UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 119-124

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Creación de problemas. Un caso con probabilidades

Problema

En un sistema vigesimal de calificación, las notas de un alumno en los dos primeros exámenes de los cursos A y B son 8 y 12, y 10 y 14 respectivamente. Si las notas finales se obtienen como media aritmética de tres exámenes, los cursos se aprueban con notas mayores o iguales a 11 y procede el redondeo habitual, ¿en qué curso hay mayor probabilidad de que el alumno obtenga nota final aprobatoria?

Este problema recoge la propuesta de un grupo de trabajo en un taller que desarrollé sobre creación de problemas, en el marco de la *IV Jornada de Matemática del Departamento de Matemática de la Universidad de Valparaíso*, al que fui invitado en enero de este año.

Para la primera parte del taller presenté una situación y pedí que en torno a ella, cada grupo de participantes – formado por tres estudiantes de final de carrera de profesorado en matemáticas para educación media – se plantee preguntas y proponga y resuelva un problema creado en grupo. La situación fue la siguiente:

Carlitos obtuvo las siguientes notas en los cursos A y B. (La escala de calificación es de 0 a 20; la nota final se obtiene como media aritmética de tres exámenes; los cursos se aprueban con 11 y procede el redondeo habitual)

	Curso A	Curso B
1er Examen:	08	10
2do Examen:	12	14

La idea de presentar una situación con notas de cursos me pareció que recogía un contexto frecuente en el mundo estudiantil y que considerar las notas en dos cursos ofrecía más posibilidades de plantearse preguntas y de crear problemas. Pensé en algunas preguntas que podrían plantearse y en algunos problemas que se podrían crear. Puse intencionalmente notas desaprobatorias de ambos cursos en el primer examen e iguales incrementos (4 puntos) en las notas del segundo examen, dando así condiciones para que se planteen como pregunta en qué curso hubo un "progreso mayor" de Carlitos y para que usen el criterio de variación porcentual.

En el taller, todas las preguntas y los problemas propuestos por los grupos fueron en función de las notas posibles en el tercer examen. La mayoría de ellos buscando la nota mínima necesaria para obtener determinado promedio final en cada curso.

A continuación reproduzco tres de ellos:

Problema del grupo 3:

Para obtener una beca, es necesario aprobar ambos cursos y al menos uno de ellos con nota superior o igual a 15. ¿Qué notas debe obtener el alumno en el tercer examen de cada curso para obtener la beca?

Problema del grupo 7

Carlitos posee una beca cuya condición para mantenerla es que el promedio de los cursos A y B sea mayor a 12. ¿Qué nota mínima debe obtener en los terceros exámenes de los cursos A y B?

Problema del grupo 8

¿Carlitos puede aprobar ambos cursos con nota 15?

Dos grupos tomaron la situación, pero no los datos dados para crear su problema. Por ejemplo:

Problema del grupo 4

Carlitos aprueba un curso con tres notas y con promedio 11. ¿Cuáles son las posibles notas en dos de las pruebas si en la tercera obtuvo 15?

Solo uno de los grupos propuso un problema considerando probabilidades:

Problema del grupo 1

¿En qué curso hay mayor probabilidad de que Carlitos apruebe?

Algunos comentarios

1. Se percibió una actitud muy positiva para la creación de problemas en todos los participantes. Manifestaron que no habían tenido antes una experiencia similar y que valoraban mucho tener la oportunidad de hacerlo y comentarlo en grupo.
2. Fueron correctamente enfocadas todas las soluciones que presentaron de los problemas que crearon. Se hizo uso de operaciones básicas y de ecuaciones sencillas.
3. Ningún grupo consideró la información de que se admite el redondeo habitual; así, por ejemplo para que la nota final de un curso sea 15, consideraron que la suma de las tres notas debería ser 45, cuando bien podría ser 44, pues 44/3 $\sim$ 14,66 que se redondea a 15.
4. Ningún grupo consideró un análisis comparativo del progreso de Carlitos en los cursos A y B, como me imaginé que podría ocurrir. Posiblemente la información de un tercer examen a rendir pesó mucho sobre la orientación de los problemas a crear, sobre todo siendo estudiantes los participantes en el taller. Son aspectos importantes a tener en cuenta en el diseño de tareas.
5. Entre los posibles problemas que pensé, no consideré uno con probabilidades y encuentro muy valioso que un grupo lo haya considerado, pues el tema de probabilidades es muy poco tratado en los estudios secundarios y aun en los

cursos básicos de la educación superior. Por eso, en esta ocasión, me detendré en comentarios en torno a esta iniciativa del grupo 1.

Comentarios al problema con probabilidades (del grupo 1)

a) El grupo no presentó una solución del problema.

b) El problema considera una pregunta que parece ser frecuente entre los estudiantes ante situaciones similares.

c) Propuse este problema a dos profesores de secundaria y ambos coincidieron en una solución como la siguiente:

Notas posibles de Carlitos en el tercer examen del curso A: 0, 1, 2, …, 20 (21 notas posibles)

Notas que le dan un promedio aprobatorio en el curso A: 12, 13, 14, … , 20 (9 notas favorables)

En consecuencia, la probabilidad de tener promedio aprobatorio en el curso A:

$$P(\textit{aprobar el curso A}) = \frac{9}{21}$$

Similarmente

$$P(\textit{aprobar el curso B}) = \frac{13}{21}$$

Si bien ésta es una solución posible, es importante notar que conlleva algunos supuestos implícitos, cuya explicitación es importante.

i) Se está asumiendo solo notas con números enteros.

ii) Se está asumiendo que todas las notas son igualmente probables de obtener. Este es un supuesto simplificador, válido para obtener una solución sencilla e ilustrar la probabilidad en el sentido dado por Laplace, pero no acorde con la realidad, pues la experiencia nos dice que obtener un 20 es menos probable que obtener un 12.

d) ¿Se puede resolver este problema haciendo supuestos más acordes con la realidad? Veamos:

- *Suponer que las notas tienen distintas probabilidades de ser obtenidas.*

  Si mantenemos el supuesto simplificador de obtener notas solamente en números enteros, podemos asignar a cada nota entre 0 y 20 una probabilidad p_i de ser obtenida. Es decir, asignamos números p_i entre 0 y 1 a cada una de las notas de 0 a 20, de modo que la suma de tales números p_i sea 1. Podemos asignar los números p_i asumiendo también que las notas más bajas y las más altas son menos probables de obtener. Tengamos en cuenta que al calcular las probabilidades como en (c), asumiendo implícitamente que todas las notas son igualmente probables de obtener, en verdad se está asumiendo que cada una de las 21 notas (enteras) posibles, tiene probabilidad 1/21 de ser obtenida. Así, al asignar los números p_i más bajos para las notas más bajas y los más altos para las notas más altas, se debe compensar los excesos con los defectos respecto a 1/21, de modo que la suma de los 21 números p_i sea 1. Operativamente, una posibilidad que facilita los cálculos es considerar fracciones con denominador 210 en lugar de denominador 21. Así, la siguiente es una posible lista de los p_i, que deben entenderse como la probabilidad p de obtener la nota i. Observar que 10 es la nota a la que se le ha asignado mayor probabilidad y a medida que las notas están más alejadas de 10 – menores o mayores – las probabilidades asignadas son menores.

Nota i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	$\frac{1}{210}$	$\frac{3}{210}$	$\frac{5}{210}$	$\frac{7}{210}$	$\frac{9}{210}$	$\frac{11}{210}$	$\frac{13}{210}$	$\frac{15}{210}$	$\frac{17}{210}$	$\frac{19}{210}$	$\frac{21}{210}$

Nota i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_i	$\frac{19}{210}$	$\frac{17}{210}$	$\frac{15}{210}$	$\frac{13}{210}$	$\frac{10}{210}$	$\frac{6}{210}$	$\frac{4}{210}$	$\frac{2}{210}$	$\frac{2}{210}$	$\frac{1}{210}$

Con estos números, ya podemos obtener las probabilidades de que Carlitos apruebe sus cursos A y B:
Notas que le dan un promedio aprobatorio en el curso A:

$$12, 13, 14, \dots , 20$$

En consecuencia, la probabilidad de tener promedio aprobatorio en el curso A es:

$$P(\text{aprobar curso A}) = p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16} + p_{17} + p_{18} + p_{19} + p_{20}$$

Viendo las tablas, podemos verificar que tal suma es $\frac{70}{210}$.

Así, la probabilidad de que Carlitos tenga promedio aprobatorio en el curso A es $\frac{70}{210} = \frac{1}{3} \sim 0{,}333$.

Similarmente,

$$P(\text{aprobar curso B}) = p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16} + p_{17} + p_{18} + p_{19} + p_{20} = \frac{146}{210}.$$

Así, la probabilidad de que Carlitos tenga promedio aprobatorio en el curso B es $\frac{146}{210} \sim 0{,}695$

- *Suponer que las notas pueden ser números decimales.*
  Como hay "muchos números decimales posibles", para simplificar se considera a todos los números reales del intervalo cerrado [0; 20], aunque en la realidad jamás se asigne una nota que sea un número irracional. Este supuesto – que es usual en diversos modelos matemáticos – nos lleva, en este caso, a representar el evento "aprobar el curso A" por el intervalo [11,5 ; 20], el evento "aprobar el curso B" por el intervalo [7,5 ; 20] y a calcular las probabilidades usando una función de densidad de probabilidad continua y el cálculo integral. Una posibilidad es considerar la función de densidad de probabilidad correspondiente a una distribución normal (campana e Gauss):

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-10}{3}\right)^2}}{3\sqrt{2\pi}}$$

UNIÓN

El número 10 está presente por haber asumido que la media es 10, y el número 3 está presente por haber asumido que la desviación estándar es 3. Los otros números, incluidos e y π, son parte de la fórmula deducida en la teoría de probabilidades. Como Carlitos obtendrá nota aprobatoria en el curso A si en el tercer examen obtiene una nota entre 11,5 y 20, la probabilidad de que Carlitos apruebe el curso A se identifica con la probabilidad del intervalo [11,5; 20], que es la integral de 11,5 a 20 de la función de distribución adoptada. Así:

$$P([11,5;\ 20]) = \int_{11,5}^{20} f(x)\,dx \sim 0,31.$$

Similarmente, para el curso B:

$$P([7,5;\ 20]) = \int_{7,5}^{20} f(x)\,dx \sim 0,8.$$

Vemos así cómo, a partir de un problema sencillo, según los supuestos que se hagan, se requieren recursos matemáticos diferentes. Suele ocurrir que al pretender resolver situaciones más próximas a la realidad se requiera hacer supuestos menos simplificadores y en consecuencia usar recursos matemáticos más avanzados. Es justamente la realidad y los problemas que ella nos plantea lo que impulsa el desarrollo de la ciencia y en particular de la matemática.

e) Otro problema interesante a partir de la situación presentada, sugerida por un colega matemático, es el siguiente:

> *¿Cuál es la probabilidad de que en el curso A Carlitos tenga nota final más alta que en el curso B?*

En este caso, con supuestos similares a los considerados en i) y ii) y con el supuesto adicional de que hay independencia entre las notas que se obtengan en los cursos A y B, el universo de todos los casos posibles es el producto cartesiano del conjunto $\{0; 1; 2; \ldots; 19; 20\}$ por sí mismo, pues considera todos los pares ordenados (m; n), donde m es la nota obtenible en el tercer examen del curso A y n la nota obtenible en el tercer examen del curso B. Para responder a la pregunta habría que seleccionar los pares ordenados (m; n) que dan como promedio final en el curso A un número mayor al promedio final en el curso B. Contar el número de tales pares ordenados y aplicar la fórmula Laplaciana habitual.

Comentarios finales

1. Estas experiencias refuerzan mi convencimiento de la importancia de estimular en profesores y alumnos las capacidades de plantear preguntas y de crear problemas, sobre todo a partir de situaciones dadas. Los procesos de pensamiento no son los mismos que al entender una demostración o al resolver un problema. El hecho mismo de crear algo es afrontar un reto diferente y por muy simple que sea la situación, lo cierto es que no hay un texto escrito sobre el problema que se piensa resolver sino que tal texto debe

ser creado y debe ser coherente con la información que se tiene y adecuadamente redactado para que sea claramente entendido por otra persona. Si se le añade el reto personal de crear algo que tenga originalidad y sea desafiante para quien intente resolverlo, hay una puesta en juego de manera diferente de los conceptos matemáticos conocidos y un ejercicio muy grande de creatividad.

2. Hemos visto que crear un problema sobre probabilidad a partir de una situación cotidiana sencilla, tiene muchos aspectos sobre los cuales reflexionar y que pueden ir inclusive más allá de los conocimientos sobre probabilidades que tengan los creadores del problema. Esto ilustra una vez más otro aspecto de la importancia de crear problemas, pues brinda también a los estudiantes oportunidades para explicitar supuestos y para estudiar con más motivación temas matemáticos que profundizan lo conocido o que llevan a temas no conocidos para resolver problemas creados por ellos mismos.

3. Enfatizo una vez más la importancia de fortalecer la capacidad creadora en general; crear conocimientos es fundamental en la sociedad del conocimiento y la información, y creando problemas de matemáticas fortaleceremos esa capacidad, tanto la nuestra como la de nuestros alumnos. Concluyo recordando a William Edwards Deming, un estadístico y consultor internacional de negocios, fallecido en 1993, que nos decía: "*You don't just learn knowledge; you have to create it. Get in the driver's seat, don't just be a passenger*.", que me permito traducir como: "*No te limites a aprender conocimientos; tienes que crearlos. Ponte en el asiento del conductor, no seas solamente un pasajero.*"