

Geometria Sintética: narrativa de um episódio com uma aluna-professora

José Carlos Pinto Leivas

Fecha de recepción: 2016-02-08
Fecha de aceptación: 2017-02-26

<p>Resumen</p>	<p>El artículo aborda un episodio en una clase de Geometría en una maestría en Enseñanza de las Matemáticas, en Brasil. Es una investigación cualitativa con características inductivas, explicativas y descriptivas. La pregunta: ¿cómo el diálogo/mediación del profesor, en la realización de una situación problema, puede proporcionar la demostración sintética de una proposición matemática? El propósito fue describir y analizar el episodio que involucra maestro y un alumno en la resolución. El método fue la Geometría Sintética; los datos, los diálogos de los dos. La conclusión es que el objetivo se ha logrado; el estudiante resuelve y la enunciación lo que llevaron al problema de Apolonio. Palabras clave: Geometría sintética o Pure. Episodio de una lección. Problema de Apollonius.</p>
<p>Abstract</p>	<p>This article discusses an episode of Geometry in a classroom a of a master's degree in Mathematics Teaching, by the author, in Brazil. It's a qualitative research with inductive, explanatory and descriptive characteristics. The research question is describing and analyze the dialogue/intermediation of a episode between the teacher and the student about a geometric problem-situation can provide the synthetic demonstration of a mathematical proposition. The method used was Synthetic Geometry and the data were the dialogues between them. We conclude that the objective was achieved since the student was able to troubleshoot the problem and formulate the proposition which led to the major problem of Apollonius. Keywords: Synthetic or Pure Geometry. Episode one classroom. Apollonius' problem.</p>
<p>Resumo</p>	<p>O artigo aborda um episódio de uma aula de Geometria num mestrado profissional em Ensino de Matemática, vivenciado pelo autor, no Brasil. Trata de pesquisa qualitativa com características indutiva, explicativa e descritiva. A questão foi verificar como o diálogo/intermediação do professor, na realização de uma situação-problema, pode proporcionar demonstração sintética de uma proposição matemática? O objetivo foi descrever e analisar o episódio de sala de aula entre professor e estudante na resolução da questão de pesquisa. O método foi o da Geometria Sintética e os dados foram os diálogos entre os dois. Conclui-se que o objetivo foi alcançado, pois a estudante obteve a solução e o enunciado de uma das proposições que conduziram ao <i>problema de Apolônio</i>. Palavras-chave: Geometria Sintética ou Pura. Episódio de uma aula. Problema de Apolônio.</p>

1. Introdução

Um dos problemas interessantes em Geometria é o que está relacionado aos teoremas de concorrência. De acordo com Moise e Downs (1971, p. 444), “duas ou mais retas de um plano são concorrentes se existe um único ponto que pertence a todas elas. O ponto em comum é chamado ponto de concorrência”. No caso de se utilizar três retas, esse conceito é empregado em resultados relevantes, como no seguinte, denominado Teorema sobre a Concorrência das Mediatrizes: “As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes. O ponto de concorrência é equidistante dos vértices do triângulo” (Idem, p. 445). A demonstração a seguir é adaptada desses autores.

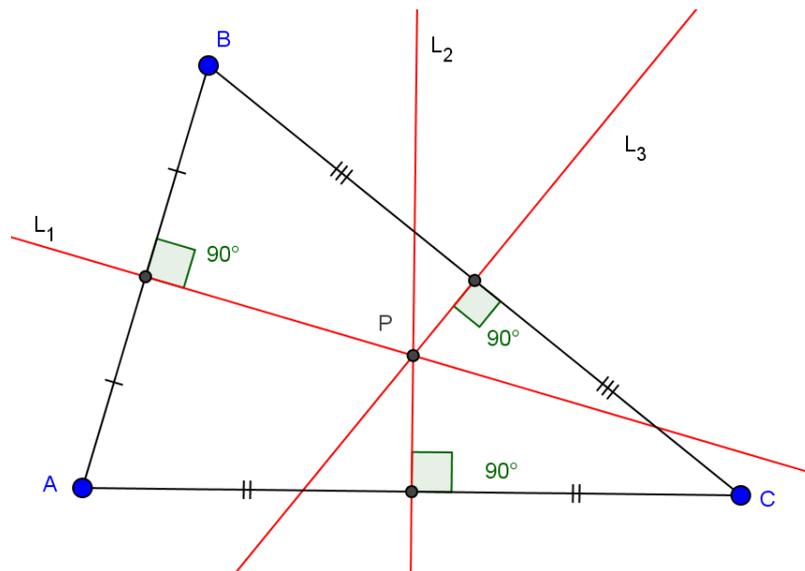


Figura 1. Mediatrizes de um triângulo.

Fonte: adaptado de Moise e Downs (1971, p. 445) pelo autor no GeoGebra.

Seja dado o triângulo ABC (Figura 1) e nele as mediatrizes L_1 , L_2 , L_3 , dos lados AB, AC e BC, respectivamente. Se L_1 e L_2 fossem paralelas, então as retas contendo os lados AB e AC seriam paralelas (e coincidentes por terem um ponto em comum). Como a reta AB não é coincidente com a reta AC segue que L_1 e L_2 não são paralelas, ou seja, se interceptam no ponto P.

