UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 57. Diciembre 2019
Páginas 79-94

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Articulación entre Álgebra y Geometría utilizando GeoGebra: un Estudio Exploratorio con Estudiantes de Ingeniería

Diana C. Pozas, Marlene Alves Dias

Fecha de recepción: 12/12/2018
Fecha de aceptación: 20/01/2020

Resumen	En este trabajo analizamos una actividad mediada por GeoGebra que se realizó durante el dictado de álgebra y geometría I, para las carreras de ingeniería de una universidad argentina. Las tareas fueron planteadas para utilizar simultáneamente las vistas: algebraica, CAS y 3D, que ofrece GeoGebra. Nuestro objetivo fue determinar si los estudiantes logran articular conceptos relativos a los sistemas de ecuaciones lineales y geometría en el espacio. Los resultados mostraron que la actividad propuesta es adecuada para tal fin. Tomamos la Teoría Antropológica de lo Didáctico como referencial teórico principal para el análisis de las producciones de los estudiantes. **Palabras clave**: Sistemas de Ecuaciones; Geometría en el Espacio; Ingeniería.
Abstract	In this work we analyze a GeoGebra-mediated activity that was carried out during the algebra and geometry I dictation, for the engineering careers of an argentine university. The tasks were raised to simultaneously use the views: algebraic, CAS and 3D, which GeoGebra offers. Our goal was to determine if students manage to articulate concepts related to systems of linear equations and geometry in space. The results showed that the proposed activity is adequate for this purpose. We take the Anthropological Theory of the Didactic as the main theoretical reference for the analysis of student productions. **Keywords**: Systems of Equations; Geometry in Space; Engineering.
Resumo	Neste trabalho analisamos uma atividade mediada por GeoGebra que foi realizada durante a disciplina álgebra e geometria I, para as carreiras de engenharia de uma universidade argentina. As tarefas foram criadas para usar simultaneamente as visualizações: algébrica, CAS e 3D, oferecidas pelo GeoGebra. Nosso objetivo foi determinar se os alunos conseguem articular conceitos relacionados a sistemas de equações lineares e geometria no espaço. Os resultados mostraram que a atividade proposta é adequada para esse fim. Consideramos a Teoria Antropológica do Didático como o principal referencial teórico para a análise das produções dos alunos. **Palavras-chave**: Sistemas de Equações; Geometria no espaço; Engenharia.

1. Introducción

Es un hecho ampliamente aceptado el uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en distintos ámbitos de la sociedad. Asimismo, se reconoce que este uso tiene implicaciones en todos los niveles educativos, particularmente, el universitario.

En lo concerniente a la enseñanza y al aprendizaje de contenidos matemáticos, diversas investigaciones reportan que la implementación de las TIC ofrece oportunidades para que los estudiantes puedan realizar tareas que fomenten la exploración, la formulación de conjeturas, la práctica de una técnica, el análisis de resultados. Asimismo, permiten reducir el énfasis en los aspectos manipulativos del álgebra y enfocar el trabajo de los estudiantes en tareas conceptuales, o bien promover tanto aspectos conceptuales como técnicos de la matemática (Kieran, 2007; Artigue, 2002a). No obstante, también se afirma que dichas tecnologías no se han instalado en la educación formal con la naturalidad que se observa en otros espacios (Artigue, 2007; Rojano, 2014).

Este trabajo forma parte de una investigación en curso sobre el estudio de las praxeologías en torno a los sistemas de ecuaciones lineales propuestas para el Ciclo Básico de las carreras de ingeniería en Argentina. Presentamos una experiencia didáctica realizada en la Universidad Nacional del Comahue con estudiantes de ingeniería. Dicha experiencia consistió en implementar un trabajo práctico mediado por GeoGebra durante el dictado de la asignatura álgebra y geometría I. Dicha implementación tuvo un doble propósito. Por un lado buscamos incentivar a los estudiantes a que incorporen las TIC como una herramienta auxiliar para el estudio de la asignatura. Por otro lado, pretendemos determinar si los estudiantes logran articular conceptos relativos a los sistemas de ecuaciones y geometría en el espacio.

Según Rogalski (2001), el conocimiento relacionado con la geometría afín euclidiana y la práctica de la geometría en el espacio constituyen una base importante para el lenguaje y el sentido en el álgebra lineal porque este conocimiento geométrico puede dar "imágenes" de ciertos conceptos como conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales (en adelante, SEL). Harel (2000) también va en esta dirección cuando dice que una reflexión geométrica debe incorporarse a la enseñanza de las primeras nociones de álgebra lineal.

Los resultados obtenidos permitieron concluir que la actividad planteada fue motivadora, posible de desarrollar con autonomía por parte del estudiante. Pueden incluso auxiliar en la introducción de nuevos conocimientos fundamentales en álgebra lineal, como por ejemplo, la articulación entre los puntos de vista cartesiano y paramétrico (Dias, 1998) o la noción de rango.

Para interpretar, describir y analizar las producciones de los estudiantes, tomamos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y de la Teoría de la Instrumentación. También consideramos las nociones de cuadro y juego de cuadros, según Douady (1984).

2. Referencial teórico

Adoptamos como referencial teórico principal a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999, 2004, 2007) la cual considera la matemática como producto de la actividad humana y relativa a los contextos sociales y culturales donde se desarrolla. En particular, la matemática escolar se organiza en obras, organizaciones o praxeologías matemáticas. La noción de praxeología incorpora en un todo indisociable la práctica matemática o praxis (formada por *tipos de tareas* y *técnicas*) y el discurso razonado o logos sobre dicha práctica (formado por *tecnologías* y *teorías*), el cual describe, explica y justifica la praxis. Para precisar la naturaleza de los objetos que el matemático (o el estudiante) manipulan en la actividad, Bosch y Chevallard (1999) introducen la noción de objetos ostensivos y no ostensivos. Los conceptos matemáticos no son directamente accesibles a nuestros sentidos: son objetos "no ostensivos"; trabajamos con éstos a través de las representaciones ostensivas que pueden ser de naturaleza muy diversa. En este sentido, asumimos que GeoGebra nos permite manipular ostensivos asociados a los sistemas de ecuaciones o a la geometría espacial, a través de sus diferentes vistas.

La vista CAS, por ejemplo, permite realizar cálculos en forma simbólica: resolución de sistemas de ecuaciones, factorizaciones, cálculos matriciales, derivadas, integrales, entre otros. Permite introducir expresiones y comandos específicos, para lo cual dispone de su propia barra de herramientas.

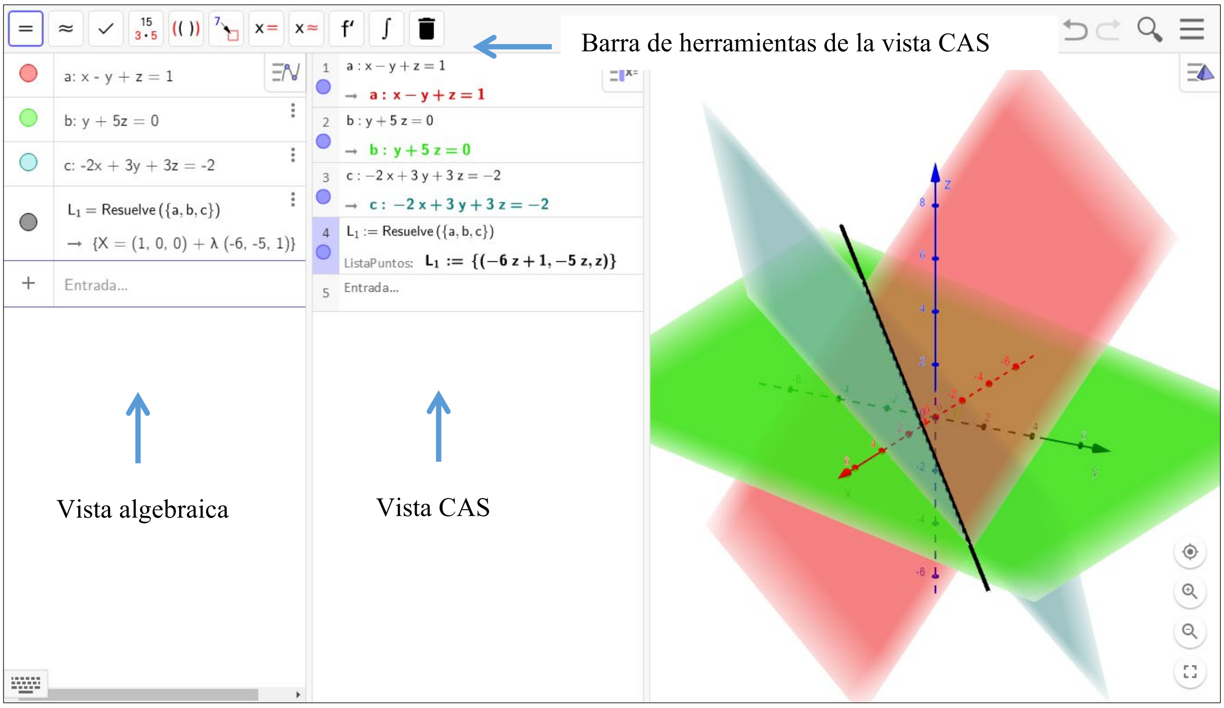


Figura 1. Interfaz de GeoGebra: vista algebraica – vista CAS – vista 3D

La vista CAS se relaciona de forma dinámica con otras vistas de GeoGebra. Por ejemplo, en la Figura 1 se puede observar que mientras en la vista CAS se resolvió un SEL de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y se muestra el conjunto solución mediante la lista de puntos L_1, en la vista algebraica se representa al conjunto solución mediante la recta X, y en la vista 3D aparece la interpretación geométrica del conjunto solución.

Es decir, cada ecuación del SEL representa un plano y el conjunto solución del SEL está representado en la recta donde se intersectan los tres planos.

Este ejemplo pone en evidencia que un mismo concepto, en este caso conjunto solución, interviene en distintas vistas según se observa en la interfaz de GeoGebra. En términos generales, podemos decir que GeoGebra es un ostensivo poderoso que permite materializar los objetos no ostensivos asociados a la noción de conjunto solución de un sistema de ecuaciones.

En este trabajo también utilizaremos las nociones de cuadro (o marco) y juego de cuadros (Douady, 1984), pues éstas contribuyen al análisis de las propuestas de enseñanza. En este sentido, dichas propuestas pueden ser más o menos favorables si toman en cuenta los conocimientos de los estudiantes en función del cuadro considerado. Según esta autora, la labor del matemático también implica abordar un mismo problema desde diversos cuadros. Esto significa que puede transportar un problema de una rama de las matemáticas a otra, con el fin de comprender mejor en qué consiste el problema y darle una solución. La noción de "juego de cuadros" o "cambio de cuadro", permite trasponer esta importantísima característica del quehacer matemático al dominio didáctico. Según Douady, la mayoría de los conceptos matemáticos puede intervenir en varios dominios, lo cual hace posible el cambio de cuadro. En nuestro trabajo será preciso considerar los siguientes cuadros: sistemas de ecuaciones lineales, matrices, determinantes y geometría afín euclidiana.

Para comprender mejor en el contexto de esta investigación, de qué manera GeoGebra puede convertirse en un instrumento matemático para el estudiante, consideramos el enfoque de Rabardel (1995), en el cual se estudian las interacciones entre seres humanos y otros elementos de un sistema. Por ejemplo, la interacción hombre-computadora.

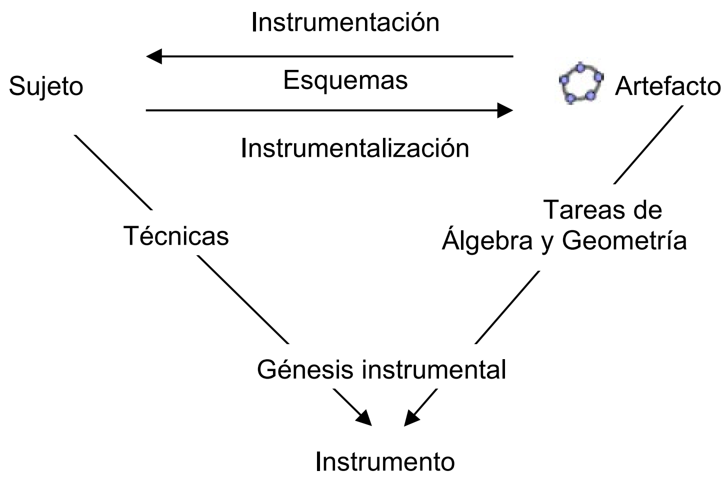


Figura 2. Tríada Sujeto-Artefacto-Instrumento
Fuente: adaptación de Iranzo y Fortuny (2009)

Este autor muestra que en toda situación donde se utilizan artefactos existe siempre una tríada de elementos: sujeto-artefacto-instrumento, relacionados de manera implícita o explícita (Figura 2). Se entiende por:

- Sujeto: persona o un grupo de personas que desarrollan una acción con un artefacto vía esquemas de utilización.
- Artefacto: cualquier objeto susceptible de ser usado intencionalmente. Puede ser un objeto material como una computadora, o puede ser un objeto simbólico como un software.
- Instrumento: construcción mental del sujeto cuando se apropia del artefacto para resolver tareas. En este sentido, la noción de instrumento involucra tanto al artefacto como a los esquemas mentales desarrollados por el sujeto.

En cuanto a los esquemas de utilización que el sujeto moviliza o desarrolla, el autor identifica: esquemas de uso, relativos a la manipulación técnica del artefacto; y esquemas de acción instrumental, relativos a la utilización de un artefacto con la intención de realizar una acción. En este orden de ideas, podemos decir que el instrumento es una construcción del sujeto, ya que los esquemas mencionados dependen de sus conocimientos y, en consecuencia, evolucionan con el sujeto. Este proceso de construcción denominado Génesis Instrumental, es una construcción progresiva de uso de un artefacto por un sujeto para lograr un propósito en un ambiente específico (Trouche, 2004).

Esta génesis involucra dos procesos dinámicos y dialécticos entre sí: la instrumentalización y la instrumentación. El primero está orientado del sujeto hacia el artefacto: el usuario selecciona los comandos que se han de utilizar, los reagrupa, pone énfasis en la producción e institución de sus funciones, de sus desvíos o limitaciones, de la atribución de sus propiedades, transforma el artefacto, su estructura y su funcionamiento. Por su parte, la instrumentación es relativa al sujeto, es decir, mediante el uso de artefactos se da el surgimiento y la evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada (Rabardel: 1995).

Mediante los procesos de instrumentalización el sujeto aprende a utilizar de manera más eficaz la parte del artefacto que necesita para poder resolver los problemas planteados. Y mediante los procesos de instrumentación el sujeto crea esquemas de acción instrumentada (es decir, de acción mediante el uso del instrumento) orientados a permitirle resolver las tareas planteadas. Ambos procesos evolucionan generalmente de manera simultánea (Gutiérrez et al, 2014).

3. Contexto del estudio

El estudio que reportamos en este artículo se desarrolló en un curso de álgebra y geometría I, asignatura correspondiente al ciclo básico de las carreras de ingeniería que se dictan en universidades públicas argentinas. Nos proponemos describir y analizar una actividad concreta que se implementó con los estudiantes que cursan la asignatura mencionada, la cual tiene un régimen cuatrimestral. Se desarrolló luego de un trabajo explícito con los estudiantes sobre el reconocimiento de los objetos "rectas" y "planos" en el espacio, a partir de varias definiciones, ya sea en términos de ecuaciones cartesianas o ecuaciones paramétricas. Además, siempre dentro del dictado de la asignatura, se estudian las nociones de matrices y determinantes, método de Gauss y método de Cramer para la resolución de SEL, entre otros temas. De modo que para realizar la actividad propuesta los estudiantes ya disponen de un equipamiento praxeológico. Esta actividad fue de carácter obligatorio para todos aquellos que aprobaron los dos exámenes parciales, acumulando de esta manera todos los requisitos para aprobar la “cursada”, es decir la acreditación, de álgebra y geometría I.

La elección del software GeoGebra se debe a que es un software libre que combina de forma dinámica, geometría, álgebra, análisis y estadística, ofreciendo representaciones diversas de los objetos matemáticos desde cada una de sus vistas. También porque es un software que no requiere conocimientos avanzados para utilizarlo en el contexto de esta investigación. La mayoría de los estudiantes de nuestro curso ya lo conocen de la escuela secundaria, aunque el trabajo con la vista 3D fue totalmente nuevo para ellos. Acordamos con Carrillo (2010) en que, a pesar de la amplia oferta existente de programas de geometría dinámica, de cálculo simbólico o de representación de funciones, además de la gran cantidad de páginas *webs* que ofrecen diferentes *applets* con propuestas para llevar al aula, GeoGebra está ganando terreno al resto de opciones y, poco a poco se está haciendo imprescindible en el aula sobre todo cuando se apuesta por el uso de las TIC como recurso didáctico.

Por razones de tiempo y espacio físico (disponibilidad de aula), sólo se trabajó de manera presencial durante dos clases de 2 horas cada una. Se establecieron algunos acuerdos durante estos dos encuentros. El trabajo podía desarrollarse en grupos de a lo sumo tres estudiantes y debía ser enviado por mail a la docente (coautora de este reporte) en un plazo determinado. Se les entregó una guía con cuatro tareas y todos los estudiantes que necesitaran consultar dudas con la docente, podían hacerlo.

La investigación se realizó con un grupo de 19 estudiantes. Las tareas propuestas y las respuestas *a priori* presentadas en el apartado siguiente corresponden a los instrumentos de recolección de datos, los cuales fueron analizados a través de la confrontación entre los análisis *a priori* y *a posteriori*. Según Artigue (2002b), el análisis *a priori* se concibe como un análisis del control de las relaciones entre significado y situaciones, a la vez descriptivo y predictivo, que supone una situación en la que el conocimiento del sujeto se manifiesta solo a través de decisiones, a través de acciones prácticas y efectivas y donde no es importante para la evolución de las interacciones con el medio que el actor pueda identificar o explicar el conocimiento necesario. Luego, se lleva a cabo la experimentación, el análisis *a posteriori* y la validación interna, que implica principalmente la relación entre los análisis *a priori* y *a posteriori*.

4. Las tareas propuestas y respuestas a–priori

En esta sección presentamos las tareas propuestas a los estudiantes. Haremos un breve comentario acerca de la resolución de las mismas, focalizando en las posibles técnicas de resolución y en la teoría que las sustentan.

La ***tarea 1*** de la guía consistió en graficar algunos objetos geométricos elementales (vectores, rectas, planos) utilizando la vista 3D para que los estudiantes se familiarizaran con algunas herramientas y comandos básicos.

Tarea 2. *Abrir la vista cálculo simbólico (CAS) y la vista 3D. En la vista CAS:*

a) escriba la ecuación del plano π: x + y + z = 3
b) escriba la ecuación del plano XZ
c) utilice una herramienta adecuada para resolver el sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y=0 \end{cases}$
d) relacionar la respuesta dada por GeoGebra con lo que se observa en la vista 3D

El objetivo de esta tarea consiste en observar cómo el estudiante opera en la vista CAS y cómo interpreta la solución al sistema que brinda GeoGebra. Dicha solución puede obtenerse con la herramienta *Resuelve* y aparece en la vista CAS expresada con el ostensivo $\{(x=-z+3, y=0)\}$ mientras que en la vista 3D aparecen dos planos secantes. Nos interesa especialmente observar las respuestas de los estudiantes al inciso d).

Una respuesta posible es considerar que la lista de infinitas ternas o puntos que aparece en la vista CAS representa la solución general de un SEL compatible indeterminado. En términos geométricos, esos puntos están contenidos en la intersección de los planos graficados en la vista 3D.

Tarea 3*. Discutir si el siguiente sistema prefija 4 planos que forman un tetraedro. En caso afirmativo, grafique los vértices del tetraedro y sus aristas.*

$$\begin{cases} -4x+5y-2z=-1 \\ -5x+3y+4z=2 \\ -6x+y-3z=-8 \\ 3x-7y-5z=-22 \end{cases}$$

El objetivo de esta tarea consiste en que el estudiante ejecute técnicas que requieran la articulación de conceptos relacionados con rectas, planos y SEL, es decir, de la articulación de cuadros. A continuación mencionamos algunas técnicas esperadas. Se definió la noción de *tetraedro* como *sólido determinado por cuatro planos o caras*.

- Técnica 1: trabajando en la vista CAS se resuelven SEL de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, hay cuatro posibilidades. Si en todos los casos el SEL resulta compatible determinado, se habrán encontrado los cuatro posibles vértices del tetraedro. Trabajando en la vista 3D, se grafican los 4 puntos obtenidos. Finalmente, se exploran las herramientas a fin de obtener una gráfica del tetraedro.
- Técnica 2: se resuelven todos los sistemas de 2x3, hay seis posibilidades. La solución a cada sistema es una lista de puntos expresada como una terna en función de un parámetro. En la barra de entrada se ingresan las seis ternas y en la vista 3D se podrán observar las seis rectas que contienen a las aristas. Como en cada vértice concurren tres aristas, se pueden obtener las coordenadas de los vértices con el comando Interseca<objeto,objeto>

- Técnica 3: se resuelven los cuatro SEL de 3x3 por la regla de Cramer. En esta situación se requiere trabajar con la planilla de cálculo para ingresar matrices y calcular determinantes. Y naturalmente, se necesita la vista 3D para graficar los vértices y aristas del tetraedro.

Luego de efectuar este estudio a-priori de las posibles técnicas que permiten resolver la tarea, podemos observar que cada una de ellas requiere de ciertos conocimientos en distintos cuadros. Es importante destacar que cualquiera sea el cuadro donde nos situemos, es posible trabajar con GeoGebra quedando la articulación a cargo del docente y los estudiantes. Por lo tanto se justifica la relevancia de abordar la tarea haciendo uso del software.

Tarea 4.
a) ¿cómo decidir si cuatro planos dados determinan un tetraedro?
b) ¿qué sistema de ecuaciones prefija cuatro planos en el espacio que forman un tetraedro?

La pregunta a) se formuló con el objetivo de obtener una respuesta dentro de un marco geométrico. Se espera que el estudiante mencione alguna técnica utilizando GeoGebra, para visualizar rápidamente los planos que contienen las caras y del tetraedro. Por otro lado, para responder a la pregunta b), se espera que los estudiantes utilicen la noción de SEL compatible determinado, relacionando las soluciones con los vértices del tetraedro.

A continuación, describimos en forma general las producciones de los estudiantes y realizamos un análisis considerando el referencial teórico adoptado. Las resoluciones presentadas a modo de ejemplo fueron extraídas de los trabajos presentados por 19 estudiantes, nombrados oportunamente como E1;… E19.

5. Praxeologías puestas en juego

En relación con la **tarea 2** se observó que la mayor dificultad consistió en interpretar correctamente la respuesta que brinda GeoGebra en la vista CAS. El 80% (esto es, 15 estudiantes sobre un total de 19 estudiantes participantes) afirmó que en la vista CAS se observa la ecuación de una recta. Por ejemplo, en la figura 3 presentamos la resolución de E5:

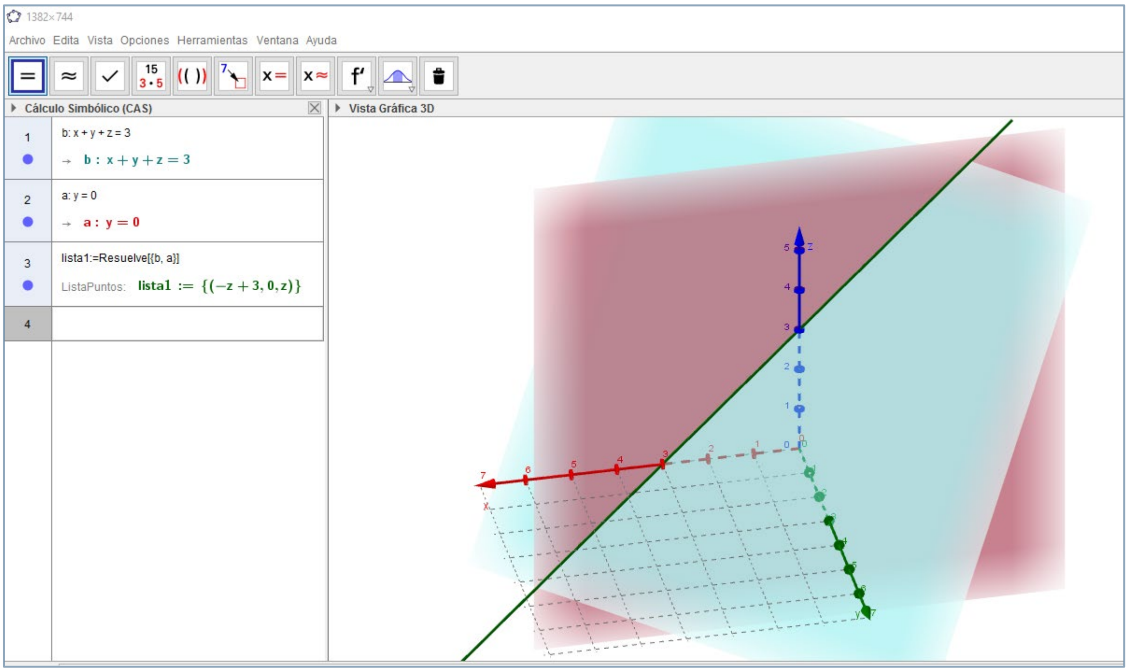


Figura 3: captura de pantalla presentada por E5
Fuente: datos de las autoras

Considerando el hecho de que GeoGebra, como todo software, sólo muestra resultados, no los procedimientos, fue interesante discutir con los estudiantes el significado de los ostensivos que aparecen en la interfaz. Las producciones de los estudiantes en relación a la tarea 2 reflejan que, con ayuda del software, pueden interactuar entre el marco algebraico y el marco geométrico. Esto les da más seguridad y claridad al momento de redactar la respuesta. Por ejemplo:

> *Lo que quiere decir que la intersección entre y=0 y el plano π es una recta L en función del parámetro z, en la cual para cada valor de z da un punto P perteneciente a L, y es solución del sistema. Por ejemplo, para z=3, el punto P=(0,0,3) es una solución y esto también puede observarse gráficamente. Por lo tanto es un sistema compatible indeterminado (E5, 2017).*

En relación a la **tarea 3** se observaron las tres técnicas que describimos anteriormente. Pero, el 75% de los estudiantes participantes realizó la técnica 1. A continuación presentamos algunos ejemplos de la misma:

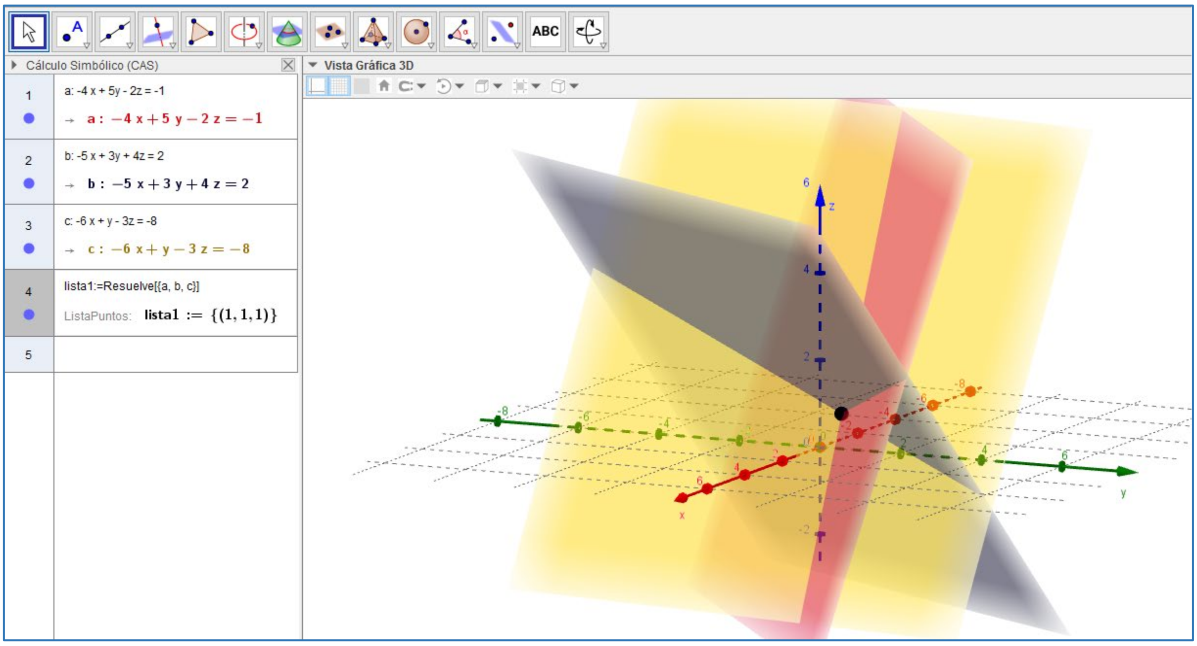
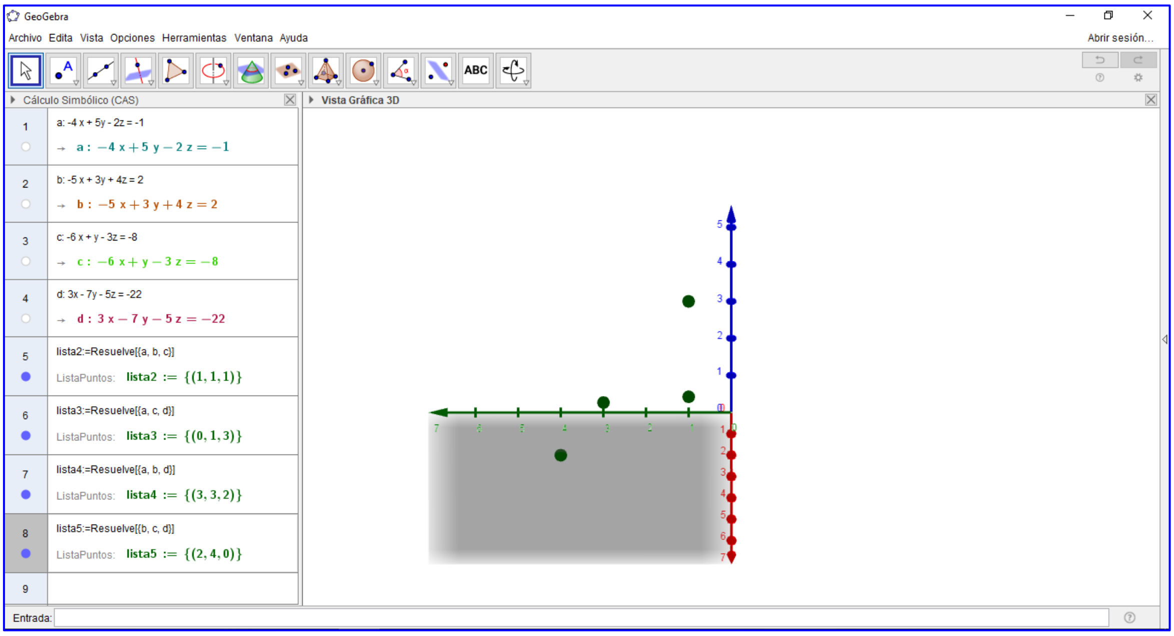


Figura 4 - Captura de pantalla presentada por E3 y E 4



Fuente: datos de las autoras
Figura 5 - Captura de pantalla presentada por E1 y E2
Fuente: datos de las autoras

En ambas figuras puede observarse a la izquierda que los estudiantes utilizaron la herramienta Resuelve de la vista CAS mostrando de esta manera que trabajaron en el cuadro de los SEL e interpretaron geométricamente cada conjunto solución en la vista 3D. La diferencia entre ambas figuras es que la primera muestra cómo obtener un vértice en particular y tiene la vista de todos los planos activada, mientras que la segunda muestra cómo obtener todos los vértices, pero es necesario desactivar la vista de todos los planos para verlos con claridad.

Una vez obtenidos los 4 vértices, los estudiantes exploraron distintas herramientas, por ejemplo: *polígono*, *segmento, pirámide*. De esa manera obtuvieron gráficas como la que se muestra en la Figura 6.

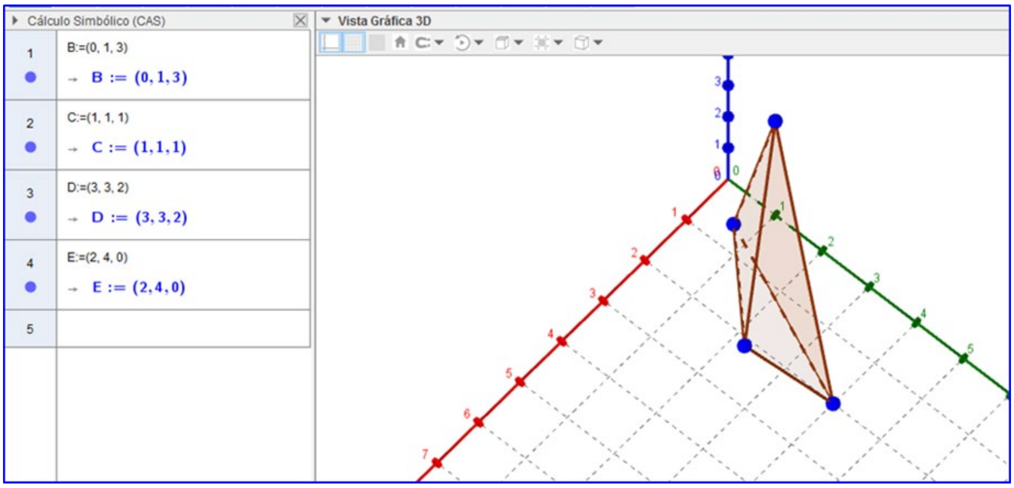


Figura 6: Captura de pantalla presentada por E1 y E2
Fuente: datos de las autoras

En esta tarea hubo un grupo de estudiantes que ante el SEL de 4x3 enunciado, focalizaron su atención en los vectores normales de los planos intervinientes (Figura 7). Usaron la vista3D para asegurar que:

> *Hemos llegado a la conclusión de que éste sistema prefija 4 planos que forman un tetraedro. El hecho está en que los vectores normales de cada plano no son paralelos; es decir, cada uno de ellos tiene distinta dirección* (E9,E10, 2017).

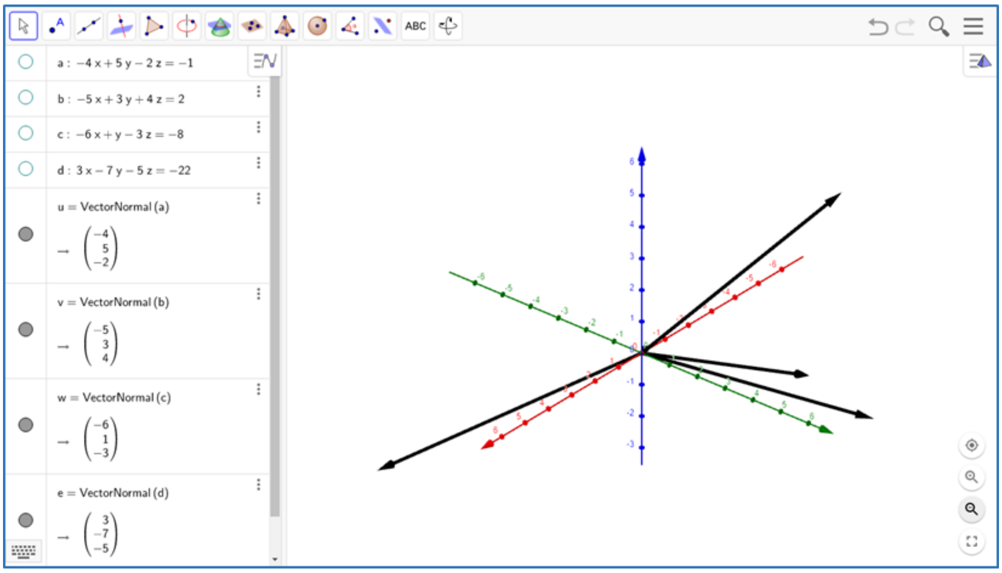


Figura 7 - Captura de pantalla presentada por E9 y E10
Fuente: datos de las autoras

Citamos esta aseveración porque, en primer lugar, no fue tenida en cuenta como posible respuesta. Y en segundo lugar porque consideramos muy importante rescatar los conocimientos disponibles de Geometría Analítica que tienen los estudiantes, los cuales podrían generar un proceso dialéctico de instrumentalización e instrumentación. En este caso, el comando "VectorNormal" permite visualizar las direcciones de todos los planos intervinientes y formular una primera respuesta afirmativa a la tarea: *"Hemos llegado a la conclusión de que éste sistema prefija 4 planos que forman un tetraedro".* Luego, para hallar los vértices del tetraedro, este grupo empleó la técnica 1, es decir, resolvió cuatro sistemas de 3x3.

La técnica 2 se observó en una versión similar a la prevista y la emplearon el 15% de los estudiantes participantes. En la vista CAS se ingresaron las cuatro ecuaciones y se resolvieron todos los sistemas de 2x3 posibles. En este procedimiento entran en juego los SEL compatibles indeterminados. El conjunto solución de cada uno de ellos puede observarse en la vista CAS expresado, por ejemplo, con el ostensivo *Lista1:= {(2z-1, 2z-1, z)}*. ¿Cómo debe entenderse esta respuesta que brinda GeoGebra? Los estudiantes respondieron que se trata de una lista de infinitas ternas o puntos que representa la solución general de un SEL compatible indeterminado. En términos geométricos, esos puntos están contenidos en la recta intersección de dos planos que es precisamente lo que se observa en la figura 8. En la misma también puede observarse que las ecuaciones de planos están desactivadas, para poder apreciar el tetraedro con mayor claridad.

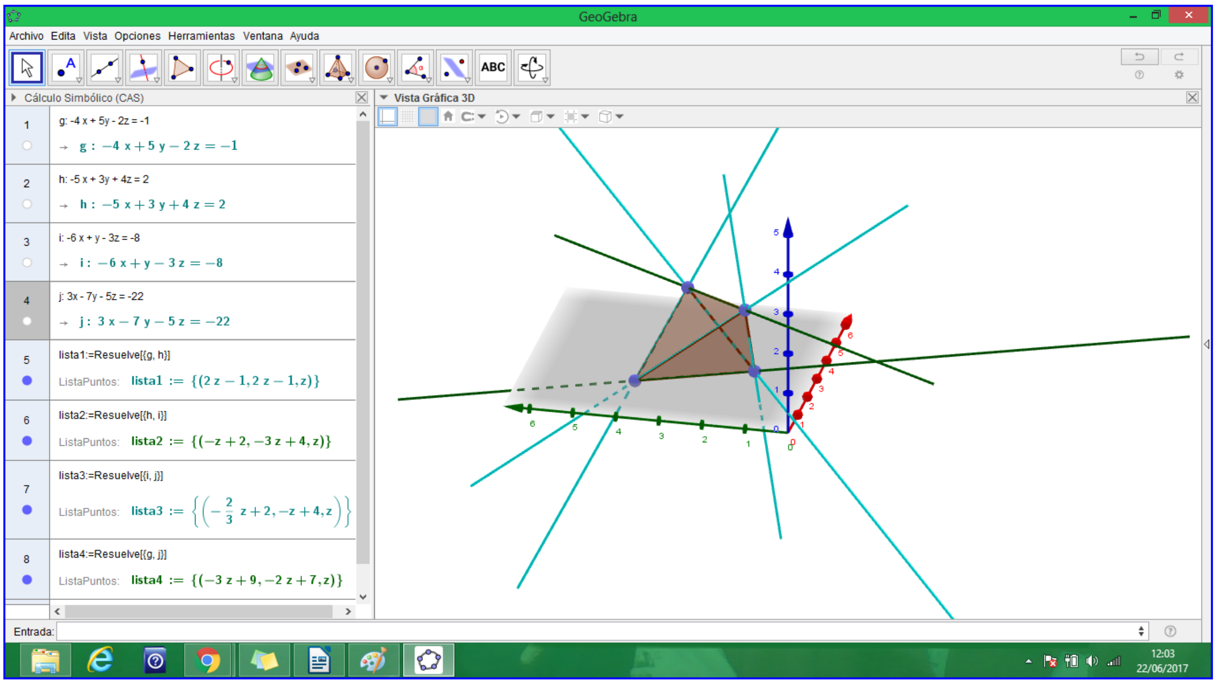


Figura 8: Captura de pantalla presentada por E3 y E4.
Fuente: datos de las autoras

Destacamos que esta técnica también involucra ostensivos y no ostensivos de distintos cuadros, tales como la notación paramétrica para expresar el conjunto solución de un SEL compatible indeterminado o la noción de ecuación cartesiana de un plano en el espacio. La visualización simultánea de lo que se realiza en las vistas CAS y 3D, permitió la elaboración de esta técnica compleja para resolver la tarea. Cabe mencionar que si bien en la Figura 8 aparecen los vértices, no está claro, en los trabajos de los estudiantes, de qué manera se podrían calcular las coordenadas de los mismos.

Sólo dos estudiantes (10%) usaron la técnica 3, que consistió en aplicar la regla de Cramer a cada sistema de 3x3, y luego ingresar en GeoGebra los resultados (puntos) obtenidos. Es decir, sólo se usó la vista 3D para graficar los vértices del tetraedro y luego aplicar el comando "polígono". Cabe destacar que no está explicitado en las producciones de los estudiantes si usaron *GeoGebra* para calcular los determinantes. Si bien se esperaba que esta técnica fuera utilizada no se alentó a los estudiantes a que lo hicieran.

En síntesis, esta tarea al principio resultó un poco caótica porque los estudiantes graficaban todos los planos a la vez. En ausencia de una técnica consolidada, el software ejerció un papel distractor. Luego de unas breves intervenciones de la docente, el objetivo de la actividad surgió con más claridad. Por lo tanto, podemos decir que los estudiantes requieren de un esquema de acción previo a la instrumentalización eficaz del artefacto.

En relación a la **tarea 4**, primera pregunta: ¿cómo decidir si cuatro planos dados determinan un tetraedro?, los estudiantes destacaron que no deben haber planos paralelos y que tampoco deben intersectarse más de dos planos en una misma recta. Las respuestas que brindaron los estudiantes fueron claras y concisas. Por ejemplo:

> *Cuatro planos determinan un tetraedro si entre ellos existen cuatro puntos de intersección, que son los vértices del tetraedro. Cada uno de ellos esta dado por la intersección de tres planos*. (E3, 2017)

Para resolver esta pregunta, necesitamos realizar un análisis espacial de los casos que pueden ocurrir con 4 planos. Para esto, tendríamos las siguientes posibilidades:
- Los planos son coincidentes.
- Los planos son paralelos.
- Los planos comparten una recta.
- Los planos comparten un vértice.

Dentro de estas posibilidades, solamente las dos últimas podrían determinarme un tetraedro, solo que estas deben tener ciertas restricciones:
- Para determinar aristas de un tetraedro, los planos solo deben intersecarse de a pares.
- Para determinar vértices de un tetraedro, los planos deben intersecarse de a triadas.

Si lo mencionado anteriormente no se cumple no podría determinarse un tetraedro con cuatro planos.

Figura 9: Respuesta de E14.
Fuente: datos de las autoras

En relación a la segunda pregunta: ¿qué sistema de ecuaciones prefija cuatro planos en el espacio que forman un tetraedro?, las respuestas de los estudiantes están, en general, mal redactadas o incompletas. Se observó que no pueden desprenderse del cuadro geométrico, y en consecuencia, no focalizan en un SEL de 4x3. Por ejemplo:

> *Un sistema compatible determinado prefija cuatro planos en el espacio determinando un tetraedro, ya que tiene que tener solución. Las cuatro combinaciones de los tres planos tiene que ser todos compatibles determinados. Si el sistema es incompatiple significaria que las rectas dadas son paralelas, por lo tanto no tiene solucion y no forman un tetraedro, y si fuera compatible indeterminado serian la misma recta y tampoco formaria un tetraedro.*(E11, 2017)
>
> *Un sistema que prefija 4 planos va a formar un tetraedro cuando sea un sistema compatible determinado, es decir, que al momento de seleccionar y resolver los sistemas (planos) la solución sea única (un punto).*(E7, 2017)

Atendiendo al objetivo de esta tarea, podemos decir que los estudiantes no están habituados a elaborar respuestas basadas en conceptos propios del cuadro de los SEL. En este caso, los estudiantes se basaron en técnicas y en los ostensivos que componen dichas técnicas, sin evocar los no ostensivos asociados.

Ciertamente, se puede formular una respuesta muy económica a la pregunta b) utilizando la noción de rango, como se propone en el libro de texto de Proskuriakov (1986), por ejemplo. Pero en este curso (Álgebra y Geometría I) este concepto no se enseña. Quizá sea importante considerar la noción de rango para que los estudiantes den significado a este tipo de tarea de índole teórica, más aún si sólo se la propone en un entorno de lápiz y papel.

Se observó un caso particular de una estudiante que interpretó la pregunta b) de la siguiente manera*: dados 4 puntos independientes en el espacio, hallar un sistema de ecuaciones que determine un tetraedro cuyos vértices son los 4 puntos dados.* Luego, presenta 4 puntos y resuelve la tarea mencionada trabajando en el marco geométrico. Es un caso interesante en el sentido que la estudiante tiene conocimientos disponibles en Geometría Analítica que le permiten construir una técnica para resolver una tarea inversa. Por otro lado, se trata de una tarea que parece importante ser considerada en los siguientes cursos de Álgebra Lineal, pues durante el desarrollo de la misma se pone en evidencia que, en general, los estudiantes tienen dificultades para articular los nuevos conocimientos introducidos en Álgebra Lineal con conocimientos previos de Geometría Analítica en el plano y en el espacio.

6. Conclusión

Los resultados obtenidos deben ser interpretados en el contexto de la investigación en curso. La situación didáctica que hemos considerado es muy particular y no se han tenido en cuenta las intervenciones del profesor.

Respecto al desarrollo la tarea en su totalidad, se observó que resultó motivadora para los estudiantes y posible de resolver con bastante autonomía, ya que, ellos disponían de conocimientos sobre geometría en el espacio y sobre resolución de SEL en ambiente de lápiz y papel. Aunque destacamos que el uso de las herramientas y comandos de GeoGebra requiere de una instrucción previa, aun siendo intuitiva su utilización. Consideramos necesaria esta instrucción, para que las preguntas de los estudiantes no apunten hacia el manejo del software sino al trabajo matemático. En este sentido, las técnicas producidas por los estudiantes generaron un trabajo de articulación o cambio de cuadro en la interfaz de GeoGebra.

Por otro lado, fue posible apreciar que los estudiantes enfatizan ciertas habilidades geométricas como las visuales, por sobre otras como por ejemplo, las de comunicación, más aún si éstas requieren utilizar ciertas especificidades del lenguaje matemático. En general, la escritura de los estudiantes cuando no corresponden sólo a una sucesión de cálculos, lo que no era necesario en función de la utilización del software GeoGebra, se centra en descripciones poco explicativas y/o justificativas, como podemos observar en las respuestas presentadas como ejemplo. De todos modos, observamos aquí que la disponibilidad de imágenes geométricas es importante, ya que pueden ayudar en el desarrollo de un lenguaje matemático con sus exigencias de rigor.

A partir de esta experiencia, se han elaborado tipos de tareas que posibilitan un trabajo complementario entre GeoGebra y lápiz/papel, las cuales han sido incorporadas a los prácticos de la asignatura álgebra y geometría I y a las instancias de evaluación, esto es, en los exámenes.

Somos conscientes que el artefacto sólo es una parte del instrumento y, por lo tanto, no basta incluir tareas con GeoGebra para garantizar un aprendizaje determinado. Es la planificación de la acción instrumentada, es decir, los tipos de tareas propuestos y las interacciones en el interior de la clase, los que contribuyen a la génesis instrumental. En este sentido, continuamos trabajando en el diseño de tareas que involucren el uso de tecnologías, en los cambios que esto produce en las interacciones con los estudiantes y en formas de evaluación coherentes con el trabajo realizado en el aula.

Bibliografía

Artigue, M. (2002a) Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work.International. *Journal of Computers for Mathematical Learning,* (7), 245-274.

Artigue, M. (2002b) Ingénierie didactique: quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui? Recuperado el 27 de enero de 2020, de: <https://www.persee.fr/docAsPDF/dsedu_1296-2104_2002_num_8_1_1010.pdf>

Artigue, M. (2007) Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. Historia y perspectiva de la educación matemática. *Memoria de la XII CIAEM,* Querétaro, 9-21.

Bosch, M.; Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des mathématiques.*19(1), 77-124.

Carrillo, A. (2010) GeoGebra. Un recurso imprescindible en el aula de Matemáticas. UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 6(23), 201-210.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2004) Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire, Recuperado el 17 de agosto de 2018, de: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45>

Chevallard, Y. (2007) La problématique anthropologique en didactique, d'hier à demain, Recuperado el 17 de agosto de 2018, de: <http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm>

Dias, M. (1998) Les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. 500f. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Matemáticas). Université Dennis Diderot, Francia.

Douady, R. (1984) Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement mathématique. Une réalisation dans tout le cursus primaire. Tesis doctoral. Université de Paris 7.

Gutiérrrez, A., Jaime, A., Alba, F. J. (2014) Génesis instrumental en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. En M. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 405-414). Salamanca: SEIEM.

Harel, G. (2000) Three principles of learning and teaching mathematics. On the teaching of Linear Algebra. Grenoble: Pensée Sauvage, 177-190.

Iranzo, N.; Fortuny, J. (2009) La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competências del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias,* 27(3), 433–446.

Kieran, C. (2007) Research on the learning and teaching of school algebra at the middle, secondary, and college level: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte: Information Age Publishing, 707-762.

Proskuriakov, I. (1986) Problemas de Álgebra Lineal. MIR: Moscú.

Rabardel, P. (1995) Les hommes et les technologies, approches cognitive des instruments contemporains. Armand Colin, París. Francia.

Rogalski, M. (2001) Les changements de cadres dans la pratique des mathématiques et les jeux des cadres de Régine Douady. En *Actes de la journée en hommage à Régine Douady,* IREM, París 7. Francia. 13-31.

Rojano, T. (2014) El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Revista Educación Matemática,* 25 años, 11-30.

Trouche, L. (2004) Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations, *International Journal of Computers for Mathematical Learning,*(9), 281-307.

Diana C. Pozas es Profesora de Matemática. Docente del Departamento de Matemática del Centro Regional Universitario Bariloche - Universidad Nacional del Comahue, San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina. Dirección: Avenida Jardín Botánico 1575. (8400) Bariloche, Río Negro, Argentina.
dianapozas@hotmail.com Tel. móvil: +54 - 294 - 4572825

Marlene Alves Dias é Doutora em Matemática – Didática da Matemática. Docente da Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN. Endereço: Rua Sobrália, 407, Vila Gea, São Paulo, São Paulo – Brasil. CEP: 04691-020
maralvesdias@gmail.com