del entorno y/o modelos geométricos (p. 512). MC, MGV	El aprendizaje del estudiante se evidencia cuando este nombra las características de los objetos de su entorno y los relaciona con lo aprendido. Además, cuando es capaz de crear un modelo geométrico físico con diversos materiales, tomando en cuenta las características de los cuerpos y figuras geométricas; y de explicar el procedimiento realizado y los resultados del mismo. También clasifica los cuerpos y figuras geométricas en diferentes escenarios recreados, de acuerdo a sus características y/o propiedades (p. 519).
Identificar formas cuadradas, triangulares, rectangulares y circulares en cuerpos geométricos del entorno y/o modelos geométricos (p. 512). MC, MGV	

Tabla 10. La modelización matemática en el subnivel de EGB Elemental (MinEduc, 2016)

5.3. Subnivel de EGB Media

De los objetivos de este subnivel, el único que guarda relación directa con la modelización matemática es:

“Utilizar el sistema de coordenadas cartesianas y la generación de sucesiones con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, como estrategias para solucionar problemas del entorno, justificar resultados, comprender modelos matemáticos y desarrollar el pensamiento lógico-matemático (MinEduc, 2016, p. 709).

A pesar de que uno de los objetivos de este subnivel menciona la comprensión de modelos matemáticos, los demás componentes de este subnivel omiten este tema.

5.4. Subnivel de EGB Superior

De los diferentes objetivos que existen en este subnivel educativo, ninguno hace alusión específica a la modelización matemática. En tanto que los componentes de este subnivel que sí tratan este tema se presentan en la tabla 11 (como puede apreciarse en la tabla, no aparecen términos asociados a la modelización en las orientaciones metodológicas para la evaluación de los criterios, por lo que dicha columna se ha omitido).

Destrezas con criterios de desempeño	Criterios de evaluación	Indicadores de evaluación
<p>Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas (p. 883). CM</p> <p>Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales, y resolver problemas (p. 883). MPE</p> <p>Resolver (con apoyo de las TIC) y plantear problemas con enunciados que involucren modelos con funciones cuadráticas, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema (p. 884). CM. PRM</p>	<p>Define funciones elementales (función real, función cuadrática), reconoce sus representaciones, propiedades y fórmulas algebraicas, analiza la importancia de ejes, unidades, dominio y escalas, y resuelve problemas que pueden ser modelados a través de funciones elementales; propone y resuelve problemas que requieran el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado; juzga la necesidad del uso de la tecnología (p. 892)</p>	<p>Resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos, como funciones; emplea gráficas de barras, bastones y diagramas circulares para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema (p. 893).</p> <p>Utiliza las TIC para graficar funciones lineales, cuadráticas y potencia ($n=1, 2, 3$), y para analizar las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones), la función potencia (monotonía) y la función cuadrática (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimo, paridad); reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función lineal o cuadrática, lo resuelve y plantea otros similares (p. 893).</p>

Tabla 11. La modelización matemática en el subnivel de EGB Superior (MinEduc, 2016)

5.5. Nivel de Bachillerato

En el caso del Bachillerato existen dos posibilidades: a) Ciencias y b) Técnico, sin embargo, la asignatura de matemáticas forma parte de un tronco común, lo que hace que todos los estudiantes reciban la misma formación matemática independientemente de la alternativa que elijan. Es importante indicar que en el caso del Bachillerato en Ciencias existe un número de horas a discreción de las diferentes instituciones educativas, que en función de los intereses de los estudiantes pueden

ser destinadas a fortalecer o ampliar la formación matemática u otras áreas de conocimiento.

En la introducción del currículo matemático de Bachillerato se manifiesta explícitamente la importancia que deben tomar los procesos relacionados con la modelización matemática. “En el bachillerato, los contenidos matemáticos tienen un carácter más formal, se enfatizan las aplicaciones y la solución de problemas mediante la elaboración de modelos” (MinEduc, 2016, p. 1250).

Por su parte, los objetivos del bachillerato son los mismos que los objetivos generales del área y sólo el primero de ellos que fue ya citado en líneas anteriores pone de relieve aspectos relacionados con la modelización matemática.

Sin embargo, en el bachillerato toma un poco más de protagonismo la modelización matemática, conforme podemos apreciar en la tabla 12.

