UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 10

Junio de 2007

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, página 2
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

Junta de Gobierno de la FISEM

Presidente: Paulo Figueiredo (Brasil)
Vicepresidente: Miguel A. Díaz Flores (Chile)
Secretario general: Luis Balbuena (España)
Tesorero: Miguel Ángel Riggio (Argentina)
Vocales (Presidentes y presidentas de las sociedades federadas)

Argentina: Óscar Sardella
Bolivia: Begoña Grigoriu
Colombia: Gloria García
España: Serapio García
México: Guillermina Carmona
Paraguay: Avelina Demestri
Portugal: Isabel Rocha
Perú: David Palomino
Uruguay: Bernardo Camou
Venezuela: Fredy González

Comité editorial de Unión

Directores:
Luis Balbuena
Antonio Martinón

Editores:
Alicia Bruno
Dolores de la Coba
Carlos Duque
Antonio R. Martín Adrián
Inés Plasencia

Consejo Asesor de Unión

Teresa Arellano
Judith Cabral
Juan Antonio García Cruz
Fátima Guimarães
Henrique M. Guimarães
Ismenia Guzmán
Salvador Llinares
José Ortiz Buitrago
Emilio Palacián
Ismael Roldán Castro
María del Carmen Sartori
Alicia Villar

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
M.ª Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J. Blanco Nieto
Teresa Claudia Braicovich
Natanael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Eva Cid Castro
María Mercedes Colombo
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
Adriana M.ª del Huerto Engler
Evangelina Diaz-Obando
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel María Escudero Pérez
M.ª Candelaria Espinel Febles
Hernán Fibla Acevedo
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Mercedes García Blanco
M.ª Carmen García González
Juan Emilio García Jiménez
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Josefa Guasco
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Natahali Martín Rodríguez
José Manuel Matos
M.ª Soledad Montoya González
Francisco Morales
Ángela Núñez
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Manuel Pazos Crespo
M.ª Carmen Peñalva Martínez
Andrea Pizarro Canales
M.ª Encarnación Reyes Iglesias
Maria Salett Biembengut
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
M.ª Dolores Sauret Fernández
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
M.ª Dolores Suescun Batista
Ana M.ª Trujillo La Roche
Dayana Ventura Pérez
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Textos: Dolores de la Coba
Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo
Sitio web: Daniel García Asensio

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, página 3
ISSN: 1815-0640

Editorial

En el tricentenario del nacimiento de Euler

En este año 2007 celebramos el tercer centenario del nacimiento de Leonhard Euler (1707, Basilea, Suiza - 1783, San Petersburgo, Rusia). Estamos ante una de las reconocidas como máximas figuras de las Matemáticas de todos los tiempos. Avalan ese reconocimiento no sólo el extenso trabajo que realizó en su larga vida (es uno de los matemáticos más prolíficos), sino la profundidad de sus investigaciones que abarcan campos científicos muy diferentes.

Desde la revista UNIÓN hemos querido sumarnos a la celebración de este aniversario, porque pensamos que la figura de Euler está llena de aspectos que la convierten en muy interesante desde el punto de vista de la enseñanza de las Matemáticas. Por un lado, algunos de sus teoremas son adecuados para explicarse en las aulas no universitarias, aunque sea aconsejable no extremar el rigor de las demostraciones y, por otro lado, su vida dedicada a la ciencia es ejemplo para los más jóvenes que sientan la llamada de la investigación.

Hemos solicitado a varios autores su colaboración para que nos presenten aspectos de la inmensa obra de Euler. Agradecemos a los profesores Juan Antonio García Cruz, Vicente Meavilla, José Manuel Méndez Pérez y Tomás Sánchez Giralda el esfuerzo realizado y sus aportaciones especiales sobre Euler para este número en el que recordamos su tercer centenario. Gracias a ellos, el profesorado de nuestro ámbito podrá disponer de materiales y oportunidades para conocer y dar a conocer a sus alumnos a este coloso de las Matemáticas.

Luis Balbuena y Antonio Martinón
Directores de Unión

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 5-12
ISSN: 1815-0640

Intuición, innovación y resolución de problemas en Leonard Euler

Juan Antonio García Cruz

Resumen

En este pequeño artículo presentamos y comentamos la solución dada por L. Euler a un acertijo del siglo XVIII conocido como "el problema de los puentes de Konisberg". Es un ejemplo paradigmático de puesta en funcionamiento de técnicas de resolución de problemas y de generalización.

Leonard Euler fue un matemático muy prolífico. Durante su vida abordó temas de campos tan diversos como la geometría, el álgebra o el análisis. Fue también un innovador, pues fue capaz de abordar nuevos problemas y sentar las bases de partida para nuevos campos de la matemática. Como todo creador tuvo intuiciones brillantes y fue capaz de realizar demostraciones que maravillan por su sencillez y elegancia.

También introdujo varias notaciones en matemáticas que son, hoy día, de uso generalizado. Por ejemplo, utilizó por primera vez la letra e, como base para los logaritmos neperianos, en manuscritos durante los años 1727-1728. En el campo de los números complejos designó una letra para representar la unidad imaginaria. Así, en una memoria presentada a la Academia de San Petersburgo en 1777, pero no publicada hasta después de su muerte, utiliza la letra *i* como símbolo de $\sqrt{-1}$. Esta notación no volverá a utilizarse hasta 1801, año en que Gauss empieza a hacer un uso sistemático de la misma, entre otras obras, en sus célebres *Disquisitiones Arithmeticae*.

En la correspondencia que mantuvo, con importantes matemáticos y filósofos, hay resultados sin probar, que han traído de cabeza a varias generaciones de matemáticos brillantes. Uno de los más célebres es la conjetura que relaciona las caras, los vértices y las aristas en todo sólido de caras planas. En carta a C. Goldbach, fechada en Berlín en noviembre de 1750, entre otros resultados le refiere algunos sin probar: “encuentro sorprendente que estas propiedades de la geometría sólida no hayan sido vistas por nadie hasta ahora, siendo tan tarde cuando yo lo he hecho. Es más, que los importantes teoremas 6 y 11, sean tan difíciles que todavía no ha sido posible probarlos satisfactoriamente”. El teorema 6 es la famosa propiedad que involucra las caras, las aristas y los vértices de un sólido limitado por caras planas y cuya formulación es CARAS + VÉRTICES = ARISTAS + 2. En su formulación Euler, en lugar de vértices, habla de ángulos sólidos.

En una carta enviada a J. Bernoulli en 1740, Euler le comunica que las expresiones $y = 2\cos x$ e $y = e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}$, verifican ambas la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, y por lo tanto deben ser idénticas. Más tarde en su obra *Introductio in Analysin Infinitorum* deduce por primera vez, esta expresión que relaciona la función exponencial con las razones trigonométricas, a través de, sorprendentemente, la unidad imaginaria. Allí aparecen, deducidas, las siguientes expresiones:

$$\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \quad y \quad \operatorname{sen} v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

Expresiones que conducen mediante un simple cálculo a la célebre fórmula $e^{v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\operatorname{sen} v$. Aunque Euler proporciona dos expresiones, una para el argumento positivo y otra para el negativo, nosotros aquí nos hemos tomado la libertad de, utilizando la misma notación, refundir las dos fórmulas en una.

Uno de los resultados más interesantes es la resolución del famoso “acertijo” conocido con el nombre de los “puentes de Köningsberg”.

Leibniz, en carta a Huygens el 8 de septiembre de 1679, le transmitía la necesidad que sentía de un nuevo *analysis*: “Incluso no me quedo satisfecho con el Álgebra ya que no proporciona ni la más corta ni la más maravillosa construcción geométrica. Es por ello por lo que creo que necesitamos de otro *Analysis*, puramente geométrico o lineal, que exprese directamente la posición (*situs*) como el Álgebra expresa la magnitud”. Parece ser que Huygens se mostró escéptico con la propuesta de Leibniz. Quizás la idea de un *analisys situs* o *geometria situs* llegó ([1]) a los oídos de Euler a través de uno de los Bernoullis como era la tradición oral en la época.

“Además de la rama de la geometría relativa a las magnitudes, que ha recibido siempre la mayor atención, hay otra, casi desconocida antes de Leibniz, que este mencionó por primera vez y denominó *geometria situs*. Tiene sólo que ver con la determinación de la posición y sus propiedades: no trata de las magnitudes ni de los cálculos que pueden hacerse con ellas ([2]). Así comienza el artículo *Solutio problematis as geometriam situs pertinentes*, publicado en 1736, volumen 8 de *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae.*

El artículo de Euler tiene el sabor de la ciencia en estado naciente y de la ejecución de técnicas heurísticas para la resolución de problemas. En su introducción, no repara en avisarnos, de que no ha sido posible todavía determinar la clase de problemas que son relevantes para este nuevo campo, ni qué métodos deben emplearse para resolverlos. El artículo trata de un problema, quizás más un acertijo para la época, en el que Euler muestra el método encontrado por él para su

[1] Struik, 1986, página 183.
[2] Para una versión en español completa de artículo de Euler consúltese de Armas Cruz y García Cruz, 1983, páginas 15-23.

solución, y no duda en calificar, tanto al problema como al método, como un ejemplo de *geometria situs* ya que no requiere ni de medir ni de calcular distancias.

El problema en palabras de Euler: “En Köningsberg, Prusia, hay una isla A, llamada der Kneiphof, quedando dividida por el río que la rodea en dos ramas, y estas ramas son cruzadas por siete puentes, a, b, c, d, e, f, g. Se pregunta si se puede planear un paseo de tal manera que cruce por cada puente una y sólo una vez” (Figura 1).

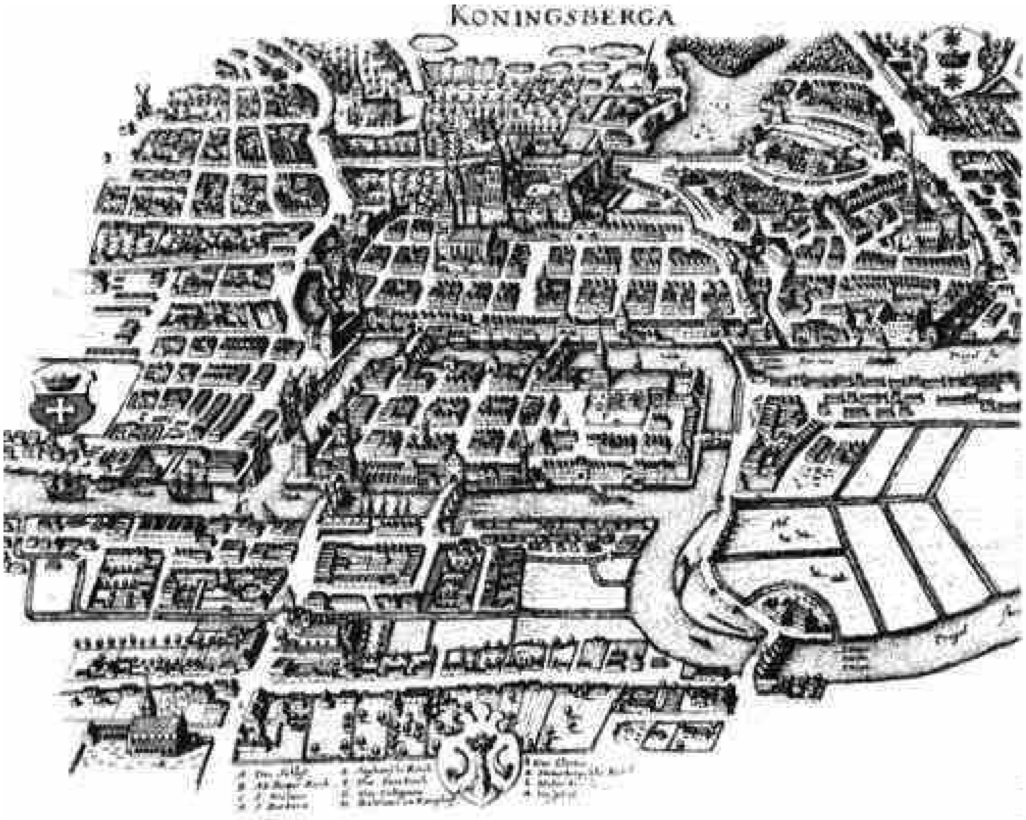


Figura 1

Euler añade una formulación general del problema: “Cualesquiera que sea la disposición y división del río en ramas y el número de puentes, ¿puede saberse si es o no posible cruzar cada puente exactamente una vez?

Euler sugiere, como primera aproximación a la solución, realizar una lista exhaustiva de todas las rutas posibles y ver, entonces, si hay alguna que satisfaga la condición. Debido al número de posibilidades existentes, el procedimiento le parece difícil y laborioso. Además, sería impracticable ([3]) para un número mayor de puentes.

“El método que he desarrollado consiste y se apoya en la forma más conveniente de *representar* el cruce de puentes” (Figura 2).

[3] Euler dice “imposible”.

Utiliza las letras mayúsculas, de forma que la secuencia ABCD, significa que se pasa de la zona A a la B, no importa por qué puente, y luego se va de B a D y, por último de D a C. De forma análoga, los cruces de cuatro puentes se representan por cinco letras. En general, “la representación de un itinerario cualquiera contiene un número de letras mayor en una unidad que el número de puentes cruzados”.

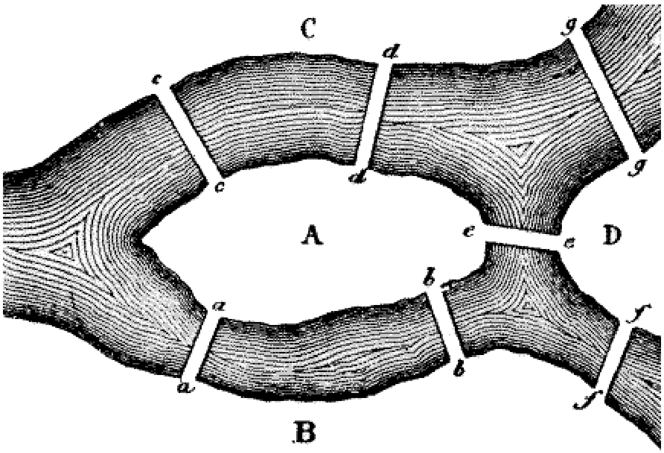


Figura 2

Con este método es irrelevante por qué puente se cruza, lo que *simplifica el problema*. Si existiera una ruta a través de los siete puentes, entonces se representaría por una lista de ocho letras, en las que las letras AB y CA, aparecerían dos veces adyacentes en la lista, mientras que las otras combinaciones sólo aparecerían una vez.

Euler ha reducido el problema a encontrar una lista de ocho letras, formada por las letras A, B, C y D, en las que varios pares de ellas han de aparecer un número requerido de veces.

Ahora, se pregunta: ¿es posible disponer las letras de tal forma?

Sugiere, buscar una *regla* al respecto.

Para tal fin, introduce una *simplificación* en el dibujo y considera el caso de un área simple formada por dos regiones separadas por un río, que se conectan por varios puentes (Figura 3).

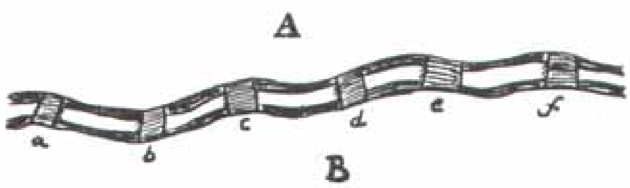


Figura 3

Continua su razonamiento así: “Tomemos el puente *a*, si una persona cruza este puente es que viene de A o tiene que llegar a A; en cualquier caso la letra A aparecerá una vez en la representación. Si cruza tres puentes apoyados en A, esta letra aparecerá dos veces, tanto si el viaje comienza en A como si no. De forma similar, si son cinco los puentes, en la representación del itinerario a través de ellos se encontrará tres veces la letra A.” Una vez dispuesto este razonamiento, está en condiciones de formular la *regla general*: “si el número de puentes es impar, y se aumenta en uno, el número de apariciones de la letra A, es la mitad de esta suma”.

Una vez establecida la regla general, esta se aplica al problema en cuestión. Como en el área A se apoyan cinco puentes, A tiene que repetirse tres veces en la representación del itinerario. Para B resultan, dos apariciones, puesto que hay tres puentes que se apoyan en B. Lo mismo ocurre para C y D. Luego el total de apariciones es de 9 letras en la secuencia, y hemos visto que ésta sólo consta de 8. Luego tal itinerario no puede efectuarse a través de los siete puentes de Köningsberg.

Euler no se contentó con resolver el “acertijo” de los puentes de Köningsberg, sino que avanzó hacia una generalización del problema.

Estudiemos su forma de proceder.

Lo primero que hace es afirmar que la regla dada para hallar el número de apariciones de la letra A, es también válida si todos los puentes vienen de otra área B o de otras áreas. Pues allí, consideró sólo el área A independientemente de a que área vienen o van los puentes.

¿Qué ocurre si el número de puentes que se apoyan en A es par?

Si el número de puentes que se apoyan en A es par, debe tenerse en cuenta si se parte o no de A. Si se parte de A, esta letra aparecerá dos veces en la secuencia, una para indicar la partida y otra la llegada. Pero si se parte de otra área, entonces sólo aparecerá una vez, para indicar tanto la llegada como la salida. Imagine el lector las situaciones en que haya cuatro y seis puentes que se apoyen en A, y considérese si se parte o no de A. En tal caso habrá si se parte de A, la letra A aparecerá tres o cuatro y si no se parte habrá dos o tres apariciones respectivamente.

De estos dos ejemplos, Euler, induce la siguiente regla general: “Para un número par de puentes si se sale de A, el número de veces que aparece esta letra es igual a la mitad del número de puentes aumentada en uno; pero si se sale de un área distinta es igual a dicha mitad”.

Como sólo puede iniciarse una ruta desde un área única, resulta que: si el número de puentes es impar, el número de apariciones de la letra que denota un área es la mitad del número de puentes más uno; pero si es par, el número de apariciones es justo esa mitad. Por consiguiente se tiene la siguiente regla para la posibilidad de ruta en cualquier caso:

Si el total de apariciones es igual al número de puentes más uno, el itinerario pedido es posible y tendrá que iniciarse en un área con un número impar de puentes; si, por el contrario, el número total de letras es el de puentes disminuido en uno, también es posible el itinerario, pero ha de partirse de un área el la que se apoye un número par de puentes, pues el número de letras se verá así incrementado en uno.

Como ejemplo de aplicación de esta regla, Euler elabora un método que utiliza para resolver una nueva situación (Figura 4).

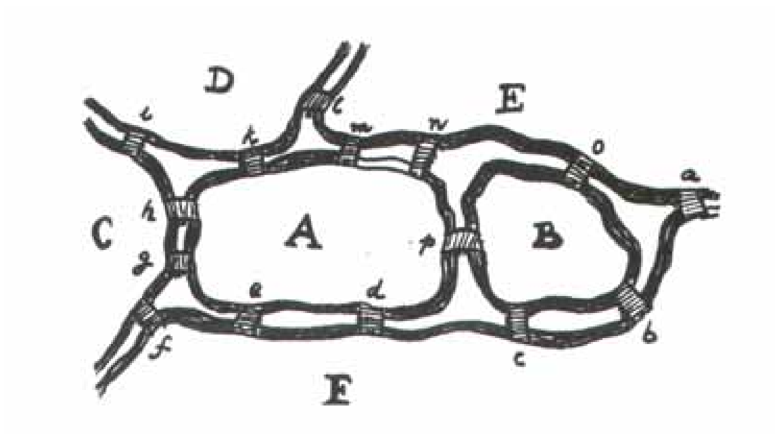


Figura 4

Método

Primero. Designa por letras mayúsculas A, B, C, D, E, F, las seis áreas.

Segundo. Construye una tabla en la que asigna a cada letra el número de puentes que se apoyan en ella, marcando con * las áreas con número par de puentes.

Tercero. Añado una columna en la que junto a cada par pongo su mitad, y junto a cada impar el resultado de aumentar en uno y hallar la mitad de la suma.

Cuarto. Sumo esta última columna y comparo con el número de puentes de la situación incrementado en 1.

áreas	*nº puentes*	*cálculo*
A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3
		16

Quinto. Si hay igualdad en los valores determinados en el apartado cuatro, entonces es posible el itinerario que pasa una y solo una vez por cada puente.

¿De qué área hay que partir?

Hay más de una solución que el lector alcanzará fácilmente.

Este fragmento, muestra la aplicación de varias técnicas heurística a la resolución de un problema. Primero la búsqueda de una representación, notación, adecuada y carente de ambigüedad, que contemple los elementos esenciales del problema y elimine los superficiales. Luego, un esquema o dibujo, que facilita y guía el razonamiento. La simplificación del problema para poder obtener la regla general, se limita a dos regiones y las conexiones entre ellas. Por último, una generalización y un método de solución.

En fin, toda una lección magistral de resolución de problemas.

Por último, aquí tienes un plano actual (Figura 5) de la ciudad de Köningsberg, llamada Kaliningrado. Como puedes observar algunos de los puentes, dos exactamente, no existen. La pregunta obvia es ¿se puede hoy realizar el paseo planteado en la época de Euler? Es decir, ¿es posible realizar un paseo que pase una y solo una vez por cada puente?

