UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 60. Diciembre 2020
Páginas 038-056

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

# Emergencia de medios semióticos en estudiantes de grado séptimo al desarrollar tareas de generalización de patrones

**Jeisson David Gustin Ortega, Teresa Pontón Ladino**

**Fecha de recepción: 09/12/2019**
**Fecha de aceptación: 01/12/2020**

| | |
|---|---|
| **Resumen** | Se presentan algunos resultados de un trabajo de indagación donde se identifican los medios semióticos a los que recurren estudiantes de grado séptimo (12 y 13 años) de la educación cuando se enfrentan a actividades de generalización de patrones. En el análisis de la actividad matemática se logró identificar diferentes recursos semióticos que permitieron a los estudiantes tomar conciencia de características comunes en secuencias numéricas y figurales con apoyo tabular, generando nodos semióticos que evolucionan en otros sistemas semióticos a través de procesos de objetivación que les permiten generalizar algebraicamente.<br><br>**Palabras clave**: Objetivación, medios semióticos, generalización. |
| **Abstract** | Some results of a research work are presented where the semiotic media to which seventh grade students (12 and 13 years of age) turn to when faced with generalization of patterns are identified. In the analysis of the mathematical activity it was possible to identify different semiotic resources that allowed students to become aware of common characteristics in numerical and figurative sequences with tabular support, generating semiotic nodes that evolve in other semiotic systems through objectification processes that allow them to generalize algebraically.<br><br>**Key words**: Objectivation, semiotic media, generalization |
| **Resumo** | Neste artigo se apresentam alguns resultados de um trabalho de pesquisa no qual se identificam os meios semióticos que recrrem os alunos da sétima série (12 e 13 anos) do fundamental quando enfrentam as tarefas de generalização de padrões. Na análise da tarefa matemática foi possível identificar diferentes recursos semióticos que permitiram aos alunos tomar conciência de características comuns em sequências numéricas e figurais com apoio tabular, gerando nós semióticos que evoluem em outros sistemas semióticos por meio de processos de objetivação que lhes permitam generalizar algébricamente<br><br>**Palavras-chave:** Objetivação, meios semióticos, generalização. |

## 1. Contextualización del problema de indagación

Es común que en muchas instituciones educativas colombianas el desarrollo del pensamiento algebraico se inicie intencionalmente, desde la enseñanza formal en la escolaridad, a partir de grado octavo. Además, en estas prácticas escolares, se privilegian los tratamientos que los estudiantes son capaces de realizar sobre expresiones simbólicas, desconociendo otras formas en las que este pensamiento puede manifestarse, hasta en edades tempranas, donde se tienen en cuenta aspectos corporales (como gestos, signos, palabras, ritmos) y demás recursos o medios semióticos que contribuyen en la toma de conciencia de los objetos algebraicos.

En este artículo se presentan algunos resultados obtenidos del trabajo de indagación de maestría denominado *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de grado séptimo al abordar tareas de generalización de patrones*, desarrollado en el marco de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas Y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia. Este trabajo se centró en analizar la emergencia de diversos recursos o medios semióticos en estudiantes de grado séptimo y los procesos de objetivación que se desarrollan cuando se abordan tareas de generalización de patrones. Estos medios semióticos y procesos de objetivación son elementos que son consustanciales con el desarrollo del pensamiento algebraico, los cuales permiten objetivar o tomar conciencia progresiva de los objetos matemáticos relacionados con los patrones y regularidades que identifican los estudiantes en actividades de generalización.

Teniendo en cuenta lo anterior, y tomando como marco de referencia la Teoría de la Objetivación (Radford, 2003, 2005, 2006, 2008a, 2008b, 2010, 2012, 2013, Vergel, 2014), en este artículo se presentan algunas evidencias sobre la emergencia de diferentes aspectos corporales o medios semióticos de objetivación que contribuyen al estudiante en la identificación de regularidades y patrones presentes en secuencias numéricas y figurales, mostrando distintos niveles de generalización algebraica (factual, contextual y simbólica).

## 2. Referentes teóricos de la indagación

### 2.1. Sobre los medios semióticos

Desde la teoría de la objetivación (Radford, 2003, 2005, 2006, 2008a, 2008b, 2010, 2012, 2013, Vergel, 2014); los artefactos y signos son vistos más allá de su concepción instrumental como representación del conocimiento, debido a que sobre ellos se deposita la historia cognitiva de generaciones predecesoras, radicando una responsabilidad histórica y cultural que los hace consustanciales con la actividad, sobre la que se incluyen medios físicos y sensuales de objetivación diferentes a la escritura, dando así una forma corpórea y tangible al conocimiento (Radford, 2003).

La objetivación se asume, dentro de esta perspectiva, como ese proceso social de toma de conciencia progresiva de algo frente al sujeto, una figura, una forma, algo cuya generalidad se nota gradualmente, al mismo tiempo que se dota de sentido (Radford, 2006). De aquí, que la objetivación de los objetos matemáticos aparece vinculada a los esfuerzos mediados y reflexivos de los individuos que apuntan al logro de su actividad. Para ello, generalmente los individuos recurren a gran cantidad de medios, como la manipulación de objetos, trazo de dibujos, empleo de gestos, escritura de marcas, uso de categorías de clasificación lingüísticas, o uso de analogías, metáforas, metonimias, y así sucesivamente.

En otras palabras, para lograr la objetivación del saber los individuos confían en el uso y la combinación de diversas herramientas, señales y dispositivos lingüísticos a través del cual se organizan sus acciones a través del espacio y el tiempo. De acuerdo con esto, Radford (2003, p. 5) expresa:

> Estos objetos, herramientas, dispositivos lingüísticos y signos que los individuos intencionalmente utilizan en los procesos de creación de significados sociales para lograr una forma estable de la conciencia, a poner de manifiesto sus intenciones, y para llevar a cabo sus acciones para alcanzar el objetivo de sus actividades, se llaman medios *semióticos de objetivación* (Radford, 2003, p. 5)

Estos medios semióticos de objetivación (como los gestos, el lenguaje, los símbolos) se convierten en elementos constituyentes del acto cognitivo que posiciona el objeto conceptual no dentro de la cabeza del sujeto sino en el plano social (Radford, 2006). A partir de estos instrumentos culturales, se modifica radicalmente el proceso de aprendizaje, permitiendo a los estudiantes organizar y regular sus propios procesos cognitivos. En este sentido, Vergel (2014, p. 10) expresa que "los instrumentos o recursos con los cuales se realiza la actividad matemática condicionan las formas como los estudiantes se apropian, construyen o resignifican dicha actividad y desde luego las maneras de pensar".

Es importante resaltar que el significado matemático en la objetivación resulta a partir de una mediación multisemiótica, es decir, a partir de la interacción dialéctica de diversos sistemas semióticos. Por lo tanto, no se puede pensar un medio semiótico analizado aisladamente de otros medios semióticos, debido a que esto limitaría el desarrollo de procesos de objetivación.

Esta interacción de los diferentes sistemas semióticos de objetivación se conoce como *nodo semiótico,* el cual se considera como "una pieza de la actividad semiótica de los estudiantes donde la acción y diversos signos (por ejemplo, el gesto, la palabra, la fórmula) trabajan juntos para lograr la objetivación del saber" (Radford, 2005, p. 2). Desde esta idea, las producciones escritas de los estudiantes dejan de considerarse como las únicas formas que dan cuenta de la toma de conciencia que hacen de los objetos matemáticos, o de los resultados de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En consecuencia, deben considerarse también aquellos elementos que acompañan este tipo de producciones, como los señalamientos, acentuaciones verbales, símbolos y demás recursos utilizados por los estudiantes al enfrentarse a tareas matemáticas.

## 2.2. Sobre la generalización de patrones

Desde la teoría de la objetivación, las generalizaciones se basan en acciones realizadas sobre regularidades presentadas sobre números o representaciones figurales a partir de los medios semióticos de objetivación, y dentro de ella, las actividades de patrones constituyen una ruta importante para conducir a los estudiantes al álgebra (Moreno, 2014). Además, la generalización algebraica de patrones se define como “observar algo que va más allá de lo que realmente se ve” (Radford, 2008b), ontogenéticamente hablando, este acto de percibir se desarrolla a través de un proceso durante el cual el objeto por ser visto emerge progresivamente, además posibilita a los estudiantes acercarse a situaciones de variación que se erigen como importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico (Vergel, 2014). Esto


sugiere tener en cuenta los procesos que dan lugar a la emergencia del pensamiento algebraico.

**Figura 1. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales presentada en Radford (2013, p. 81)**

La generalización algebraica de un modelo, según Vergel (2014), se basa en la identificación de una comunalidad local C por parte del estudiante, es decir, identificar ciertos aspectos que son regulares o comunes entre los diferentes términos de una secuencia, que luego se generaliza a todos los demás términos y que sirve como una orden para construir expresiones de los elementos de la secuencia que continúan fuera del campo perceptivo.

La identificación de la característica común de los términos de la secuencia requiere hacer una escogencia entre determinaciones sensibles potenciales, que corresponden a similitudes y diferencias entre los términos de la secuencia, después esa característica es generalizada a todos los términos de la secuencia, en términos de Radford (2013, p. 6) “La generalización de la característica común corresponde a lo que Peirce llama una abducción, esto es, algo que es solamente plausible”.

Dependiendo del uso de la abducción se pueden alcanzar diferentes tipos de generalización, por ejemplo, si se usa la abducción para pasar de un término a otro la generalización es aritmética, en este tipo de abducción los estudiantes manifiestan que hay que añadir o quitar elementos en una secuencia, en este caso no hay una deducción de una expresión directa que permita calcular el término de una secuencia. Otro ejemplo se evidencia en procedimientos de ensayo y error, donde el estudiante propone una fórmula que parece plausible, sin embargo, esta no es deducida, sino que se aplica solo para un número finito de pruebas. En este caso, este tipo de generalización no es todavía algebraica. En relación con esto, Radford establece que:

> Para que la generalización sea algebraica se requiere que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera *analítica*. Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término. Como vemos, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, C, extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. C pasa de entidad plausible a principio asumido, esto es hipótesis, H (Radford, 2013, p. 7).

Desde estas ideas, el pensamiento algebraico, según Vergel (2014), se asume como un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente, el cual se caracteriza por tres elementos: el sentido de la *indeterminancia* de los objetos, que hace referencia a lo indeterminado (variables, incógnitas y parámetros); la *analiticidad*, que distingue el carácter operatorio de los objetos; y la *designación simbólica* o expresión semiótica, que se refiere a la manera de nombrar o referir los objetos (Radford, 2010).

En este sentido, los medios semióticos de objetivación estratifican el objeto matemático en niveles de generalidad (factual, contextual y simbólica), que pueden considerarse ejemplos de formas del pensamiento algebraico, lo que se constituye en un intento por comprender las actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de generalización de patrones (Vergel, 2014).

Entre estos niveles de generalidad se encuentran la generalización *factual*, es aquella en la cual hay evidencia de una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional, esquema que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos, gestos y actividad perceptual como medios semióticos de objetivación; la generalización *contextual***,** este tipo de generalización se realiza a través de la enunciación de frases clave que explicitan las regularidades encontradas en una secuencia; y la generalización *simbólica,* en este nivel de generalización las frases clave y otros recursos semióticos son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra.

## 3. Diseño y análisis de las tareas

Las tareas que se diseñaron y que se presentan en este artículo, se encuentran orientadas hacia la identificación de medios semióticos a los que recurren los estudiantes de grado séptimo cuando se enfrentan a tareas de generalización de patrones. Así como también, evidenciar los espacios de interacción social y negociación de significados entre los pequeños grupos de trabajo que se forman en el aula. Dichas tareas fueron el resultado de la adaptación de algunas tareas sobre secuencias figurales y numéricas con apoyo tabular desarrolladas en trabajos anteriores (Radford, 2008a, Moreno, 2014, Lasprilla, 2014), vinculadas a la teoría de la objetivación, a partir de las cuales se garantiza la emergencia de los medios semióticos.

A partir del diseño final de las tareas se realizó la aplicación de la secuencia de tareas en el aula y el respectivo análisis de los diferentes recursos que movilizaron los estudiantes en su proceso de producción de significados, para la toma de conciencia de los objetos matemáticos. Es decir, alrededor de las tareas que se presentaron y aplicaron con los estudiantes de grado séptimo se identificaron los medios semióticos que emergen en la actividad matemática cuando se enfrentan a tareas de generalización de patrones.

Durante la implementación se recogieron los datos a través de: registros visuales como videos y audios, que permitieron evidenciar medios semióticos utilizados por los estudiantes en el desarrollo de la actividad matemática como gestos, señalamientos, entre otros; hojas de trabajo que dejaron evidenciar en las producciones de los estudiantes signos, señales y diferentes operaciones que dieron cuenta de procesos de objetivación; notas de campo que correspondieron a las observaciones del autor de este trabajo, en este caso se tienen en cuenta notas de voz, apuntes y registros en el tablero.

Para el desarrollo de este trabajo se realizó la selección de un grupo de 30 estudiantes de grado séptimo, cuyas edades oscilan entre los 11 y 12 años. Dentro de las estrategias del docente se tuvo en cuenta la agrupación flexible, la cual organiza a los estudiantes en equipos de trabajo con base a su disposición, habilidades naturales y talentos, de modo que pueda lograrse un aprendizaje exitoso con otros estudiantes. Estos aspectos contribuyeron en gran medida en el desarrollo de este trabajo, debido a que se crearon pequeños grupos que pusieron en evidencia procesos que dieron cuenta de la objetivación del conocimiento a partir de interacciones sociales y culturales con el otro.

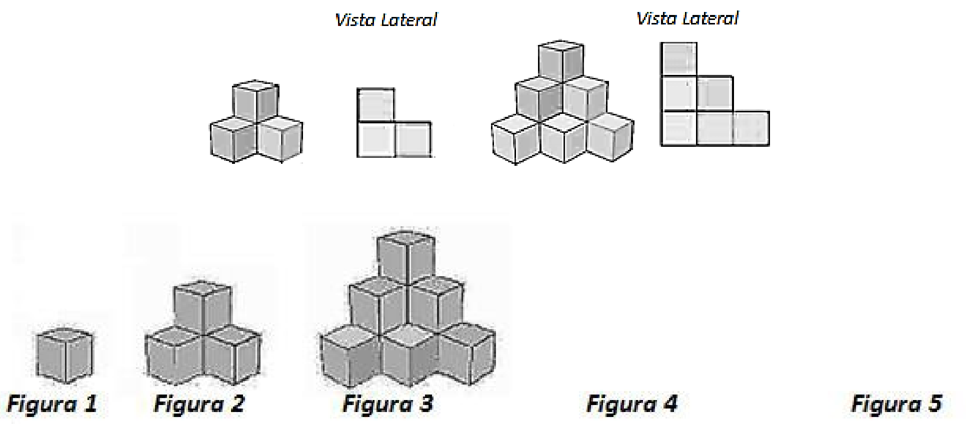
Para este caso se presentan solo las producciones de algunos estudiantes de grado séptimo en el desarrollo de dos de las tareas que se aplicaron y las cuales fueron registradas en video. El análisis de los datos seleccionados se hace desde una concepción multimodal del pensamiento humano (Miranda, Radford & Guzmán, 2007) en el cual se tiene en cuenta la relación de los diferentes sistemas semióticos movilizados durante la actividad matemática (el sistema semiótico del lenguaje escrito, el lenguaje hablado, el de los gestos, el de las acciones, etc.), es decir, ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gesteado por los estudiantes se analizó de manera aislada (Miranda, et al, 2007).

## 4. Presentación de las tareas, producciones de los estudiantes y análisis

A continuación, se presentan dos de las tareas propuestas a los estudiantes de grado séptimo y el desarrollo de la actividad matemática producida por ellos.

### 4.1. Tarea 1: secuencia figural con apoyo tabular

Observa la siguiente figura donde se presenta una torre formada por cubos y su vista lateral, a partir de ella se presenta una secuencia figural donde cada vez se incrementa el número de cubos de la base de la torre, hasta llegar a un único cubo en la parte superior.




De acuerdo con la información anterior responde las siguientes preguntas:
***1.*** ¿Cuántos cubos forman la ***Figura 2*** y la ***Figura 3***?
***2.*** Dibuje las ***Figuras 4 y 5*** de la secuencia y determine la cantidad de cubos que tiene cada una.
***3.*** Determina el número de cubos que hay en la ***Figura 12***, pero sin realizar el dibujo
***4.*** ¿Cómo hiciste para saber la cantidad de cubos en los dos casos anteriores?
***5.*** ¿Qué estrategia utilizarías para encontrar la cantidad de cubos de la ***Figura 100***?

En el desarrollo de esta primera tarea los estudiantes no siempre llevaron la cuenta de la cantidad total de cubos en cada figura, por lo cual se hizo necesario la intervención por parte del profesor investigador para ayudar a ver la totalidad de elementos de la figura, realizando acompañamientos en el momento de contar los cubos ocultos de cada torre y, de esta manera, se lograra encontrar la regularidad.

Lo anterior dio lugar, en la investigación, a que se presentara la interlocución entre los estudiantes participantes y el profesor investigador, donde se lograron identificar diferentes medios semióticos al interactuar al mismo tiempo y en el mismo espacio. Esto permitió la generación de un nodo semiótico que posteriormente dejó ver procesos de objetivación que se desarrollaron en la actividad matemática de los estudiantes, como se presenta a continuación en la transcripción de las interlocuciones de algunos segmentos de video:

**L1. Profesor:** ¿Cuántos cubos contaron en cada figura?
**L2. Andrés:** Se van aumentando de a 4
**L3. Profesor:** ¿Seguro que de a 4?
**L4. Andrés:** Sí porque aquí en esta figura (señala con un deíctico la figura 2) hay 4 cubos porque se le aumenta 1 (golpea la figura con su dedo) *que sostiene* al de arriba, aquí hay 9 (señala con un deíctico la figura 3) porque 5 + 4, nueve y aquí 13 (señalando con un deíctico el espacio en blanco de la figura 4).

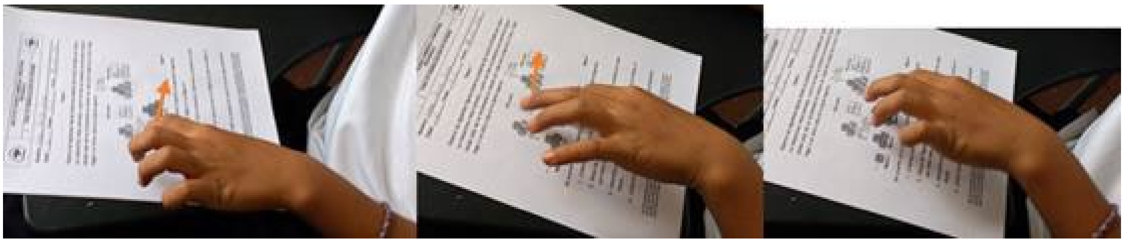


Figura 2. Secuencia de gestos y señalamientos realizados por Andrés en L4. En Gustin (2017).

**L5. Profesor**: ¿9 seguro?... ¿Cuántos ven aquí? (señala la figura 3).
**L6. Saray**: 6.
**L7. Andrés:** 6 pero con los… (Mueve su dedo en círculos hacia adelante) *que sostienen* 3.

Figura 3. Secuencia de gestos realizados por Andrés en L7. En Gustin (2017).

**L8. Profesor:** ¿Vieron la vista lateral?
**L9. Andrés:** Ésta, (señala con el lápiz la vista auxiliar de la secuencia).
**L10. Isabela:** Esto es lo que no se puede ver, estos 3, (señala con el lápiz la vista lateral anexada a la secuencia).
**L11. Saray:** Los cubos *que sostienen…que sostienen* de atrás.
**L12. Isabela:** Sí mire profe aquí *hay uno que sostiene a éste* (señala un cubo de la figura y le dibuja otro cubo encima), *éste sostiene a este que sostiene a éste* (señala un cubo de otro extremo y nuevamente dibuja un cubo encima) y aquí como no alcanza a llegar al primero (señala el cubo superior de la torre) lo sostienen 2 (dibuja dos cubos al lado del cubo superior).

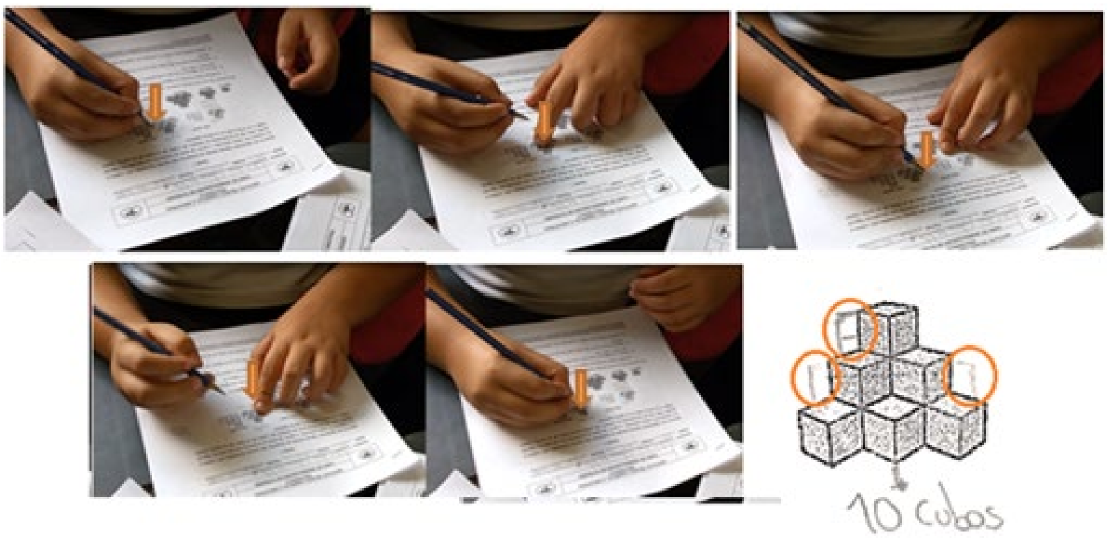


**Figura 4. Secuencia de gestos realizados por Isabela en $L_{12}$.** En **Gustin (2017).**


**Figura 5. Análisis prosódico en el programa Praat de la elocución realizada por Isabela en $L_{12}$.** En **Gustin (2017).**

**$L_{13}$. Profesor**: Entonces cuántos cubos aumentaste en total.
**$L_{14}$. Isabela:** ¿3? (encoge los hombros).
**$L_{15}$. Profesor:** ¿Seguro 3?
**$L_{16}$. Isabela:** Ah no 4 (muestra 4 dedos de su mano), sí porque 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...10, (cuenta y realiza punteos con el lápiz sobre cada uno de los cubos de la figura 4, empieza por los cubos visibles y deja al final los ocultos) ah 10 (se ríe) estamos contando mal.

Este primer acercamiento de los estudiantes con la secuencia figural evidencia de entrada diferentes recursos (como gestos, señalamientos deícticos y con el lápiz) utilizados por ellos para enfrentarse a la actividad matemática. Por ejemplo en el caso de Isabela (**$L_{14}$**) cuando encoge los hombros, de Andrés (**$L_4$**) cuando golpea una figura específica o los diferentes señalamientos que realizan cada uno de los estudiantes con los dedos o con el lápiz.

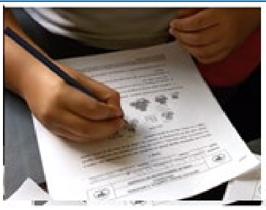
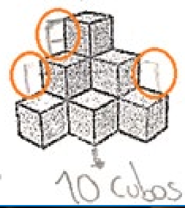
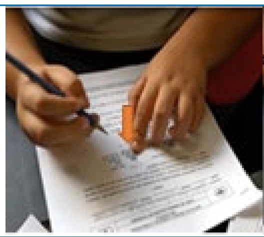
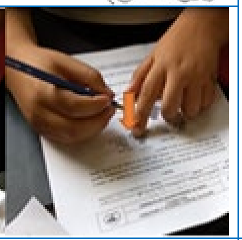
Además, se deja ver la importancia de la mediación del profesor para lograr que los estudiantes visualicen todos los elementos de las figuras y de esta manera puedan identificar la regularidad o el patrón que se forma en la secuencia. Para el caso de los estudiantes Andrés e Isabela, ellos recurren a gestos indexicales como señalamientos con los dedos, deícticos espaciales como "aquí" o "estos" y señalamientos con el lápiz que les sirve para evidenciar la cantidad de cubos que logran ver en cada una de las figuras.

En $L_4$, Andrés afirma que en la figura 2, se anexa un cubo que sostiene al cubo de la parte superior, esto revela que ha identificado elementos ocultos en la figura, lo que sugiere una toma de conciencia en relación con la estructura espacial de la secuencia y de esta manera proceder a la estructura numérica que indica la cantidad total de cubos de la figura. Es aquí, como lo afirma Radford (2013, p. 8), "donde la estructura espacial es proveedora de índices perceptivos generalizables".

De la misma manera Andrés enuncia la cantidad de cubos identificados en las figuras 3 y 4, en esta última, a pesar de no haber dibujado la figura correspondiente se le asigna un valor numérico siguiendo la regularidad identificada en $L_2$, la cual a pesar de no ser la esperada da indicios de haber encontrado una característica común, es decir, una relación entre las figuras de las secuencia de acuerdo con la cantidad de cubos identificados en las primeras figuras, en este caso sumando cuatro cubos cada vez que pasa de una figura a otra. Esto sugiere que Andrés ha logrado identificar una comunalidad, sin embargo, no alcanza un nivel de abducción algebraica (Radford, 2013), ya que no logra generalizar esa comunalidad a todos los términos de la secuencia.

Finalmente, es Isabela ($L_{12}$) quien se encarga de identificar todos los elementos ocultos de la figura, haciendo alusión a los cubos ocultos que *"sostienen"* a los cubos visibles. En su intervención, Isabela recurre a varios recursos que le hacen tomar conciencia de todos los elementos de la figura 3, como dibujos auxiliares, señalamientos, deícticos espaciales y el ritmo donde se efectúan movimientos que acompañan el énfasis del habla (Ver $L_{12}$ y *Figuras 4 y 5*).

Es en la intervención de Isabela donde se evidencia la coordinación de medios semióticos que dan cuenta de su actividad perceptual, motivada por la labor social que se desarrolla durante la labor matemática, esto lleva más adelante ($L_{16}$) a tomar conciencia de la cantidad total de cubos de la figura 3 y del error en el conteo de los elementos ocultos. A continuación, se presenta una rejilla donde se analiza la coordinación de los diferentes medios semióticos a los que recurre Isabela en $L_{12}$ y en $L_{16}$, y a partir de los cuales se genera un nodo semiótico:

| **Medios semióticos** | | **Evidencia** | **Descripción** |
|---|---|---|---|
| Gestos ($L_{12}$) | Dibujos auxiliares |    | Realiza dibujos auxiliares para hacer referencia a los cubos ocultos de la figura de abajo hacia arriba y posteriormente realiza señalamientos indicando los cubos a los cuales sostienen. |
| | Deícticos espaciales Señalamientos |   | |
| Ritmo ($L_{12}$) | | Se enfatiza en la palabra *sostiene*: *"hay uno que sostiene a éste, éste sostiene a éste que sostiene a éste y aquí como no alcanza a llegar al primero lo sostienen 2".* | Nombra elementos de la figura acompañados de señalamientos en contextos a partir de deícticos espaciales *(éste)* y mantiene un tono de voz similar durante su intervención cada vez que hace referencia a la cantidad de cubos. |

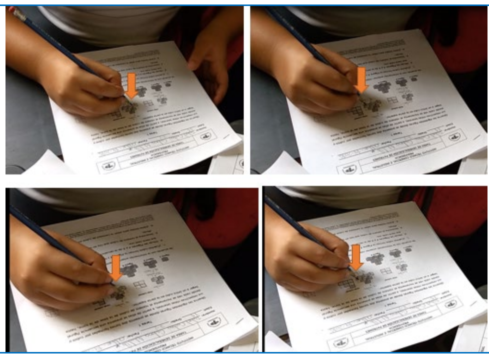
| | | |
|---|---|---|
| Señalamientos con el lápiz ($L_{16}$) |  | Cuenta uno por uno los cubos de la figura 4 realizando punteos con el lápiz, empieza por los cubos visibles de abajo hacia arriba y deja al final los ocultos. |
| Ritmo ($L_{16}$) | Si porque 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...10 | Enumera uno por uno los cubos siguiendo un tono de voz similar en su intervención |

**Tabla 1. Rejilla de análisis, coordinación de medios semióticos en $L_{12}$ y $L_{16}$.**

La coordinación de medios semióticos identificados en la Tabla 1 caracteriza la actividad perceptual y reflexiva de Isabela constituyendo un *nodo semiótico*, esta actividad semiótica materializada en una forma corpórea a través de los señalamientos con el dedo, punteos con el lápiz y la entonación de las palabras de manera rítmica al identificar uno a uno los cubos de la figura, Moreno (2014) la denomina *conteo de lo oculto.* Es a través de este nodo semiótico que Isabela y su grupo de trabajo, se centran en realizar sumas entre la cantidad de cubos visibles y ocultos de cada figura y que se evidencia en la expresión de *sostenencia* en $L_4$, $L_7$, $L_{11}$ y $L_{12}$.

Como se puede constatar en $L_{12}$ y $L_{16}$, las interlocuciones manifestadas por Isabela vienen acompañadas de recursos como dibujos auxiliares, señalamientos, deícticos espaciales (que indican los cubos visibles y ocultos de cada figura) y el *ritmo,* el cual emerge como un medio semiótico de objetivación que evidencia una monotonía en las acciones de Isabela al referirse a la *sostenencia* de los cubos ocultos en $L_{12}$ (ver *Figura 5*) y al conteo de cubos en $L_{16}$. El recurso del *ritmo* hace referencia a los movimientos que acompañan el énfasis del habla de Isabela y es considerado por Radford (2010c, p. 50) “como un medio semiótico de objetivación que crea la expectativa de un próximo evento, crucial para hacer aparente el sentimiento de un orden que va más allá de figuras particulares”.

En $L_{16}$ se evidencia también que Isabela acude a punteos con el lápiz para llevar la cuenta de los elementos de la figura, al involucrar este recurso se hace necesario analizar su rol cognitivo (Radford, 2012), debido a que es el lápiz quien se convierte en el artefacto mediador de la actividad que en ese instante se desarrolla, transformándose en una extensión de Isabela como una ayuda que le permite llevar a cabo las acciones para identificar los elementos ocultos de la figura, ya que se presentan diferentes limitaciones sensoriales que no le permiten ver en primera instancia. De esta manera, el punteo realizado por Isabela con el lápiz le permite referenciar los cubos que ya fueron contados e identificar los que no, evidenciando un orden que va desde la base de la figura hasta la parte superior de ella.

El nodo semiótico *conteo de lo oculto* se convierte entonces en una pieza de la actividad semiótica de los estudiantes donde los diferentes medios semióticos (gestos, señalamientos con el lápiz, deícticos, el ritmo) trabajan juntos para lograr la objetivación del saber (Radford, 2005).

Es por la interacción de los anteriores medios semióticos (Tabla 1), y expresiones como "*se van aumentando de a 4*" en $L_2$, donde se logran identificar procesos de generalización de tipo aritmético, en el que la abducción no alcanza todavía un carácter analítico por parte de Isabela y su grupo de trabajo, en la medida en que se evidencian generalizaciones de acciones en forma de un esquema operacional que permanece ligado al nivel concreto de uso de dibujos auxiliares, señalamientos con el dedo, deícticos espaciales, gestos y actividad perceptual como medios semióticos de objetivación (Vergel, 2014), que les permiten determinar la cantidad de cubos únicamente de una figura a otra . En este sentido, lo indeterminado en este estrato de generalización queda todavía sin nombrar.

## 4.2. Tarea 2: secuencia numérica con apoyo tabular

Observa la siguiente secuencia numérica, donde el primer término corresponde al número 5, el segundo al número 9, el tercer término al número 13 y el cuarto término al número 17.

| 5 | 9 | 13 | 17 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Término 1** | **Término 2** | **Término 3** | **Término 4** | **Término 5** | **Término 6** |

1. ¿Cuáles son los números que ocupan los **Términos 5 y 6** de la secuencia?
2. ¿Cuál es el número que ocupa el **Término 10**?
3. ¿Cómo harías para encontrar los números correspondientes a los **Términos 26 y 98**?
4. Escribe un mensaje a un estudiante de otra clase, con todos los detalles, indicando la manera de encontrar los números correspondientes a los **Términos 5, 6, 10, 26 y 98**.
5. Manuel afirma que el número correspondiente al **Término 15** es el número 61, ¿es correcta la afirmación de Manuel? Explica por qué si o por qué no.
6. Escribe una expresión (fórmula) que permita calcular el número correspondiente a cada **Término** de manera directa.

En la primera interlocución que se presenta a continuación el profesor acompaña a un grupo de trabajo conformado por Camila, Luisa y Daniela, donde las estudiantes hacen alusión al procedimiento utilizado para determinar el valor numérico correspondiente al término 26, a partir de lo identificado en los términos anteriores, con el cual logran identificar la regularidad de la secuencia y posteriormente la deducción de la fórmula.

**$L_1$. Profesor**: ¿Encontraron la regularidad?
**$L_2$. Camila:** Profe, acá (señala la secuencia con el dedo y realiza un deslizamiento sobre ella) se van aumentando de cuatro en cuatro.
**$L_3$. Profesor:** ¿Cómo lo harían ustedes aquí en este caso?
**$L_4$. Camila:** Aquí en este caso sería (voltea una hoja de cuaderno y señala operación 26 x 4 con el lápiz) multiplicar las veces que cambia… la secuencia, pues que es de cuatro en cuatro (señala con el lápiz el número 4 en la operación), por veintiséis (dibuja una flecha con el lápiz desde el 4 hacia el número 26) y el

resultado sería 104 (desliza el lápiz hacia el resultado de la operación), pero 104 no sería el resultado en la secuencia, entonces habría que agregarle uno.

Figura 6. Señalamientos con el lápiz realizados por Camila en $L_4$. En Gustin (2017).

**$L_5$. Profesor:** Entonces, ¿cómo quedaría la expresión para ésa? (señala la operación 26 x 4), ¿cómo quedaría en una fórmula?
**$L_6$. Luisa:** Ah…el número del término sería 26 (le hace un señalamiento con el dedo a Daniela quien empieza a escribir sobre una hoja)
**$L_7$. Daniela:** Veintiséis (escribe la operación 26 x 4 y enuncia al tiempo) por…
**$L_8$. Luisa:** Entre paréntesis, escríbelo entre paréntesis (señala con el dedo la operación que realiza Daniela)
**$L_9$. Daniela:** Cuatro más uno (escribe la operación 26 x 4 (+1))
**$L_{10}$. Profesor:** Listo, ¿el 26 que representa?
**$L_{11}$. Luisa:** El número del término (levanta la hoja y señala uno de los términos de la secuencia).
**$L_{12}$. Profesor:** Bueno, entonces ¿cuál sería el número para el término 26?
**$L_{13}$. Daniela:** 105
**$L_{14}$. Profesor:** Listo, ¿y para el término 98 cómo lo harían?
**$L_{15}$. Camila:** Noventa y ocho por cuatro más uno (toma la hoja y escribe la expresión 98 x 4 (+1)), eh... (Voltea la hoja y escribe la operación 98 x 4 y la resuelve) trescientos noventa y dos, pero eso no sería todo entonces habría que sumarle uno para poder que dé trescientos noventa y tres (escribe +1 = 393 al lado del resultado de la operación).
**$L_{16}$. Profesor:** Ok, ¿y si nosotros quisiéramos hacerlo para cualquier término cómo quedaría la expresión?
**$L_{17}$. Luisa:** Sería el número del término por cuatro más uno y da el resultado.
**$L_{18}$. Camila:** Entonces sería $\boldsymbol{n}$ por $\boldsymbol{a}$ (escribe $\boldsymbol{n.a}$)
**$L_{19}$. Luisa:** No, por cuatro.
**$L_{20}$. Daniela:** Porque es el número de veces que se aumenta.
**$L_{21}$. Camila:** Ah sí, (tacha la primera expresión y vuelve a empezar en la parte inferior de la primera expresión) $\boldsymbol{n}$ por cuatro, abre paréntesis más uno (escribe la expresión $\boldsymbol{n.4\ (+1)}$).
**$L_{22}$. Profesor:** A ver explícame ¿cómo así?
**$L_{23}$. Camila:** Acá se colocaría el número pues depende del término que sea (señala con el lápiz la variable n de la expresión) o de otra secuencia, pero como aquí la secuencia es cuatro (señala con el lápiz el número 4 de la expresión), por la secuencia y el número del término, pero siempre se le aumentaría el uno para que dé el resultado (señala el número +1 de la expresión).

**L$_{24}$. Profesor:** ¿Están seguras que este +1 va dentro del paréntesis? (señala el término (+1) de la expresión).
**L$_{25}$. Camila:** No (borra los paréntesis de la expresión y queda $\boldsymbol{n} \,.\, \mathbf{4} + \mathbf{1}$)
**L$_{26}$. Daniela:** Sí.
**L$_{27}$. Luisa:** Yo digo que no.
**L$_{28}$. Profesor:** ¿Ahí le cambiará en algo? (señala con el dedo la nueva expresión), ¿si yo quisiera el valor del término 100? Ensáyenlo a ver.
**L$_{29}$. Camila:** Cien por cuatro más uno cuatrocientos uno (escribe la operación en la hoja), pero no cambia, dejemos esta mejor.

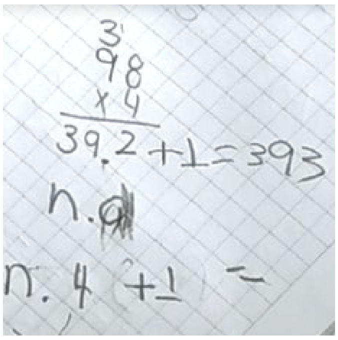



**Figura 7. Deducción de la fórmula de la secuencia propuesta en la Tarea 2 por parte de Camila, Luisa y Daniela.**

Como puede apreciarse en la interlocución anterior, en L$_4$, Camila aplica la regularidad identificada en los primeros términos de la secuencia con el término 26, indicando que "*se debe multiplicar las veces con que cambia la secuencia, pues es de cuatro en cuatro por veintiséis"*, al mismo tiempo que dibuja una flecha como recurso auxiliar que indica el producto entre 4 y 26 (ver *Figura 6*). Posteriormente, Camila hace referencia al resultado de la operación (4 x 26 = 104) y enfatiza en que dicho resultado no corresponde a las características de los valores de los términos de la secuencia, que son impares, por lo cual debe sumarse uno al resultado para adquirir la característica impar.

Dentro de la intervención de Camila, se puede apreciar que su actividad perceptual es acompañada de otros recursos medios semióticos como señalamientos con el lápiz, con los cuales sigue el proceso de la operación, y de inscripciones sobre la misma operación como el dibujo de una flecha (ver *Figura 6*). La articulación sincrónica de estos medios semióticos de objetivación deja ver elementos factuales de generalización, donde aparece un esquema operacional que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, y donde lo general o indeterminado queda todavía sin nombrar (Vergel, 2014).

En L$_5$, el profesor trata de orientar a Camila y sus compañeras en relación a plantear una expresión con la regularidad identificada, a lo cual Luisa y Daniela responden tratando de plantear la operación propuesta por Camila de manera horizontal como aparece a continuación 26 x 4 (+1). En L$_{10}$, nuevamente el profesor interviene planteando una pregunta con el objetivo de que la indeterminancia aparezca y se haga parte del discurso: *¿el 26 qué representa?*, ante la pregunta Luisa contesta aludiendo que ese valor corresponde al número del término, de esta manera el sentido de la indeterminancia y la expresión simbólica empiezan a manifestarse.

Cuando se les cuestiona a las estudiantes acerca del procedimiento para encontrar el valor numérico de cualquier término de la secuencia, Luisa manifiesta, en $L_{17}$, a través de una frase "clave" la regularidad: *"Sería el número del término por cuatro más uno y da el resultado",* dejando ver los elementos que caracterizan el pensamiento algebraico de manera explícita como son el sentido de la indeterminancia, analiticidad y designación simbólica, a la vez que se constata la generalización de manera contextual donde la formulación algebraica es una descripción del término general, el cual va más allá de términos específicos o particulares que pueden ser percibidos por los sentidos (Vergel 2014).

Inmediatamente Luisa hace su intervención, Camila empieza a plantear la expresión de la regularidad de manera algebraica apoyada por sus compañeras (ver $L_{18}$, $L_{19}$, $L_{20}$ y $L_{21}$) y donde proponen la siguiente expresión $\boldsymbol{n\,.\,4\;(+\,1)}$, a partir de ella en $L_{23}$, Camila manifiesta que $\boldsymbol{n}$ "*depende del término que sea",* aludiendo al sentido de la indeterminancia y expresión semiótica, y que los valores 4 y 1, que determinan el cambio entre dos valores numéricos de dos términos consecutivos de la secuencia, siempre se aplican, es decir, son constantes, evidenciando así la generalización simbólica por parte de Camila y su grupo de trabajo donde la regularidad se expresa a partir de símbolos alfanuméricos del álgebra.

Finalmente, con el objetivo de replantear la expresión propuesta por Camila y sus compañeras de una manera más clara, el profesor cuestiona a las estudiantes sobre la necesidad de utilizar los paréntesis en la expresión ($L_{24}$) , lo cual les genera cierta inseguridad sobre si borrarlos o no ($L_{25}$, $L_{26}$, $L_{27}$), ante esto el profesor interviene nuevamente sugiriendo aplicar la expresión sin paréntesis al término 100, donde después de efectuar el procedimiento Camila y sus compañeras se dan cuenta de que los resultados son los mismos, por lo cual deciden borrar lo paréntesis y la expresión finalmente queda representada como $\boldsymbol{n\,.\,4\,+\,1.}$ Vale la pena aclarar que a pesar de que Camila y su grupo de trabajo efectuaron correctamente los procedimientos de la regularidad detectada, la primera expresión propuesta no correspondía al procedimiento efectuado, por lo cual fue necesaria la intervención del profesor para orientar a las estudiantes hacia la expresión correcta.

En la interlocución anterior, se pueden apreciar que Camila y su grupo de trabajo evidencian una evolución en las formas del pensamiento algebraico, pasando de medios semióticos corpóreos, donde predomina la actividad perceptual, hacia medios semióticos más sofisticados como frases clave donde la indeterminancia empieza a ser parte del discurso, para finalmente llegar a la deducción algebraica de la fórmula. Lo anterior sugiere que las estudiantes tuvieron que trabajar con formas reducidas de expresión, donde los medios semióticos evolucionaron hacia formas cada vez más sofisticadas dejando ver una reducción de recursos o *contracción semiótica*.

### 4.3. Síntesis de los análisis de las tareas

A continuación, se presenta una rejilla de análisis donde se encuentran los medios semióticos, procesos de objetivación, procesos de generalización y tipos de generalización identificados en el desarrollo de las tareas.

| Tarea | Recursos movilizados Medios semióticos | Proceso de generalización | Tipo de Generalización |
|---|---|---|---|
| **Tarea 1** | Dibujos auxiliares<br>Señalamientos con el lápiz<br>Deícticos espaciales<br>El ritmo<br>Conteo de lo oculto | Abducción, transformación de la abducción y deducción<br>determinaciones sensibles<br>Visión de regularidad<br>Característica común | Aritmética |
| **Tarea 2** | Señalamientos con el lápiz<br>Dibujos auxiliares<br>Frases clave | Característica común<br>Transformación de la abducción<br>Hipótesis<br>Abducción analítica<br>Aplicación a términos no dados<br>Deducción de la fórmula | Factual<br>Contextual<br>Simbólica |

**Tabla 2. Rejilla de análisis, identificación de medios semióticos, tipos de generalización en las Tareas 1 y 2 respectivamente.**

En relación a la Tarea 1, se identificaron variedad de recursos que acompañaron la actividad perceptual de los estudiantes tales como gestos, señalamientos con el lápiz, deícticos espaciales, dibujos auxiliares y el ritmo, los cuales al actuar de manera sincrónica entre ellos dieron lugar a la formación del nodo semiótico *conteo de lo oculto*. Este nodo semiótico permitió identificar los elementos visibles y ocultos de las figuras presentadas en la secuencia de la tarea, a la vez que se establecieron relaciones geométricas y numéricas entre dos términos consecutivos, lo que llevó a una reducción de los medios semióticos utilizados sugiriendo la idea de un tipo de *contracción semiótica*, en el que se pasa del conteo uno a uno de los elementos de una figura hacia operaciones que relacionan las cantidades de cubos de dos figuras consecutivas de la secuencia. Sin embargo, en esta tarea no se logró evidenciar la abducción utilizada de manera analítica, por lo cual las generalizaciones alcanzadas no sobrepasaron lo aritmético.

En la Tarea 2 se identificaron medios semióticos y procesos de objetivación similares a los que se dejaron ver en la Tarea 1, pero esta vez en una secuencia numérica con apoyo tabular donde se establecieron relaciones entre el número de un término y el valor numérico asociado a ese término, evidenciando la abducción utilizada de manera analítica, donde los elementos característicos del pensamiento algebraico (sentido de la indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica) se manifestaron dejando en evidencia generalizaciones factuales, contextuales y simbólica algebraicas.

## 5. Consideraciones finales

En el desarrollo de cada una de las tareas propuestas se dejó ver el uso y la combinación de diversos recursos como señales y dispositivos lingüísticos, por parte de los estudiantes. A partir de esta diversidad de recursos los mismos estudiantes organizan sus acciones para tomar conciencia de la característica común de los términos de las secuencias presentadas. A partir de dichos recursos se establecieron regularidades generales que permitieron a los estudiantes determinar los valores de los términos de una secuencia. Entre estos recursos, se distinguieron los gestos, señalamientos con el lápiz, deícticos espaciales, dibujos auxiliares, el ritmo, entre otros, los cuales emergieron de manera sincrónica dando lugar a nodos semióticos que permitieron tomar conciencia de los patrones que seguían los términos de las secuencias.

La interacción de los diferentes medios semióticos identificados en el análisis de la actividad matemática de los estudiantes, dieron lugar a la formación de *nodos semióticos*. En el sentido de Radford (2005, p. 2), el nodo semiótico se considera como "una pieza de la actividad semiótica de los estudiantes donde la acción de diversos signos, o medios semióticos, trabajan juntos para lograr la objetivación del saber". Desde esta perspectiva, las producciones escritas, orales y perceptuales de los estudiantes, en el desarrollo de las tareas, dejaron ver la sincronía entre diferentes sistemas semióticos, que dieron cuenta de la toma de conciencia de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes.

A manera de síntesis, de acuerdo con lo evidenciado en los análisis de las tareas, la actividad matemática de los estudiantes de grado séptimo, cuando se enfrentan a tareas de generalización de patrones, se encuentra mediada por diversidad de recursos semióticos (gestos, señalamientos, deícticos, inscripciones, palabras, el ritmo, correspondencias, tratamientos) que le ayudan a tomar conciencia de las regularidades presentes en una secuencia figural o numérica con apoyo tabular. Estos recursos se convierten en medios semióticos que al interactuar al mismo tiempo y en el mismo espacio forman nodos semióticos que evolucionan a otros sistemas semióticos evidenciando el desarrollo de procesos de objetivación los cuales dejan ver diferentes formas de generalización (factual, contextual y simbólica) como ejemplos del pensamiento algebraico por parte de los estudiantes.

De esta manera, se puede pensar en desarrollar pensamiento algebraico mucho antes de la introducción de lo simbólico, incluso desde los primeros grados de escolaridad, con actividades de patrones numéricos y figurales que permitan procesos de generalización y donde se involucren diversos medios semióticos que hacen parte de procesos de orden algebraico.

## Bibliografía

Gustin, J. (2017). *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de grado séptimo al abordar tareas de generalización de patrones*. Trabajo de Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Palmira, Valle del Cauca.

Lasprilla, A. (2014). *Generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de 9 y 10 años.* Trabajo de Maestría. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia.

Miranda, I. Radford, L. y Guzmán, J. (2007). *Interpretación de las gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación.* Educación Matemática, 19(3), pp. 5-30

Moreno, P. (2014). *La contracción semiótica como proceso de objetivación en estudiantes de grado sexto en el campo del pensamiento algebraico.* Trabajo de Maestría. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia.

Radford, L. (2003). *Gestures, speech, and the sprouting of signs. Mathematical Thinking and Learning 5*(1), 37-70. Disponible en: http://www.luisradford.ca/pub/79_gestures.pdf. [2016, Marzo 30]

Radford, L. (2005). *¿Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification. En Helen L. Chick, Jill L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Melbourne, Australia, 1(1), 143-145.

Radford, L. (2006). *Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), 267-299.

Radford, L. (2008a). *The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. In Radford L., Schubring G., Seeger F. (Eds.), Semiotics in Mathematics Education* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2008b). *Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts*. ZDM – The International Journal on Mathematics Education. DOI 10.1007/s11858-007-0061-0.

Radford, L. (2010). *Layers of generality and types of generalization in pattern activities.* PNA, 4(2), 37-62.

Radford, L. (2012). *On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche, (Eds.). From text to 'lived' resources* (pp. 283-288). New York: Springer.

Radford, L. (2013). *En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro (pp. 3-12*). Granada, España: Editorial Comares.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* Tesis Doctoral Laureada, Doctorado interinstitucional en educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá-Colombia.

**Autores:**

**Gustin Ortega Jeisson David**: Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia, Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle. E-mail: jdgustino@unal.edu.co

**Pontón Ladino Teresa:** Doctora en Educación, énfasis en educación matemática, Magister en Educación, énfasis en educación Matemática, Especialista en Educación Matemática. Universidad del Valle. Profesora del Dpto de Ciencias Básicas. Universidad Nacional de Colombia. E-mail: tpontonl@unal.edu.co