Destrezas con criterios de desempeño	Criterios de evaluación	Orientaciones metodológicas para la evaluación de los criterios	Indicadores de evaluación
<p>Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones, reales o hipotéticas, con el empleo de la modelización con funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con $n=-1, -2$, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín), cuadráticas, derivadas de funciones cuadráticas, polinomiales, racionales, trigonométricas, exponenciales o logarítmicas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos (p. 1255; p. 1256; p. 1257; p. 1260). MPE, CM, PRM</p> <p>Resolver y plantear aplicaciones (un modelo simple de línea de</p>	<p>Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.</p>	<p>Se quiere comprobar el desarrollo de las habilidades necesarias para reconocer, interpretar, graficar, analizar las características y operar con funciones de variable real (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica, polinomiales y racionales). Que el estudiante analice el dominio, el recorrido, la monotonía, los ceros, máximos y mínimos, paridad y composición de las diferentes funciones. También se incluyen las propiedades de las funciones: inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Apoyándose con las TIC, debe poder graficar, interpretar y encontrar las intersecciones con los ejes, y la intersección de las gráficas de funciones; además de hallar la solución de ecuaciones de manera gráfica; interpretar geoméricamente la derivada de una función cuadrática y sus aplicaciones;</p>	<p>Representa gráficamente funciones cuadráticas; halla las intersecciones con los ejes, el dominio, rango, vértice y monotonía; emplea sistemas de ecuaciones para calcular la intersección entre una recta y una parábola o dos parábolas; emplea modelos cuadráticos para resolver problemas, de manera intuitiva halla un límite y la derivada; optimiza procesos empleando las TIC (p. 1272). Reconoce funciones polinomiales de grado n, opera con funciones polinomiales de grado ≤ 4 y racionales de grado ≤ 3; plantea modelos matemáticos para resolver problemas aplicados a la informática; emplea el teorema de Horner y el teorema del residuo para factorizar polinomios; con la ayuda de las TIC, escribe las ecuaciones de las asíntotas, y discute la validez de sus resultados (p. 1272). Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados (p. 1272).</p>

<p>producción, un modelo en la industria química, un problema de transporte simplificado), interpretando y juzgando la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema (p. 1263). CM, PRM</p>		<p>y comprender la noción de límite y su aplicación, así como la modelización de situaciones reales a través de las funciones (p. 1272).</p>	<p>Resolver y plantear aplicaciones (un modelo simple de línea de producción, un modelo en la industria química, un problema de transporte simplificado), interpretando y juzgando la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema (p. 1279).</p>
--	--	--	---

Tabla 12. La modelización matemática en el currículo ecuatoriano vigente de Bachillerato (MinEduc, 2016)

A diferencia del currículo matemático de EGB se puede apreciar que en el Bachillerato los procesos relacionados con la modelización matemática tienen una mejor articulación y presentan una organización más sistemática.

En términos generales observamos que si bien en el currículo ecuatoriano también se evidencia un progreso gradual de la modelización, el hecho de que ésta no esté presente en todos los subniveles ocasiona problemas de desarticulación similares a los discutidos en líneas anteriores.

6. La modelización matemática en el currículo español

En el currículo básico de Educación Primaria (6-12 años) vigente en España, la asignatura de matemáticas está organizada en cinco grandes bloques en todos los niveles, desde 1º hasta 6º: 1) procesos, métodos y actitudes en matemáticas; 2) números; 3) medida; 4) geometría; y 5) estadística y probabilidad. Cada bloque, a su vez, está subdividido en tres categorías: a) contenidos; b) criterios de evaluación; y c) estándares de aprendizaje evaluables (Real Decreto 126/2014).

El término “modelización matemática” no aparece en ninguna ocasión en el currículo de matemáticas, mientras que otras nociones aparecen únicamente para definir las matemáticas como:

(...) un conjunto de ideas y formas que nos permiten analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad, para obtener informaciones y conclusiones que no estaban explícitas y actuar, preguntarnos, *obtener modelos* e identificar relaciones y estructuras, de modo que conllevan no sólo utilizar cantidades y formas geométricas sino, y sobre todo, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas. (Real Decreto 126/2014, p. 19386).

A pesar de la escasez de referencias explícitas a la modelización matemática cabe señalar que, por su carácter transversal, en la presentación de la asignatura de matemáticas de Educación Primaria se exponen ya las primeras directrices curriculares vinculadas a la modelización, al hacer referencia al aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas en contextos reales:

El trabajo en esta área en la Educación Primaria estará basado en la experiencia; los contenidos de aprendizaje parten de lo cercano, y se deberán abordar en contextos de identificación y resolución de problemas. Las matemáticas se

aprenden utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria, para ir adquiriendo progresivamente conocimientos más complejos a partir de las experiencias y los conocimientos previos. Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática. En la resolución de un problema se requieren y se utilizan muchas de las capacidades básicas: leer, reflexionar, planificar el proceso de resolución, establecer estrategias y procedimientos y revisarlos, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados” (Real Decreto 126/2014, p. 19386).

Como puede apreciarse, se alude a aspectos como la planificación del proceso de resolución y el uso de estrategias y procedimientos diversos, sin hacer, pero mención directa a la modelización. Aun así, considerando la definición de modelización matemática que se asume en este artículo, en la tabla 13 se presentan los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje sobre resolución de problemas que los autores hemos asociado a la modelización matemática.

	Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluados
--	------------	-------------------------	-------------------------------------

<p style="text-align: center;">Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas</p>	<p>Planificación del proceso de resolución de problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Análisis y comprensión del enunciado. - Estrategias y procedimientos adecuados, etc. <p>Resultados obtenidos. Planteamiento de pequeñas investigaciones en contextos numéricos, geométricos y funcionales (p. 19388).</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Expresar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones. 4. Profundizar en problemas resueltos, planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, etc. 5. Realizar y presentar informes sencillos sobre el desarrollo, resultados y conclusiones obtenidas en el proceso de investigación. 6. Identificar y resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados para la resolución de problemas (p. 19388). 	<p>1.1. Comunica verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema de matemáticas o en contextos de la realidad.</p> <ol style="list-style-type: none"> 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas. 2.3. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisa las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprueba e interpreta las soluciones en el contexto de la situación, busca otras formas de resolución, etc. 2.4. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, contrastando su validez y valorando su utilidad y eficacia. 2.5. Identifica e interpreta datos y mensajes de textos numéricos sencillos de la vida cotidiana (facturas, folletos publicitarios, rebajas...). <ol style="list-style-type: none"> 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales. 3.2. Realiza predicciones sobre los resultados esperados, utilizando los patrones y leyes encontrados, analizando su idoneidad y los errores que se producen. 4.1. Profundiza en problemas una vez resueltos, analizando la coherencia de la solución y buscando otras formas de resolverlos. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, conectándolo con la realidad, buscando otros contextos, etc. 5.1. Elabora informes sobre el proceso de investigación realizado, exponiendo las fases del mismo, valorando los resultados y las conclusiones obtenidas (p. 19388).
<p style="text-align: center;">Bloque 2. Números; Bloque 3. Medida; Bloque 4. Geometría; Bloque 5. Estadística y probabilidad</p>	<p>Resolución de problemas de la vida cotidiana (p. 19390). Resolución de problemas de medida (p. 19392)</p> <p>(En los bloques 4 y 5 la resolución de problemas no aparece como contenido)</p>	<p>Al final de cada bloque se expone el mismo criterio de evaluación:</p> <p>Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas (p. 19390; p. 19392; p. 19393).</p>	<p>Al final de cada bloque se exponen los mismos estándares de aprendizaje evaluables:</p> <p>Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos trabajados, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.</p> <p>Reflexiona sobre el proceso aplicado a la resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, buscando otras formas de resolverlo (p. 19390; p. 19392; p. 19393).</p>

Tabla 13. La modelización matemática en el currículo español vigente de Educación Primaria (Real Decreto 126/2014)

Como se observa en la tabla 13, en el currículo de Educación Primaria no aparecen contenidos sobre la modelización matemática – motivo por el cual no se han categorizado los contenidos, y este proceso matemático se vincula a la resolución de problemas en contextos reales, tal como se ha indicado. Concretamente, se enfatizan los procesos de razonamiento y estrategias de resolución, junto con la descripción y análisis de situaciones de cambio para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, que -sin mencionarlo- son algunas de las principales finalidades de la modelización matemática.

En el currículo de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), y más concretamente en el primer ciclo (12-14 años), las matemáticas se trabajan en ambos cursos en la asignatura troncal “Matemáticas”. En el segundo ciclo, en cambio (14-16 años), se puede elegir entre las asignaturas “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” o “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas”. En todos los niveles, la asignatura de matemáticas está organizada en cinco bloques: 1) procesos, métodos y actitudes en matemáticas; 2) números y álgebra; 3) geometría; 4) funciones; y 5) estadística y probabilidad.

En Bachillerato, existen diversas posibilidades en función de la modalidad: a) Ciencias (“Matemáticas” I y II); b) Humanidades y Ciencias Sociales (para el itinerario de ciencias sociales, “Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales” I y II); c) Artes (sin matemáticas). En la asignatura de “Matemáticas” hay cinco bloques: 1) procesos, métodos y actitudes en matemáticas; 2) números y álgebra; 3) análisis; 4) geometría; y 5) estadística y probabilidad; mientras que en la asignatura “Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales” no se incluye el bloque de geometría.

Como en el caso de Educación Primaria, en todos los niveles de ESO y Bachillerato, cada bloque está subdividido en tres categorías: a) contenidos; b) criterios de evaluación; y c) estándares de aprendizaje evaluables (Real Decreto 126/2014).

El término “modelización matemática” aparece en la introducción del currículo de matemáticas tanto de ESO como de Bachillerato para referirse a las finalidades de las matemáticas:

Las matemáticas adquieren un papel relevante como herramienta adecuada para adquirir y consolidar el conocimiento, desarrollan la capacidad de reflexionar y razonar acerca de los fenómenos sociales y proporcionan instrumentos adecuados para la representación, *modelización* y contraste de las hipótesis planteadas acerca de su comportamiento. (Real Decreto 1105/2014, p. 381; p. 399).

A diferencia del currículo de matemáticas de Educación Primaria, en el bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” del currículo de ESO y Bachillerato, que como se ha indicado se articula sobre procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático, se hace mención explícita a la matematización y *modelización*, junto a la resolución de problemas, proyectos de investigación matemática, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos. Al tratarse de un bloque transversal, los contenidos, criterios y estándares referentes a la modelización aparecen de forma idéntica en todos los niveles:

Bloque	Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluados
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos (p. 382; p. 386; p. 391; p. 395; p. 399; p. 404; p. 409; p. 414; p. 419) MPE, CM, PRM	7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos (p. 382; p. 386; p. 391; p. 395; p. 399; p. 404; p. 409; p. 414; p. 419).	9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad (p. 382; p. 386; p. 391; p. 395; p. 400; p. 404; p. 409; p. 415; p. 420).

Tabla 14. La modelización matemática en el currículo español vigente de ESO y Bachillerato (Real Decreto 1105/2014)

A partir de los datos analizados, se concluye que en el currículo español de matemáticas de ESO y Bachillerato la modelización matemática se considera un proceso matemático para trabajar los diferentes bloques de contenido a través de la resolución de problemas en contextos tanto reales como matemáticos.

A partir del análisis de los criterios de evaluación de la última tabla se puede inferir que los contenidos trabajados en el currículo español de ESO y Bachillerato relacionados con la modelización matemática están relacionados directamente con la utilización de modelos previamente establecidos, la construcción de modelos y el uso de un proceso de reflexión en la implementación de la modelización.

7. Consideraciones Finales

La revisión de los diferentes documentos mencionados en este artículo pone de manifiesto la presencia, aunque en diferentes medidas, de la modelización matemática en los currículos de los niveles educativos de primaria, secundaria y bachillerato o su equivalente en Estados Unidos, Ecuador y España. En términos generales, a pesar de que la modelización matemática es un proceso que debería incrementarse en mayor medida conforme los estudiantes avanzan en los diferentes niveles educativos, observamos que al menos en ciertos documentos curriculares no ocurre:

- Un aspecto común a todos los documentos curriculares analizados es la implementación gradual de los procesos de modelización, en donde los modelos concretos y los modelos gráficos visuales son utilizados predominantemente en los primeros niveles escolares (3 a 11 años). Las utilizaciones de modelos previamente establecidos de carácter un poco más formal son utilizados con más frecuencia en los niveles escolares intermedios (12 a 14 años) y la creación de modelos con su respectivo análisis, interpretación y juzgamiento del proceso de modelización es casi único en los últimos niveles educativos estudiados (15-18 años). Si bien el proceso de reflexión toma mayor importancia en los últimos niveles educativos es importante que se comience a desarrollar la criticidad y procesos de reflexión en los estudiantes desde las primeras edades.
- En Estados Unidos se puede notar como una fortaleza que los estándares emitidos desde el NCTM propongan trabajar la modelización matemática desde

tempranas edades, sin embargo, en los niveles superiores los estándares para trabajar la modelización no están explícitos. La ventaja es que el NCTM cada vez viene realizando mayores esfuerzos por generar literatura que permita llevar las modelizaciones matemáticas a las aulas.

- Por su parte los CCSSM permiten observar una mayor incorporación de la modelización matemática a lo largo de los diferentes niveles, no obstante, se puede notar un cierto nivel de desarticulación, ya que existen algunos dominios en algunos niveles educativos en los cuales no se trabaja la modelización matemática.
- En el caso ecuatoriano de manera similar se nota una desarticulación en el tratamiento de la modelización matemática, pues en ocasiones dentro de un mismo grado educativo se trabaja la modelización matemática, pero solo en ciertos componentes curriculares.
- En España, a pesar de que en Educación Primaria se otorga mucha importancia a la resolución de problemas, es un inconveniente que la modelización matemática no esté incorporada de forma explícita en el currículo oficial. Esta situación mejora mucho en la Educación Secundaria y Bachillerato, donde se puede notar un tratamiento importante a lo largo de los diferentes bloques de estudio.

Finalmente consideramos que la modelización matemática debe ser entendida como un elemento transversal que atraviese tanto los diferentes dominios o bloques matemáticos así como los diferentes niveles educativos y por tanto debe estar explícita en las diferentes partes del currículo matemático, empero pensamos que no basta simplemente con enunciarla de manera formal, es importante también orientar al profesorado sobre cómo ponerla en práctica en el aula de clases y para ello las iniciativas surgidas desde diferentes organismos internacionales como el NCTM o el ICTMA son un gran aporte.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, C., García, L.M., Gómez, J. y Romero, S. (2007). Modelling in science education and learning. *SUMA* 54, 51-53.
- Blomhøj, M. (2008). Different perspectives on mathematical modelling in educational research (Vol. 1–13). Recuperado de: <http://tsg.icme11.org/document/get/811>
- Blum, W., & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.
- Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (1era ed., pp. 222–231). Chichester: Horwood.
- Common Core Standards Writing Team (2013). *Progressions for the Common Core Standards in Mathematics (draft) High School, Modeling*. Tucson, Ariz: Institute for Mathematics and Education, University of Arizona.
- Ecuador. Decreto Ejecutivo 1241/2012, de 25 de julio, por el que se establece el Reglamento General a la ley Orgánica de Educación Intercultural.
- España. Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.
- España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el

- currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
- Hirsch, C., & McDuffie, A. (2016). *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics*. (National Council of Teachers of Mathematics, Ed.) (1era ed.). Reston.
- Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 82–85.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 38(3), 302–310.
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2016). *Currículo de los Niveles de Educación Obligatoria*. Recuperado de: <http://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/08/Curriculov2.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assesment Standards for school Mathematics*. Reston: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington D.C. Publicado en castellano: *Estándares Estatales Comunes de Matemáticas*, San Diego, San Diego County Office of Education (2012).
- Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.
- Tesch, R. (1990). *Qualitative research: Analysis types and software tools*. Nueva York: The Falmer Press.
- Vallés, M. (1997). *Técnicas cualitativas de investigación social: Reflexión metodológica y práctica profesional*. Madrid: Síntesis.

Autores: César Trelles Zambrano: Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Cuenca (Ecuador). Estudiante de Doctorado en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas tanto en la formación del profesorado como en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria y bachillerato. cesar.trellesz@ucuenca.edu.ec

Alsina, Ángel: Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina. angel.alsina@udg.edu