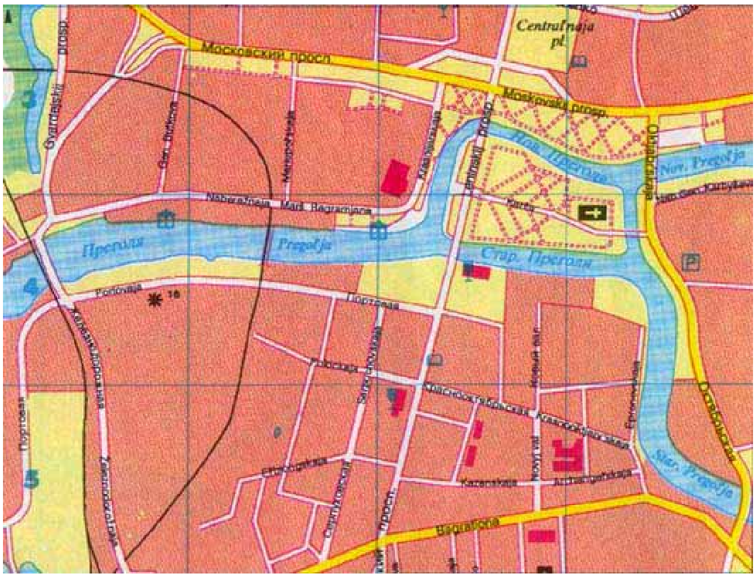


Figura 5

Para terminar una observación. Cuando nos asomamos a la historia de la matemática, solemos utilizar el presente como referente para el pasado. Así, aparecen expresiones que nos asombran, ¡qué moderno es lo que fulanito hizo hace tantos años!, o nos lamentamos de la falta de conocimiento de los “antiguos”, ¡con lo fácil que es hacer esto así! Esta forma de aproximarnos a la historia de la matemática distorsiona el pasado y nos impide evaluar los logros en su justa medida. Incluso las dificultades que entrañó determinado conocimiento nos parece algo trivial, cosa de los de antes, de los viejos. En muchos sitios se afirma que al resolver el problema de los puentes de Köningsberg, Euler inauguró la teoría de grafos. Pues bien, después de trabajar sobre el artículo original, veo a un resolutor de problemas, resolviendo uno particular y proponiendo, luego, un método general. Esta faceta, es tan educativa como puede ser sentar las bases de una nueva teoría.

Bibliografía

- Cajory, F. (1993). A History of Mathematical Notations. Dover Publications, Inc. New York.
- De Armas Cruz, M. y García Cruz, J.A. (1983): Bicentenario de la muerte de Leonard Euler, Números, 7, pág. 9-30.
- Euler, L. (1748). Introductio in analysin infinitorum. Edición facsimilar. SAEM Thales y Real Sociedad Matemática Española. Sevilla, 2000.
- Smith, D.E. (1958). History of Mathematics. Dover Publications, Inc. New York.
- Struik, D.J. (1986): A source book in Mathematics 1200-1800. Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

Juan Antonio García Cruz Titular de Didáctica de las Matemáticas y profesor de Historia de las Matemáticas en la Universidad de La Laguna. Es Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de La Laguna y ha sido Profesor de Secundaria (Catedrático de Bachillerato en excedencia) durante veinticinco años. Se interesa principalmente por la educación matemática, y la historia de las matemáticas, de la cartografía y la navegación.
E-mail: jagcruz@ull.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 13-18
ISSN: 1815-0640

Euler y las particiones

Tomás Sánchez Giralda

Resumen

El principal objetivo del artículo es el análisis y estudio de problemas que fueron tratados por Euler, verdadero gigante de las Matemáticas. Sobre sus anchas espaldas han tenido el privilegio de trabajar científicos de varias disciplinas, y pensamos que futuras generaciones seguirán sus huellas.

Abstract

The main aim of this paper is the analysis and study of some problems treated by Euler, a true giant of Mathematics. On his broad shoulders scientists of several disciplines have had the privilege of working on, and we hope that later generations will follow his footsteps.

La utilidad de las Matemáticas, comúnmente reconocida en sus partes elementales, no sólo no se detiene en las Matemáticas Superiores, sino que es de hecho mucho mayor cuanto más se avanza en el desarrollo de la Ciencia.

L. Euler

Introducción

L. Euler está considerado como uno de los más importantes genios científicos del siglo XVIII. Sus diferentes trabajos —artículos, libros, monografías, cuadernos, cartas, etc.— han tardado casi tres siglos en ser publicados tanto por el número como por su profundidad y volumen. La calidad y cantidad de su Opera Omnia —más de 80 volúmenes, 29 de Matemáticas, y casi 900 publicaciones— permite afirmar que nos encontramos ante un modelo de matemático, físico, ingeniero, astrónomo, músico y filósofo de la actualidad. Este carácter multidisciplinar hace que Euler esté íntimamente ligado al actual desarrollo de un gran número de disciplinas científicas, razón por la que resulta harto difícil, por no decir imposible, entender buena parte de sus trabajos como parte de un único de los apartados, o áreas de conocimiento, en los que, en la actualidad, han quedado divididas las diferentes ramas del saber.

Por otra parte, la necesidad de limitar la extensión de este trabajo nos obliga a incidir en aspectos concretos del Álgebra, tal y como son entendidos hoy en día y en los que algunos trabajos de Euler —*Partitio numerorum*— han tenido antecedentes importantes para su desarrollo. Como parece adecuado, también, que los problemas a incluir deban tener actualidad y perspectivas de futuro, hemos hecho una elección entre las muchas posibles. Nos hemos decidido por tratar algunos aspectos de la Combinatoria que llevaron a Euler a resultados no sólo no agotados en su propio contexto, la combinatoria algebraica, sino que han sido soporte para importantes avances en Álgebra y, en concreto, en la Teoría de Caracteres y Representaciones, con importantes aplicaciones con otras disciplinas como son la Física y la Química. El lector interesado podrá encontrar en las referencias de la bibliografía otros temas y aportaciones de Euler que fueron de importancia para la aparición de nuevas etapas de modernización y crecimiento del Álgebra.

Euler y las particiones

Sea n un entero positivo. Una partición es toda forma de escribir al entero n como la suma de enteros positivos, donde se entiende que si dos descomposiciones sólo difieren en el orden de sus términos las consideramos como la misma partición. Así mismo, denotaremos por $p(n)$ el número de particiones del número n. Si es $n=1$ se tiene $p(1)=1$. Si $n=2$ las particiones posibles son 2 y $1+1$, y se tiene $p(2)=2$. Si tomamos $n=3$ será $p(3)=3$, pues las particiones posibles del número 3 son 3; $2+1$ y $1+1+1$. Podríamos iterar los cálculos y concluir que se tiene $p(4)=5$; $p(5)=7$; $p(6)=11\ldots$ El estudio y análisis de la función partición $p(n)$[1] ha sido uno de los temas tratados en la evolución de las Matemáticas y, de hecho, es conocido que desde el punto de vista computacional $p(n)$ puede ser computado en un tiempo proporcional a $n^{3/2}$.

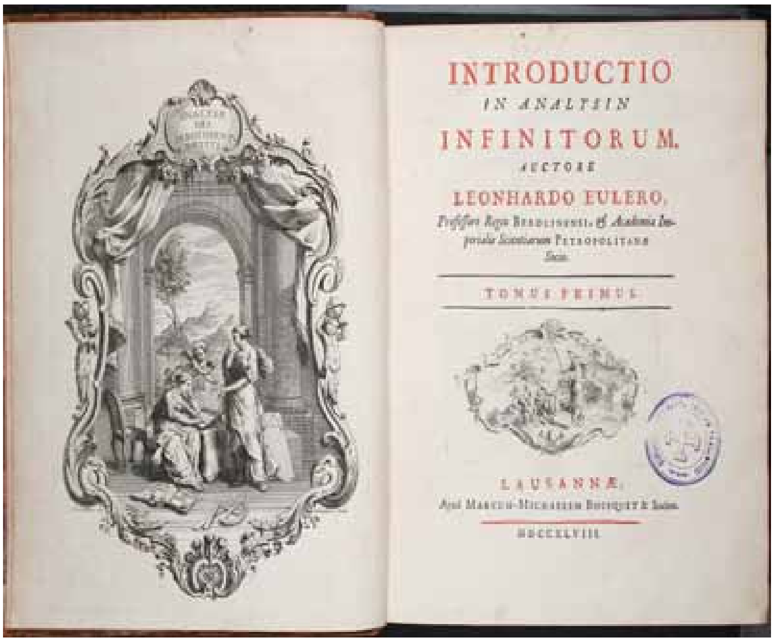


Figura 1: Biblioteca Histórica del Palacio de Santa Cruz (Signatura 5393). Universidad de Valladolid.

En esta línea, la identidad de Euler toma la forma dada por la igualdad:

$$p(n/\,partes\,impares) = p(n/\,partes\,diferentes)\,, \qquad (*)$$

[1] El estudio de esta función no es un problema fácil. Su comportamiento es, en esencia, como $e^{\sqrt{n}}$, resultado importante y profundo que se debe a los matemáticos Hardy y Ramanujam en 1917, y que fue completado por Rademacher años más tarde.

según la cual el número de particiones con las condiciones indicadas son iguales. En este sentido, la parte de mayor interés en la teoría de particiones corresponde a la obtención de identidades del tipo general

$$p(n\,/\,condición\ tipo\ 1) = p(n\,/\,condición\ tipo\ 2)\,,$$

en la que el primer miembro de la igualdad denota las particiones de n sujetas a una determinada condición que llamamos de tipo 1 y el segundo miembro serían las particiones de tipo 2. Tales identidades se conocen como “identidades tipo Euler”.

Con un procedimiento que generaliza el utilizado por Euler, G. E. Andrews, siguiendo ideas de I. Schur, probó en 1969 el siguiente resultado:

$$p(n\,/\,partes \subseteq N) = p(n\,/\,partes\,diferentes \subseteq M);$$

donde N es cualquier conjunto de números enteros con la propiedad de que ninguno de sus elementos es una potencia de dos veces un elemento de N, y M es el conjunto conteniendo todos los elementos de N junto con todos sus múltiplos de potencias de dos. Así, si se toma $N = \{1,3,5,....\}$ se recupera la identidad de Euler por ser entonces M el conjunto de los enteros positivos.

¿Cómo probó Euler el resultado $(*)$ en el año 1748? Podríamos pensar que al tratarse de un problema de Combinatoria la prueba consistiría en establecer de manera inteligente una biyección que transformara toda partición en partes impares del número n en una colección de partes distintas con la misma suma, y por tanto en una nueva partición de tal número. Tal cosa se puede hacer; sin embargo el procedimiento que siguió Euler fue el de introducir el concepto de función generatriz asociada a un conjunto de enteros S, lo que constituye una de sus grandes aportaciones a la Ciencia y resulta una técnica de completa actualidad.

En concreto, si es $S = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ una sucesión de enteros positivos la función generatriz asociada por Euler a S queda definida por la serie formal $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. En el caso de que la sucesión sea finita queda claro que la función generatriz o generadora asociada es un polinomio con coeficientes enteros. En el caso particular de considerar la función partición $p(n)$, la función generatriz asociada a $S = \{p(0), p(1), p(2), \ldots, p(n), \ldots\}$ está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + ...$$

En esta línea, Euler indica: *«…Si el producto* $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots$ *se desarrolla, se tiene la serie* $1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + \cdots \quad + \cdots$ *en la que los coeficientes indican los **números de formas diferentes** en que el exponente puede expresarse como la suma de números distintos».* Así, Euler prueba que las funciones generatrices relativas a las sucesiones de enteros positivos dados por las funciones partición $p(n/\,partes\ impares)$ y $p(n/\,partes\ diferentes)$ están dadas, respectivamente, por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n/\,partes\ diferentes)x^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n),$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n/\,partes\ impares)x^n = \prod_{n=impar}\frac{1}{(1-x^n)}.$$

Como se tiene $(1+x^n)=\dfrac{(1-x^{2n})}{(1-x^n)}$, Euler obtiene la igualdad de las expresiones como producto que aparecen en las igualdades anteriores y esto le permite concluir que para todo entero positivo n se tiene la igualdad o identidad que lleva su nombre y que dice: «*El número de formas diferentes en que un número dado puede expresarse como la suma de números naturales distintos es el mismo que el número de formas en que el citado número puede expresarse como la suma de números impares, ya sean iguales o diferentes*»

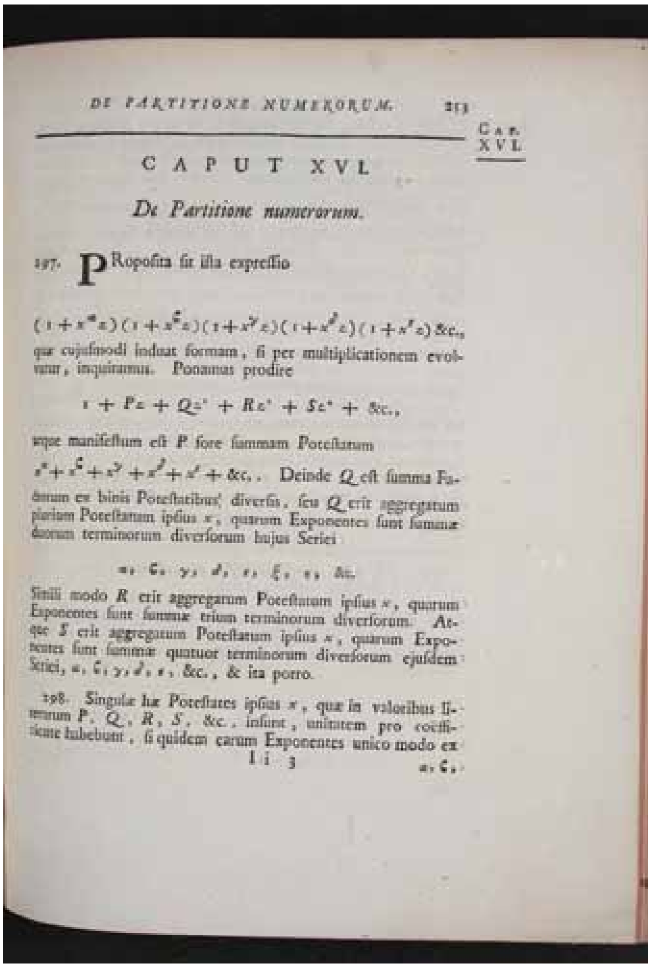
Las aportaciones de Euler en esta área de trabajo fueron abundantes. Además de la antes citada y probada identidad que lleva su nombre, él continuó la discusión de este tipo de problemas en un buen número de trabajos que se pueden encontrar en el Libro I de su "*Introductio in Analysin Infinitorum*" (Figuras 1 y 2), publicación que tuvo varias ediciones en su época. Así, por ejemplo, Euler hace una comparación entre las particiones de un entero n en un número impar de partes diferentes y entre las particiones, del mismo número, en un número par de partes diferentes, demostrando que ambos conjuntos tienen igual número de elementos excepto para un caso muy particular, cuando es $n=i/2\cdot(3i-1)$, en cuyo caso la diferencia entre ambos conjuntos es ± 1. Este resultado de Euler es una nueva identidad particional y se conoce como el teorema de los números pentagonales[2] de Euler.

La identidad de Euler $(*)$ considera particiones de "partes diferentes". Es decir, de partes que difieren al menos en 1, de donde la naturalidad del estudio de análogo problema para casos donde tal diferencia sea al menos de 2. El siguiente resultado debido a Rogers y Ramanujam trata tal caso y afirma: «*El número de particiones del entero n en partes que difieren en al menos 2 es igual al número de particiones de n en partes que son congruentes a 1 ó 4 módulo 5*». Tal resultado fue probado a comienzos del siglo pasado y generó un buen número de trabajos en esta dirección.

J. J. Silvester dio, en 1884, un refinamiento de los resultados de Euler considerando el número de particiones de un número n usando k partes impares,

[2] El nombre de números pentagonales corresponde a los números 1, 5, 12, 22…, que son el número de puntos que configuran pentágonos de tamaño creciente.

cada una de las cuales puede repetirse, de manera que cuando es k suficientemente grande se recupera el caso tratado por Euler. Con posterioridad es N. Fine quien establece un nuevo refinamiento del teorema de Euler. Para ello utiliza el concepto de rango de una partición, que es debido a F. Dyson (1944), y que se define como la diferencia entre la parte mayor y el número de partes de la partición. El resultado de Fine afirma que el número de particiones del entero n en partes distintas de rango $2r$ o $2r+1$ es igual al número de particiones de n en partes impares con parte mayor $2r+1$. Más recientemente, M. Bousquet-Mélou y K. Eriksson (1997-1999) han obtenido nuevos resultados en el cálculo de particiones particulares de un entero n que tienen como caso límite la identidad obtenida por Euler en la primera mitad del siglo XVIII. Aquellos lectores interesados en ampliar información sobre este tema pueden consultar las publicaciones de H. L. Alder y de S. Ahlgren y K. Ono que se citan en la Bibliografía.


DE PARTITIONE NUMERORUM. 253

CAP. XVI.

CAPUT XVI.

De Partitione numerorum.

297. Proposita sit illa expressio

$(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)(1+x^{\gamma}z)(1+x^{\delta}z)(1+x^{\varepsilon}z)$ &c.,

quæ cujusmodi induat formam, si per multiplicationem evolvatur, inquiramus. Ponamus prodire

$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 +$ &c.,

atque manifestum est P fore summam Potestatum

$x^{\alpha} + x^{\beta} + x^{\gamma} + x^{\delta} + x^{\varepsilon} +$ &c.. Deinde Q est summa Factorum ex binis Potestatibus diversis, seu Q erit aggregatum plurium Potestatum ipsius x, quarum Exponentes sunt summæ duorum terminorum diversorum hujus Seriei

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta,$ &c.

Simili modo R erit aggregatum Potestatum ipsius x, quarum Exponentes sunt summæ trium terminorum diversorum. Atque S erit aggregatum Potestatum ipsius x, quarum Exponentes sunt summæ quatuor terminorum diversorum ejusdem Seriei, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon,$ &c., & ita porro.

298. Singulæ hæ Potestates ipsius x, quæ in valoribus literarum P, Q, R, S, &c. insunt, unitatem pro coefficiente habebunt, si quidem earum Exponentes unico modo ex

Ii 3 $\alpha, \beta,$

Las repercusiones de los resultados de Euler tanto en Álgebra como en otras partes de las Matemáticas han sido muy numerosas. En la teoría de caracteres y representaciones se hace importante uso de la teoría de particiones y de los conceptos y resultados de Euler.

Para finalizar, y volviendo al principio del trabajo, parece indicado resaltar la importancia que ha tenido y tendrá la Teoría de Particiones. Citaremos aquí, por su interés, solo unas líneas extraídas del artículo de Ahlgren y Ono: «Partitions play important roles in such diverse areas of mathematics as combinatorics, Lie theory, representation theory, mathematical physics, and the theory of special functions».

Bibliografía

- S. Ahlgren y K.Ono (2001): "Addition and Counting: The arithmetic of Partitions". Notices of the AMS. Volume 48, Number 9. USA.
- H. L. Alder (1969): "Partition Identities – From Euler to the present". Amer. Math. Monthly 76, pp.733-745. USA.
- W. Dunham (2006): "Euler: El matemático de todos los matemáticos". 2.ed. Nivela, Madrid.

- F. G. Frobenius (1968): "Gesammelte Abhandlungen I, II, III. Editor J. P. Serre. Springer-Verlag, Berlin.
- T.Y. Lam (1998): "Representations of Finite Groups: A Hundred Years". Notices of the AMS. Volume 45, Number 3 and 4. USA.
- V. S. Varadarajan (2006): "Euler Through Time: A New Look at Old Themes". American Mathematical Society. USA.

Tomás Sánchez Giralda (1947, Las Palmas de Gran Canaria, España) es Doctor en Ciencias (Matemáticas) por la Universidad Complutense de Madrid. Desde el año 1969 ha desempeñado actividades, tanto docentes como investigadoras y de gestión, en las Universidades Complutense de Madrid, Paris-Orsay, Murcia y Valladolid. En esta última es, en la actualidad, catedrático de Álgebra. Es autor de artículos de investigación y de divulgación científica, de libros y capítulos de libros, así como de otras publicaciones en Matemáticas y sus aplicaciones.
E-mail: tsg@agt.uva.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 19-26
ISSN: 1815-0640

Euler y el Análisis Matemático

José M. Méndez Pérez

Leonhard Euler (1707, Basilea, Suiza - 1783, San Petersburgo, Rusia) es quizás el matemático más prolífico de toda la historia, equiparable sin duda en importancia al trío de matemáticos por excelencia: *Arquímedes, Newton y Gauss.* Su vasta obra ha originado una ingente empresa editorial que, bajo el nombre de *Opera Omnia*, pretende reproducir fielmente toda su producción científica. Se inició en 1911 y está aún sin concluir. La Comisión de Euler de la Academia Suiza de Ciencias y la editorial Birkhäuser han realizado el ímprobo esfuerzo de reeditar, con absoluto respeto a las fuentes originales, todos los trabajos de Euler organizándolos en cuatro series. La primera está dedicada a sus trabajos matemáticos; la segunda y tercera, a sus contribuciones a la mecánica, la astronomía y otras ramas de la física; y la cuarta, a su extensa correspondencia científica y epistolar. ¡En total, 86 volúmenes, cantidad que probablemente sea superada!

En lo que respecta al *Análisis Matemático* nos centraremos expresamente en tres obras:

Introductio in Analysin Infinitorum[1]

Institutiones Calculi Differentialis

Institutiones Calculi Integralis

La primera, *Introductio in Analysin Infinitorum* —publicada en dos volúmenes en 1748— se puede considerar por los temas tratados como una preparación o introducción para las otras dos. En esta obra maestra el concepto básico es el de función. Euler define una función de la siguiente forma

> *Una función de una magnitud variable es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes…*

Desde luego, no coincide exactamente con la definición actual de función. Pero más allá del rigor de la definición, el hecho destacable y realmente significativo es que Euler convirtió a la función en el objeto fundamental del Cálculo, que hasta entonces se basaba esencialmente en las propiedades de las curvas.

Euler estudia todas las funciones elementales, las funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Insistimos, por una parte, que Euler

---

[1] Existe una magnífica edición facsímil del primer volumen de esta obra con su versión en castellano. Véase la referencia bibliográfica [E]

marcó un hecho revolucionario: a partir de él ya no se hablará —por ejemplo— de curvas o líneas trigonométricas, sino de funciones trigonométricas. Por otra parte, Euler se da cuenta de la naturaleza inversa de las funciones logaritmo y exponencial. Los logaritmos no sólo tienen importancia porque permiten simplificar cálculos complicados; ahora adquieren el status de función, la función inversa de la función exponencial. Una vez que Euler ha introducido la función exponencial $y = a^z \ (a > 1)$, y habla del grado en el que *y* depende de *z,* resulta esclarecedora su afirmación

> *… daremos un valor a z tal que* $a^z = y$ *. Este valor de z, considerado como función de y, se llama el logaritmo de y*

Actualmente escribiríamos

$$z = \log_a y \Leftrightarrow a^z = y$$

Otros aspectos que llaman poderosamente la atención en esta obra son cómo Euler trabaja con unas cantidades infinitamente pequeñas y otras cantidades infinitamente grandes, cómo pasa de los desarrollos finitos a los desarrollos infinitos, cómo encuentra los desarrollos en serie de las funciones elementales sin utilizar la derivación y cómo la función logaritmo aparece en las cuestiones más insospechadas. C. B. Boyer asegura que *Introductio* es el estudio de las funciones por medio de procesos infinitos, especialmente a través de series infinitas [E].

Una muestra de la poderosa imaginación de Euler fue su deducción del desarrollo en serie de la función exponencial $y = a^z \ (a > 1)$. No podía recurrir a la derivación, concepto que aparece en su obra posterior *Institutiones Calculi Differentialis*. Entonces procede considerando una cantidad positiva infinitamente pequeña ω, que, sin llegar a ser cero, le permite escribir

$$a^\omega = 1 + \psi \ ,$$

donde ψ denota otra cantidad infinitamente pequeña. A continuación postula que

$$a^\omega = 1 + k\omega \ ,$$

siendo *k* un número que depende de la base *a*. Seguidamente introduce una nueva variable[2]

$$j = \frac{x}{\omega}$$

y utiliza el desarrollo del binomio de Newton para obtener

[2] Ponemos j en lugar de la i, inicial de la palabra infinito, de la versión original de Euler, a fin de evitar confusiones con la notación habitual de la unidad imaginaria.

$$a^x = (a^\omega)^{\frac{x}{\omega}} = (1+k\omega)^j = \left(1+\frac{kx}{j}\right)^j =$$

$$= 1 + j\left(\frac{kx}{j}\right) + \frac{j(j-1)}{2.1}\left(\frac{kx}{j}\right)^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{3.2.1}\left(\frac{kx}{j}\right)^3 + \cdots =$$

$$= 1 + kx + \frac{(j-1)}{j}\left(\frac{k^2x^2}{2.1}\right) + \frac{(j-1)(j-2)}{j.j}\left(\frac{k^3x^3}{3.2.1}\right) + \cdots$$

A continuación argumenta que *j* = *x/ω* tiene que ser una cantidad infinitamente grande, puesto que ω es infinitamente pequeño, lo cual le autoriza a poner

$$\frac{j-1}{j} = 1 \quad , \quad \frac{j-2}{j} = 1 \quad , \quad \frac{j-3}{j} = 1 \quad \ldots$$

llegando a que

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2.1} + \frac{k^3x^3}{3.2.1} + \cdots$$

En particular, si *x=1* y *k=1*, obtiene

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \cdots$$

Esta base, que surge de forma tan *natural*, la representa por *e* —posiblemente porque es la vocal que sigue a la *a*— y determina numerosas cifras decimales

e = 2'718281828459…

En definitiva, Euler ha deducido el célebre desarrollo exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (1)$$

Desde una perspectiva actual, la deducción de este desarrollo no ha sido muy rigurosa. Hay que tener presente que en esa época, incluso hasta finales del siglo XIX, se manipulaban las series sin preocuparse de su convergencia. Euler llama *naturales* o *hiperbólicos* a los algoritmos asociados con la base *e*.

Si se pone $a^y = e^x$, al tomar *logaritmos hiperbólicos* resulta $y \ln a = x$ [E, p. 115]. Sustituyendo este valor de *x* en (1) se tiene finalmente

$$a^{y} = 1 + (\ln a)y + \frac{(\ln a)^2}{1.2}y^2 + \frac{(\ln a)^3}{1.2.3}y^3 + \cdots + \frac{(\ln a)^n}{1.2.3...n}y^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}y^n \quad ,$$

que representa el desarrollo de la función exponencial de base arbitraria.

La correspondiente función inversa es el *logaritmo neperiano, hiperbólico* o *natural*, en nuestra notación $y = \ln x$. Igual de milagrosa parece la forma en que Euler infirió el desarrollo en serie de la función logarítmica [Dun].

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Veamos ahora un maravilloso resultado que constituyó la consagración definitiva de Euler, la resolución del conocido como *problema de Basilea*. Jakob Bernoulli (1654-1705) fue —entre otras cosas— un estudioso de las series y había obtenido la suma de muchas de ellas. Esto le animó a considerar series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \qquad (2)$$

y, en particular, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \qquad (3)$$

Esta serie era, en apariencia, más sencilla que alguna de las que Jakob Bernoulli había conseguido sumar. Pero tras fracasar en cuantos intentos efectuó para determinar su suma, se vio obligado a lanzar el siguiente mensaje a la comunidad matemática pidiendo ayuda

> *Grande sea nuestra gratitud si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora se ha escapado a nuestros esfuerzos…*

Así nació el famoso *problema de Basilea*. Euler, no podía ser otro, abordó este problema y después de algunas tentativas fallidas, llegó a su solución. Para ello procedió en las siguientes etapas

(i) Considera la función

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Obsérvese que $P(0)=1$.

(ii) Fácilmente establece que

$$P(x) = \frac{sen\ x}{x}$$

Nótese que los ceros de esta función son $x = k\pi$, para $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3...$, no aportando k=0 ninguna raíz.

(iii) Conocidos sus ceros, factoriza la función *P(x)* como si se tratara de un polinomio, así

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

En realidad, Euler ha expresado la función *P(x)* mediante un producto infinito.

(iv) Ahora realiza operaciones en (iii) y el resultado lo iguala con la otra expresión de *P(x)* dada en (i)

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right)x^2 + (\cdots)x^4 + \cdots$$

(v) Finalmente iguala los coeficientes de x^2 en el primer y segundo miembros de (iv) para colegir que

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right)$$

de donde

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

¡Con qué ingenio y finura probó Euler que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$ ¡

El *problema de Basilea* estaba resuelto. Con sus propias palabras, *He encontrado que seis veces la suma de la serie (3) es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es uno…* Y asevera *…se hace patente así que todas las series contenidas en la forma general*

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\&c$$

que, cada vez que p *fuere un número par, se podrá expresar mediante la periferia del círculo* π *; en efecto, la suma de la serie mantendrá siempre una proporción racional con* π^p [E, p. 170]. Después relaciona la suma de las series (2) para todos los valores pares de *p* desde 2 hasta 26. Por simple curiosidad escribimos la última [E, p. 171]

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\&c=\frac{76977927\cdot 2^{24}}{27!}\pi^{26}$$

Más adelante, Euler obtuvo —con la ayuda de los números de Bernoulli— la fórmula general que suministra la suma de la serie (2) en el caso de que *p* sea un número natural par arbitrario. Aunque no tuvo el mismo éxito para valores impares de *p*, en realidad ningún matemático lo ha tenido hasta ahora, fue capaz de ofrecer valores aproximados de la suma de la citada serie para muchos valores impares de *p*.

En *Institutiones Calculi Differentialis* (1755) Euler mostró mayor preocupación por la relación entre las cantidades infinitesimales que por saber en qué consistían. Así, el cociente de dos cantidades infinitamente pequeñas puede ser una cantidad finita bien definida. De este modo considera el cociente incremental

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

(expresión indeterminada del tipo $0/0$) que originaría el concepto de derivada [Dur, p. 168] desplazando las diferenciales de Leibniz. Otras aportaciones de Euler en este libro son un teorema (que lleva su nombre) sobre la caracterización de las funciones homogéneas, una fórmula para derivar cierta clase de funciones compuestas y el empleo del desarrollo de Taylor para hallar los extremos de una función.

Resulta ilustrativo en este punto detallar cómo obtiene la derivada de la función logarítmica. Si ponemos en la notación actual, $y=\ln x$, recurriendo al desarrollo en serie ya visto y a las propiedades de los logaritmos, Euler escribió

$$dy=\ln(x+dx)-\ln x=\ln\frac{x+dx}{x}=\ln\left(1+\frac{dx}{x}\right)=$$

$$=\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{dx}{x}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{dx}{x}\right)^4+\cdots$$

y, arguyendo que las potencias $(dx)^2, (dx)^3, (dx)^4 \ldots$, de la magnitud infinitamente pequeña dx son despreciables cuando se comparan con la propia cantidad dx, concluyó que

$$dy = \frac{dx}{x} \text{ , así que } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{ .}$$

La última obra de esta trilogía, *Institutiones Calculi Integralis*, publicada entre los años 1768 y 1770 en tres volúmenes —cuando estaba a punto de perder completamente la vista— está dedicada al cálculo de integrales (determinando primitivas mediante funciones elementales) y a la resolución de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, como la ecuación de la cuerda vibrante.

Asimismo merece la pena destacar las aportaciones de Euler a una nueva rama de las matemáticas, el *Cálculo de Variaciones*. En pocas palabras, en esta disciplina se trata de determinar las funciones $y = f(x)$ que hacen que la integral

$$\int_a^b g(x, y)dx$$

tome un valor máximo o un valor mínimo. Con estas nuevas técnicas se pudieron abordar el problema de la braquistócrona (la curva más rápida o de descenso más rápido), los problemas isoperimétricos y de las líneas geodésicas sobre superficies, entre otros. Cuando Lagrange le escribió en 1755 para explicarle su teoría general, Euler —que era un matemático completamente consagrado desde hacía tiempo— ya había obtenido muchos resultados en este campo. Además de ser un extraordinario matemático, Euler fue una persona muy generosa. Reconoció que los métodos de Lagrange eran mejores que los suyos, retrasó la publicación de alguno de sus trabajos y prefirió que el joven Lagrange se llevara todos los honores por estos descubrimientos [B]. No obstante, en la mayoría de los textos las ecuaciones que dan condiciones necesarias para la existencia de extremales —así se denominan las funciones $y = f(x)$ que minimizan o maximizan la anterior integral— llevan el nombre de *ecuaciones de Euler*. Ello se ajusta más a la historia.

Las matemáticas también deben a Euler la elección de un buen número de símbolos. No olvidemos que la adopción de una notación adecuada facilita y agiliza la escritura matemática. Así, Euler fue el primero en emplear la notación funcional $f(x)$, introdujo el número *e*, popularizó π para denotar la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro (aunque su introducción se debe a W. Jones en 1706), utilizó Σ para indicar la suma de una serie, creó una notación próxima a la actual para la integración definida… También representó por *i* la unidad imaginaria, si bien en un principio *i* designaba el *numerum infinite magnum* (el infinito) y escribía explícitamente la unidad imaginaria como $\sqrt{-1}$. Por ejemplo, Euler definió en *Introductio*

$$e^x = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i \qquad \text{y} \qquad \ln(1+x) = i\left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\right)$$

en notación de hoy, cuando *n* tiende a infinito,

$$e^x = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{y} \qquad \ln(1+x) = \lim n\left((1+x)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

respectivamente, en tanto que definía

$$sen\; x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}} \quad , \quad \cos x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2}$$

Afirma el historiador de las matemáticas, C. B. Boyer [B] que *Introductio* hizo por el Análisis lo que *los Elementos* de Euclides por la Geometría. Ciertamente, esta obra junto con las dos *Institutiones*, esa trilogía ha ejercido una enorme influencia en las matemáticas. La mayoría de los libros de texto posteriores se basan en las mismas y todo el mundo reconoce que con estos tratados Euler transformó *el Cálculo* de Newton y Leibniz en una importante rama de las Matemáticas modernas: *el Análisis Matemático.*

Bibliografía

- [B] C. B. Boyer: Historia de la matemática, Alianza Editorial, Madrid, 1996.
- [Dun] W. Dunham: Euler. El maestro de todos los matemáticos, Nivola, Madrid, 2000.
- [Dur] A. J. Durán: Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo, Alianza Universidad, Madrid, 1996.
- [E] Leonhard Euler: Introductio in Analisin Infinitorum. Edición de Antonio J. Durán y Javier Pérez; traducción de J. L. Arántegui. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales y Real Sociedad Matemática Española. Sevilla, 2001.
- [N] J. R. Newman: El mundo de las matemáticas, Sigma, Ediciones Grijalbo, Barcelona, 1976.
- [RB] J. Rey Pastor y J. Babini: Historia de la matemática, Gedisa Editorial, Barcelona, 1984.
- [T] The MacTutor History of Mathematics Archive. Página web de la Universidad de Saint Andrews: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk.

José Manuel Méndez Pérez. Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de La Laguna, es profesor de la misma desde el año 1972. Su campo de investigación se centra en el estudio de transformaciones integrales en espacios de funciones y de distribuciones, así como sus aplicaciones.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 27-35
ISSN: 1815-0640

¡Feliz cumpleaños, Leonhard!

Vicente Meavilla

1. Introducción

El 15 de abril de 2007 se cumplió el tricentésimo aniversario del nacimiento de Leonhard Euler, uno de los científicos más notables de toda la historia de la humanidad.

Leonhard Euler (1707-1783). Dibujo de Vicente Meavilla

En las líneas que siguen, a modo de homenaje, ofrecemos cuatro teoremas geométricos incluidos en la memoria *Variae demonstrationes Geometriae* (Algunas demostraciones de Geometría), publicada en 1750.[1] Con ello, pretendemos que los profesores noveles de los niveles no universitarios se sientan animados a incluir en

[1] Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 1, pp. 49-66.

sus programaciones de aula algunos tópicos de *geometría sintética* (tan olvidados en los actuales currículos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas) siguiendo el mismo discurso que utilizaron los grandes maestros. A tal fin, también incluimos una actividad de enseñanza-aprendizaje inspirada en el trabajo de Euler.

Apunte biográfico

Leonardo Euler nació en Basilea (Suiza) en 1707.

Su padre, pastor calvinista, se preocupó de que la formación intelectual de su hijo fuese de gran calidad. Leonardo estudió matemáticas con Jean Bernoulli, física, astronomía, medicina, teología y lenguas orientales.

En 1727, animado por sus amigos y compatriotas Daniel y Nicolás Bernoulli, ingresó en la Academia de San Petersburgo. En 1730 ocupó la cátedra de filosofía natural y a los veintisiete años, después de que Nicolás y Daniel dejasen San Petersburgo, se convirtió en el matemático más relevante de la Academia. A los veintiocho años perdió la vista de su ojo derecho.

En 1741 se incorporó a la Academia de Berlín, pero en 1766 volvió a Rusia. En 1771 se quedó ciego pero ello no impidió que Euler siguiera publicando e investigando.

Leonhard murió en 1783 mientras se estaba tomando una taza de té y jugando con uno de sus nietos.

Se cuenta que cuando el filósofo ateo D. Diderot visitó la corte rusa fue informado de que un matemático suizo había demostrado la existencia de Dios mediante razonamientos de tipo algebraico. Interesado por dicha noticia y esperando rebatir tales argumentos, Diderot concertó una entrevista con Leonardo. Puesto en contacto con Euler, éste le dijo: “Señor $(a + bn)/n = x$, entonces Dios existe”. Diderot, cuyos conocimientos de álgebra eran nulos, se quedó sin respuesta y regresó a Francia.

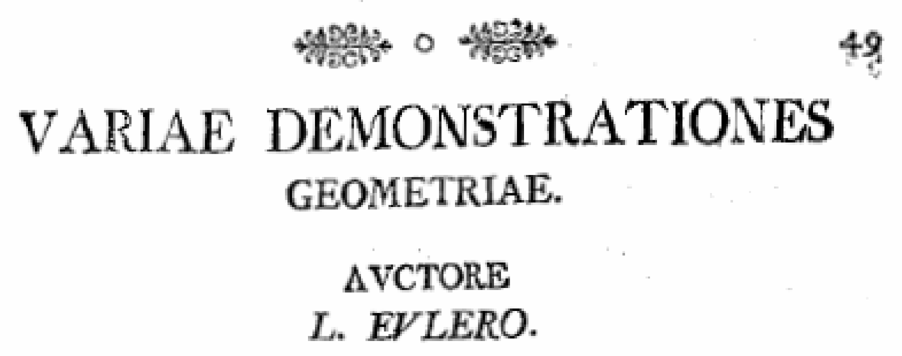
Euler escribió sobre temas relativos a todas las ramas de las matemáticas. A lo largo de su vida publicó más de quinientos libros y artículos y fue padre de trece hijos.

Entre sus numerosísimas contribuciones destacamos las referentes al simbolismo matemático. Así, Euler introdujo el símbolo **e** para la base de los logaritmos naturales; π para la razón de la circunferencia al diámetro; **i** para la unidad imaginaria; **a**, **b**, **c** para los lados de un triángulo; **A**, **B**, **C** para los ángulos de un triángulo; Σ para la suma; **f(x)** para una función de x.

En geometría elemental es famosa su fórmula **c + v = a + 2**, que relaciona el número de caras (**c**), vértices (**v**) y aristas (**a**) de cualquier poliedro convexo.

La expresión $e^{\pi i} + 1 = 0$, que aparece en su *Introductio in analysin infinitorum* (1748), incluye los cinco números más importantes de las Matemáticas.

2. Los teoremas


49

VARIAE DEMONSTRATIONES
GEOMETRIAE.

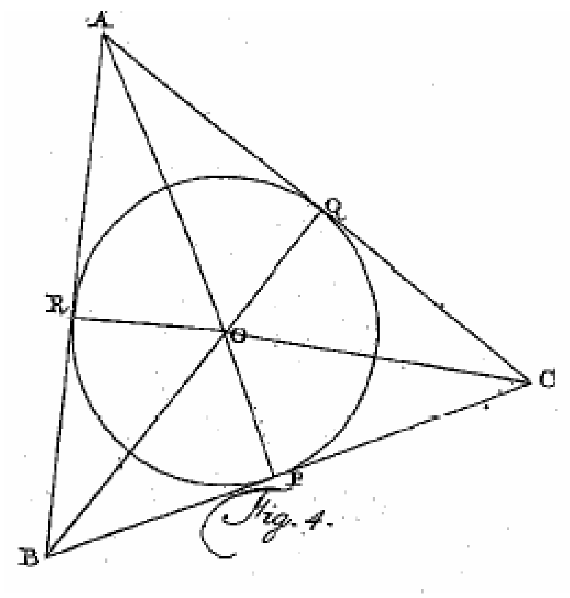
AVCTORE
L. EVLERO.

Advirtamos que en los cuatro teoremas siguientes hemos respetado la numeración que aparece en el texto original, utilizado las figuras que le acompañan y, además, intentado ser fieles al estilo del autor.

Teorema 6

El área de cualquier triángulo ABC es igual a la del rectángulo cuyos lados son la semisuma de las longitudes de los lados del triángulo y el radio de su circunferencia inscrita. Es decir:

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot OP$$



Demostración

Desde el centro O de la circunferencia inscrita trácense las perpendiculares OP, OQ y OR a cada uno de los lados. Estas líneas serán iguales al radio de la circunferencia inscrita. Desde O, trácense las líneas OA, OB y OC que dividen al triángulo propuesto en tres triángulos AOB, AOC y BOC, cuyas alturas son iguales OR = OQ = OP y cuyas bases son los lados AB, AC y BC del triángulo.

Entonces:

$$\text{Área}_{\,ABC} = \text{Área}_{\,AOB} + \text{Área}_{\,AOC} + \text{Área}_{\,BOC} =$$

$$= \frac{1}{2}AB \cdot OR + \frac{1}{2}AC \cdot OQ + \frac{1}{2}BC \cdot OP = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot OP$$

Teorema 7

Si desde el centro O de la circunferencia inscrita al triángulo ABC se trazan las perpendiculares OP, OQ y OR a los lados, entonces:

$$AR = AQ = S - BC$$

$$BR = BP = S - AC$$

$$CP = CQ = S - AB$$

$$AR + BP + CQ = S,$$

siendo $S = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$.

Demostración

Dado que las perpendiculares OP, OQ y OR son iguales, es claro que

$$AQ = AR, \quad BP = BR \quad \text{y} \quad CP = CQ$$

Entonces:

$$AB + AC + BC = 2 \cdot AR + 2 \cdot BP + 2 \cdot CQ \Rightarrow AR + BP + CQ = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = S$$

Por tanto:

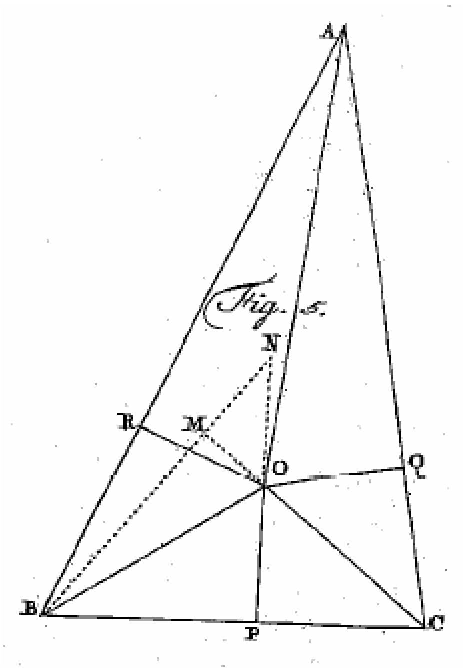
$$AR + BC = S \Rightarrow AR = AQ = S - BC$$

$$BP + AC = S \Rightarrow BP = BR = S - AC$$

$$CQ + AB = S \Rightarrow CQ = CP = S - AB$$

Teorema 8

Si, como antes, desde el centro O de la circunferencia inscrita al triángulo ABC se trazan las perpendiculares OP, OQ y OR a los lados, entonces el producto AR · BP · CQ es igual al producto de S por el cuadrado del radio OP de la circunferencia inscrita. Es decir: AR · BP · CQ = S · OP^2*.*



Demostración

Desde el centro de la circunferencia inscrita dibujemos las líneas OA, OB y OC a cada uno de los vértices del triángulo ABC. Tracemos la perpendicular BM a CO o a su prolongación. Esta línea cortará a OP (o a su prolongación) en el punto N.

Como los ángulos A, B y C son bisecados por las líneas OA, OB y OC,

resulta que:

$$\text{áng. BOM} = \frac{\text{áng. B}}{2} + \frac{\text{áng.C}}{2},$$

dado que el ángulo BOM es exterior al triángulo BOC.

Además:

$$\text{áng. BOM} + \text{áng. OBM} = 90º$$

Por tanto:

$$\frac{\text{áng. B}}{2} + \frac{\text{áng.C}}{2} + \text{áng. OBM} = 90º$$

Por otro lado:

$$\text{áng. A + áng. B + áng. C = 180º} \Rightarrow \frac{\text{áng. A}}{2}+\frac{\text{áng. B}}{2}+\frac{\text{áng. C}}{2}=90º$$

Luego:

$$\frac{\text{áng. B}}{2}+\frac{\text{áng.C}}{2}+\text{áng. OBM} = \frac{\text{áng. A}}{2}+\frac{\text{áng. B}}{2}+\frac{\text{áng. C}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{áng. OBM} = \frac{\text{áng.A}}{2} = \text{áng. OAR}$$

Entonces, los triángulos rectángulos BOM y AOR son semejantes.

Por tanto:

$$\frac{AR}{RO}=\frac{BM}{MO}\Rightarrow\frac{AR}{OP}=\frac{BM}{MO} \qquad [1]$$

Además, como los triángulos rectángulos CBM, NBP y NOM son semejantes, se tiene que:

$$\frac{BM}{BC}=\frac{MO}{ON}\Rightarrow\frac{BM}{MO}=\frac{BC}{ON} \qquad [2]$$

A partir de [1] y [2], resulta que:

$$\frac{AR}{OP}=\frac{BC}{ON}\Rightarrow AR \cdot ON = OP \cdot BC$$

Dado que ON = PN – OP, obtenemos que:

$$AR \cdot (PN - OP) = OP \cdot BC \Rightarrow AR \cdot PN - AR \cdot OP = OP \cdot BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AR \cdot PN = AR \cdot OP + BC \cdot OP = (AR + BC) \cdot OP$$

Como, en virtud del teorema 7, AR + BC = S tendremos que:

$$AR \cdot PN = S \cdot OP$$

Por otro lado, los triángulos rectángulos COP y NBP son semejantes. Entonces:

$$\frac{PN}{BP}=\frac{CP}{OP}\Rightarrow OP \cdot PN = BP \cdot CP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AR \cdot BP \cdot CP = AR \cdot OP \cdot PN = S \cdot OP^2 \Rightarrow AR \cdot BP \cdot CQ = S \cdot OP^2$$

Teorema 9[2]

Se puede calcular el área de cualquier triángulo ABC restando la longitud de cada lado al semiperímetro, multiplicando estas tres diferencias por el semiperímetro y extrayendo la raíz cuadrada de dicho producto. Es decir:

$$\textit{Área}_{\,ABC} = \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$$

Demostración

En virtud del teorema 6, el área del triángulo ABC es igual a

$$\frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot OP$$

Es decir:

$$\text{Área}_{\,ABC} = S \cdot OP$$

Pero, por el teorema 8, sabemos que:

$$S \cdot OP^2 = AR \cdot BP \cdot CQ$$

Entonces:

$$S^2 \cdot OP^2 = S \cdot AR \cdot BP \cdot CQ \Rightarrow S \cdot OP = \sqrt{S \cdot AR \cdot BP \cdot CQ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Área } ABC = \sqrt{S \cdot AR \cdot BP \cdot CQ}$$

Además, en virtud del teorema 7, sabemos que:

$$AR = S - BC$$

$$BP = S - AC$$

$$CQ = S - AB$$

Por tanto:

$$\text{Área}_{\,ABC} = \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$$

[2] En este teorema Euler demuestra la conocida “fórmula de Herón” para el área de cualquier triángulo.

3. La actividad de enseñanza-aprendizaje

Apoyándonos en la demostración del teorema 6 ofrecida por Leonhard Euler, proponemos la siguiente actividad de enseñanza-aprendizaje que puede ponerse en práctica con alumnos del segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (14-16 años).

1. Dibuja un triángulo cualquiera ABC y traza las bisectrices de sus tres ángulos.

¿Cómo se llama el punto O en el que se cortan las tres bisectrices?

¿Conoces alguna propiedad de dicho punto?

2. Desde el punto O traza tres perpendiculares a AB, AC y BC, respectivamente. Sean P, Q y R los puntos en que dichas rectas cortan a los lados BC, AC y AB.

¿Existe alguna relación entre las longitudes de OP, OQ y OR?

3. Divide el triángulo ABC en tres triángulos mediante los segmentos OA, OB y OC.

Compara las longitudes de las alturas de dichos triángulos.

¿Cuáles son las longitudes de las bases de dichos triángulos?

4. Calcula las áreas de los triángulos AOB, AOC y BOC en función de las longitudes de los lados del triángulo ABC y del radio de su circunferencia inscrita.

5. Calcula el área del triángulo ABC como suma de las áreas de los triángulos AOB, AOC y BOC.

4. Una recomendación

La lectura de textos originales, sobre todo si están escritos por grandes científicos, es una rica fuente en la que todo profesor de Matemáticas debería beber en su búsqueda de nuevos enfoques, procedimientos, problemas motivadores, etc., etc.

Por esto, desde aquí una recomendación:

> *Leamos a los grandes maestros, son los únicos que nos pueden abrir caminos en este difícil arte de la enseñanza.*

Referencias on line

- The Euler Archive

  http://www.math.dartmouth.edu/~euler/

Vicente Meavilla
Departamento de Matemáticas
Universidad de Zaragoza (España)
E-mail: vmeavill@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 37-51
ISSN: 1815-0640

¿Conocía Sherlock Holmes la Teoría de Grafos?

Francisco M. Canto Martín, Juan Núñez Valdés y Serafín Ruiz Cabello

Resumen

En este artículo se muestran las ventajas que ofrece la Teoría de Grafos a la hora de resolver determinados problemas clásicos de Matemáticas, que normalmente se suelen intentar probando una a una las diferentes posibilidades existentes, o bien por el conocido método de la "cuenta de la vieja". Su principal objetivo es mostrar cómo esta Teoría facilita una gran cantidad de estrategias útiles para la resolución de estos problemas, de manera más rápida, elegante y sencilla de la habitual. Uno de estos problemas trata precisamente de cómo Sherlock Holmes pudo resolver un caso de asesinato, utilizando los grafos.

Abstract

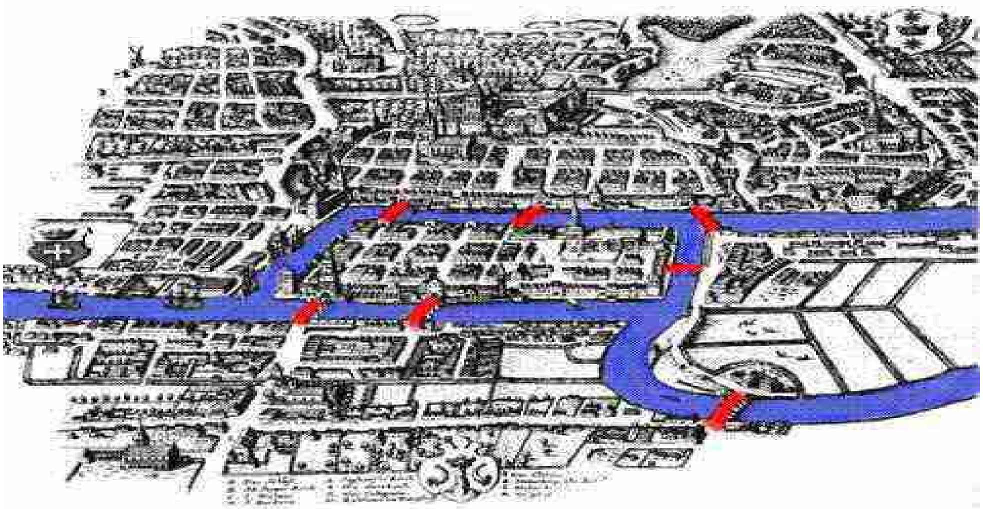
In this paper, we show the advantages offered by Graph Theory to solve some classic mathematical problems, which are normally solved by using other non systematic techniques, such that to go one to one testing different possibilities or to use what in Spain is called "la cuenta de la vieja". Its main goal is to show how Graph Theory allows to systematize and formalize a lot of useful strategies to find the solution of those problems in an easier, smarter and faster way than usual. One of these problems deals with the solution given by Sherlock Holmes to a case of murder by using graphs.

Introducción

Creemos que no es aventurado afirmar que, prácticamente, todos los que nos dedicamos actualmente a la enseñanza de las Matemáticas en cualquiera de sus niveles hemos tenido la experiencia de asistir cuando éramos alumnos a clases de esta disciplina en las que nuestro Profesor, con mayor o menor intención didáctica por su parte algunas veces, o simplemente para pasar el rato en las más de las ocasiones, nos planteaba una serie de problemas totalmente diferentes de los que estábamos habituados a resolver en el aula, a los que no siempre el más listo o empollón de la clase conseguía dar con su solución.

Estos problemas, como los que trataremos en este artículo, eran denominados por el profesor *problemas de ingenio*, o *problemas de razonamiento,* o *pasatiempos,* o simplemente, *problemas curiosos*, y ciertamente que atraían la curiosidad de los más de los alumnos, que nos dedicábamos de lleno a intentar resolverlos, utilizando para ello todo tipo de razonamientos o estrategias particulares de cada uno que, extrañamente, no nos habían sido comentadas en clase y que cuando el primer afortunado en encontrar la solución de alguno de ellos la exponía al resto de sus compañeros, a petición del profesor, naturalmente, y con la lógica timidez, aunque también con el orgullo personal que ello conllevaba, comentaba que su principal argumentación era que había utilizado la *cuenta de la vieja* para resolverlo.

Sin embargo, esto que decimos, que podemos narrar como una experiencia propia, y por tanto, bastante moderna, fue precisamente lo que también le sucedió al genial matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), cuando en 1735 un grupo de jóvenes de la por aquel entonces ciudad prusiana de Königsberg fue a visitarle para pedirle que resolviera una cuestión que inquietaba sobremanera a los habitantes de la misma y sobre la que no llegaban a ponerse de acuerdo: saber si era posible encontrar un camino que atravesase las cuatro zonas de la ciudad en las que ésta quedaba dividida como consecuencia del paso del Río Pregel por la misma, pasando una y sólo una vez por cada uno de los siete puentes que existían para cruzarlo (véase la figura de abajo, que muestra un plano de la ciudad de Königsberg en tiempos de Euler, en la que los siete puentes aparecen coloreados de rojo y el Río Pregel de azul).



Cuando esta cuestión, conocida actualmente con el nombre de *Problema de los Puentes de Königsberg*, le fue formulada a Euler, él mismo comentó:

> *"Se me ha informado que, mientras unos dudaban la posibilidad de hacerlo y otros lo negaban, nadie sostenía que fuese posible realmente. El problema podría resolverse haciendo cuidadosamente una tabla de todos los recorridos posibles, asegurándose así, por inspección, de cuál de todos ellos, si es que alguno hay, satisface lo requerido. Este método de solución, sin embargo, es demasiado tedioso y difícil a causa del gran número de combinaciones posibles… Por tanto, lo descarté y traté de buscar otro que mostrase solamente si se puede descubrir un camino que satisfaga la condición prescrita"*

por lo que, como se puede apreciar, el propio Euler trató de resolver el problema de una forma algo más precisa y metódica que por la simple experimentación de todos los casos posibles. Para ello, Euler pasó primeramente a *modelizar* la situación, prescindiendo de la naturaleza física del problema y sustituyendo las cuatro zonas habitadas de la ciudad por *puntos* y los siete puentes por *líneas* entre esos puntos, con lo cual creó un diagrama geométrico, que constituyó el germen de lo que actualmente conocemos como un grafo. De hecho, esta resolución del problema por Euler, que dio además una solución general al problema, independientemente del número de zonas o de puentes que hubiese en la ciudad, supuso el nacimiento de una nueva rama de las Matemáticas, la *Teoría de Grafos,* distinta de las tradicionales conocidas hasta el momento. Ésta es la razón por la que a Euler se le suele denominar el "*padre de la Teoría de Grafos*", si bien es preciso constatar, en honor a la verdad, que actualmente se admite que esta teoría tiene también otros precursores distintos a Euler, como pueden ser Kirchhoff (problemas de redes eléctricas), Guthrie (problema de los cuatro colores) o Cayley (teoría de árboles). Una visión más completa del problema de los puentes de Königsberg puede ser consultada en Alfonso y otros (2004).

Siguiendo entonces por nuestra parte la metodología de Euler, vamos a resolver en este artículo algunos de aquellos pasatiempos o problemas de ingenio, de los comentados anteriormente, empleando únicamente la Teoría de Grafos como herramienta para su resolución. El principal objetivo de este artículo es, por tanto, hacerle ver al lector que la Teoría de Grafos permite sistematizar y formalizar una gran cantidad de estrategias válidas para la resolución de estos tipos de problemas, que habitualmente suele encontrar el lector resueltos por otros métodos.

No obstante, es también conveniente indicar que, a pesar de su sencillez y de la sin duda, potencial ayuda que esta teoría puede ofrecer como herramienta a utilizar a la hora de resolver ese tipo de problemas antes comentado, el estudio de esta teoría no está contemplado formalmente en ninguna de las etapas del Plan de Estudios español: ni en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12 a 16 años), ni por supuesto en la etapa anterior de Primaria (6 a 12 años), ni siquiera en las Facultades Universitarias de Matemáticas, en las que esta teoría no aparece como asignatura en muchas de ellas, o si aparece, lo hace en forma de asignatura optativa o de Libre Configuración, en el 2º Ciclo (a partir del tercer año de la licenciatura), o bien, como curso, también optativo por regla general, en los estudios de Máster o de Doctorado.

La estructura de este artículo es la siguiente: en primer lugar se recuerdan en una primera sección los aspectos más básicos y elementales de esta teoría, que serán los que se utilicen en las citadas resoluciones, a las que va dedicada íntegramente la segunda sección. Para una visión más global y completa de la Teoría de Grafos, puede consultarse Harary (1991) o Bollobás (1979), por ejemplo.

Aspectos básicos de la Teoría de Grafos

Un *grafo* es un par G = (V, A), donde V es un conjunto numerable (no vacío) y A es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V (eventualmente vacío). Los elementos de V se denominan *vértices* (o puntos o nodos) y los de A se denominan *aristas* (o líneas). Un grafo se dice *etiquetado* si en él se distinguen sus vértices, es decir, si se ha asignado un cierto nombre a cada uno de sus vértices. En caso contrario, el grafo se dice *no etiquetado*.

Un ejemplo de grafo sería: G = (V, A), tal que V = {a, b, c, d}, A = {ab, ac, ad}.

En lo que sigue, denotaremos por G al grafo, por V = V(G) al conjunto de sus vértices y por A = A(G) al conjunto de sus aristas. Un grafo se puede representar de varias formas. De ellas, las más frecuente e intuitiva, aunque no operativa para el uso del ordenador, es mediante un *diagrama* en el que aparezca un punto por cada vértice y una línea entre cada dos vértices unidos. Así por ejemplo, el grafo anterior puede venir representado según:

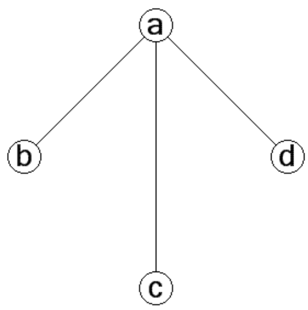


Figura 1

Para el propósito de lo que sigue, exigiremos que en un grafo no existan ni aristas repetidas (en cuyo caso se hablaría de *multigrafos*) ni lazos (aristas del tipo aa, en cuyo caso se hablaría de *seudografos*). No obstante, si se considera A como un conjunto de pares ordenados, es decir, si se les ha dado un cierto sentido a todas las aristas de un grafo, puede hablarse entonces de *grafos dirigidos o digrafos*.

Dos vértices de un grafo se dicen *adyacentes* si ambos definen una arista en el grafo. En este caso, dichos vértices se dicen *extremos* de la arista. Una arista se dice que es *incidente* con cada uno de sus vértices extremos y dos aristas que comparten un extremo se dicen *incidentes*. En el grafo de la Figura 1 puede verse que los vértices a y d son adyacentes, pero b y c no lo son. Por otra parte, todas las aristas de dicho grafo son incidentes (en el vértice a).

Se denomina *grado* de un vértice v de V(G) y se representa por d(v) o bien al número de aristas del grafo que son incidentes con él o bien al número de vértices del grafo que son adyacentes con él. Por convenio, un vértice no se considera adyacente consigo mismo. Los vértices de grado 0 se denominan *aislados* y los de grado 1, *hojas o finales*. Nótese que d(a) = 3, y d(c) = 1, en la Figura 1.

Un grafo se denomina *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado. Si este grado es 2, el grafo se denomina *ciclo* (los ciclos se representan por C_n, siendo n el número de vértices del grafo). Se denomina grafo *completo* (y se representa por K_n) a todo grafo regular de n vértices y grado n-1 cada uno de ellos, es decir, al grafo que tiene todas las aristas posibles. En la Figura 2 aparecen representados C_4 y K_5, respectivamente, de izquierda a derecha.

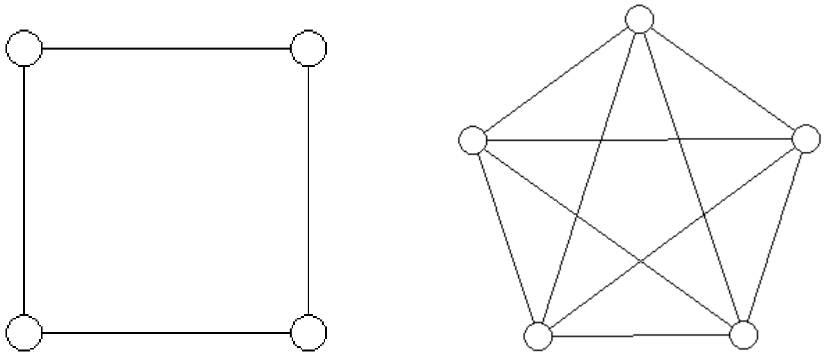


Figura 2

Un grafo G se dice *bipartito* si su conjunto de vértices V se puede descomponer en dos subconjuntos disjuntos no vacíos V1 y V2 de modo que toda arista de G tenga un extremo en V1 y el otro en V2. Si el grafo bipartito tiene todas las aristas posibles, se denomina grafo *bipartito completo*. Si los cardinales de V1 y de V2 son m y n, respectivamente, entonces el grafo bipartito completo se representa por $K_{m,n}$.

Sea G = (V, A) un grafo. Un grafo G' = (V', A') se dice *subgrafo* de G si V' está contenido o es igual que V y A' está contenido o es igual que A. De entre los posibles subgrafos de un grafo, tienen especial trascendencia los subgrafos maximales o spanning. Un subgrafo G' = (V', A') de un grafo G = (V, A) se denomina *maximal o spanning* si V = V', es decir, si G' tiene los mismos vértices que G.

Sea G = (V, A) un grafo. Se denomina grafo *complementario* de G al grafo que tiene el mismo conjunto de vértices que G y verifica que entre cada dos de esos vértices existe una arista si y sólo si dicha arista no existe en G. Nótese que el grafo complementario de un grafo no es un subgrafo de dicho grafo.

Sea v un vértice del grafo G. Se denota por G-v al subgrafo de G que se obtiene eliminando el vértice v y todas las aristas incidentes con él (aunque el otro extremo de tales aristas permanezca).

Sea G = (V, A) un grafo. Un *camino* en G es una sucesión finita de vértices y aristas alternados, cuyo primer elemento es un vértice, tal que dos elementos consecutivos de la misma sean siempre incidentes. Un camino en el que todas sus aristas sean distintas se denomina *recorrido*. Un *arco* en G es un recorrido en el que todos los vértices que lo forman son distintos, y finalmente, un *ciclo* en G es un camino cerrado en G que es un arco excepto en el hecho de que el primer y último vértice coinciden. En el grafo de la Figura 3, la sucesión de vértices (se omiten las correspondientes aristas) a,c,d,g,d,b, sería solamente un camino, mientras que los vértices a,c,d,g,h,e,b ya formarían un arco. Por otra parte, d,e,h,g,d sería un ciclo.

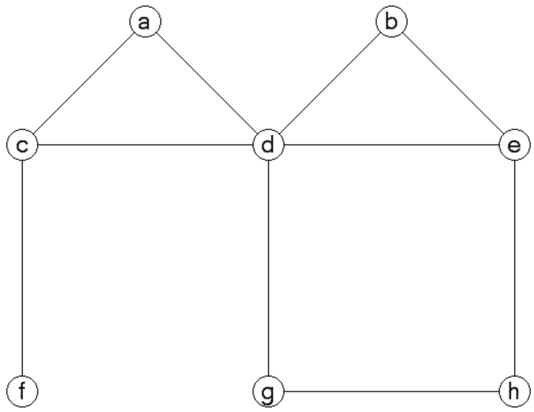


Figura 3

Un camino en un grafo se dice *euleriano* si en él entran todas las aristas y además una sola vez cada una de ellas (puede ser abierto o cerrado), mientras que se dice *hamiltoniano* si en él entran todos los vértices y además una sola vez cada uno de ellos. Nótese que en el grafo de la Figura 3 no hay caminos eulerianos (en Teoría de Grafos se prueba que para que existiesen, el número de vértices de grado impar debería ser 0 (y entonces el camino sería cerrado: empezaría y terminaría en el mismo vértice) ó 2 (camino abierto: empezaría en un vértice y terminaría en otro distinto)). Sin embargo, en el grafo de la figura hay 4 vértices de grado impar.

Un grafo se dice *conexo* si dos cualesquiera de sus vértices pueden unirse mediante un arco. Si un grafo no es conexo, se dice *disconexo*. El grafo de Fig. 3 es claramente conexo.

Algunos Problemas resueltos por Teoría de Grafos

Se presentan en esta sección una serie de problemas clásicos, del tipo de los comentados en la introducción, que pueden ser resueltos utilizando la teoría de grafos. Muchos de ellos son problemas ya conocidos y suelen aparecer en otros textos resueltos por otros métodos. En todos ellos vamos a comprobar que la teoría de grafos nos ayuda a resolverlos de forma más sencilla.

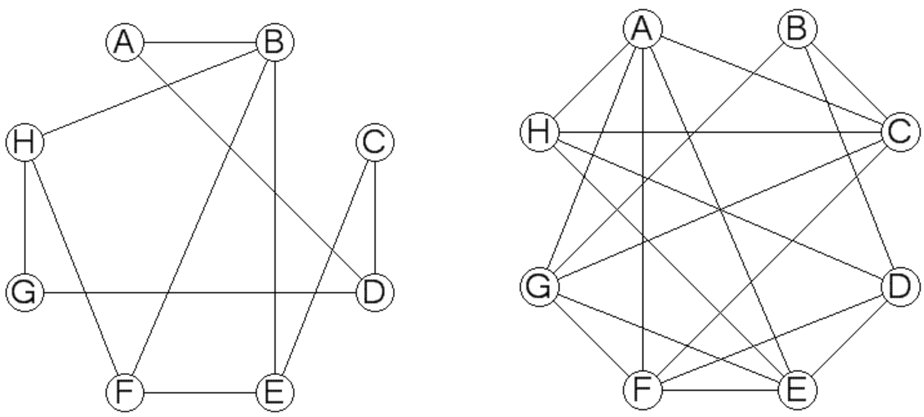
Problema 1.- ***Vecinos incompatibles.***

Se desea sentar a 8 personas en los vértices de una mesa octogonal, pero prestando atención a la siguiente condición: cada uno de ellos no acepta sentarse junto a algunos de los demás. Deducir si es posible hacerlo, respetando que A no quiere sentarse junto a B ni D; B no quiere sentarse junto a A, E, F ni H; C no quiere sentarse junto a D ni E; D no quiere sentarse junto a A, C ni G; E no quiere sentarse junto a B, C ni F; F no quiere sentarse junto a B, E ni H; G no quiere sentarse junto a D ni H; y, por último, H no quiere sentarse junto a B, F ni G.

Normalmente, este problema se intenta resolver probando una a una las posibilidades que a cada uno se le ocurran, sin orden ni concierto, es decir, sin emplear ni una estrategia ni un procedimiento sistemático de actuación. Por otra parte, dado que el número total de posibilidades que hay para sentar a las 8 personas en una mesa octogonal es 5040 ((8-1)! = 7!), sería un esfuerzo bastante improductivo intentar escribirlas todas e ir eliminando una a una aquéllas que no satisficiesen las condiciones exigidas. Sin embargo, veremos que la Teoría de Grafos nos ofrece una forma de resolver el problema muy corta, sencilla y elegante.

Para ello, construiremos un grafo asociado al enunciado de tal forma que cada persona será un vértice y dos vértices compartirán arista en caso de que sus representantes no acepten sentarse juntos (grafo de la izquierda de la figura).

Basta tomar entonces el grafo complementario del anterior, en el que las aristas representarán ahora las posibles compatibilidades. Es muy fácil encontrar entonces en este último grafo un 8-ciclo que nos proporciona la solución. Una posible configuración de la mesa sería la siguiente: [B, C, H, A, F, G, E, D].



Problema 2.- ***Personas que se conocen.***

Dada una reunión de personas, probar que siempre habrá dos de ellas que conozcan al mismo número de personas.

Nótese que un enunciado equivalente al anterior, pero usando terminología de grafos, sería el siguiente: *dado un grafo cualquiera, de n vértices, probar que al menos dos de ellos tienen el mismo grado.*

Ahora es muy sencillo de resolver. Supongamos que no existe tal grafo. Como el grado máximo de cada vértice será (n-1), al no poder ser un vértice adyacente consigo mismo, y el grado mínimo será 0, en caso de que ser aislado, el número de valores distintos que pueden tomar los grados de los vértices es exactamente n. Entonces, al haber también n vértices, la única posibilidad de que no haya vértices con el mismo grado es que un vértice tenga grado 0, otro 1, otro 2, y así sucesivamente hasta otro que tenga grado (n-1).

Sin embargo, aquí se observa una contradicción, pues si hay un vértice de grado 0, esto significa que dicho vértice es aislado, por lo que ningún otro vértice podrá ser adyacente con él. O lo que es lo mismo, ningún vértice podrá tener grado (n-1), como habíamos supuesto. Por tanto, al menos dos vértices tendrán el mismo grado, o volviendo al enunciado original, siempre habrá dos personas (puede haber más, lógicamente) que conozcan al mismo número de otras personas.

Problema 3.- ***Seis personas.***

Probar que en toda reunión de seis personas, siempre habrá tres que se conozcan, o bien tres que no se conozcan entre sí. Probar también que esto no ocurre siempre en grupos de cinco personas.

Para resolver este problema traducimos de nuevo su enunciado a Teoría de Grafos (de hecho, este problema es conocido en esa teoría con el nombre de "*Problema de Ramsey*"). La cuestión es, si dado un grafo cualquiera de seis vértices, será siempre posible encontrar un triángulo en él (un C_3) o en su complementario.

Sea entonces A un vértice cualquiera del grafo, que fijaremos a partir de ahora. Supongamos que A es adyacente con al menos tres vértices distintos, que podemos decir, sin pérdida de generalidad, que son B, C y D. Entonces, si existe una arista entre dos cualesquiera de dichos vértices, habríamos acabado tomando el triángulo formado entre A y dichos dos vértices. En caso contrario, entonces B, C y D no compartirán arista alguna, por lo que en el grafo complementario formarán forzosamente un triángulo.

Por otro lado, si A no fuese adyacente con al menos tres vértices, tomaríamos el grafo complementario. Al haber cinco vértices más, y dado que al menos tres de ellos no eran adyacentes a A en el grafo original, es seguro que A será adyacente a al menos tres vértices en éste. Podemos proceder de manera análoga, con lo que queda probado el problema en todo caso.

Es inmediato demostrar que esto no se cumple en general para cinco vértices. Basta tomar como ejemplo el C_5, es decir, el grafo ciclo de cinco vértices.

Problema 4.- ***La mesa redonda.***

4.1.- *Un grupo de 9 personas se reúne todos los días alrededor de una mesa redonda. Queremos saber cuántos días podrán hacerlo de modo que cada nuevo día tengan al lado a dos personas diferentes. ¿Qué pasaría si fueran 10 personas? ¿Y un número cualquiera de personas?"*

Consideremos el grafo completo K_9, que representa la mesa y todas las posibles relaciones entre sus miembros. Elegir una configuración en la mesa es equivalente a tomar un camino hamiltoniano sobre el grafo (es decir, uno que pase por cada vértice una y sólo una vez). Si dos caminos distintos comparten una arista, eso significa que en las dos configuraciones de la mesa que representan, hay dos personas juntas. Esto es lo que queremos evitar. La cuestión es entonces calcular cuántos caminos hamiltonianos disjuntos podemos encontrar en K_9. Ya que éste posee en total 9 • 8 / 2 = 36 aristas y cada ciclo necesita 9, es inmediato ver que el máximo posible de configuraciones distintas es de 4. Una posible solución es:

[1 2 3 9 4 8 5 7 6] – [1 3 4 2 5 9 6 8 7] – [1 4 5 3 6 2 7 9 8] – [1 5 6 4 7 2 8 3 9]

Ahora veamos el caso de 10 personas. Ya sabemos cómo hay que operar. El K_{10} tiene 10 • 9 / 2 = 45 aristas y cada ciclo necesita 10, luego el máximo posible será 4 configuraciones distintas. Una posible solución sería:

[1 2 3 10 4 9 5 8 6 7] – [1 3 4 2 5 10 6 9 7 8]
[1 4 5 3 6 2 7 10 8 9] – [1 5 6 4 7 3 8 2 9 10]

Es inmediato hacer los cálculos para un n cualquiera (excluyendo los casos triviales n = 1, 2 ó 3). En general, son posibles k soluciones distintas para n = 2k + 1 ó n = 2k + 2.

4.2.- *Supongamos ahora que el grupo es de 12 personas, de las cuáles 6 son hombres y el resto, mujeres. Se desea sentarlos en una mesa redonda atendiendo a la misma regla del apartado anterior y teniendo en cuenta, además, que cada mujer debe estar sentada entre dos hombres y viceversa. ¿Cuántas configuraciones diferentes pueden darse?*

Este apartado es prácticamente similar al anterior, salvo que ahora trabajaremos con grafos bipartitos completos. En este caso particular, con el $K_{6,6}$. Este grafo posee 36 aristas, y un ciclo hamiltoniano cualquiera comprende 12. Luego ya sabemos que, como máximo, habrá 3 configuraciones distintas, Y, en efecto, ésta es la solución pedida. A continuación se muestra una posible configuración:

[M1 – H1 – M2 – H2 – M3 – H3 – M4 – H4 – M5 – H5 – M6 – H6]
[M1 – H3 – M2 – H4 – M3 – H5 – M4 – H6 – M5 – H1 – M6 – H2]
[M1 – H5 – M2 – H6 – M3 – H1 – M4 – H2 – M5 – H3 – M6 – H4]

Problema 5.- *El zorro, el conejo y la lechuga.*

Un pastor (P) necesita cruzar un río junto con sus tres pertenencias: un zorro (Z), un conejo (C) y una lechuga (L). Para ello dispone de una pequeña barca de remos en la que sólo cabe él junto con una sola de sus pertenencias. Sin embargo, no puede dejar solos en una misma orilla al mismo tiempo ni al zorro con el conejo, ni al conejo con la lechuga, para evitar una catástrofe. ¿Le será posible al pastor cruzar el río en estas condiciones? En caso afirmativo, dar los pasos que debe seguir.

Éste es un problema clásico y muy conocido, y no es difícil comprobar que tiene solución, aunque deben darse palos de ciego hasta encontrarla. Sin embargo, veamos que la resolución mediante un grafo de este problema y de otros similares simplifica mucho el proceso de hallar la solución, o de demostrar que no existe.

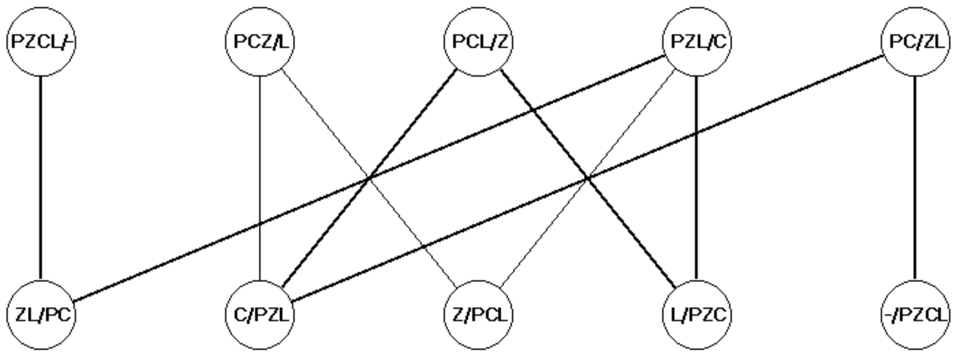
Para ello, sea pues G = (V, A) un grafo tal que cada vértice v_i esté formado por un par (a_i , b_i), de tal modo que cada uno de los elementos del conjunto {P, Z, C, L} esté contenido en a_i ó en b_i para cada i. El primer elemento de cada par representará la orilla izquierda del río y el segundo, la orilla derecha.

Obsérvese que no todas las configuraciones son posibles. Por ejemplo, ({P, Z}, {C, L}) no cumple las hipótesis porque el conejo podría comerse la lechuga. Por comodidad y para simplificar la notación, podemos suponer que v_i = (a_i), ya que el segundo elemento del par es evidente si se conoce el primero. No es muy difícil ver entonces que V tendrá 10 elementos:

V = {Ø, {L}, {C}, {Z}, {Z, L}, {P, C}, {P, Z, C}, {P, Z, L}, {P, C, L}, {P, Z, C, L}}

Dos vértices estarán unidos si puede pasarse de una situación a otra. Por ejemplo, Ø y {P, C} estarán unidos porque el pastor puede llevarse a la otra orilla al conejo en un solo movimiento sin desembocar en una posición de peligro, pero Ø y {L} no compartirán arista porque la lechuga no puede cruzar sola el río.

Ya sólo nos queda representar el grafo G y ver que, efectivamente, existe un camino entre {P, Z, C, L} y Ø. Por lo que el problema tiene solución y, además, es posible darla explícitamente (véase el grafo de la figura).



Problema 6.- *Las dos jarras.*

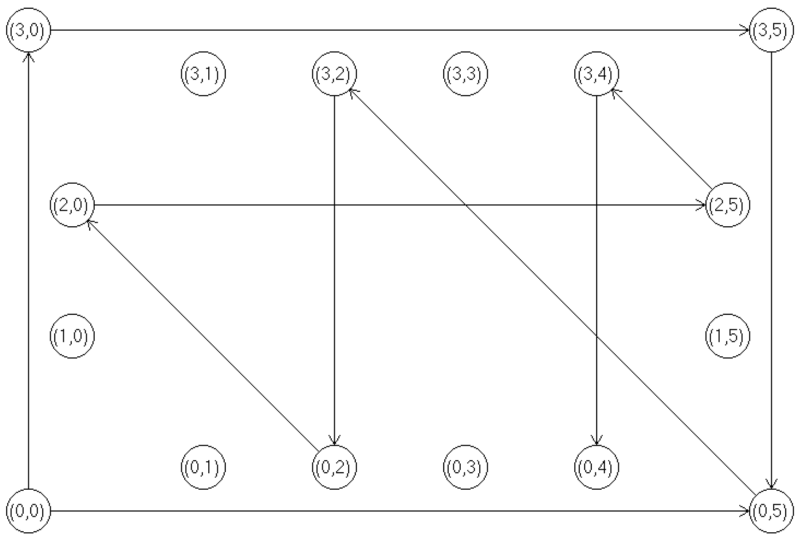
Tenemos un gran bidón de agua del que queremos sacar exactamente cuatro litros. Para ello se dispone únicamente de dos jarras de tres y cinco litros de capacidad, respectivamente, sin medida alguna. Probar que es posible hacer esta operación, mostrando además alguna forma de realizarla.

Nuevamente se trata de un problema clásico y que puede resolverse fácilmente por tanteo, aunque nosotros vamos a valernos de los grafos para resolverlo. Es importante indicar además que aunque la solución que nosotros vamos a dar se ciñe a este enunciado particular, un análisis sencillo de la misma serviría para resolver el caso más general de cualesquiera dos capacidades de las jarras.

Vamos a crear entonces un grafo G que tenga (3 + 1)(5 + 1) = 24 vértices (véase la figura de abajo). Cada uno de ellos se notará como v_{ij}, donde i varía entre 0 y 3 y j varía entre 0 y 5. El par (i, j) corresponde a la configuración en la que la jarra pequeña contiene i litros y la grande j litros. No hace falta decir que el grafo contempla todas las posibles configuraciones de agua en las dos jarras, y los dígitos indican la cantidad de agua contenida en cada jarra. Sería necesario probar que estas cantidades no pueden tomar valores fraccionarios, pero podemos suponerlo cierto, ya que por construcción se verá que es evidente.

En esta figura puede contemplarse dicho grafo que, inicialmente, no contiene aristas. Vamos a construir un nuevo grafo sobre éste, de forma que cada posible trasvase de agua quede representado por una arista. Este grafo va a ser orientado, es decir, los vértices tendrán un único sentido. Esto es fácil de ver con el siguiente ejemplo: podemos pasar de la configuración (2,0) a la (0,0), que no es más que vaciar la jarra pequeña. Pero es imposible pasar de (0,0) a (2,0) en un solo movimiento. En general, dado v_{ij}, existirán aristas con él de origen y destino los siguientes vértices (siempre que tengan sentido y sean distintos al de origen): v_{i0}, v_{0j}, v_{3j}, v_{i5}, v_{a5}, y v_{3b}, donde a = 5 – i –j, b = 3 –i –j. Las operaciones asociadas son: vaciar una de las dos jarras, llenar una de ellas, o volcar el contenido de una en la otra. Por supuesto, no siempre van a ser posibles las seis operaciones. Por ejemplo, si partimos de (0,2) podemos llegar a (0,0), (3,2), (0,5) ó (2,0). Esto nos permite ver que todo vértice que no cumpla i = 0, 3 ó j = 0, 5 va a ser un vértice aislado si partimos de (0,0). Por tanto, no podríamos llegar nunca a (1, 4) ni (2, 4), solamente a (0, 4) ó (3, 4). La idea es encontrar un camino que partiendo de v_{00} llegue a v_{i4}, para un i cualquiera (ya que no podemos tener 4 litros en la jarra pequeña).

A continuación mostramos el grafo final, aunque solo con parte de las aristas, ya que el número total de éstas es elevado y dificulta la visión del problema. Pero es fácil ver que, partiendo de (0, 0), podemos llegar a (3, 0) y (0, 5). Utilizamos éste último para ir a (3, 2), de éste a (0, 2), y así sucesivamente, a (2, 0), a (2, 5) y a (3, 4), que es una de las posibles soluciones, lo que completa el proceso. Conviene reseñar que se han omitido los vértices interiores del grafo original porque ninguna arista podría partir de ninguno de ellos, dado que las jarras no están graduadas y, por tanto, es imposible medir cantidades intermedias en ambas al mismo tiempo.



Problema 7.- ***¿Quién mató al duque de Densmore?***

"Un día, Sherlock Holmes recibió la visita de su amigo Watson, a quien había encargado investigar sobre un misterioso asesinato que estaba sin resolver desde hacía más de tres años.

El Duque de Densmore había muerto al explosionar una bomba que había destruido por completo el castillo de Densmore, a donde éste se había retirado. Los periódicos de aquellas fechas relataban que en su testamento, también perdido en la explosión, no había dejado nada a una de sus siete ex-mujeres. Ahora bien, antes de morir, las había invitado a todas a pasar unos días en el castillo.

-Recuerdo éste caso –dijo Holmes–. Lo curioso es que la bomba estaba diseñada especialmente para ser escondida bajo los pilares de la habitación en la que dormía el Duque. Lo que significa que la asesina tuvo que efectuar varias visitas al castillo para poder activarla.

-Ciertamente –dijo Watson–, y por ello las he interrogado a todas. Y todas me juraron que no habían estado en aquel castillo más que una vez en su vida.

-Tal vez una de ellas mienta. ¿Preguntaste a cada una de ellas que días pasó allí?

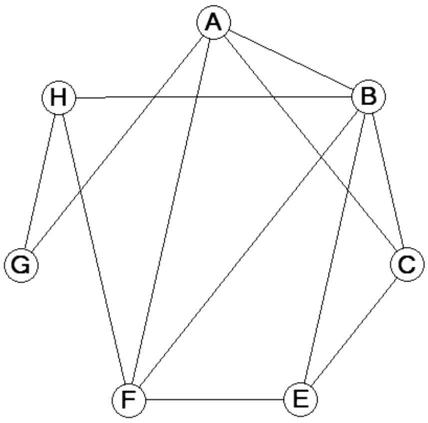
-Sí, pero desgraciadamente, después de tantos años ninguna recordaba las fechas exactas. Sin embargo, cada una de ellas sí recordaba a qué otras esposas había visto allí durante su estancia. Esto fue lo que me dijeron: Ann vio a Betty, Charlotte, Felicia y Georgina; Betty vio a Ann, Charlotte, Edith, Felicia y Helen; Charlotte vio a Ann, Betty y Edith; Edith vio a Betty, Charlotte y Felicia; Felicia vio a Ann, Betty, Edith y Helen; Georgina vio a Ann y Helen; y Helen vio a Betty, Felicia y Georgina.

¿Lo ve, mi querido Holmes? Las respuestas concuerdan unas con otras.

Entonces, Holmes cogió un lápiz e hizo un extraño dibujo, en el que colocó siete puntos con las letras A, B, C, E, F, G y H (la D la reservó para el propio Duque de Densmore), y líneas uniendo algunos de esos puntos. Luego, tras unos minutos, exclamó:

-¡Mira, Watson! Lo que acabas de decirme me conduce de manera única a la asesina.

La pregunta es ¿Quién mató al Duque de Densmore?"

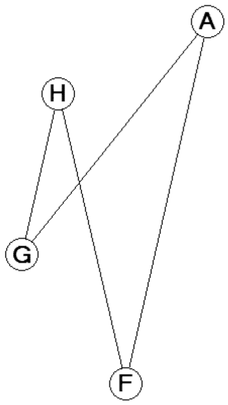


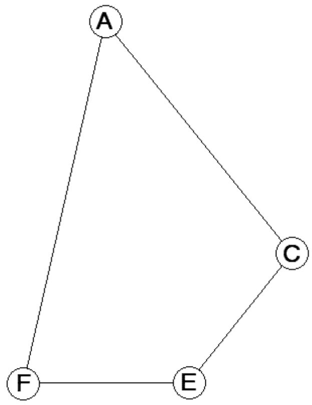
Obviamente, lo que Sherlock Holmes dibujó era un grafo que representaba las relaciones entre las siete mujeres. La estrategia de resolución está basada en una clase de grafos especiales, llamados *grafos de intervalos*. Un grafo G se dirá que es de intervalos cuando exista una colección de intervalos (cerrados y conexos) de la recta real, tales que el grafo que tiene un vértice por cada intervalo de dicha colección y en la que dos vértices comparten arista si y sólo si la intersección de sus correspondientes intervalos es no vacía sea dicho grafo G (para mayor información sobre este tipo de grafos pueden consultarse las website 1 y 2).

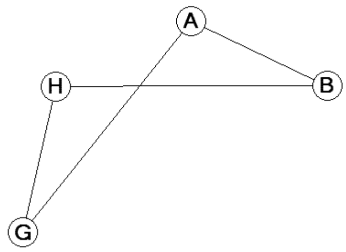
Así pues, parece lógico que el grafo de nuestro problema no vaya a ser un grafo de intervalos, y en efecto, así ocurre (probaremos esto más adelante). Ello es debido a que al menos una de las mujeres miente y estuvo varias veces en el castillo, con lo cuál su intervalo de estancia en éste no es conexo. También veremos que sólo hay un vértice tal que si lo eliminamos del grafo, el subgrafo resultante es de intervalos.

Dicho vértice nos dará la solución.

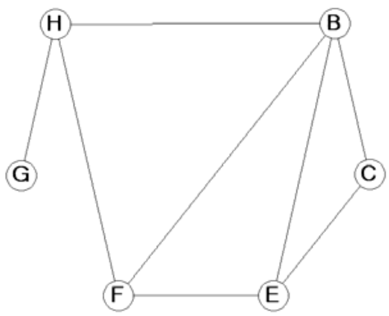
En primer lugar, necesitamos ver que el grafo ciclo C_4 no es un grafo de intervalos. La prueba es muy sencilla. Si llamamos P, Q, R y S a sus vértices, vemos que Q es adyacente con P y R, luego los conjuntos ($I_P \cap I_Q$) e ($I_R \cap I_S$) serán no vacíos. Sea x el máximo del conjunto I_P e y el mínimo del conjunto I_R. Por ser conexos los intervalos (es decir, “de una pieza”), podemos suponer que x < y (el caso opuesto, es análogo y no es necesario analizarlo), siendo además estricta la desigualdad, porque P y R no son adyacentes. Como S es adyacente con ambos, el intervalo correspondiente I_S debe cortar a los otros dos, I_P e I_R. Ello implica que x pertenezca a I_S, lo cual es una contradicción, ya que x también debe pertenecer a I_Q.







Por lo anterior, deducimos que todo grafo que contenga un 4-ciclo, en el que los dos pares de vértices no consecutivos no sean adyacentes, no puede ser un grafo de intervalos. Por tanto, el grafo de nuestro problema no puede serlo, ya que bastaría tomar el 4-ciclo que forman los vértices A, D, F y H. De idéntica manera, considerando los siete subgrafos creados al eliminar cada uno de los vértices del anterior, puede comprobarse rápidamente que sólo unos de ellos es un grafo de intervalos. Ayudándonos de los tres subgrafos arriba señalados, podemos ver que eliminar cualquier vértice que no sea A sigue dejando un grafo de intervalos en el resto. En efecto, el primer subgrafo está construido eliminando los vértices B, C y E; el segundo, B, G y H; y el tercero, C, E y F. Así pues, sólo hay un posible vértice tal que al quitarlo del grafo completo resulte un subgrafo que no sea de intervalos, que es el A. Luego fue Ann quien mató al Duque de Densmore.



Bibliografía

- M. Alfonso, S. Bueno, M. R. Diánez, M. C. de Elías, J. Núñez (2004): "Siete puentes, un camino: Konigsberg". Revista SUMA 45, 69-78.
- B. Bollobás (1979): Graph Theory. Springer-Verlag. New York.
- F. Harary (1991): Graph Theory. Addison Wesley.
- Website1 http://www.lmc.fc.ul.pt/~pduarte/tmf/Grafos/Intervalos-exemplo-5.html
- website2: www.lmc.fc.ul.pt/~pduarte/tmf/Grafos/Intervalos.html#prop-intervalos

Francisco Manuel Canto Martín, nacido el 23 de Junio de 1985 en Ronda (Málaga). Actualmente es alumno de cuarto curso de la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Sevilla, habiendo obtenido numerosas matrículas en las asignaturas de cursos anteriores. Participó en la XXXIX Olimpiada Matemática, organizada por la Real Sociedad Matemática Española en el año 2003, clasificándose para la fase nacional.

Juan Núñez Valdés, nacido en Sevilla en 1952, es Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla, en la que trabaja actualmente como Profesor Titular del Dpto. de Geometría y Topología, con sede en la Facultad de Matemáticas. Su principal línea de investigación son los grupos y álgebras de Lie, habiendo publicado varios artículos sobre los mismos en diferentes revistas de impacto. Pertenece como vocal a la Junta Directiva de la Delegación Provincial de Sevilla de la S.A.E.M. THALES, siendo autor de varias publicaciones sobre Matemáticas Recreativas y Divulgativas, así como también sobre Historia de las Matemáticas.
Dirección: Dpto de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla. Aptdo 1160. 41080-Sevilla (España).
E-mail: jnvaldes@us.es

Serafín Ruiz Cabello, nacido el 8 de Octubre de 1985 en Sevilla. Actualmente es alumno de cuarto curso de la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Sevilla. Participó en la XXXIX Olimpiada Matemática, organizada por la Real Sociedad Matemática Española en el año 2003, clasificándose para la fase nacional. Obtuvo la máxima calificación (M.H.) en la asignatura de libre configuración de Teoría de Grafos.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 53-58
ISSN: 1815-0640

Sesión de aprendizaje en el rincón de lógico-matemática: ¿trabajamos con regletas?

Cristina Caro Cano

Resumen

Raras veces existen publicaciones de experiencias matemáticas en la etapa educativa de Educación Infantil. Este artículo comienza exponiendo unas reflexiones personales sobre los conocimientos matemáticos en esta etapa para pasar seguidamente a describir una experiencia llevada a cabo en un colegio público de la provincia de Sevilla con un grupo de niños y niñas de 4 años que trabajan por primera vez con las regletas cuissenaire y cuyo marco de actuación es el rincón de lógica.

Breve reflexión sobre los conocimientos matemáticos en educación infantil

Muchos de ustedes coincidirán conmigo en que la enseñanza de los conocimientos matemáticos en Educación Infantil no es siempre tarea fácil.

Tradicionalmente, la enseñanza de la matemática consiste en transmitir a los alumnos los conocimientos, casi siempre abstractos, debidamente estructurados. Pero los niños y niñas menores de 6 años no disponen de una inteligencia operatoria y abstracta, lo que dificulta sustancialmente el aprendizaje de estos conocimientos. ¿Qué podemos hacer entonces?

Podemos decir que existen dos posiciones claramente diferenciadas al respecto:

- Una, la de aquellos educadores que piensan que lo que hay que hacer es esperar a que el niño esté preparado para poder entender estos conocimientos y, por tanto, proponen que no se enseñe ningún conocimiento matemático en la etapa infantil.
- Dos, la posición de aquellos compañeros que entienden que lo que hay que hacer es aligerar los conocimientos matemáticos enseñándoles, eso sí, aquellos que se suponen elementales porque han de servir de base al edificio matemático posterior. Es lo que podemos llamar pre–matemática consistente en el aprendizaje de los primeros números y sus grafismos, alguna sencilla operación de cálculo, las formas geométricas elementales…

No obstante, surge una nueva perspectiva, compartida por todos aquellos profesionales que no suscriben la primera posición (no enseñar ningún conocimiento de este tipo) ni tampoco la segunda (que postula la enseñanza de una seudo matemática infantilizada), en la que subyace la siguiente concepción sobre los conocimientos matemáticos: **impregnar de lógica las actuaciones y vivencias de los niños y niñas y ayudarles de esta forma a enriquecer su experiencia llevándoles a una cada vez mayor reflexión y, por tanto, a la construcción de nuevos y complejos significados.**

Ciertamente, a nosotros, educadores infantiles, compete traducir esta idea a fórmulas educativas, gratas y eficaces.

El objetivo fundamental de este escrito no es otro que el de compartir con todos vosotros y vosotras, algunas experiencias que con un grupo de alumnos y alumnas de 4 años he llevado a cabo en el C.E.I.P. Miguel de Cervantes de Los Palacios, en Sevilla.

Las Matemáticas en mi clase

El rincón de lógico-matemática de mi clase está en continuo cambio y continua transformación y construcción. Es una de las características y ventajas que la distribución del aula en rincones de actividad nos permite.

En él podemos encontrar materiales de lo más variado, desde materiales para el conocimiento físico (distintos recipientes, esponjas, bolas de colores, carretes de hilo, diferentes envases…), pasando por materiales reglados y juegos de mesa (juegos de encajar, cartas de figuras seriables, dominós, parchís, oca, barajas de cartas, rompecabezas…) hasta los materiales específicamente matemáticos (números en color, bloques lógicos, reglas, juegos de medida y longitud, regletas…). Todo esto, supongo, igual que en otras muchas aulas de nuestros colegios.

Efectivamente, todos estos materiales van apareciendo de forma progresiva e intencionada en función de las tareas, propuestas didácticas, proyectos de trabajo, etc., que estemos realizando.

Voy a centrarme en uno de los materiales que he nombrado y que lo tenemos, si no en todas, en casi todas las aulas de Infantil: LAS REGLETAS, ¿cómo darlas a conocer?, ¿cómo trabajar con ellas?…

Experiencia con las regletas

Como a muchos de nosotros suele ocurrirnos, muchas veces he tenido una caja de regletas en mi clase y no he sabido sacar partido a este material por desconocimiento de su uso y por ignorar la repercusión que para el cálculo mental tiene trabajar con este tipo de recurso.

Afortunadamente, esta carencia quedó subsanada hace pocos años, es verdad, pero los suficientes para haber descubierto que las regletas son de trabajo y uso obligatorio en cada curso escolar.

Como ya sabemos, las **regletas cuissenaire** son un material matemático destinado básicamente a que los niños aprendan la descomposición de los números e iniciarles en las actividades de cálculo, todo ello sobre una base manipulativa acorde a las características psicológicas del período evolutivo de los alumnos y alumnas.

Añadí este material al rincón de lógica a principios del 2º trimestre. Uno de los alicientes que tienen los rincones es que en ellos van apareciendo materiales que, en ocasiones, descubren los propios niños y niñas sin previo aviso. Así, coloqué la caja de regletas sin decir que había un nuevo material y con la intención de que ellos mismos lo descubrieran. No tardó en llegar la respuesta.

El equipo rojo, que esa mañana visitó primero el rincón, anunció a sus compañeros y compañeras que en lógica había aparecido un nuevo juego. Ante tal descubrimiento había que convocar una asamblea extraordinaria. Los niños y niñas de este equipo eran, en este caso, los encargados de presentar el material, aunque sería con el tiempo que aprenderían todos ellos qué era, para qué servía y cómo utilizarlo.

Investigamos y descubrimos las regletas.

La asamblea resultó muy amena. Manuel volcó la caja de regletas en la alfombra de manera que todos pudiéramos verlas. Dejé a los niños/as que comentaran entre ellos el nuevo descubrimiento, las cogieron, jugaron con ellas unos minutos, las compararon… para desarrollar posteriormente una conversación entre todos. Fui anotando todo lo que decían sobre el material. Las conclusiones fueron las siguientes:

¿QUÉ SON?

- Son barritas de madera.
- Son palitos de colores.
- Algunos son muy pequeños.
- Algunos son más largos.
- Se parecen a las piezas de las construcciones.
- …

¿PARA QUÉ SIRVEN?

- Sirven para jugar.
- Para hacer torres altas.
- Para hacer corralitos.
- Para jugar a las construcciones.
- …

Estas respuestas responden al conocimiento físico que sobre el material han llevado a cabo y que está basado en la abstracción de las propiedades observables que están en los objetos.

El conocimiento lógico–matemático se construirá a partir de las relaciones que los propios niños/as creen entre los objetos. Pero es un largo camino que tenemos que ir “allanando”, facilitando y creando situaciones de aprendizaje.

Un paso fundamental en nuestro trabajo es obtener información acerca de lo que estamos estudiando. En este caso, por tratarse de un material matemático muy específico, soy yo la que trae información a clase: libros (“Los números en color de G. Cuissenaire” de Fernández Bravo), fichas con dibujos de regletas, fotografías de otros niños/as que trabajan con ellas, propuestas extraídas de internet…

Esta información la vamos trabajando en pequeño o en gran grupo y vemos cómo en los libros de consulta se habla de ellas, descubrimos su nombre: regletas, hacemos lectura de imágenes sobre las fotografías…

Al tiempo que vamos descubriendo todas estas cosas en el “plano teórico” los niños y niñas también las van descubriendo en la práctica: juegan con ellas y hacen todo tipo de actividades manipulativas.

Tras varios días de investigación concluimos que:

¿QUÉ SON?

- Son barritas de madera.
- Son palitos de colores.
- Algunos son muy pequeños.
- Algunos son más largos.
- Se parecen a las piezas de las construcciones.
- Su nombre es: regletas.
- Es un material propio del rincón de lógica.
- Las inventó un señor llamado Cuissenaire.

¿PARA QUÉ SIRVEN?

- Sirven para jugar.
- Para hacer torres altas.
- Para hacer corralitos.
- Para jugar a las construcciones..
- Para aprender los colores.
- Para aprender longitudes.
- Sirven para jugar y aprender los números.

Lo que ya sabíamos.

Lo que vamos aprendiendo.

¿QUÉ PODEMOS HACER CON ELLAS?

- Jugar a "las suyas con las suyas". (Agrupar por colores y por tamaños).
- Jugar libremente con ellas.
- Reconocer tamaños.
- Gradación de tamaños. (De menor a mayor y de mayor a menor).
- Escaleras de colores.
- Trenes.
- Muros.
- Figuras.
- Identificación de regletas utilizando el retroproyector.
- …

Así quedó, pues, nuestra parrilla de propuestas, que fuimos haciendo en distintas sesiones en el momento de la jornada dedicado a la lógica-matemática. Como podéis ver, todas ellas son de carácter manipulativo.

Evidentemente, este es un trabajo lento al que hemos de echar muchas ganas y mucha paciencia. Únicamente con el tiempo, y así debe ser, nuestros alumnos y alumnas irán construyendo los conocimientos, eso sí, sobre una base sólida en la que el **proceso** de construcción es lo fundamental.

<u>Las características psicoevolutivas de nuestros alumnos/as condicionan nuestro trabajo</u>. Efectivamente. Recordamos la definición anterior:

"Material matemático destinado básicamente a que los niños aprendan la descomposición de los números e iniciarles en las actividades de cálculo, **todo ello sobre una base manipulativa acorde a las características psicológicas del período evolutivo de los alumnos.**"

Quiero recordar esta definición porque, probablemente, muchos de vosotros/as pensaréis que he centrado el trabajo en la <u>fase manipulativa</u> de toda adquisición de los conocimientos matemáticos. Así es, se trata de un grupo de niños y niñas de 4 años cuyas características psicológicas les van permitiendo la consecución de logros importantes pero, al mismo tiempo, presentan ciertas limitaciones: su pensamiento es concreto, realista e irreversible, lo que impide la ejecución de determinadas acciones de carácter cognitivo.

Por tanto, las fases gráfica y simbólica surgirán gradual y paulatinamente a demanda de los niños/as y a tenor de nuestro buen quehacer docente, que para eso somos los especialistas.

Para terminar, quisiera hacerlo con una frase piagetiana por excelencia y que a buen seguro conoceréis:

> "El pensamiento surge de acciones y los conceptos matemáticos tienen su origen en los actos que el niño lleva a cabo con los objetos y no en los objetos"
>
> **J. Piaget**

Bibliografía

- C. Kamii y R. DeVries (1982): La teoría de Piaget y la educación preescolar. Aprendizaje Visor.
- Fernández Bravo. Los números en color de G. Cuissenaire.

Cristina Caro Cano (1967, Sevilla, España) trabaja en el Centro Miguel de Cervantes de su provincia natal. Es Maestra de Educación Infantil, estudia la Licenciatura en Pedagogía y tiene varias publicaciones.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 59-76
ISSN: 1815-0640

Ensaio sobre a inclusão na Educaçâo Matemática

Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes y Lulu Healy

Resumen

O contínuo movimento das políticas públicas relativas à educandos com necessidades educacionais especiais tem conduzido a um incremento significativo da presença desses aprendizes em salas regulares. Neste artigo discutimos alguns dos desafios associados à inclusão de alunos sem acuidade visual nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática. Apresentamos as vozes dos atores envolvidos nesses processos: professores, alunos e pesquisadores e analisamos aspectos relativos às avaliações aos quais esses aprendizes são submetidos em nosso país.

Abstract

The ever developing public policies related to learners with special needs have led to a significant increase in the presence of these students within regular classrooms. In this article, we discuss some of the challenges associated with the inclusion of visually impaired learners in processes associated with the teaching and learning of mathematics. We present the voices of various actors involved in these processes: teachers, students and researchers and analyse aspects related to the assessment and examination procedures within which these students participate in our country.

Introdução

O movimento pela inclusão presente em nosso cotidiano, seja pela mídia, por organizações sociais ou por políticas públicas, tem consolidado um novo paradigma educacional no Brasil – a construção de uma escola aberta e acolhedora das diferenças. Este paradigma tem levado a busca de uma necessária transformação da escola e das alternativas pedagógicas com o objetivo de promover uma educação para todos nas escolas regulares. Faz-se necessário um breve histórico para que se compreendam os caminhos percorridos para a inclusão de todos os cidadãos em nosso país no âmbito escolar.

Durante as primeiras décadas do século XX as pessoas eram consideradas deficientes por causas fundamentalmente orgânicas, com poucas possibilidades de intervenções (Martín e Marchesi, 1995). Entre os anos 40 e 50 questiona-se a concepção da deficiência, considerando que esta poderia ser conseqüência de uma estimulação inadequada ou de processos de aprendizagem incorretos. Acreditava-se, então, que influências sociais e culturais poderiam ser determinantes para um funcionamento intelectual mais adequado, favorecendo a perspectiva de possíveis intervenções (ibid). Nos anos seguintes, especialmente na década de 70, considerações vindas de outros campos de conhecimento como Medicina, Psicologia e Sociologia, provocam profundas modificações na concepção da deficiência e da educação especial, entre elas começa a ser utilizado o conceito de "necessidades educacionais especiais"[1].

No Brasil, em 1978, uma ementa a Constituição Federal "assegura a pessoa deficiente à melhoria de sua condição social e econômica especialmente mediante educação especial gratuita". Dez anos depois, com a nova Constituição Federal, atribui-se ao Poder Público o "atendimento educacional especializado aos *portadores de deficiência* [grifo nosso], preferencialmente na rede regular de ensino". As chamadas Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1996 estabelecem uma correção social e uma sintonia internacional ao promover a substituição do termo "portadores de deficiência" para "educandos com necessidades educacionais especiais" (Martins, 2002).

Mundialmente, ainda na década de 90 a Conferência Mundial sobre Educação para Todos promovida pela UNESCO prevê uma escola que integre os educandos com necessidades educacionais especiais no ambiente escolar, respeitando a diversidade dos educandos, de modo a contemplar as suas necessidades e potencialidades. Com o propósito de reafirmar o compromisso com a Educação para Todos, em 1994 dirigentes de oitenta e dois países, entre eles o Brasil, reuniram-se em Salamanca, na Espanha, para a "Conferência Mundial Sobre as Necessidades Educativas Especiais". Desse encontro resulta a Declaração de Salamanca, cujos princípios norteadores baseiam-se no reconhecimento das diferenças; no atendimento às necessidades de cada um; na promoção de aprendizagem; no reconhecimento da importância da "escola para todos"; e na formação de professores.

Em 1998, no Brasil, a Secretaria de Educação Fundamental e a Secretaria de Educação Especial em ação conjunta, produziram e publicaram um documento intitulado "Parâmetros curriculares nacionais: Adaptações curriculares. Estratégias para a Educação de alunos com necessidades educacionais especiais" (Brasil, 1998) que passou a compor o conjunto dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), ficando assim em sintonia com a escola integradora proposta na Declaração de Salamanca. Tal documento contempla a adequação curricular, definição de objetivos, tratamento e desenvolvimento dos conteúdos, o processo avaliativo, a temporalidade e organização do trabalho didático-pedagógico, que possam vir a favorecer o processo de aprendizagem do aluno. Deste modo, institui-se por lei que todos os educandos devem ser inseridos no sistema educacional, "sem distinção de condições lingüísticas, sensoriais, cognitivas, físicas, emocionais, étnicas, socioeconômicas ou outras" (p. 19).

[1] O conceito "necessidades especiais" começou a ser utilizado nos anos 60, mas a modificação da concepção dominante deu-se somente na década seguinte. O informe Warnock, solicitado pelo Secretário de Educação do Reino Unido a uma comissão de especialistas, (...) publicado em 1978, teve o mérito de convulsionar os esquemas vigentes e popularizar uma concepção diferente da educação especial (Marchesi e Martín, 1995, p.11).

A legislação mais recente sobre o assunto é a Convenção da Guatemala. O documento, promulgado no Brasil por decreto de 2001, reafirma que as pessoas com necessidades especiais têm os mesmos direitos e liberdades que as demais (Revista Nova Escola, 2003). A atual Política Nacional de Educação Especial define o aluno com necessidades educacionais especiais àquele que "por apresentar necessidades próprias e diferentes dos demais alunos no domínio das aprendizagens curriculares correspondentes à sua própria idade, requer recursos pedagógicos e metodologias educacionais específicas" (Brasil, 1998, p.24).

Os números da inclusão no Brasil

A conscientização de que a Educação é um direito de todos, tem tirado do ostracismo muitos indivíduos que talvez acreditassem não ser possível fazer parte de uma sociedade estruturada para atender cidadãos cujo padrão "normal" fora culturalmente estabelecido. Os números são expressivos. De acordo com dados do Censo escolar: 1998 a 2004 (MEC/INEP[2]), a evolução das matrículas na Educação Especial tanto em Escolas Especiais como em Escolas Regulares passou de 337.326 em 1998 para 566.753 em 2004.

Os dados referentes ao número de matrículas na Educação Inclusiva são ainda mais representativos, considerando que tínhamos 43.923 alunos matriculados em Escolas Regulares em 1998, número que passou a ser 195.370 em 2004 (MEC/INEP). Mas tais dados nos conduzem a algumas reflexões:

- *A Educação Inclusiva que estamos oferecendo aos nossos alunos com necessidades educacionais especiais está dando a eles as mesmas oportunidades dadas aos alunos que se enquadram nos padrões normais?*
- *Estamos certos de que os currículos existentes e aplicados nas escolas atualmente atendem satisfatoriamente aos anseios dos sujeitos da educação a ponto de pretendermos que* ***todos*** *os cumpram?*

Problemática e projeto de pesquisa

Nossas pesquisas vêm de encontro com a necessidade de discutir e buscar meios de preparar professores e instituições educacionais para o trabalho de objetos matemáticos com aprendizes com necessidades educacionais especiais, particularmente portadores de cegueira ou visão subnormal. Buscamos apoio nas teorias contemporâneas sobre o desenvolvimento psicológico de aprendizes com necessidades educacionais especiais – que trazem uma visão pós-vygotskiana – as quais destacam ser através da ação sobre o ambiente e da comunicação social que estes educandos podem dominar as habilidades mentais que os permitem o conhecimento da realidade (Cole e Wertsch, 1996; Valsiner e Veer, 1996; Oliveira, 2002).

[2] Ministério da Educação e Cultura/ Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Hoje, ao abordar temas que envolvem necessidades educacionais especiais, o foco das atenções não são as dificuldades específicas dos educandos, mas o que os educadores podem fazer para dar respostas às suas necessidades específicas, respeitando a diversidade de cada indivíduo. É acreditando nas potencialidades inerentes aos educandos que temos desenvolvido nossas pesquisas. Atualmente desenvolvemos um projeto que conta com a participação de professores e alunos sem acuidade visual dentro dos padrões normais inseridos em classes comuns de uma escola estadual de São Paulo[3].

Neste artigo, pretendemos considerar como a inclusão tem sido vivenciada pelos atores envolvidos neste projeto – professores de Matemática e seus alunos; em particular o que se refere ao processo de avaliação aos quais aprendizes sem acuidade visual são submetidos pelos sistemas educacionais; ao acesso a materiais pedagógicos e a formação oferecida aos nossos professores. Para tanto, fixaremos nossos olhares em questões mais específicas:

- *Os professores consideram que seus cursos de formação inicial ou continuada os instrumentalizam adequadamente para a prática docente em classes inclusivas?*
- *Os alunos acreditam que os exames nacionais aos quais são submetidos adequam-se a realidade vivenciada por eles em seu cotidiano escolar? Estes mesmos exames atendem satisfatoriamente o proposto pelos PCN-Adaptações curriculares documento vigente nesse país?*

A voz dos atores

Procedimentos metodológicos e participantes da pesquisa

Neste projeto contamos com a participação direta de quatro profissionais que atuam na escola: dois professores de Matemática, a professora da sala de recursos e a vice-diretora. Os alunos sem acuidade visual dentro dos padrões normais que participam do estudo o fazem de forma voluntária e até a presente data contamos com a colaboração de treze alunos do Ensino Médio (15 a 18 anos). Neste artigo apresentamos as análises de três atividades de nossa pesquisa: (1) entrevistas individuais com os professores de Matemática, (2) entrevistas em grupo com sete alunos cegos e (3) estratégias para a resolução de exercícios escolhidos a partir das provas oficiais, realizados por quatro alunos trabalhando com diferentes sistemas mediadores. As duas primeiras visam trazer as vozes dos atores sobre o processo de inclusão na escola em que atuam. A terceira pretende discutir os processos de avaliação aos quais aprendizes cegos são submetidos. Os dois professores de Matemática atuam em classes inclusivas, o denominado *Professor 1* a doze anos e o *Professor 2* a três anos. Nessas entrevistas almejávamos identificar o tipo de trabalho que realizam com seus alunos, a formação acadêmica ou continuada a que tiveram acesso, que material pedagógico os auxilia, suas angústias e satisfações.

[3] Esta pesquisa foi feita como parte do projeto A Inclusão de Aprendizes com Deficiências Visuais nas Aulas de Matemática: O Caso de Geometria, financiado pela FAPESP, Processo No. 2004/15109-9

Dos sete alunos que participaram das entrevistas cinco são portadores de cegueira congênita e dois têm visão subnormal. Nossa intenção era promover o debate sobre questões relativas à inclusão. As perguntas foram formuladas de forma impessoal, para isso usamos expressões como: “algumas pessoas consideram”, “há uma discussão entre duas posições”; de tal forma que as respostas dadas pelo grupo pudessem ser concordantes, discordantes ou ambas.

A metodologia das entrevistas seguiu os padrões de Fontana e Frey (2000) que vêem nas entrevistas uma poderosa ferramenta, para compreender como vivem e contar histórias contemporâneas de indivíduos, grupos ou organizações, numa sociedade caracterizada pelo individualismo e pela diversidade. Neste texto apresentamos resultados de quatro sessões que foram vídeo e áudio gravadas.

O professor

Os professores entrevistados relatam que quando se deparam pela primeira vez com alunos cegos em suas salas de aula, perguntas como: “*o que fazer; como ensinar, como usar a lousa, que exemplos utilizar*”, tomam conta dos pensamentos. Nos depoimentos são unânimes ao afirmar que não tiveram formação adequada em sua vida acadêmica ou continuada para lidar com tais aprendizes.

> *Quando eu encontrei pela primeira vez com um aluno dv*[4] *na sala pensei que não era um professor suficientemente bom que pudesse enfrentar aquela situação. Eu já tinha problemas com os videntes, como eu poderia lidar e ensinar alguma coisa para os que não podiam ver?* (Professor 1).

Mesmo os mais experientes têm questões que os afligem. A falta de livros didáticos para alunos cegos ou com visão subnormal é uma das realidades que enfrentam, principalmente no Ensino Médio. O material impresso que é entregue aos alunos com deficiência visual é feito na própria escola pela professora da sala de recursos, que os produz um a um em máquina Perkins. Naturalmente, nem todo material empregado durante as aulas é transcrito para o Braillle, já que a professora da sala de recursos trabalha na Instituição meio período e atende a todos os professores da escola.

> *Nem sempre eu consigo prever com uma semana de antecedência a aula que vou dar. Quando começo um conteúdo é natural por um desenho ou escrever alguma coisa na lousa. Se o aluno dv não tem a aula em Braille digo a ele que depois sentarei ao lado dele para explicar. Naquele momento ele fica excluído, e eu não acho isso certo, mas não sei como fazer de outra forma naquele momento.* (Professor 2).

A falta de material de apoio pedagógico adequado para o trabalho com alunos portadores de deficiência visual é outra questão que enfrentam. Alguns materiais são adaptados pelos próprios professores com muita criatividade. Um deles contou-nos que para introduzir o conceito de matrizes utilizou com um aluno cego formas de gelo. Elas permitiram que ele mostrasse ao aluno linhas e colunas e a disposição

[4] Deficiente visual.

dos elementos numa matriz. Em outras situações é a falta de formação que impede a utilização do pouco material disponível na sala de recursos.

> *Eu estou nessa escola há doze anos, e é uma escola que trabalha com deficientes visuais, eu nunca, nunca ouvi dizer que a Delegacia de Ensino está oferecendo uma palestra, um curso... Nada, absolutamente nada.* (Professor 1).

> *Eu nunca recebi uma formação especial para trabalhar com alunos dvs. O que eu faço eu aprendi na minha experiência de vida.* (Professor 2).

Um dos preceitos ditados pelos PCN Adaptações Curriculares é que o professor seja especializado em todos os alunos, inclusive os portadores de necessidades educacionais especiais. Para tanto é preciso pensar um modelo de escola que atente para os recursos humanos, mais especificamente para os professores que precisam ser efetivamente capacitados para transformar sua prática educativa.

Em relação ao conteúdo matemático os professores declaram que, de fato, não são abordados todos os conteúdos destinados ao Ensino Médio, e os motivos apresentados são diversos. Afirmam que de modo geral os alunos chegam ao Ensino Médio sem os conhecimentos necessários para o desenvolvimento do conteúdo programático. Segundo eles, mesmo os alunos cegos que vêm de Escolas Especiais não ingressam na primeira série do Ensino Médio com uma fundamentação sólida em Matemática.

> *A gente até inicia os conteúdos, mas como a coisa não anda a gente acaba escolhendo os exercícios mais fáceis e vai até determinado ponto. Não vamos muito a fundo.* (Professor 2).

Declaram ainda, que alguns conteúdos não são trabalhados por falta de preparo deles próprios, que se questionam a respeito de como abordá-los tendo em suas salas alunos sem acuidade visual dentro dos padrões normais.

> *Eu nunca trabalhei com Geometria Espacial com meus alunos. Já trabalhei Geometria Analítica, mas eu acho meio complicado. O cara nunca enxergou e eu quero trabalhar cilindro com ele. Tudo bem que o cara vai poder pegar, mas é uma coisa que a falta de preparo, a falta de clareza de como eu vou fazer o cara entender isso. Será que junto com os outros ele vai conseguir entender isso? Isso me deixa angustiado.* (Professor 1).

Em outras situações a falta de material de apoio pedagógico interfere diretamente na prática do professor.

> *Algumas vezes, quando os alunos trabalham com gráficos ou desenhos, os alunos dvs fazem outras atividades ou simplesmente esperam que os colegas terminem a atividade. Nessas horas não acho que eles estão incluídos.* (Professor 2).

As dificuldades enfrentadas no processo de ensino-aprendizagem pelos professores não se restringem aos alunos com necessidades educacionais especiais, mas sim a todos os alunos. Obviamente os professores, cidadãos críticos questionam sua formação acadêmica que não os preparou para ajustar o seu *fazer pedagógico* às necessidades dos seus alunos, tenham eles necessidades educacionais especiais ou não.

De acordo com os PCN-Adaptações Especiais é preciso adequar os currículos para atender às necessidades dos alunos e flexibilizar o processo de ensino-aprendizagem, no entanto temos evidências de que esse procedimento tem sido orientado por restrições pedagógicas e metodológicas dos professores e não somente para atender as necessidades dos seus alunos. De modo geral os professores mostram-se dispostos a enfrentar o desafio da inclusão, no entanto são os alunos os receptores de seus sucessos e frustrações.

O aluno

Os alunos entrevistados fazem planos e têm sonhos exatamente como seus colegas videntes. Planejam o curso superior que pretendem fazer, a família que querem ter e são otimistas em relação ao próprio futuro e ao futuro do país. Nas discussões sobre fatos que estão na mídia mostram-se conectados ao mundo que os cerca. De um modo geral estão satisfeitos por fazer parte da comunidade escolar. Sentem-se acolhidos pelos colegas, professores, direção e funcionários da escola, e a maioria diz não conseguir imaginar-se em Escolas Especiais.

> *Eu entrei aqui morrendo de medo. Como vai ser a matéria, como vão ser os professores, os colegas. Eu tava com muito medo. Porque eu tava numa Escola Especial ... Foi uma mudança muito drástica ... O pessoal aqui me tratou muito bem. Não era tudo aquilo que eu estava imaginando. Devagar eu fui fazendo amizade com meus amigos na classe. No começo eles não conversavam muito comigo porque achavam que eu ia ficar chateado, sabe. Essas coisas do pessoal que enxerga. Eles têm um pouco de medo de conversar com a gente porque acham que a gente vai se ofender, porque acham que a gente vai ficar chateado. Antes eu só tinha amigos deficientes* [na Escola Especial] *e agora não. Eu tô gostando muito daqui. A diferença é muita, mas eu não estou mais com medo* (Aluno 1).
>
> *Dentro da sala de aula nos temos a ajuda de muitas pessoas que enxergam. As pessoas* [os colegas de classe] *explicam e quando fazemos trabalhos em grupo você sempre acaba trocando informações, ajudando e participando* (Aluno 3).

Alguns desses alunos concluíram o Ensino Fundamental (6 a 14 anos) em Escolas Especiais e ao traçar um paralelo entre estas e a Escola Regular deixam claro que a convivência com colegas videntes os faz sentir parte integrante de um mundo que classificam como “real”, ou seja, quando recordam das Escolas Especiais, uma escola totalmente estruturada para cegos lembram-se da sensação de estar num mundo que não existe, onde todos não podem enxergar, todos falam a mesma linguagem e todos têm as mesmas necessidades.

> *A Escola Especial é um mundo fechado, só de deficientes. O legal é você ter inclusão com as outras pessoas, se comunicar. É bem legal isso* (Aluno 1).
>
> – [A inclusão] é *um ganho, porque na sociedade vamos conviver com pessoas cegas e não cegas* (Aluno 3).

– Realmente, se você ficar num local só com pessoas com deficiência, lá fora você não vai saber lidar com as pessoas que enxergam porque a maioria das pessoas enxerga. Você precisa estar num lugar onde têm pessoas com deficiência ou não (Aluno 2).

Um dos pontos positivos destacados a respeito das Escolas Especiais é a existência de livros didáticos e a abundância de materiais de apoio pedagógico, como os professores os alunos ressentem-se principalmente da falta do livro didático.

O que falta é livro ... Nossas dúvidas não são tão diferentes das dúvidas das pessoas que enxergam. Se nos tivéssemos o livro didático ajudaria muito. Só as explicações não ajudam a perceber a estrutura, a seqüência. Na Matemática é importante ter a parte escrita porque tem muito número, muito símbolo (Aluno 3).

Entretanto outros pontos importantes foram destacados, como, por exemplo, a falta de materiais didático-pedagógicos que pudessem auxiliar o estudo de matemática.

O problema mesmo é a falta de material para suprir nossas necessidades (Aluno 1).

A Matemática para os alunos sem acuidade visual dentro dos padrões normais dessa escola é uma disciplina especialmente "*complicada*", só comparada em grau de dificuldade com a Física e a Química.

A Matemática tem muito gráfico, símbolos e fórmulas. Depende da abordagem do professor. Se o professor ajuda, dá exemplos e material a matéria fica mais fácil (Aluno 4).

Matemática é muito difícil. O professor fala "passa pra lá, corta aqui" e eu não entendo o que ele fala... O professor fala é uma letra deitadinha assim, um tracinho, e eu fico pensando: o que é isso? (Aluno 5).

Sobre as aulas de Matemática, destacam a abordagem tradicional usadas nas aulas, essencialmente expositivas seguidas de exercícios de aplicação e enfatizam a necessidade de contextualização e a falta de recursos para pesquisas. Acreditam que tais experiências poderiam ser facilitadoras no caso de, por exemplo, trabalhos com gráficos.

Gostaria de ter aulas práticas, exercícios com materiais táteis e ainda de ter acesso a materiais de pesquisas com livros e Internet. (Aluno 3).

Eu acho que a matéria deveria ser mais detalhada. Assim, com análise de gráficos, por exemplo. Não é só colocar exercícios na lousa explicar e pronto. (Aluno 4).

Questionados sobre a existência de conteúdos matemáticos especialmente complexos para alunos sem acuidade visual dentro dos padrões normais a resposta foi negativa. No entanto, falando sobre a Geometria afirmam que normalmente este assunto não é abordado pelos professores. Um dos alunos, atualmente matriculado na terceira série do Ensino Médio, nos contou que durante sua vida escolar quando os professores trabalharam conteúdos geométricos ele era submetido a um processo distinto do da turma.

> *Geometria estudei muito pouco, porque a gente não faz desenho em sala de aula. Eu, por exemplo, uso reglete. Então, os professores, geralmente dão uma pulada nessa matéria. Fazem um trabalho como compensação de nota mais no plano de conceitos... A coisa mais simples para equivaler a nota.* (Aluno 3).
>
> *Geometria eu não sei nada. Assim... eu tive alguma coisa dessa matéria, mas não aprendi nada.* (Aluno 5).

Outro aluno, portador de visão subnormal que utiliza tipos ampliados, nos conta que a Geometria, para ele, é especialmente difícil, pois com tipos ampliados consegue enxergar as letras, mas não as linhas do desenho. Mesmo os alunos entrevistados que fizeram o Ensino Fundamental em Escola Especial declaram ter estudado pouca Geometria.

> *Praticamente eu não tive Geometria* [na Escola Especial]. *A professora até iniciou, mas o ano acabou e eu não vi praticamente nada de Geometria* (Aluno 1).

As falas de nossos alunos indicam que o impedimento não é propriamente o conteúdo matemático, mas a adequação do material, a falta de recursos e talvez o tipo de abordagem dos conceitos.

O sistema de avaliação

Na escola que acolhe nosso projeto os alunos sem acuidade visual dentro dos padrões normais realizam as avaliações com os demais alunos no horário regular de aula. Geralmente os professores entregam as avaliações com antecedência para a professora da sala de recursos para que ela as transcreva para o Braille.

Entre os professores entrevistados não há um procedimento único relativo elaboração da avaliação. Um deles declarou que as avaliações oferecidas aos alunos cegos são as mesmas que os videntes realizam, no entanto outro nos diz que as avaliações envolvem o mesmo conteúdo, mas não as mesmas questões.

> *Quando tem alguma questão que a gente não entendeu ela* [a professora] *simplesmente anula e troca por uma que envolve contas ou solução de problema.* (Aluno 3).

Os alunos justificam ser a falta de recursos materiais o impedimento para que o professor possa lhes aplicar a avaliação realizada pela turma. Dizem que as questões, que envolvem gráficos ou desenhos, são normalmente substituídas por questões mais teóricas ou problemas que não exijam diagramas. Em geral, no entanto, um ponto importante que reforça o sentimento de inclusão desses alunos é que o processo ao qual são submetidos na escola não os faz sentir diferentes, pois em momento algum, dentro da escola, eles se sentem favorecidos ou prejudicados. Esse sentimento de inclusão não caracteriza suas experiências em outros sistemas de avaliação a que são submetidos. Consideram que quando realizam exames nacionais, regionais ou para ingresso nas universidades, às provas são iguais às feitas pelos alunos videntes, o que os deixa em desvantagem.

> *O complicado é que na prova de vestibular não tem como você escrever no canto: não sei isso porque sou deficiente visual e não tive isso na escola. Tem que saber ou não saber, e na sala de aula tem muita coisa que pula. E assim como que o professor vai dar um conceito pra você se ele tem só esse ou aquele recurso. Então ele faz uma prova diferente pra gente*. (Aluno 3).
>
> *O professor muda porque não tem como explicar aquilo pra gente. Ai então ele muda e faz uma prova diferente pra gente*. (Aluno 2).

Um aluno com visão subnormal diz que foi "*horrível*" fazer o ENEM[5] no ano de 2005, onde mais da metade das questões exigia interpretação gráfica. Os alunos que fazem as provas com a ajuda da leitura feita por outra pessoa – os ledores – afirmam que a interpretação da pessoa que está lendo influencia suas respostas e que essa influência nem sempre é positiva.

Aprendizagem de Geometria

As falas dos alunos e dos professores entrevistados sugerem que alguns tópicos de Matemática são tratados de forma diferenciada para os aprendizes cegos, e nem sempre esse diferencial favorece o processo de aprendizagem, particularmente no caso da Geometria, que geralmente é deixada de lado. Nossos estudos prévios nos permitem afirmar que não há âmbito do domínio da Matemática que seja vetado para os cegos. Recebendo os estímulos adequados para empregar outros sentidos; como o tato, a fala e a audição; o educando sem acuidade visual estará apto a aprender, desde que se respeite à singularidade do seu desenvolvimento cognitivo (Fernandes, 2004). É preciso, estarmos conscientes que as principais dificuldades não são necessariamente cognitivas, mas sim de ordem material e técnica, e que frequentemente, condicionam o ritmo de trabalho de um aluno cego na hora de aprender Matemática.

O indivíduo sem acuidade visual dentro dos padrões normais capta e processa informações dos objetos através do sistema háptico (ou tato ativo). Desta forma, o trabalho com estes aprendizes exige a utilização de recursos materiais que possam ser adaptados às suas necessidades específicas (Fernandes, 2004), ou seja, que estimule o tato, um dos seus principais canais de exploração. A elaboração de ferramentas materiais deve considerar que estas não servem simplesmente para facilitar os processos mentais o que poderia ocorrer de outra forma. Fundamentalmente elas formam e transformam esses processos (Cole e Wertsch 1996), e esta tem sido fonte norteadora para a construção das ferramentas que utilizamos em nossos estudos. A importância da utilização de ferramentas táteis, no caso dos alunos com acuidade visual, no processo de aprendizagem tem sido um dos objetos de estudos de alguns trabalhos que temos desenvolvido.

[5] Exame Nacional do Ensino Médio, aplicado aos alunos do Ensino Médio anualmente em nível nacional.

Neste artigo, partindo da premissa de que a disponibilidade de diferentes sistemas mediadores influencia o desempenho dos alunos cegos, designamo-nos a discutir o processo de avaliação oferecido a esses alunos pelo sistema de ensino. Optamos pelos exercícios de Geometria propostos na prova do SARESP ao qual aprendizes sem acuidade visual foram submetidos em 2005.

O SARESP é o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, criado em meados da década de 90, para avaliar o sistema de ensino paulista, através do rendimento escolar dos alunos de diferentes séries e períodos, identificando os fatores que interferem nesse rendimento (SARESP, 2005). A participação no SARESP é compulsória para todas as escolas estaduais administradas pela Secretaria Estadual da Educação do Estado de São Paulo, e centra-se na avaliação das habilidades cognitivas de Leitura e Escrita e de Matemática, adquiridas pelos alunos ao longo de todas as séries dos Ensinos Fundamental e Médio. Tais habilidades são selecionadas de acordo as Propostas Curriculares da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP) e os Parâmetros Curriculares Nacionais.

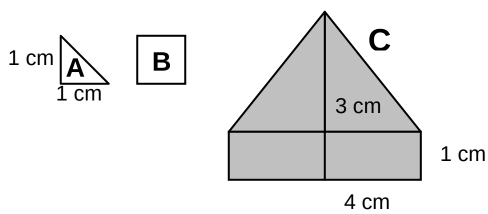
Das duas questões enfocadas nas análises deste artigo, uma destinava-se a discutir a decomposição de figuras planas e outra simetria. Para essas questões, além da versão em Braille com figuras em relevo preparamos, com a colaboração dos professores da escola, duas ferramentas materiais destinadas a favorecer a percepção tátil. As ferramentas, agregam-se as características baixo custo e facilidade de reprodução. Nosso objetivo era investigar não apenas a adequação das provas para alunos sem acuidade visual, mas oferecer subsídios que pudessem auxiliar na reflexão dos órgãos responsáveis pela elaboração de tais provas.

Os alunos que participaram desse estudo estão matriculados nas três séries do Ensino Médio (de 15 a 18 anos). Para cada um escolhemos um nome fictício. André e Dani são portadores de cegueira congênita; Leandro perdeu totalmente a visão aos dois anos de idade e Carla é portadora de visão subnormal e utiliza tipos ampliados. Cada um deles respondeu aos exercícios usando respectivamente o texto em Braille e as duas outras ferramentas apresentadas abaixo. A cada realização o aluno poderia ratificar a resposta dada na situação anterior, escolher outra alternativa ou não escolher alternativa. Após a conclusão do exercício, o aluno deveria apontar qual das ferramentas facilitou a solução do exercício.

Os exercícios e as ferramentas

Exercício 1 – (6ª série p.20 exercício 19) A figura **C** pode ser decomposta em quadrados "**B**" e triângulos "**A**" da seguinte maneira:

a) 3 triângulos "**A**" e 5 quadrados "**B**"
b) 4 triângulos "**A**" e 6 quadrados "**B**"
c) 4 triângulos "**A**" e 7 quadrados "**B**"
d) 5 triângulos "**A**" e 6 quadrados "**B**"



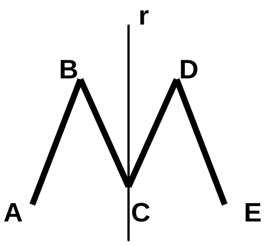

Ferramenta 1


Ferramenta 2

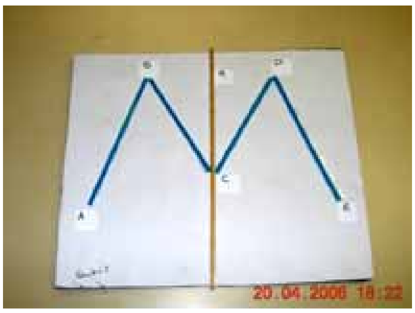
A Ferramenta 1 foi apresentada como um quebra-cabeças. A moldura da figura C foi feita com papelão, desse modo as peças A e B deveriam encaixar-se em seu interior para completar a figura. A Ferramenta 2 apresentava em relevo a moldura da figura C e os eixos internos da figura feitos de palitos de madeira. Completa a ferramenta duas peças A e B que apresentadas dentro dos respectivos encaixes de palitos deveriam ser retiradas para a realização do exercício. As etiquetas brancas que podem ser vistas nas figuras são as letras A, B e C escritas em Braille.

Exercício 2 – (6ª série p.19 exercício 15) Na figura, a reta r é eixo de simetria da letra M desenhada. Sabemos que a soma dos comprimentos dos segmentos AB, BC, CD e DE é igual a 20 cm, e que CD = 4 cm. O comprimento do segmento DE é igual a:

a) 3 cm
b) 5 cm
c) 6 cm
d) 7 cm




Ferramenta 1


Ferramenta 2

Neste exercício a Ferramenta 1 foi montada sobre uma prancha de madeira na qual os pontos são representado por pregos. A letra M e o eixo de simetría foram construidos com elásticos. Para a Ferramenta 2 usamos uma placa de papelão, canudos plásticos para a letra M e palito de madeira para o eixo. Em ambas os rótulos foram colocados em Braille.

Análise dos resultados

Dois alunos realizaram o Exercício 1. Destacamos que, nesse exercício, ambos os alunos não tiveram êxito com a representação em relevo, e responderam ao exercício de forma adequada usando a Ferramenta 2. André escolheu exatamente essa ferramenta como facilitadora, já Carla considerou que todas as representações desempenhavam o mesmo papel, mesmo dando respostas distintas para ferramentas distintas. A Ferramenta 2 permitia que os alunos realizassem a tarefa usando o mesmo tipo de raciocínio que os videntes, ou seja, medir e desenhar sobre a figura para contar quantos quadrados e triângulos "cabem". Nossos alunos usaram como padrão de medida as formas geométricas quadrado e triângulo, o que pode ser associado ao procedimento de medir com régua dos videntes. A Ferramenta 1 parece ter descaracterizado o exercício. A falta de um dos parâmetros da figura dificultou a elaboração das respostas. Os alunos pareciam estar desorientados para posicionar os quadrados e triângulos pela falta do eixo interno a figura.

O Exercício 2 foi especialmente interessante. O texto refere-se à simetria da letra M em tinta (Figura 1B), o que não tem nenhuma relação com a letra M em Braille (Figura 1A), ou seja, a letra M representada em Braille não apresenta simetria.

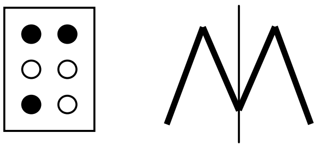


Figura 1A Figura 1B

Figura 1: a letra M

Ao lerem o enunciado desse exercício, os alunos portadores de cegueira congênita e os que foram alfabetizados em Braille fizeram colocações do tipo:

"Cadê a letra M?"
"Por que eu não acho a letra M?"
"A letra não está aqui."

Era preciso "aprender" a letra M em tinta para posteriormente realizar a tarefa, o que coube a pesquisadora fazer. Talvez, por esse fato, dos quatro alunos que realizaram essa tarefa, somente dois apresentaram a resposta correta – Leandro e Dani.

Leandro indicou a mesma resposta usando as três representações, o que faz de sua observação sobre a ferramenta que favoreceu a solução do exercício mais significativa. Leandro, antes da atividade, não tinha idéia de como era a letra M em tinta, já que perdeu a visão aos dois anos de idade e foi alfabetizado em Braille. Mostrou-se surpreso ao conhecer a letra M e passou a buscar resposta para o exercício. A indicação da Ferramenta 2 como facilitadora deu-se possivelmente pela utilização de diferentes texturas em sua confecção, o que pode ter favorecido a percepção tátil. Sobre uma placa de papelão, a letra M foi construída com canudos de plástico e o eixo de simetria é um palito de madeira.

No entanto, Dani considerou a tarefa mais fácil quando proposta na Ferramenta 1, mas a resposta correta foi dada quando a figura foi apresentada em relevo. Observando o trabalho de Dani foi possível perceber que usando a proposta em relevo, contou o número de pontos que formavam cada uma das quatro partes da letra M, recurso que procurou transpor para a Ferramenta 1. Entretanto, a distância entre os pinos e a posição dos elásticos, ocupando a diagonal dos quadrados que formam a grade, não favoreceu na medição do comprimento dos segmentos, não colaborando com seu intento.

Nossa voz

Nossas análises indicam uma forte relação entre desempenho e mediadores, nos conduzindo então as seguintes questões: Basta oferecer aos alunos sem acuidade visual as provas realizadas pelos videntes transcritas em Braille? A simples transcrição das provas garante a tão almejada inclusão?

Pelos indícios apontados, acreditamos ter elementos que nos permitem assinalar algumas discrepâncias entre as propostas dos PCN-Adaptações Curriculares (Brasil 1998) e os processos de avaliação aos quais os alunos com deficiência visual vêm sendo submetidos. De acordo com o documento citado, o material didático e de avaliação deve ser apresentado em tipo ampliado para alunos com baixa visão e em Braille e relevo para os cegos, isso de fato vem ocorrendo. No entanto, pode-se ler na página 50 do mesmo documento que os conteúdos e critérios de avaliação devem ser adequados as condições dos alunos o que não tem recebido a devida atenção no planejamento de avaliações, como evidenciado especialmente na formulação do Exercício 2 aqui discutido. O que nos faz pensar qual estratégia os alunos portadores de cegueira congênita do Estado de São Paulo aplicaram para responder a essa questão. Ainda nos PCN-Adaptações Curriculares (Brasil 1998), pode-se ler:

> As adaptações avaliativas dizem respeito: à seleção das técnicas e instrumentos utilizados para avaliar o aluno. Propõem modificações sensíveis na forma de apresentação das técnicas e dos instrumentos de avaliação, a sua linguagem, de um modo diferente dos demais alunos de modo que atenda às peculiaridades dos que apresentam necessidades *especiais (p.36).*

Não verificamos nas provas analisadas nenhuma modificação na técnica utilizada para a avaliação do aluno que atenda às peculiaridades dos alunos sem acuidade visual dentro dos padrões normais, ou seja, as provas à tinta foram somente transcritas para o Braille com cópia dos desenhos em relevo, sem que se buscasse explorar a principal forma de aquisição de informações desses alunos – o tato. No estudo completo, nossos resultados indicam que em 73% das respostas dadas, as ferramentas materiais, projetadas para o estímulo háptico, foram apontadas como facilitadoras para a compreensão e solução dos exercícios (Fernandes e Healy, 2006). Para os aprendizes que participaram deste estudo a disponibilidade de ferramentas táteis não favoreceu somente o acesso aos problemas propostos, mas transformou suas interações com os objetos matemáticos em jogo, o que sugere que este é um ponto que merece mais investigações.

Reflexões finais

A inclusão exige mais do que leis. Exige uma atenção adequada. Oferecer materiais, salas de recursos ou equipes especializadas que visitem as escolas eventualmente, são necessários, mas não suficientes. Os problemas surgem no dia-a-dia, em aula, e transcendem esse âmbito reduzido, atingindo a responsabilidade da equipe docente. Não bastam, também, os prometidos apoios institucionais, sem a participação efetiva do aluno, e principalmente, sem o professor.

Na verdade, nós não encontramos professores que afirmem estarem preparados para receber em classe um aluno com necesidades educacionais especiais. Eles reconhecem que a inclusão é um processo que exige aperfeiçoamento constante, no entanto, declaram que não receberam formação para trabalhar com educandos portadores de necessidades educacionais especiais, seja em sua formação inicial ou continuada. Diante desse cenário, comentários como o que se segue não chega a nos surpreender:

> *Teve casos aqui na escola que a professora chega a primeira vez na sala, olha para o deficiente e chora, porque não sabe como trabalhar*. (Aluno 2)

Os problemas e as questões se multiplicam com a diversificação das atividades nas aulas de Matemática e o crescente destaque dado a uma pedagogia ativa, de ação e participação de todos, na qual as estruturas são dinâmicas e se ensinam técnicas de observação, estratégias e sistematizações matemáticas. Como lidar com um aluno cego numa classe de videntes sem modificar substancialmente os objetivos, conteúdos e atividades? Com que ferramenta material de medida e de representação poderá contar esse aluno? Apesar das iniciativas das políticas públicas há muito a ser feito. Os cursos destinados à formação de professores devem assumir o compromisso de formar para o respeito à diversidade dos educandos. Os dados que temos coletado evidenciam, também, a necessidade e carência de recursos materiais que possam favorecer o acesso dos aprendizes com necessidades educacionais especiais aos conteúdos escolares, mais especificamente aos conteúdos matemáticos, objetos de nossos estudos.

Tanto alunos como professores da escola estadual onde se centra nossa pesquisa ressentem-se do material mais primário para seu trabalho – o livro didático. É preciso que os órgãos competentes criem ou agilizem políticas de acesso regular a materiais destinados aos alunos com necessidades educacionais especiais, não só no que se refere aos livros didáticos, mas também a materiais pedagógicos de uso comum como lupas, computador com sintetizador de vozes e periféricos adaptados, recursos ópticos, materiais para desenho, para laboratório de Matemática como, por exemplo, material dourado, que poderiam ser usados não só pelos alunos sem acuidade visual dentro dos padrões normais, mas também pelos videntes oferecendo a todos uma abordagem experimental da Matemática.

As adaptações necessárias tanto aos conteúdos curriculares como no processo avaliativo são previstas nos PCN–Adaptações Curriculares. Uma das atitudes sugeridas é "mudar a temporalidade dos objetivos, conteúdos e critérios de avaliação, isto é, considerar que o aluno com necesidades educacionais especiais pode alcançar os objetivos comuns do grupo, mesmo que possa requerer um período mais longo de tempo" (p. 51). Em uma de nossas entrevistas, perguntamos aos alunos com deficiência visual sobre a realização das provas do ENEM. Segundo eles o tempo suplementar que dispõem é de trinta minutos, isto é, lhes é permitido ingressar na sala do exame trinta minutos antes do horário previsto para os demais candidatos. Será que este tempo adicional é mesmo suficiente para que o aluno com deficiência visual leia, interprete e selecione uma das alternativas de uma prova de múltipla escolha?

De acordo com o mesmo documento em relação às avaliações, o professor deve "eliminar, objetivos e critérios de avaliação, definidos para o grupo de referência do aluno, em razão de suas deficiências ou limitações especiais" (p. 51). Os professores que entrevistamos fazem exatamente isso em suas classes inclusivas. No entanto é exatamente isso que preocupa os alunos com deficiência visual. Ao serem submetidos a exames oficiais, verificamos que eles realizam exatamente a mesma prova que os demais alunos que são ampliadas ou transcritas para o Braille.

Neste ponto chegamos a um impasse, de acordo com os PCN – Adaptações Curriculares "a supressão desses conteúdos e objetivos da programação educacional regular não deve causar prejuízo" para a escolarização do aluno com necessidades educacionais especiais. E ainda "deve considerar, rigorosamente, o significado dos conteúdos, ou seja, se são básicos, fundamentais e pré-requisitos para aprendizagens posteriores" (p.51). Ora, mas como não considerar a produção e análise de gráficos estatísticos básicos e fundamentais se, por exemplo, nos exames oficiais a maioria das questões pauta-se em análises de gráficos? Não seria o caso de submeter tais exames ao crivo dos PCN – Adaptações Curriculares? Tal fato pode ser verificado na fala de um dos alunos entrevistados:

> *O que eu posso perceber é que no SARESP e no ENEM eles não preparam uma prova especial para você* [para os portadores de deficiência visual]. *Eles simplesmente pegam uma prova em tinta e passam para o Braille. No SARESP as questões que tinham algum desenho ou gráfico eu simplesmente chutei e errei a maioria. O ENEM não veio em Braille e a pessoa que estava lendo para mim não sabia muito bem como me explicar às figuras.* (Aluno 2)

Nossas pesquisas destacam as relações recíprocas entre diferentes sistemas mediadores e as práticas matemáticas dos aprendizes. Especificamente, nossos dados indicam como os sistemas mediadores disponíveis influenciam significativamente o acesso desses aprendizes às atividades de Geometria. Assim, sugerimos que a elaboração de provas destinadas a estes aprendizes deve transcender a simples transcrição da mesma para o Braille. Se, como acreditamos, as necessidades educacionais especiais dos alunos devem ser atendidas no âmbito da escola regular isso requer que os sistemas educacionais modifiquem-se, não apenas revendo suas atitudes e expectativas em relação a esses alunos, mas que se organizem para constituir uma escola para todos e que de fato gerem condições de igualdade social.

Construir uma *sociedade para todos* implica na conscientização coletiva da diversidade humana e na estruturação para atender às necessidades de cada cidadão e certamente a escola tem um papel fundamental nessa construção. Devemos ficar atentos às propostas feitas pelo Sistema de Ensino, as análises e críticas são necessárias para que possamos auxiliar na construção da sociedade que almejamos. A inclusão social e escolar que desejamos deve garantir igualdade de oportunidades e de direitos com autonomia. Temos mantido sob tutela e monitorado nossos aprendizes com necessidades educacionais especiais como se oferecêssemos a eles um privilégio e não um direito. