UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 65. Agosto 2022
Páginas 1-20

Uso del geoplano para el aprendizaje de conceptos geométricos planos: un estudio de caso con un estudiante con necesidades educativas especiales

Lucía Fernández del Valle, Irene Polo-Blanco, Natalia Palacio Cano

Fecha de recepción: 26/06/2022
Fecha de aceptación: 13/07/2022

Resumen	A lo largo de este trabajo se presenta una experiencia de instrucción centrada en el aprendizaje de figuras geométricas planas con alumnado con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE). En concreto esta propuesta se centra en el aprendizaje de algunos cuadriláteros (cuadrado, rectángulo, rombo, romboide y cometa) con un alumno NEAE de 12 años, utilizando como material el geoplano. Los resultados del trabajo con dicho alumno se analizan teniendo como marco de referencia los niveles de aprendizaje geométricos establecidos en el modelo de Van Hiele. **Palabras clave**: Geometría, geoplano, Necesidades Específicas de Apoyo Educativo, van Hiele model.
Abstract	This paper presents an instructional experience focused on the learning of plane geometric figures with students with Specific Educational Support Needs (SEN). Specifically, this proposal focuses on the learning of some quadrilaterals (square, rectangle, rhombus, rhomboid and kite) with a 12-year- old SEN student, using the geoboard as a material. The results of the work with this student are analyzed taking as a frame of reference the levels of geometric learning established by the van Hiele model. **Keywords**: Geometry, geoboard, Specific Educational Support Needs, van Hiele model.
Resumo	Este documento apresenta uma experiência instrucional centrada na aprendizagem de figuras geométricas planas com estudantes com Necessidades Específicas de Apoio Educativo (SEN). Especificamente, esta proposta centra-se na aprendizagem de alguns quadriláteros (quadrado, rectângulo, losango, rombóide e pipa) com um aluno SEN de 12 anos, utilizando o geoplano como material. Os resultados do trabalho com este estudante são analisados tomando como referência os níveis de aprendizagem geométrica estabelecidos no modelo de Van Hiele. **Palavras-chave:** Geometria, geoplano, Necessidades Educativas Específicas de Apoio, modelo van Hiele.

1. Introducción

En los últimos años, en la etapa de educación primaria, desde la geometría se abarca el análisis y estudio de los conocimientos espaciales sobre posiciones y formas. En palabras de Godino y Ruiz (2003, p. 192): “la geometría se ocupa de una clase especial de objetos que designamos con palabras como, punto, recta, plano, triángulo, polígono, poliedro, etc.". El estudio de este contenido es muy importante debido a que tiene un componente de origen práctico fundamental y forma parte de nuestro alrededor (Godino y Ruiz, 2003). La geometría es utilizada para describir el mundo que nos rodea y el "lenguaje" geométrico surge como forma de estructurar las entidades geométricas presentes a nuestro alrededor.

Sin embargo, en la etapa primaria se pueden observar distintas problemáticas que surgen en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la geometría. Barrantes y Zapata (2008) sugieren que algunas de ellas tienen su origen en las metodologías de enseñanza tradicionales. Además, en numerosos libros de texto se sigue una línea estereotipada sobre las figuras geométricas y sus propiedades. Esto puede provocar dificultades en los procesos de abstracción que son de gran importancia en el estudio de la geometría. Los autores afirman, además, que algunos de los obstáculos que surgen pueden tener su origen en una tendencia a eliminar de manera temprana la intuición, que consideran llave del conocimiento geométrico (Barrantes y Zapata, 2008). De la existencia del lenguaje geométrico y sus consiguientes reglas, surge otra de las problemáticas que caracterizan a la enseñanza de la geometría en las aulas, descrita por Barrantes, (2003, p. 2) como "una fuerte tendencia a la memorización de conceptos y propiedades que muchas veces se basaban en otros conceptos anteriores".

2. Teorías del aprendizaje geométrico

Para profundizar en esta problemática, varios autores proponen teorías de aprendizaje de la geometría. En la actualidad existen dos que destacan por sus implicaciones para la enseñanza de este contenido: la "Teoría de Formación de conceptos matemáticos" de Vinner (1991) y el "Modelo de razonamiento geométrico" del matrimonio van Hiele (1957). A continuación, se detallan ambas teorías destacando sus principales características. Por ejemplo, Vinner (1991) desarrolla la "Teoría de Formación de Conceptos Matemáticos". Se parte de la idea de que cuando se habla de figuras geométricas se hace referencia a conceptos abstractos y no a una realidad tangible. Es por tanto indispensable marcar desde el inicio de la enseñanza la existencia de estos dos planos, el concepto abstracto y la imagen conceptual (Vinner, 1991). En la misma línea, otros autores advierten de que no separar dichas realidades puede generar un aprendizaje erróneo en lo que al significado del concepto geométrico se refiere (Godino y Ruiz, 2003). La teoría de Vinner se centra en trabajar esos dos planos, el concepto abstracto y la imagen conceptual, que actúa como representación de ese concepto. La construcción del concepto abstracto implica ser capaz tanto de identificar como de construir todos los posibles ejemplos de este concepto según es entendido por la comunidad matemática (Vinner y Hershkowitz, 1983).

Vinner (1991) defiende que a la hora de decidir si las representaciones de un concepto son ejemplos o contraejemplos, la mayoría del alumnado utiliza en primera instancia la imagen mental del concepto, y no su definición. Cada alumno y cada alumna tiene una imagen mental del concepto, que contiene ejemplos con unas características concretas. Esta imagen es a menudo pobre o incompleta, lo que deriva en dificultades en el aprendizaje geométrico. Por ello el concepto que se le presenta tiene alguna característica diferente de las de la imagen mental del alumno, este puede no ser capaz de reconocerla. Surgen además lo que Vinner denomina distractores: de posición (u orientación) y de estructuración. Los distractores de posición son representaciones prototípicas de un concepto (por ejemplo, el triángulo se representa “apoyado” sobre uno de sus lados). Vinner también define los distractores de estructuración como las representaciones de un concepto en las que ciertos elementos y propiedades son excluidos (por ejemplo, la representación de la altura en triángulos acutángulos, siempre interior al triángulo, o a la ausencia de polígonos cóncavos). En la Tabla 1 se presentan los principales distractores de posición y estructuración de los conceptos que se trabajarán en este estudio (López et al., 2014; Turégano, 2006).

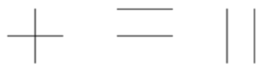
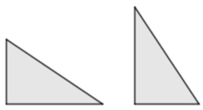
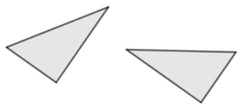
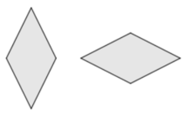
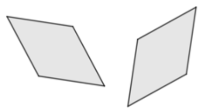
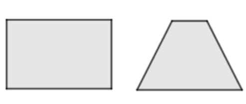
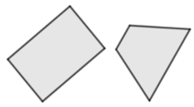
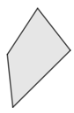
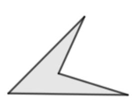
	Ejemplos prototípicos	**Ejemplos no prototípicos**
Distractores de posición		
Rectas paralelas y perpendiculares		
Ángulos apoyados sobre un lado		
Triángulos rectángulos apoyados sobre un cateto		
Rombos apoyados sobre un vértice		
Cuadriláteros apoyados sobre uno de los lados		
Distractores de estructuración		
Triángulos isósceles con los lados iguales mayor que el desigual		
Cuadriláteros (y otros polígonos) siempre convexos		

Tabla 1. Distractores de posición y estructuración de conceptos geométricos planos. Adaptada de López et al. (2014)

La presencia de distractores, tanto de posición como de orientación, tienen importantes implicaciones en el aprendizaje de los conceptos geométricos. Por ejemplo, ocurre con frecuencia que los niños de primaria no identifican un cuadrado apoyado sobre el vértice como tal, pues el cuadrado siempre es representado sobre uno de sus lados. Con el fin de trabajar estos distractores y las dificultades que generan, Vinner elabora una propuesta didáctica. Los objetivos de la propuesta pasan por quitar peso a las definiciones y aportar numerosos ejemplos y contraejemplos, en distintas posiciones, del concepto a tratar. Se trabajan así los distractores, tanto de posición como de estructuración, pues la colección de ejemplos variados enriquece la imagen mental del alumnado de cada concepto (Vinner y Hershkowitz,1983).

El modelo de aprendizaje geométrico propuesto por el matrimonio van Hiele (1957) ha sido una de las teorías más influyentes en la didáctica de la geometría, y se ha considerado como marco en numerosas investigaciones. Además, el modelo es una de las referencias utilizadas para la elaboración del bloque correspondiente a geometría en el currículo, tanto de primaria como de secundaria. Van Hiele propone 5 niveles que describen el proceso de adquisición de conocimiento geométrico del alumnado. Este modelo no tiene en cuenta la edad del niño o de la niña para establecer sus niveles, sino el conocimiento que ha adquirido mediante la experiencia y la instrucción. A continuación, se enumeran los cinco niveles propuestos en el modelo de Van Hiele: Nivel 1. Visualización, Nivel 2. Análisis, Nivel 3. Deducción informal, Nivel 4. Deducción formal, Nivel 5. Rigor. Estos niveles son secuenciales y el alumnado va pasando por ellos uno a uno, avanzando a medida que se adquieren nuevos aprendizajes y razonamientos (Vargas y Gamboa, 2012).

En primer nivel de esta teoría, Visualización, se encuentra el alumnado que distingue los conceptos geométricos por su apariencia física. En este nivel no se tiene en cuenta características de los conceptos como el número de vértices, la longitud o cantidad de los lados o los ángulos. Es decir, el alumnado que se encuentra en este nivel es capaz de distinguir, reproducir y denominar un concepto geométrico, pero no de ver las partes que lo conforman, sus propiedades, ni las diferencias y similitudes con otros conceptos. En este nivel se trabaja la identificación de figuras, y a medida que se avanza, la clasificación, la descripción de las características, etc. En este primer nivel es importante aportar modelos manipulativos de ejemplos muy variados. En el segundo nivel, Análisis, se comienza a distinguir algunas propiedades de las figuras geométricas, aunque el alumnado en principio no es capaz de elaborar una definición concreta a partir de un conjunto de propiedades, ni a establecer relaciones entre conceptos. En este nivel se trabaja centrándose en las propiedades y en la clasificación de las figuras a partir de esas propiedades (van Hiele, 1957; cita de Fouz y Donosti, 2005).

Durante el tercer nivel de Deducción informal, se adquiere la capacidad de establecer las relaciones entre las figuras y se comienza a elaborar definiciones y establecer generalizaciones. Para trabajar en este nivel se debe insistir en definir las propiedades y usar lenguaje deductivo, mostrar contraejemplos de las figuras y hacer uso del método hipotético deductivo. Los niveles 4 y 5 son de carácter teórico, y no se dan en la etapa de educación primaria. En estos niveles el estudiantado puede razonar lógicamente y por tanto argumentar sus razonamientos y finalmente utilizar sus conocimientos con rigor matemático (van Hiele, 1957; citado por Fouz y Donosti, 2005).

Con el fin de facilitar la labor docente, van Hiele establece a su vez cinco fases del aprendizaje dirigidas a guiar el desarrollo del aprendizaje y el paso de un nivel a otro. Estas fases son las siguientes: Fase 1. Preguntas, Fase 2. Orientación dirigida, Fase 3. Explicación, Fase 4. Orientación libre y Fase 5. Integración. La primera fase consiste en realizar preguntas con el fin de averiguar el nivel en el que se encuentra el alumnado y poder trabajar desde ese nivel. Durante la orientación dirigida se presentará una batería de actividades que permita a los estudiantes construir el conocimiento a partir de la experimentación guiada por el docente. En la tercera fase es importante la interacción entre el alumnado, el diálogo y el intercambio de ideas. La cuarta fase se pone el énfasis en la argumentación, y en cómo las actividades se pueden resolver de varias maneras. La fase de integración consiste en repasar lo aprendido para interiorizar los conocimientos trabajados (Fouz y Donosti, 2005).

3. Alumnado con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo

En este trabajo, tendremos como referencia las teorías anteriores para trabajar con un alumno con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE). A continuación, se tratarán algunos aspectos sobre al alumnado con NEAE, para posteriormente profundizar en la enseñanza de la geometría con este alumnado. Tal y como se dispone en el artículo 79 de la Ley 6/2008, de 26 de diciembre, de Educación de Cantabria la atención a la diversidad se entiende como "el conjunto de actuaciones encaminadas a dar respuesta a las necesidades educativas, intereses y motivaciones de todo el alumnado por parte de todo el profesorado del centro desde la perspectiva de la corresponsabilidad" (Ley de Educación de Cantabria, 2019, tít. I, art.2, pp. 15769). Líneas más abajo, en el Título 2 de la misma ley se establecen dos tipos de necesidades educativas: las ordinarias y las necesidades específicas de apoyo educativo. Dentro del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo (NEAE) se engloba a aquellos estudiantes que padecen alguna de las siguientes patologías: discapacidad física, discapacidad sensorial, discapacidad intelectual, trastornos graves de la conducta, dificultades específicas de aprendizaje, Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH), altas capacidades intelectuales, incorporación tardía y alumnado con condiciones personales o de historia escolar como: hospitalización, adopción o acogida, riesgo de exclusión social, familias itinerantes, tutela de los servicios sociales o decisiones judiciales (Ley de Educación de Cantabria, 2019, tít. II, cap. I, art. 4, pp. 15770).

La modalidad y el tipo de centro en que el este alumnado sea escolarizado dependerá del resultado de las evaluaciones psicopedagógicas que se realicen, a partir de las cuales se elaborará el dictamen de escolarización. Este dictamen contiene los datos del alumno o alumna, el tipo de necesidades que presenta, la modalidad de escolarización o las medidas que se proponen y la opinión de la familia o tutores legales acerca de estas últimas. Las modalidades de escolarización que se contemplan son: la escolarización en un centro ordinario con adaptaciones específicas, la escolarización combinada entre un centro ordinario y un centro o unidad de educación especial y la escolarización completa en un centro o unidad de educación especial (Ley de Educación de Cantabria, 2019, tít. II, cap. I, art. 7, pp. 15772). Con carácter general, se escolarizará al alumnado NEAE en centros ordinarios y sólo se valorarán las otras dos modalidades cuando las necesidades de estos no puedan ser cubiertas por las medidas de atención a la diversidad de los centros ordinarios (Ley de Educación de Cantabria, 2019, tít. VIII, cap. II, art 55, pp.15789).

3.1. Aprendizaje de la geometría con alumnado con Necesidades Específicas Apoyo Educativo

Centrando la discusión en el campo de las matemáticas, se debe tener en cuenta su importancia para el desarrollo personal de alumno o alumna, pues, como ya se ha mencionado, la resolución de problemas matemáticos forma parte de la vida cotidiana de las personas (Cass et al., 2003). Un alto porcentaje de alumnado muestra dificultades en el área de las matemáticas, y en concreto aproximadamente el 50% del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo cuentan con adaptaciones curriculares en esta asignatura (Cass et al., 2003).

La geometría es una parte esencial de las matemáticas y el alumnado debe ser capaz de manejarlas con soltura, pues estas ayudan a desarrollar habilidades de razonamiento y justificación (Liu et al.,2019). Además, mejora el rendimiento cognitivo, la comunicación y la comprensión (Liu et al., 2019). Como ya se ha mencionado anteriormente, gran parte del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo muestra problemas significativos en el área de matemáticas y más en concreto en el campo de la geometría. Sin embargo, si se realiza una búsqueda intensiva en la literatura, sobre cuáles son los campos de las matemáticas más trabajados con el alumnado NEAE, se comprueba que la importancia recae sobre el trabajo con los números y las operaciones aritméticas, prestando menos atención al área de geometría (Sarama et al., 2011).

Swanson y Carson (1996) elaboraron una lista con diferentes enfoques de enseñanza que resultan efectivos a la hora de trabajar con el alumnado NEAE. Por ejemplo, la “instrucción directa”, consiste en aportar por parte del docente explicaciones sencillas y claras sobre un tema específico en este método es el profesor el que da la lección y el alumnado escucha. Otros autores (Swanson y Sachse-Lee, 2000) observaron que otro tipo de técnicas como el trabajo en pequeños grupos daba también resultados positivos. En el caso de la enseñanza de la geometría, distintos enfoques con alumnado de desarrollo típico contemplan el uso de material manipulativo, como el geoplano, para ayudar en la construcción de conceptos geométricos (Baroody, 1989). Otros trabajos incluyen el geoplano y otros materiales como parte de secuencias de aprendizaje teniendo como referencia el modelo de van Hiele (Crowley, 1987; Roldán-Zafra et al., 2022).

En cuanto a investigaciones sobre el trabajo en el área de geometría con alumnos NEAE, Liu et al. (2019) hacen una síntesis sobre la investigación realizada por Bergstrom y Zhang (2016; citado por Liu et al.,2019) en la que recogen una revisión de las intervenciones en el área de geometría con el alumnado con y sin NEAE. Estos autores establecieron tres tipos de métodos de intervención: *programas curriculares, tecnología educativa y estrategias de instrucción.* Por otro lado, Cass et al. (2003) indican que escasean los estudios con base empírica que aborden la efectividad del material manipulativo en el aprendizaje de las matemáticas (Cass et al., 2003).

El estudio de Cass et al. (2003) pone el foco en el aprendizaje del perímetro y área en alumnado con NEAE. Participaron tres alumnos, dos chicos (16 y 15) y una chica (13) escolarizados en un centro de secundaria de los Estados Unidos. Todos habían recibido la mayor parte de su instrucción anterior de forma tradicional, centrándose en la resolución de problemas de manera abstracta. La investigación se llevó a cabo de forma individual con cada uno de los alumnos, las sesiones tenían lugar diariamente en un aula especializada y duraban entre 15 y 20 minutos.

Los materiales utilizados durante la propuesta se resumen en: geoplanos, gomas elásticas para estos, una cinta métrica, un modelo de casa de muñecas y una prueba previa de geometría. Los alumnos comenzaron la instrucción de manera escalonada, de manera que cuando el primero de ellos respondía correctamente al 80% de los problemas, se empezaba con el siguiente y así sucesivamente. Al finalizar la investigación los alumnos mostraron haber adquirido habilidades de resolución de problemas de perímetro y área y mantenerlas en el tiempo (Cass et al., 2003).

4. Objetivos

Nos planteamos trabajar conceptos geométricos planos con apoyo del geoplano con un alumno con NEAE. Más concretamente, se plantea evaluar el conocimiento de un alumno con NEAE sobre los cuadriláteros, y cómo una intervención con apoyo del geoplano ayuda a avanzar en el aprendizaje de este contenido geométrico, teniendo como referencia el modelo de van Hiele.

5. Metodología

Se lleva a cabo un estudio exploratorio con un alumno de un centro de educación especial de Cantabria. Previamente se había realizado una evaluación de conocimiento geométrico a siete estudiantes del centro mediante un pretest (ver Anexo). Realizaron los ejercicios de forma individual y sin ayuda en el horario escolar. Solo en los casos en que no entendían alguna palabra de los enunciados se le explicaba su significado, se les indicó que no había límite de tiempo y que podían dejar en blanco lo que no sabían contestar. Todas las respuestas fueron grabadas y transcritas.

A continuación, y junto a la organización del colegio, se seleccionó uno de los estudiantes para llevar a cabo la intervención. Se seleccionó a dicho alumno para llevar a cabo esta propuesta teniendo en cuenta la compatibilidad de horarios con la instructora (docente en prácticas), la cercanía y afinidad con ella, y el interés del alumno por las matemáticas.

Este alumno tenía 12 años en el momento que se comenzó la instrucción. Hasta esa edad había estado escolarizado en un centro ordinario. La Consejería de Educación diagnosticó un trastorno grave de la conducta asociado a un trastorno afectivo de carácter bipolar. Se llevó a cabo una exploración psicométrica de Coeficiente Intelectual (CI), y pruebas atencionales (STROOP, CARAS-R). Los resultados de estas pruebas dictaminaron que el CI del alumno se encuentra en la media de su edad (CI=94). En las dos pruebas atencionales, el alumno presentó una clara disfunción ejecutiva. El diagnóstico actual del alumno es Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH) con predominio hiperactivo-impulsivo y Trastorno de Conducta Oposicionista.

Teniendo en cuenta el perfil del alumno, se establece una temporalización para las sesiones de trabajo un jueves cada dos semanas a segunda hora de la mañana. Además, se decide concretar el contenido geométrico al estudio de los cuadriláteros para poder abordarlo en las sesiones programadas. Se lleva a cabo un pretest inicial, con el fin de conocer los conocimientos previos del alumno. Basándose en los resultados del pretest, se realizan tres sesiones de intervención y, tras finalizar, un postest para observar los avances alcanzados.

5.1. Procedimientos

5.1.1 Pretest

El pretest consistió en la realización de una batería de preguntas, extraídas de un test validado de López de la Fuente (2020) (ver Anexo). No se estableció límite de tiempo. El alumno respondió al test de manera autónoma sin ningún tipo de ayuda. La instructora solo intervino si era necesario aclarar dudas en cuanto a la comprensión de los enunciados o proporcionando frases de ánimo.

La primera actividad (ver Anexo), está centrada en el reconocimiento de polígonos y sus características, y cuenta con tres apartados (polígonos, triángulos y cuadriláteros). Durante la realización de esta se presentaron una serie de ejemplos y el alumno debía responder a seis cuestiones teniendo en cuenta los ejemplos dados (ver Anexo). El esquema de estas cuestiones es siempre el mismo: la primera pregunta está dirigida al reconocimiento de distintos ejemplos del concepto que se trate en ese apartado (Nivel 1 van Hiele). La segunda actividad se centra en la descripción de las características de ese concepto (nivel 2 van Hiele): se le entrega al alumno una batería de ejemplos y este debe responder a seis preguntas. Se trata de que el alumno haga comparaciones entre los diferentes ejemplos y discrimine cuáles pertenecen a un mismo agrupamiento.

5.1.2. Sesiones de instrucción

Se planificaron tres sesiones de instrucción quincenales. Se llevó a cabo una instrucción directa con retroalimentación continua con el alumno (Liu et al., 2019; Swanson y Carson, 1996). La duración de las sesiones fue de unos 20 minutos aproximadamente, determinado por las necesidades del alumno en cada momento, su estado de ánimo y motivación. Igualmente, debido a la limitación de tiempo, se decidió concretar el campo de trabajo en el estudio de algunos cuadriláteros, concretamente en los conceptos de: cuadrado, rectángulo, rombo, romboide y cometa. Para llevar a cabo las sesiones se utilizó como material el geoplano con las gomas elásticas de colores, para la construcción de los polígonos.

Las sesiones se estructuraron siempre de la misma manera, con una estructura fija y evitando cambios que pudieran producir inestabilidad en el alumno. En las tres sesiones se trabajaron los distintos cuadriláteros siempre en el mismo orden: cuadrado, rectángulo, rombo, romboide y cometa. Se comenzaba pidiendo la construcción del polígono correspondiente (Nivel 1 de van Hiele) y se trabajaban sus características con frases del tipo: "*¿por qué es un cuadrado y no otra figura?*" (Nivel 2 de van Hiele). Finalmente, se hacía un repaso de lo visto en la sesión pidiendo al alumno construir en el geoplano todas las figuras nuevamente, cada una de un color, y se repasaban las características de cada una de ellas. Además, se trabajaron los distractores de posición que Vinner (1991) establece en su teoría, para lo que se le pedía al alumno que construyera en diversas posiciones la misma figura, o la instructora construyó ella misma la figura en otras orientaciones.

5.1.3. Postest

Para evaluar los conocimientos adquiridos, una vez finalizadas las tres sesiones de instrucción, el alumno realizó un postest que consistió en el mismo pretest inicial. Las premisas para la realización de este fueron las mismas que en el pretest: la instructora no intervino, excepto para resolver dudas relacionadas con el enunciado de las preguntas. El alumno realizó de manera autónoma y sin tiempo limitado la prueba.

5.2. Análisis de datos

Para el análisis de los resultados se clasificaron las respuestas del alumno según los niveles de van Hiele de dos modos diferentes. En el caso del pretest y el postest, se le asignó un nivel a cada una de las preguntas en función de la respuesta del alumno. Por otro lado, en el caso de las sesiones de instrucción, se contabilizó el número de argumentos que el alumno daba en relación a cada figura y se le asignó un nivel de van Hiele a cada uno de dichos argumentos. Es importante destacar, que en el pretest y en el postest, las preguntas 2.1 y 2.2, y 2.3 y 2.4, están agrupadas por considerarse que la primera actividad de cada agrupación (2.1 y 2.3), solo se puede responder con argumentos de Nivel 1.

6. Resultados

A continuación, se presentan los resultados de cada una de las fases.

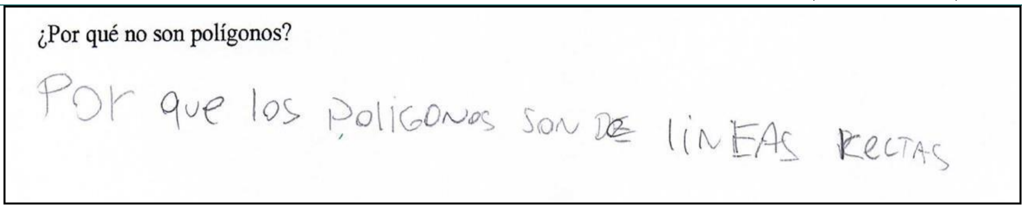
6.1. Pretest

La Tabla 2 muestra los argumentos del alumno durante el pretest, clasificados según los niveles de van Hiele:

Preguntas	N1	N2	N3
1.1	--	1	--
1.2	--	1	--
1.3	--	1	--
2.1 y 2.2	1	--	--
2.3 y 2.4	1	--	--
TOTAL	2	3	0

Tabla 2. Frecuencia de argumentos en cada nivel de van Hiele durante el pretest.

En los resultados del pretest el alumno proporcionó dos respuestas que se identificaron relativas al Nivel 1 y tres al Nivel 2. Cabe destacar que los argumentos de Nivel 2 que el alumno realizó en las preguntas 1.2 ([son triángulos] “porque tienes 3 lados”) y 1.3 ([son cuadrados] “porque tienen 4 lados”), tienen que ver con los lados de las figuras. La respuesta a la cuestión 1.1 también se identifico de Nivel 2 (ver Figura 1). Por otro lado, los argumentos de las preguntas 2.1 y 2.2, y 2.3 y 2.4 se codifican como de Nivel 1, ya que solo menciona la figura geométrica en cuestión (por ejemplo: “rombos”) sin hacer alusión a sus propiedades.


¿Por qué no son polígonos?

Por que los poligonos son de lineas rectas

Figura 1. Respuesta del estudiante a la pregunta 1.1. en el pretest.

6.2. Sesión 1

A continuación, se muestra la frecuencia de argumentos de cada nivel en relación a los distintos cuadriláteros durante la sesión 1 (Tabla 3):

	N1	**N2**	**N3**
Cuadrado	2	6	--
Rectángulo	--	5	--
Rombo	--	--	--
Romboide	2	2	--
Cometa	--	3	1
TOTAL	4	16	1

Tabla 3. Frecuencia de argumentos de cada nivel de van Hiele durante la sesión 1

La primera sesión fue la más guiada de las tres en la que la instructora proporcionó numerosas explicaciones teóricas. En esta sesión se codificaron 21 argumentos del estudiante relativos a los conceptos tratados: 16 de estos argumentos se identificaron como correspondientes al Nivel 2 de van Hiele, y los 4 restantes se codificaron como argumentos de Nivel 1. Tal como se observa en la Tabla 4, la mayoría de argumentos que se identificaron fueron en relación al cuadrado. Además, se pudo codificar un argumento de Nivel 3 en lo referente al cometa.

A continuación, se tratará de ejemplificar algunos de los argumentos que el alumno realizó durante la sesión. En lo referente al cuadrado primaron las argumentaciones de Nivel 2 tales como: “porque tiene 4 lados”, “sus ángulos son rectos”, “todos los lados son iguales”, etc.; pero también aporta alguna argumentación de nivel uno al comparar los tamaños de varios cuadrados, “es más pequeño”. Además, durante esta sesión, se intentan trabajar los distractores de orientación (Vinner, 1991), de los que se ha hablado en líneas anteriores. Para ello se le pide al alumno que construya cuadrados en diferentes posiciones (Figura 2):

> Instructora (I): ¿Puedes hacer uno [un cuadrado] que no tenga la base paralela a la del geoplano?
>
> Estudiante (E): [pide que se vuelva a explicar.]
>
> I: Un cuadrado que no sea como estos [señala].

E: [Gira el geoplano de manera que para él quede apoyado en un vértice] Si lo pones así, ya tienes cuadrados que no están rectos.

I: [Gira otra vez el geoplano e insiste en que lo construya él].

E: Bien [lo construye. Al terminar se lo muestra a la instructora] (ver Figura 2).

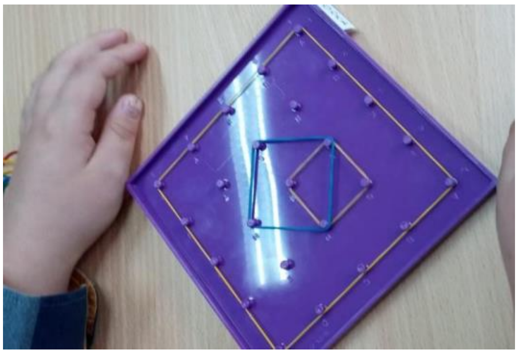


Figura 2. Cuadrado en distintas posiciones para evitar distractores de posición.

Además de las construcciones que se observan en la Figura 2, el alumno construyó un cometa. Esto fue llamativo, pues en un principio no se iba a trabajar este cuadrilátero; fue el propio alumno el que lo construyó en el geoplano y a raíz de ello se decidió introducir en las sesiones y trabajarlo con el resto de cuadriláteros. Al preguntarle por esta figura, él respondió que sabía que no era un cuadrado, y lo describió como: “Es como una especie de rombo, pero con lados más pequeños y lados más grandes”. Como se observa, el alumno describió la figura mediante la comparación con el rombo, por ello, este argumento se codificó como Nivel 3.

Durante la sesión 1 se contabilizaron dos argumentaciones de Nivel 2, además de la ya mencionada, en relación con el cometa, como, por ejemplo: “no sé cómo se llama, pero mira, pero sé que tiene 1, 2, 3 y 4 lados”. En cuanto al rectángulo no se han codificado argumentaciones de nivel uno, y se cuantifican cinco argumentaciones del Nivel 2, como, por ejemplo: “tiene 4 lados, pero tiene dos largos y dos más cortos” o “esto… rectos, sí” (refiriéndose a los ángulos de la figura). Respecto al rombo no se identifican argumentaciones por parte del alumno. Por el contrario, con el romboide sí se producen argumentaciones, tanto del Nivel 1: “esa figura creo que existe, pero es parecida al rombo y similar a un cuadrado y al rectángulo también”, como del Nivel 2: “tiene 4 lados, pero también tiene diferentes ángulos”.

6.3. Sesión 2

A continuación, se detalla el transcurso de la sesión 2. La tabla 4 muestra la frecuencia de argumentos de cada nivel en relación a los distintos cuadriláteros:

	N1	N2	N3
Cuadrado	1	3	--
Rectángulo	1	3	--
Rombo	2	2	--

Romboide	2	2	1
Cometa	--	3	--
TOTAL	6	13	1

Tabla 4. Frecuencia de argumentos de cada nivel de van Hiele durante la sesión 2

En esta segunda sesión se contabilizaron 20 argumentos realizados por el alumno, de los cuales 13 se codificaron como Nivel 2, seis como Nivel 1 y uno como Nivel 3. Tal como se observa en la Tabla 5 primaron los argumentos de Nivel 2, llegando a identificarse algún comentario de nivel tres en el caso del romboide. Comenzaremos comentando los argumentos relacionados con el cuadrado. Se repiten comentarios de Nivel 2 sobre ángulos y lados de la figura, “tiene 4 lados”, “tiene 4 ángulos rectos”. Además, durante esta sesión a la pregunta “¿por qué es un cuadrado?”, el alumno respondió realizando una argumentación de Nivel 1: “Hay formas que hay de rectángulo y todo eso y es parecido a uno de ellos, pero con otra forma”.

Para el rectángulo, se contabilizan durante esta sesión cuatro argumentos, uno de Nivel 1 y tres de Nivel 2. En este caso, el alumno argumentó proporcionando una lista de propiedades del rectángulo: “porque tiene ángulos rectos, tiene dos lados que son diferentes a los otros dos lados, unos son pequeños y otros son grandes”. En el caso del rombo, los argumentos contabilizados son 4, dos de Nivel 1 y dos de Nivel 2. Comenzó describiendo la figura como “paralela” y comentando que el significado de esto era: “que no tiene tanta forma, tiene una forma de las que hemos visto ya la anterior vez, pero no es como las demás”. Cuando la instructora le pidió que lo explicara de nuevo, él respondió: “que es rara” (identifcando los argumentos de esta conversación como de Nivel 1). En cuanto a los argumentos de Nivel 2 relacionados con el rombo, estos tienen que ver con sus ángulos, “dos ángulos agudos”, “ángulos obtusos”. A la hora de construir el romboide mostró dificultades y requirió la ayuda de la instructora:

Instructora (I): ¿Te acuerdas de lo que es un romboide?

Estudiante (E): Sí [comienza a construirlo, pero se confunde. En primer lugar, construye un cometa, luego un triángulo, después un rombo y por último otro cometa.]

I: Vale a ver, te voy a dar una pista [construye un triángulo]. Así, y tienes que mover este lado de aquí para que tenga 4 lados. (Figura 3)

E: [realiza una construcción correcta].

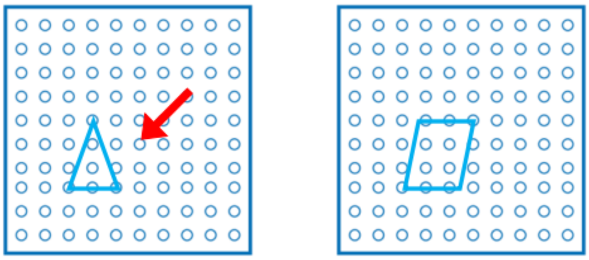


Figura 3. Ayuda en la construcción de un romboide.

El romboide fue el cuadrilátero que dio lugar a más argumentaciones, llegando a codificarse una argumentación de Nivel 3, al expresar el alumno: "han tenido como un hijo el rectángulo y el rombo y han hecho esto [refiriéndose al romboide]". Para finalizar, sobre el cometa se producen tres argumentos, todos ellos de Nivel 2, "tiene dos lados largos y dos cortos" o "pero los ángulos son rectos, obtusos y agudos".

Para finalizar la sesión se realizó un repaso de todas las figuras trabajadas y sus características, construyéndolas en el geoplano (Figura 4), una de cada color, con el fin de realizar comparaciones entre ellas.

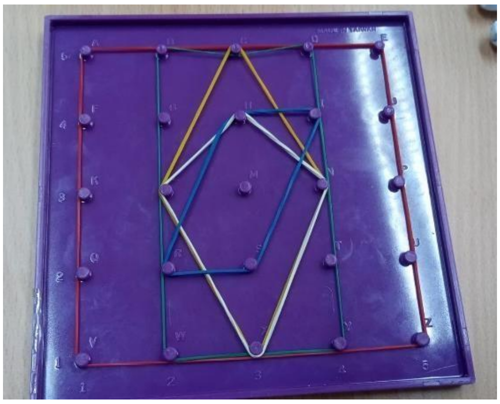


Figura 4. Cuadriláteros trabajados en la sesión 2

6.4. Sesión 3

A continuación, se detalla el transcurso de la sesión 3. La tabla 4 muestra la frecuencia de argumentos de cada nivel en relación a los distintos cuadriláteros.

	N1	N2	N3
Cuadrado	--	1	--
Rectángulo	1	4	1
Rombo	--	1	--
Romboide	--	4	--
Cometa	1	2	--
TOTAL	2	12	1

Tabla 5. Frecuencia de argumentos de cada nivel de van Hiele durante la sesión 3

La sesión 3 tuvo una duración más corta por motivos de organización del centro. Durante esta sesión se identificaron 15 argumentaciones, de las cuales, nuevamente, la mayoría se codificaron como Nivel 2 de van Hiele. En este caso, el alumno fue mucho más rápido que en las anteriores sesiones y contestó dando las características de cada figura desde un principio, por ello, para el cuadrado solo se ha contabilizó un argumento de Nivel 2, "tiene 4 lados y ángulos rectos". En el caso del rectángulo, aunque priman los comentarios de Nivel 2 tales como: "tiene dos lados iguales y otros dos lados iguales" o "eso es paralelo"; se identificó además un comentario de Nivel 1 y otro de Nivel 3 comparando los ángulos del rectángulo con los del cuadrado: "tiene los ángulos rectos, que eso es lo igual". Al igual que para el cuadrado, en el caso del rombo se contabilizó un solo argumento de Nivel 2, "tiene los mismos lados, son todos iguales. Tienen ángulos, eeee no se si era… Estos dos son agudos (señalando los ángulos agudos del rombo que ha construido) y estos dos (señalando los obtusos) son esto… Eee… ¿Obtusos?". En el caso del Romboide, el alumno realizó cuatro argumentaciones de Nivel 2 sobre este: "tiene dos ángulos agudos", "sus lados son iguales dos a dos", "sus lados son paralelos" y "tiene también dos ángulos obtusos". Por último, tras construir el cometa (Figura 5), se contabilizaron 3 argumentos, dos de Nivel 2 y uno de Nivel 1. En el nivel dos, el alumno comentó que tenía "un ángulo agudo, dos obtusos y uno recto" y que sus lados son "iguales dos a dos". Además, sobre sus lados añadió que "están juntos", que se ha codificó como de Nivel 1.

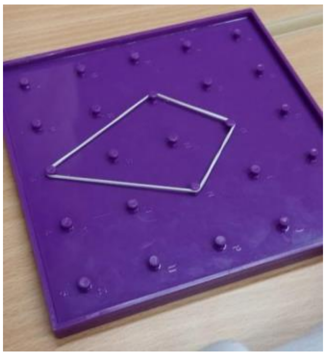


Figura 5. Cometa construido por el alumno.

6.5. Postest

A continuación (Tabla 6), se muestran los argumentos durante el postest según los niveles de van Hiele.

Preguntas	N1	N2	N3
1.1	--	1	--
1.2	--	1	--
1.3	--	1	--
2.1 y 2.2	1	--	--
2.3 y 2.4	--	1	--
TOTAL	1	4	0

Tabla 6. Frecuencia de argumentos en cada nivel de van Hiele en el postest.

En lo que al postest se refiere, el alumno contestó a la mayoría de preguntas argumentando en un Nivel 2 de van Hiele. Solo se codificó una respuesta de nivel uno en las preguntas 2.1 y 2.2, donde el alumno respondió a la pregunta "¿en que se parecen las figuras que has elegido antes?", con la palabra "cuadriláteros". Cabe destacar que, aunque la mayoría de las respuestas del alumno fueron escuetas ({¿por qué son triángulos?} “por que tienen 3 lados”, “no, esto no son lados, son curvas”), este respondió a la pregunta 1.3 (¿Por qué son cuadriláteros?), tal y como se muestra en la Figura 6, describiendo las características de las figuras que él había seleccionado.

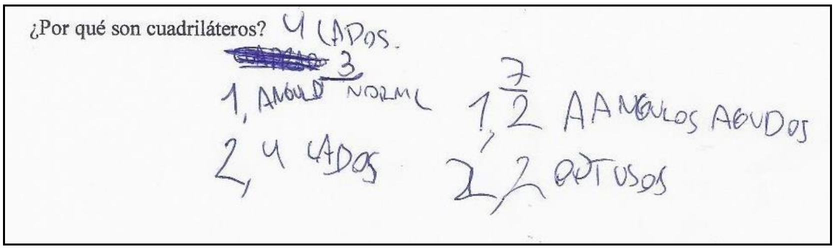


Figura 6. Respuesta del estudiante a la pregunta 1.3 en el postest.

A modo de resumen, en la Figura 7 se muestran los argumentos identificados de cada nivel de van Hiele en cada una de las sesiones.

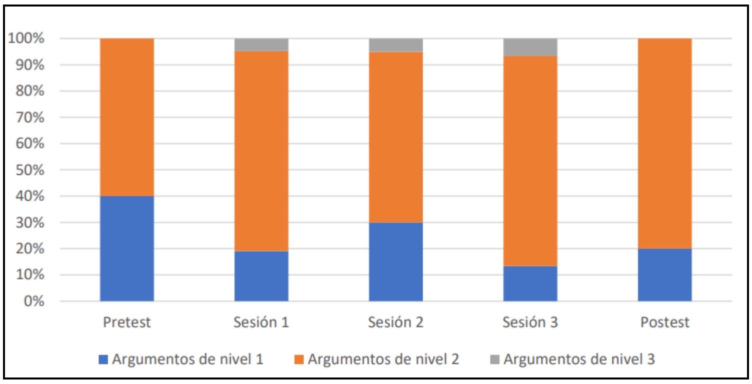


Figura 7. Porcentaje de argumentaciones según niveles de van Hiele en cada sesión.

Como se observa en la Figura 7, los argumentos de Nivel 2 han primado por encima del resto en todas las sesiones llevadas a cabo con el alumno. El número de argumentos de Nivel 1 ha variado según la sesión, observándose una disminución en el postest respecto al pretest a favor de argumentos de Nivel 2. Esto podría estar mostrando un avance hacia la concienciación de las propiedades de los distintos cuadriláteros, característica del Nivel 2. Por último, se observa cómo aparece de manera esporádica durante las sesiones de trabajo algún argumento de Nivel 3, que en los test no se identificaron.

7. Conclusiones

Este trabajo supone una aportación al campo del aprendizaje de geometría con estudiantes con NEAE (Cass et al., 2003; Liu et al., 2019). Se ha trabajado con un estudiante con NEAE para ayudarle en la adquisición de conceptos geométricos, particularmente de los cuadriláteros. En la instrucción se ha considerado el geoplano como material de apoyo, siguiendo las recomendaciones de investigaciones similares con estudiantes con NEAE (Cass et al., 2003, Liu et al., 2019, Gurganus, 2007; Satsangi y Bouck, 2015). Además, se ha tomado como marco de referencia el nivel de van Hiele para clasificar los argumentos el alumno.

Los resultados muestran como, tras tres sesiones de instrucción, el alumno mostró una mayor comprensión sobre ciertos cuadriláteros. En particular, se produjo un incremento de argumentos de Nivel 2, en detrimento de los de Nivel 1. Además, los argumentos realizados se fueron volviendo a lo largo de las sesiones más concretos y precisos. Se partía de los conocimientos previos observados en el estudiante que parecían ser escasos en cuanto a los conceptos de cuadrado y rectángulo se refiere, y casi inexistentes en cuanto al resto de cuadriláteros.

Se observa un progreso en los argumentos del estudiante sobre el cuadrado y el rectángulo. La mayoría de estos argumentos fueron clasificados desde un primer momento como de Nivel 2, e incluso, como se ha mencionado anteriormente, en una ocasión de Nivel 3, al relacionar ambos cuadriláteros. En el caso del resto de cuadriláteros, esta mejoría no fue tan evidente, y en la sesión 2 todavía se cuantificaron algunos argumentos de Nivel 1. En concreto, la instrucción facilitó la introducción de cuadriláteros no familiares para el estudiante (como el rombo, el romboide o la cometa) que se trabajaron mediante la construcción y argumentación, manifestando los dos primeros niveles sobre estos cuadriláteros y llegando en ocasiones a realizar algunas comparaciones entre ellos.

En línea con otros trabajos con alumnado con NEAE (Cass et al., 2003; Liu et al., 2019), el material manipulativo ha servido para motivar al estudiante, afianzar conocimientos previos e introducir nuevos. Concretamente, el geoplano ha facilitado la construcción e identificación de los cuadriláteros (trabajando así en un Nivel 1 de van Hiele) como la identificación de sus propiedades (Nivel 2). Esto está en concordancia con estudios previos que muestran que los materiales manipulativos generan resultados positivos en el trabajo con alumnado con NEAE pues proporciona la oportunidad de convertir conceptos abstractos en realidades tangibles (Cass et al, 2003; Gurganus, 2007; Satsangi y Bouck, 2015). Por ejemplo, Cass et al. (2003) y Satsangi y Bouck (2015) también utilizaron en su investigación el geoplano como material de trabajo con alumnado con dificultades de aprendizaje, observando una mejoría tras la instrucción, en línea con los resultados de este trabajo.

Destacamos el gran interés mostrado por el estudiante desde el comienzo de las sesiones de instrucción, expresando entusiasmado su deseo de que llegara el día en que estaban planificadas. En distintas ocasiones se observó cómo buscaba en su aula habitual gomas de diferentes colores para llevarlas a las sesiones y utilizarlas. Exteriorizó, además, su gusto por el material diciendo frases del tipo: “¿hacemos geoplano?” o “quiero usar las gomas nuevas ¿trabajamos?”, etc.

Cabe además destacar la positiva experiencia de colaboración del centro educativo con la universidad. Los docentes implicados indicaron que había sido una oportunidad poder ver de cerca otras maneras de hacer y comunicar con este alumnado, además de conocer otras metodologías de aprendizaje de matemáticas. Concretamente, valoraron muy positivamente la experiencia por las posibilidades de trasladar distintos aspectos a su práctica docente. Como destacan estudios previos con estudiantes con necesidades educativas (Polo-Blanco et al., 2022 y en prensa), responder a las preocupaciones tanto de los alumnos como de las familias y los profesionales educativos es una parte fundamental a tener en cuenta en las investigaciones aplicadas.

Como limitaciones del trabajo, destacamos las pocas sesiones de instrucción llevadas a cabo, condicionadas por la organización del centro escolar y la duración del período de prácticas de la autora. Como línea futura, nos proponemos seguir trabajando con alumnado con necesidades educativas de otras características diferentes, explorando cómo el uso del geoplano y otros materiales manipulativos les ayuda en la adquisición de conceptos geométricos.

Referencias bibliográficas

Baroody, A. (1989) *A Guide to Teaching Mathematics in the Primary Grades*. Allyn and Bacon. Boston.

Barrantes, M. (2003). Caracterización de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en Primaria y Secundaria. *Campo Abierto, 24*, 15-36.

Barrantes, M. y Zapata, M. A. (2008). Obstacles and errors in the teaching and learning of geometrical figures. *Campo Abierto, 23*, 55-71.

Brosnan, P.A. (1997) Visual mathematics: Using geoboards. Teaching *Exceptional Children, 29*(3), 18–22.

Canals, M. A. (1997). La geometría en las primeras edades escolares, *Revista Suma, 25*, 31-44.

Cass, M., Cates, D., Smith, M. y Jackson, C. (2003) Effects of manipulative instruction on solving area and perimeter problems by students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*(2), 112-120.

Crowley, M.L. (1987): The van Hiele model of the development of geometric thought, en N.C.T.M.: *Learning and íeaching geometry, K—12 (1987 Yearbook).* (N.C.T.M.: USA), pp. 1—16.

Fouz, F. y De donosti, B., (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. *Un paseo por la geometría*, Universidad del País Vasco 67-81.

Godino, J. D. y Ruiz, F. (2003). Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada.*

Gurganus, S. P. (2007). *Math instruction for students with learning problems*. Boston: Pearson/Allyn & Bacon.

Hiele, P.M. van (1957). *De problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof*, [El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría] (Tesis Doctoral). Universidad de Utretch.

Ley de Cantabria 78/2019, de 24 de mayo, de ordenación de la atención a la diversidad en los centros públicos y privados concertados que imparten enseñanzas no universitarias en la Comunidad Autónoma de Cantabria. BOC núm. 105 (2019).

Liu, M., Pedrotty, D., Kiru, E. y Nozari, M. (2019). Geometry Interventions for students with learning disabilities: A research synthesis*. Learning Disability Quarterly, 44,* 1-12.

López de da Fuente, C. (2020) *Argumentación y razonamiento geométrico: un estudio de caso de un estudiante TEA de educación primaria* (Trabajo Fin de Máster). Universidad del País Vasco.

López, M., Fernández, I. y López, M. (2014). La componente visual de la geometría en los libros de texto de secundaria. *Revista Premisa,16*, 24-35.

Luque Parra, D.J. y Luque Rojas, M.J. (2015). Alumnado con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo: aspectos psicopedagógicos en un marco inclusivo. *Perspectiva Educacional, Formación de profesores 54*, 59-73.

Polo-Blanco, I., González, M.J. Bruno, A., y González, J., (en prensa) Teaching students with mild intellectual disability to solve word problems using schema-based instruction. *Learning Disability Quarterly,* Advance online publication. https://doi.org/10.1177/07319487211061421

Polo-Blanco, I., Van Vaerenbergh, S., Bruno, A., y Gonzalez, M. J., (2022). Conceptual model-based approach to teaching multiplication and division word-problem solving to a student with autism spectrum disorder. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*. *57*(1), 31-43.

Roldán-Zafra, J., Perea, C., Polo-Blanco, I. y Campillo, P. (2022). Design of an interactive module based on the Van Hiele model: case study of the Pythagorean theorem. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 17*(1).

Sarama, J., Clements, D.H., Parmar, R.S. y Garrison, R. (2011). *Achieving fluency: Special Education and Mathematics, Reston, VA: NCTM*.

Satsangi, R., y Bouck, E.C. (2015). Using virtual manipulative instruction to teach the concepts of area and perimeter to secondary students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly,* *38*(3), 174-186. https://doi.org/10.1177%2F0731948714550101

Swanson, H. L., y Carson, C. (1996). A selective synthesis of intervention research for students with learning disabilities. *School Psychology Review*, *25*(3), 370–392.

Swanson, H. L., y Sachse-Lee, C. (2000). A meta-analysis of single-subject-design intervention research for students with LD. *Journal of Learning Disabilities*, *33*(2), 114–136. https:// doi.org/10.1037/0022-0663.100.4.87

Turégano, P. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos*, *21*, 35-48.

Vargas, G. y Gamboa, R., (2012). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, *27*(1), 74-94.

Vinner. S., y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblattfür Didaktik der Mathematik*, *83*(1), 20-25.

Vinner, S. 1991. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En: D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. pp. 65-81. Dordrecht, Holanda: Kluwer.

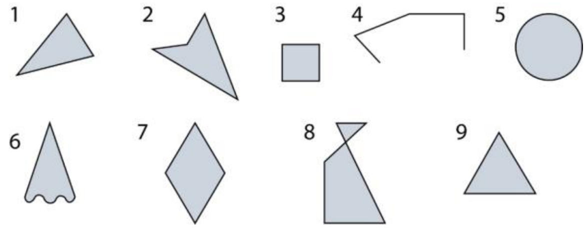
Lucía Fernández del Valle. Graduada en Magisterio en Educación Primaria por la Universidad de Cantabria, mención en Audición y Lenguaje. Lucía cuenta con amplia experiencia trabajando con estudiantes con necesidades educativas especiales. lucia.fernandezde@alumnos.unican.es

Irene Polo Blanco. Profesora contratada doctora en el área de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Cantabria. Realizó el doctorado en la Universidad de Groningen (Holanda) sobre modelos para la enseñanza de la geometría. Su línea de investigación principal es "Aprendizaje matemático en alumnado con trastorno del espectro autista". irene.polo@unican.es

Natalia Palacio Cano. Graduada en pedagogía por la UNED. Toda su trayectoria centrada en la educación especial, concretamente en los trastornos de personalidad. Desde 2008 es profesora en el Centro de educación especial de Stephane Lupasco. Es autora, junto con el equipo de Lupasco, del libro "Los cristales traslúcidos". npalacio86@gmail.com

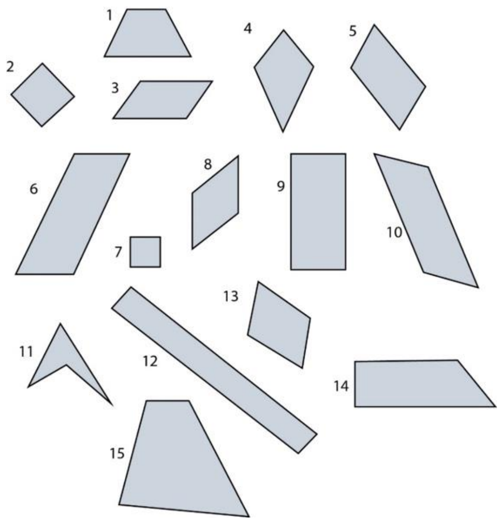
Anexo

Actividad 1 (Pretest y Postest) (López de la Fuente, 2020).



1.1. Escribe los números de las figuras que no son polígonos. ¿Por qué no son polígonos?
1.2. Escribe los números de las figuras que son triángulos. ¿Por qué son triángulos?
1.3. Escribe los números de las figuras que son cuadriláteros. ¿Por qué son cuadriláteros?

Actividad 2 (Pretest y Postest) (López de la Fuente, 2020),



2.1. Elige una figura al azar ¿Qué otras figuras se parecen a la figura que has elegido?
2.2. ¿En qué se parecen las figuras que has elegido antes?
2.3. ¿Cómo llamarías a todas las figuras que has agrupado antes?
2.4. Dibuja una nueva figura que se parezca a las figuras que has elegido antes. ¿En qué se parece la figura que has dibujado con las que has elegido antes?