Por sua vez, as mediatrizes de um segmento, em um plano, dividem o segmento em duas partes congruentes, o que acarreta em serem congruentes os segmentos:

PA e PB, pois P pertence a L_1 ;

PA e PC, pois P está em L_2 ;

PB e PC, pois P está em L_3 .

Dessa forma, as mediatrizes são concorrentes e o ponto de concorrência é equidistante dos vértices do triângulo e fica demonstrado o teorema que tem o seguinte corolário imediato: “Três pontos não colineares quaisquer estão sobre uma circunferência.”

De fato, os três pontos pertencerão à circunferência de centro P e raio $PA=PB=PC$.

Neste artigo se abordará um episódio de uma aula de Geometria, realizada num Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, na qual o investigador é o professor responsável; envolveu uma aluna mestranda, que é professora em exercício e ocorreu no segundo semestre do ano de 2015. A questão de pesquisa foi: como o diálogo/intermediação do professor na realização de uma situação problema geométrica, pode proporcionar a demonstração sintética de uma proposição matemática? O objetivo da investigação foi **descrever e analisar o episódio de sala de aula envolvendo o professor e a estudante na resolução da questão de pesquisa.**

Para Alves-Mazzotti e Gewandszajder (2002), dentre as muitas formas de tentativas de caracterizar o que seja uma pesquisa qualitativa está a de Patton (1986), pois ela parte do “pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem sempre um sentido, um significado, que não se dá a conhecer de modo imediato, precisando ser desvelado. ” (p. 131). Uma das características deste tipo de pesquisa, segundo os autores, é a abordagem indutiva, que é aquela na qual o investigador parte de observações mais livres. Além disso, “as investigações qualitativas, por sua diversidade e flexibilidade, não admitem regras precisas, aplicáveis a uma ampla gama de casos. ” (p. 147)

Segundo os autores, a observação dos fatos, os comportamentos e o cenário em que ocorre a pesquisa devem ser muito valorizados ao longo de seu desenvolvimento. Há vantagens na observação, tais como:

- a) independe do nível de conhecimento ou da capacidade verbal dos sujeitos; b) permite “checar”, na prática, a sinceridade de certas respostas que, às vezes, são dadas só para “causar boa impressão”; c) permite identificar comportamentos não intencionais ou inconscientes e explorar tópicos que os informantes não se sentem à vontade para discutir, e d) permite o registro do comportamento em seu contexto temporal-espacial. (Idem, p. 164)

No sentido apontado pelos autores, desenvolver uma pesquisa com um único participante, acompanhando, orientando e dialogando no transcurso da realização de uma tarefa investigativa pode produzir uma boa observação e retirada de conclusões. Assim, a presente pesquisa pode ser encarada como qualitativa e, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), pode ser considerada como descritiva “quando o pesquisador deseja descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou um problema” (p. 70). Como buscou-se explicar as causas dos problemas que iam surgindo para a chegada à resolução do problema geral, os porquês das tomadas de decisão parciais, colocando novas situações ante os questionamentos da estudante, pode-se considerá-la como explicativa o que, para os autores, é um apoio comum numa investigação do tipo descritiva.

Para Creswell (2010) existem pesquisas qualitativas tratadas em livros a respeito como a pesquisa de ação participativa ou a análise de discurso e “os pesquisadores podem estudar os indivíduos (narrativa, fenomenologia); explorar processos, atividades e eventos (estudo de caso, teoria fundamentada); [...]” (p. 210). Desta forma a presente investigação, por ter o envolvimento total de uma aluna-professora de um mestrado na investigação, **utilizando o investigador da**

narrativa da mesma na resolução da tarefa, acredita-se qualificá-la como qualitativa. Para este autor,

as abordagens qualitativas de coleta, análise, interpretação e redação do relatório dos dados diferem das abordagens quantitativas tradicionais. A amostragem intencional, a coleta de dados abertos, a análise de textos ou de imagens, a representação de informações em figuras e em quadros e a interpretação pessoal dos achados informam procedimentos qualitativos. (grifo do autor, Idem, p. 21)

Entende-se que, na intencionalidade do pesquisador de verificar como a investigada elaborava seu pensamento na resolução da atividade proposta, registrar por escrito os procedimentos de forma aberta e reproduzir os esquemas elaborados nas representações geométricas envolvidas, houve o cumprimento de protocolo que define a atividade realizada como uma pesquisa bem definida em Educação Matemática, além de ter havido o planejamento e intencionalidade de uma atividade geométrica para uma aula específica com um problema bem definido.

Na medida em que a questão de pesquisa envolve a demonstração sintética, necessita-se estabelecer o que se entende pelo termo Geometria Sintética ou Geometria Pura e fazer um levantamento sobre alguns estudos a respeito.

No início do século XIX, alguns matemáticos expressaram preocupação com o fato de a Geometria Pura vir a desaparecer em função da Geometria Analítica. Eles diziam que essa última ajudaria a demonstrar propriedades e operações utilizando o sistema de coordenadas criado por Descartes. No entanto, isto não levaria a compreender propriedades meramente geométricas que não são perceptíveis utilizando apenas números, fórmulas ou as representações algébricas. Este uso se pode perceber que ocorre até os dias de hoje nas disciplinas de Geometria Analítica, nos cursos universitários brasileiros, em que os aspectos geométricos são pouco explorados.

De acordo com Lygeros (s.d.), Constantin Carathéodory publicou artigo no Jornal da Universidade de Bruxelas, em 1900, no qual tentou dar uma visão própria da Geometria Pura, indicando que ela é um dos primeiros ramos da Matemática a se constituir como disciplina por si só e que, na Antiguidade, os gregos a consideraram como verdadeira arte em termos de completude. Já na Renascença se buscou avançar, sem ir além da Geometria Pura, mas esses estudos levaram à formalização da Análise. Segundo o autor, Carathéodory considerou que os esforços realizados por Viète, Fermat, Pascal, Desargues, Newton, La Hire, na retomada da Geometria Pura, foram importantes para uma reconstituição da matemática grega, sendo que a mudança de fase cognitiva ocorreu no primeiro terço do século XIX com a introdução da Geometria Superior ou Sintética, a qual resolve problemas de forma elementar. A revolução em termos cognitivos avançou na França, de acordo com o artigo, com Monge, Carnot, Brianchon, Dupin, Gergonne, Poncelet e Chasles se espalhando pela Europa com Steiner e von Staudt.

Em seu tratado para a Educação Matemática, Klein (1927) buscou examinar as diferenças que existem entre Geometria Analítica e Geometria Sintética. Afirmou ele que a etimologia das palavras análise e síntese se referem a diferentes métodos de

exposição. Interessa para o artigo o sentido de síntese, o qual expressa a saída de casos particulares, a partir dos quais se chega, pouco a pouco, a conceitos gerais. Assim, Klein (1927) chama

[...] Geometria sintética, aquela na qual as figuras se estudam em si mesmas sem intervenção alguma de fórmulas, enquanto que na analítica essas se aplicam constantemente mediante o uso dos sistemas coordenados. Na realidade, a diferença entre ambas espécies de Geometria é puramente qualitativa: segundo que predominem as fórmulas ou as figuras, se tem uma ou outra Geometria, já que uma Geometria Analítica não pode, sem perder seu nome, prescindir em absoluto da representação geométrica, nem pelo contrário, a Geometria Sintética pode ir muito além sem expressar de um modo preciso, com fórmulas adequadas, seus resultados. (pp. 73-74)¹.

Pela definição do autor, entende-se que a Geometria Sintética pode ser encarada como um método de tratamento da Geometria. Esta concepção é reafirmada por Courant e Robbins (2000), por considerarem a necessidade de um princípio de classificação das numerosas e variadas propriedades das figuras no plano e no espaço, bem como na riqueza do conhecimento geométrico. Ao sintético afirmam que

[...] é o método clássico de Euclides, no qual o assunto é construído sobre fundamentos puramente geométricos independentes da álgebra e do conceito de contínuo numérico e no qual os teoremas são deduzidos por raciocínio lógico a partir de um corpo inicial de proposições denominadas axiomas ou postulados. (p. 201)

Para Craig Spencer (1996) a Geometria Sintética é o tipo de geometria pela qual Euclides é famoso e que todos nós aprendemos na escola básica. Para o autor, ela é global, porém, se espera de sua elaboração, por meio de axiomas, como a Geometria Euclidiana, que seja instrutiva para o desenvolvimento de uma teoria local similar, mas bem mais geral. Diz ele que:

Geometria sintética moderna, contudo, tem uma fundamentação mais logicamente completa e consistente. Neste capítulo o padrão desta fundamentação se adaptará com base nas considerações físicas anteriores, para desenvolver um sistema sintético de axiomas, o qual não implica coisas tais como uniformidade e isotropia. Esta geometria é global, porém se espera que sua elaboração, como a Geometria Euclidiana, será instrutiva para o desenvolvimento de uma teoria local similar, mas mais geral. (p.4)

Entende-se, pois, que a reorganização da geometria de Euclides por Hilbert, atende ao que o autor preconiza como uma Geometria Sintética moderna. Para Gascón (2002), à época em que Descartes começou a envolver coordenadas aos entes geométricos, afirma que: “vários matemáticos importantes (Poncelet, Chasles e Monge, entre outros), reivindicaram a importância dos métodos sintéticos da geometria pura, que proporcionam provas simples e intuitivas, frente aos potentes métodos analíticos, que não revelam o significado que se recebe” (p. 13). Em sua pesquisa o autor questiona a descontinuidade existente nos currículos na Espanha

¹ Todas as traduções constantes do artigo são livres e de responsabilidade do autor.

do ensino secundário e do bacharelado, o que não deixa de ser similar ao que ocorre no Brasil, em que a Geometria Analítica prioriza a álgebra e as fórmulas em função da geometria dos entes envolvidos. Para ele, o ensino de Geometria atual, entre outros aspectos, dá conta da falta de trânsito e complementariedade entre Geometria Sintética e Analítica, ou seja, vivem em mundos separados.

A fim de deixar o leitor motivado para estudos a respeito, ilustra-se um problema clássico que se pode atrelar ao estudo de Geometria Sintética. Apolônio (262-196 a.C.) é considerado um dos três gigantes da Matemática do século III a.C. (Eves, 2004), em um de seus trabalhos envolve tangências com 124 proposições, dentre as quais “o problema da construção de uma circunferência tangente a três circunferências dadas, permitindo-se a estas últimas que se degenerem independentemente em retas ou pontos” (p. 201). Esse ficou conhecido como problema de Apolônio e atraiu muitos matemáticos como Euler e Newton, de acordo com o autor.

Ortega e Ortega (2004, p. 59) afirmam: “este problema dá origem a dez casos possíveis e em alguns deles aparecem situações que obrigam a um tratamento particular.” Além disso, indicam os autores que

[...] o objetivo do artigo é mostrar como se podem conciliar a visão sintética, própria da Área do Desenho, com a Geometria Analítica, própria da Matemática desde o ponto de vista da Didática e combinar os estilos de resolução de forma complementares. Assim, se cria um marco interdisciplinar de análise didática que pode permitir opções de resolução e raciocínio mais apropriados a cada caso. (p. 60)

Os autores ilustram a solução sintética seguida da analítica para os dez casos, incluso aquele constante do episódio analisado no presente artigo, ou seja, obter uma circunferência que passa por três pontos não alinhados no plano. Concluem o artigo afirmando que “**quando as soluções sintéticas são interiorizadas, as aprendizagens são maiores**” (grifo do autor, Idem, p. 70).

Henriquez e Montoya (2015), em pesquisa realizada para uma tese doutoral, investigaram os enfoques sintético e analítico sobre o trabalho geométrico de professores do Liceu no Chile. Analisaram uma sessão, com um professor, a respeito do Teorema de Tales; as tarefas dadas por ele e verificaram a influência da visualização na resolução dessas. Utilizaram como fundamentação teórica os Espaços de Trabalho Matemático – ETM.

Portanto, utilizar a visualização no processo de construção do conhecimento sintético, na resolução da situação problema constante do presente artigo, é uma forma de dinamizar e atualizar os procedimentos empregados por Euclides na sua formalização geométrica. Entende-se por visualização como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos. Como indicaram Fiorentini e Lorenzato (2006), geometria, visualização e representação espacial e pensamento geométrico, é uma das linhas internacionais de pesquisa em Educação Matemática.

No livro I de Euclides (Os Elementos, 2009) aparecem algumas definições de figuras geométricas, dentre as quais:

15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos pontos no interior da figura, são iguais entre si.

16. E o ponto é chamado de centro do círculo. (p.97-98)

Julga-se importante a retomada da definição, pois em sua base fica perfeitamente definida a distinção entre círculo, como uma região, e circunferência como linha, a fronteira entre o interior do círculo e seu exterior. Já no livro IV de Os ELEMENTOS, há, dentre outras definições, as de inscrição e a circunscrição de figuras, das quais retiramos a seguinte: “6. E um círculo é dito estar circunscrito a uma figura, quando a circunferência do círculo toque cada ângulo daquela à qual está circunscrito” (p. 187).

Considere-se que, dados três pontos não alinhados no plano definem a figura triângulo, pode-se interpretar como o ângulo tocando cada vértice do triângulo ou cada um dos pontos. No mesmo livro IV é enunciada e demonstrada a proposição 5: “Circunscrever um círculo ao triângulo dado” (p. 191). Fica evidente, no transcórre da demonstração que um ponto chave é a determinação do centro da figura e o outro, seu raio [definições 15 e 16, acima]. Há de se levar em conta que, em Euclides, o termo reta não tem o mesmo significado que tem hoje, o qual é denominado segmento de reta.

Também não é explicitado na demonstração o termo mediatriz. Assim: “Fiquem cortadas as retas AB, AC em duas nos pontos D, E (figura 2), e, a partir dos pontos D, E, fiquem traçadas as DF, EF em ângulos retos com AB, AC; encontrar-se-ão, então, ou no interior do triângulo ABC, ou sobre a reta BC ou no exterior da BC” (p.191). Na linguagem atual bastaria ser dito que o centro é o ponto F de interseção das mediatrizes obtidas a partir de dois pares de pontos, dentre os três dados, em que D é o ponto médio de AB e E é o de AC.

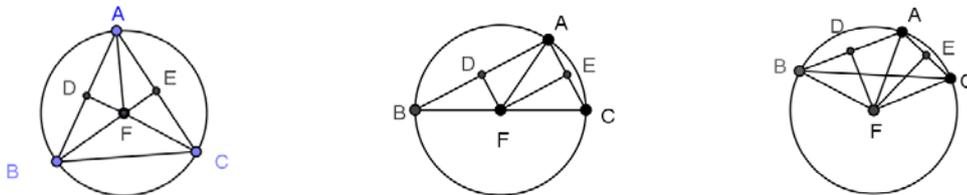


Figura 2. Circunscrição de uma circunferência por três pontos.

Fonte: adaptado de Os Elementos (2009, p. 191) pelo autor no GeoGebra.

A partir destes pressupostos, buscou-se analisar como uma estudante que cursava uma disciplina de Geometria em um Mestrado Profissional, resolvia um problema, utilizando princípios de Geometria Sintética, com a mediação e interlocução do professor no decorrer da realização da atividade, o que denominou-se um episódio investigativo.

2. O episódio

Situação problema

Dados os três pontos $A=(-3,0)$, $B=(1,-1)$ e $C=(4,5)$ no plano cartesiano, representá-los na grade fornecida. Após a representação, se questionou: como obter um ponto que esteja a igual distância dos três, usando a Geometria Euclidiana?

Na figura 3 está a representação, na grade quadriculada fornecida, dos três pontos.

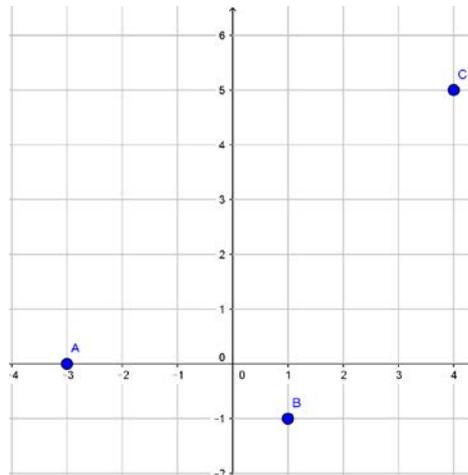


Figura 3. Representação dos pontos A,B e C.
Fonte: própria²

A seguir, narra-se o episódio de sala de aula, o qual permitiu, pelo registro realizado pelo professor investigador, produzir análise do “comportamento em seu contexto temporal-espacial” (Alves-Mazzotri e Gewandszajder, 2002, p. 164).

Aluna: *eu imagino que seja aqui próximo ao ponto (0,3), pois daí a distância a cada um dos três seria a mesma. Traço um ponto entre A e C e a distância deste ponto até A deve ser a mesma até C. Deve ser uma reta passando por B e perpendicular a AC.*

Observou-se, na fala da aluna, que a mesma apresentou uma visualização aproximada da solução, intuitiva, sem comprovação ou argumentação matemática adequada. Ela apontou com o dedo para o ponto (0,3) (figura 4). Nisso já é possível perceber um primeiro enfoque do que Klein (1927) indicou como sendo “Geometria Sintética, aquela na qual as figuras se estudam em si mesmas sem intervenção alguma de fórmulas [...]” (p. 73).

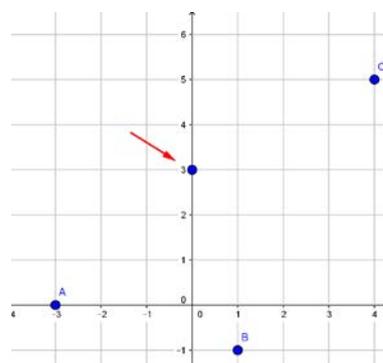


Figura 4. Ponto indicado pela aluna como solução da situação problema.

² Em função de que os registros da estudante foram feitos a lápis e que a reprodução não ofereceria qualidade, optou-se por fazê-los utilizando um software.

Fonte: própria

Em função de que a aluna não teve clareza sobre como obter a perpendicular (a alguma direção e passando por um ponto), e não tendo sido definido nenhum segmento, o professor estimulou sua reflexão sobre o que indicou, pois ela falou: perpendicular a B!

Professor: Lembre-se: reta perpendicular a um segmento de reta? O que você disse?

Aluna: *Tem de ser perpendicular a AC?*

Professor: sim

Na figura 5 há uma representação do que a aluna registrou. Note que o segmento de reta AC foi tracejado uma vez que ela não o representou, apenas mostrou com o seu dedo indicador de onde até onde iria tal segmento. As setas indicam o que ela quis mostrar.

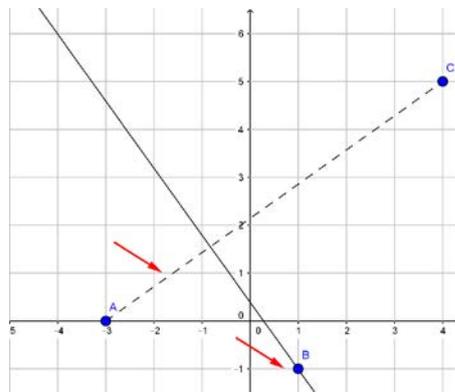


Figura 5. Representação da perpendicular por AC passando por B.
Fonte: autor

Aluna: *Como eu chamo esta reta? Não lembro direito se é mediatriz...*

Professor: Quem sabe você determina a mediatriz de AC! O que você precisa fazer?

Aluna – *Se me recordo é a perpendicular?*

Professor – Trace a perpendicular. Então...?

Aluna – *Tracei e prolonguei a reta. Achei a reta que é mediatriz. O ponto procurado que estou a definir, pertence à esta mediatriz. Imagino que...*

Ela teve de refletir sobre a ideia de mediatriz e relembrou que necessitaria partir não do ponto B e sim, do ponto médio do segmento que une os pontos A e C. Inicialmente, esboçou um segmento de reta indo deste ponto do segmento AC, aproximadamente até o ponto que acreditava ser o procurado, o (0,3) e ficou um pouco confusa, mas percebeu estar na vizinhança daquele ponto.

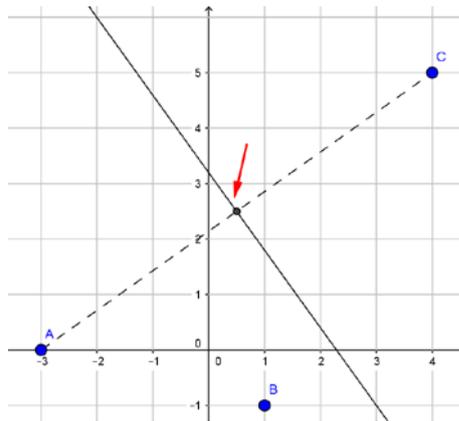


Figura 6. Tentativa de obtenção da ponto a partir da mediatriz do segmento AC.
Fonte: autor

Professor – E daí, onde ele vai estar?

Aluna – *Vou ter de achar distâncias iguais. Eu tenho o ponto aqui e não sei onde ele deve estar...*

A estudante ficou confusa por não saber localizar exatamente onde ficaria o ponto equidistante dos dois. Não se deu conta que qualquer ponto da mediatriz estaria a igual distância dos pontos A e C. A concepção de Geometria Sintética fornecida por Courant e Robbins (2000) se faz presente na medida em que “[...] é o método clássico de Euclides, no qual o assunto é construído sobre fundamentos puramente geométricos independente da álgebra [...]”. Essa construção é perseguida e o professor buscou estimulá-la a pensar que necessitava, também, encontrar a mediatriz entre outro par de pontos.

Professor – E se você não tivesse olhado para A e C?

Aluna – *Seria A e B? Seria o ponto médio de AB?*

Professor – Como você acharia o tal ponto?

Aluna – *Traçando um segmento de A até B e dividindo em ponto médio.*

Percebeu-se, ainda, a dificuldade na expressão do conceito envolvido, que não é de segmento e sim de mediatriz e, por isso, ela não percebeu que qualquer ponto desta reta poderia satisfazer, em parte, o procurado. Craig Spencer (1986) afirma que “Geometria sintética moderna, contudo, tem uma fundamentação mais logicamente completa e consistente” (p. 4) e, para que tal ocorresse, o pesquisador tentou retomar o que a aluna havia pensado a respeito no seguinte diálogo. Observou-se aqui o indicado por Alves-Mazzotti e Gewandszajder (2002) quanto à pesquisa qualitativa: “permite ‘checar’, na prática, a sinceridade de certas respostas que, às vezes, são dadas só para ‘causar impressão’” (p.164)

Professor – Vamos retomar sua ideia... Você quer um ponto da reta que foi traçada. Obtenha o segmento AB.

Aluna – *Achei o ponto médio e o chamei de F. A distância de A até F é igual à distância de F até B.*

Vê-se que ela avançou no sentido de que o ponto médio F equidista dos dois extremos do segmento AB . Isto reafirma o indicado por Cobb et. al. (1992, apud Loureiro, 2015):

o papel do professor envolve fazer inferências sobre o que ele e os alunos podem partilhar para os fins que têm em mãos. O professor avalia a fecundidade potencial dos alunos, individual e coletiva, para a sua aprendizagem futura. Os pressupostos do professor, potencialmente susceptíveis de serem revistos, tanto sobre os entendimentos consensuais como sobre as concepções individuais dos alunos, constituem a base sobre a qual o professor seleciona as atividades de ensino e inicia e guia as discussões.” (p. 56)

Professor – E agora? Como foi seu raciocínio anterior?

A aluna explicou ao professor a forma como tinha raciocinado anteriormente, mas disse que F é um dos pontos.

Professor – Mas só tem este ponto F ?

Ela ficou pensativa por algum tempo e afirmou que não. Novamente, houve o questionamento do investigador.

Professor – Onde se localizam estes pontos?

Aluna – *Se eu traçar uma perpendicular a AB por F terei infinitos pontos equidistantes de A e B . É a mediatriz deste segmento.*

Notou-se que a reflexão e a retomada da construção da primeira mediatriz foram produtivas uma vez que, de imediato, a construiu e concluiu sobre a existência de infinitos pontos equidistantes de A e de B . (figura 7). Os aspectos puramente geométricos estão proporcionando à aluna a aquisição/retomada conceitual almejada até o presente momento da investigação.

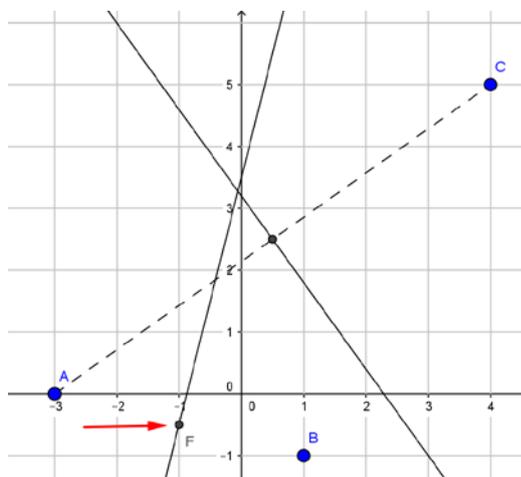


Figura 7. Ponto médio do segmento AB e a respectiva mediatriz

Fonte: autor

Professor – O que observas? Você procurava o que?

Aluna – *Os pontos que distam igualmente de A , B e C . Eu tinha dito que ele estaria na primeira mediatriz.*

A aluna pegou a régua para medir distâncias. Confundiu a mediatriz de AB com o eixo vertical. O professor a auxiliou a verificar que estava olhando de forma

equivocada. Ela riu... prolongou a mediatriz e obteve os pontos de intersecção das mediatrizes.

Em seguida perguntou ao professor sobre a obtenção da terceira distância. Usou a régua para medir e verificar que as três distâncias são iguais, sem ter traçado a mediatriz do segmento BC. Os instrumentos de construções geométricas que são importantes na construção euclidiana se encontram presentes, reafirmando os princípios da Geometria Sintética de não utilizar fórmulas.

Professor - O que concluis sobre obter um ponto equidistante de três pontos dados no plano?

Aluna – Se eu traçar pontos médios de dois segmentos unindo dois pontos é o ponto equidistante dos três...

Ela não se expressou adequadamente e se confundiu na fala, pois interpretou como união de dois pontos, provavelmente por ter reunido a construção das duas mediatrizes. O que ela quis expressar foi que fazendo a intersecção das duas mediatrizes encontrou um ponto P (figura 8) em comum entre elas e, portanto, este é também equidistante do terceiro ponto.

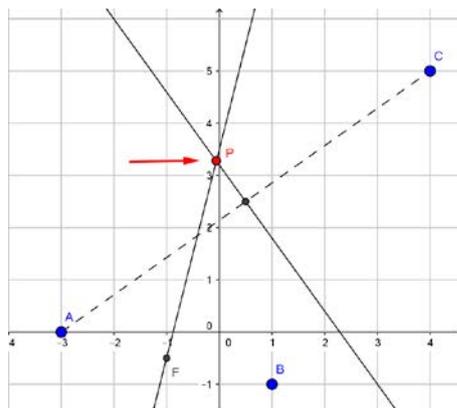


Figura 8. Ponto de intersecção das mediatrizes
Fonte: autor

Professor – Quais conceitos foram empregados nesta construção?

Aluna – *Segmento; mediatriz, retas perpendiculares; intersecção de retas.*

Professor – Achaste um ponto que seja equidistante dos três fornecidos no enunciado da situação problema? Será que existem outros pontos além deste?

A aluna foi categórica ao responder que não. O professor inverteu a pergunta.

Professor – Só os três pontos é que equidistam euclidianamente deste ponto P?

A aluna afirmou acreditar que não há outros pontos. O professor retomou com novo questionamento.

Professor – Os únicos pontos do plano equidistantes de P são A, B e C?

Aluna – Não.

Professor - Por quê?

A resposta da aluna foi vaga, sem maior convicção: porque existem outros pontos do plano. Indicou com o dedo alguns deles, visualmente equidistantes de P,

mostrando a importância das habilidades visuais na construção geométrica sintética. O professor indagou quais seriam estes pontos e ela refletiu e explicou.

Aluna – *Porque se eu pensar numa circunferência de centro P e raio PB ou AP ou AC terei infinitos pontos equidistantes.*

Professor – Qual é o lugar geométrico obtido com esta construção?

A aluna agora respondeu convictamente: é uma circunferência. Ela animou-se e disse: o que eu fiz foi obter uma forma de encontrar uma circunferência que passa por três pontos dados e indaga o professor.

Aluna – *Posso fazer isso usando um compasso?*

O professor respondeu afirmativamente e sugeriu que ela o fizesse, pois estaria usando um dos instrumentos fundamentais para as construções na forma de geometria envolvida. Para finalizar o diálogo o professor retomou o problema inicial, que não fora explicitado para a aluna: **como se pode obter uma circunferência que passe por três pontos não alinhados no plano euclidiano?**

Aluna – *Por meio de retas perpendiculares.*

O professor voltou a questionar: são retas quaisquer? Como se chamam as retas que permitem obter a circunferência?

A aluna respondeu agora de forma precisa: são as mediatrizes dos segmentos que unem cada dois pontos dados. A partir delas eu obtenho o ponto de intersecção que é o centro da circunferência. Mas eu não preciso das três, bastam duas. O formalismo pretendido e a linguagem matemática apropriada foram alcançadas.

Neste momento, ela tomou seu compasso e construiu a circunferência que passa pelos três pontos não colineares (figura 9) que era a solução esperada para a situação problema pretendida pelo professor para aquele momento, cumprindo o objetivo proposto.

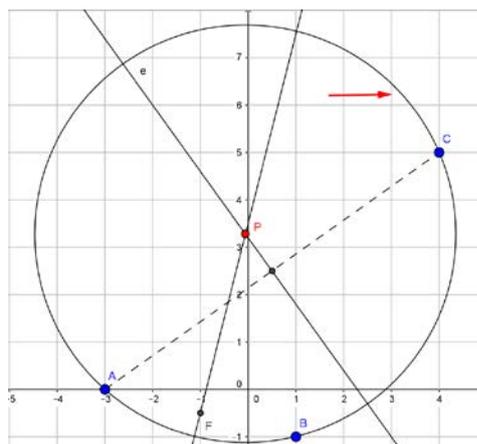


Figura 9. Circunferência que passa por três pontos não alinhados no plano.
Fonte: autor

Considerações finais

Neste artigo apresentou-se a análise e descrição de um episódio de sala de aula em um mestrado profissional em que o investigador buscou responder de que forma o diálogo e a intermediação do professor poderiam contribuir para a solução sintética de um problema geométrico. Neste sentido, sem apresentar inicialmente o problema, buscou-se, por meio da coleta, análise, interpretação e redação das falas da estudante e dos questionamentos e mediações do investigador, chegar ao enunciado de um dos problemas que conduzem ao importante *problema de Apolônio*, ou seja, **como determinar uma circunferência que circunscreva três pontos não alinhados**. Este é um dos dez resultados apontados por Ortega e Ortega (2004) para a chegada à solução geral.

Considerando a pesquisa como explicativa (Fiorentini e Lorenzato, 2006), ao reproduzir as construções geométricas realizadas pela estudante e as explicações que a levaram a obter respostas aos encaminhamentos do investigador, foi possível perceber que o uso de régua e compasso podem proporcionar o desenvolvimento de habilidades visuais fundamentais para a compreensão de resultados importantes da Geometria Euclidiana Plana, o que conduz à Geometria Sintética, ou seja, sem o uso de fórmulas ou coordenadas.

Ao explorar habilidades visuais nas tentativas de responder aos encaminhamentos do professor para obter soluções parciais, foi possível retomar conceitos geométricos e construções utilizando a régua e habilidades intuitivas o que favoreceu ao investigador levantar novas proposições sem, contudo, perder de vista o que a aluna vinha construindo, por exemplo, a chegada ao conceito de mediatriz e a interseção de duas delas que proporcionaram a obtenção do centro da circunferência que iria passar pelos três pontos dados e não alinhados.

Houve a necessidade de repensar a questão de distância entre pontos, sem o uso de fórmulas, de modo visual e intuitivo na determinação de pontos médios e, posteriormente, a caracterização do raio da circunferência circunscrita. Ao explicar e argumentar os processos de pensamento, a aluna formalizou conceitos e fez descobertas e redescobertas importantes para a Geometria Sintética, uma vez que não empregou fórmulas.

Não foi objetivo da investigação comparar métodos oriundos da Geometria Sintética com os da Analítica, pois visava-se, principalmente, descrever e analisar o episódio de sala de aula na resolução de uma questão intencional do investigador. Entende-se que o diálogo e a intermediação foram fundamentais para que a estudante pudesse obter a solução almejada. A pesquisa de Loureiro (2015) comprovou que os episódios analisados e descritos evidenciam também a necessidade de enriquecer a linguagem dos alunos e de lhes proporcionar um instrumento simples de visualização o que é possível corroborar com a investigação realizada no episódio de aula descrito no artigo.

Reafirma-se o indicado por Ortega e Ortega (2004) a respeito da importância da Geometria Sintética para a compreensão de resultados eminentemente abstratos e teóricos da geometria plana. Reitera-se, também, o indicado por Klein (1927) quanto ao sentido de síntese, o qual saindo de casos particulares, chegou, pouco a pouco, a conceitos gerais. Assim, acredita-se que o objetivo da investigação foi alcançado e que novas investigações possam ser realizadas com o fim de retomar

essas construções, como o fizeram autores indicados no texto e que fornecem, de certa forma, um histórico a respeito.

Bibliografia

- Alves-Mazzotti, A. J.; Gewandsznajder, F. (2002). *O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. 2. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.
- Courant, R.; Robbins, H. (2000). *O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Rio de Janeiro: Editora Moderna.
- Craig Spencer, M.S. (1996). *Differential Synthetic Geometry: A Possible Foundation for a Theory of Gravitation*. Master of Science. College of Arts and Sciences University of Rochester Rochester, New York. Recuperado em 12 de dezembro de 2015, de <http://enlightenment.supersaturated.com/essays/text/craigspencer/thesis/o3.pdf>
- Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. 3. ed. Porto Alegre: Artmed.
- Eves, H. (2004) *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp.
- Florentini, D. & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas, SP: Autores Associados.
- Gascón, J. (2012). *Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?* *Revista SUMA*, v. 39, febrero 2002, pp. 13-25.
- Henriquez, C. R.; Montoya, E.D. (2014). *El trabajo matemático de profesores en el tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo*. *Actas... Cuarto Simposio Internacional ETM*. San Lorenzo de El Escorial, Madrid, España. Del 30 de Junio al 4 de Julio de 2014, pp.87-101.
- Klein, F. (1927). *Matemática Elemental desde un punto de vista superior*. Trad. Roberto Araujo. v. II, Geometria. Madrid: Biblioteca Matemática.
- Lygeros, N. (2016). *Sur la géométrie synthétique de Carathéodory*. S.d. Recuperado em 03 de janeiro de 2016, de <http://www.lygeros.org/articles?n=3250&l=fr>.
- Loureiro, C. (2015). *Geometria em Coletivo - contributos para a sua compreensão*. In: *Revista VIDYA*, v. 35, n. 2, p. 55-74, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015.
- Moise, E. E.; Downs, F. L. Jr. (1971). *Geometria Moderna* (trad. Watanabe, R. G. e Mello, D.A.). Parte II. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda.
- Ortega, I.; Ortega, T. (2004). *Los diez problemas de Apolonio*. *Revista SUMA*, Junio 2004, pp. 59-70.
- Os Elementos/Euclides*. (2009). Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP.

José Carlos Pinto Leivas: Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UNIFRA; doutor em Educação (Matemática), mestre em Matemática Pura e Aplicada, especialista em Análise e Licenciado em Matemática, Coordenador do GT4 - Ensino Superior - da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, da qual foi secretário e diretor da regional do RS. Editor da revista Vidya.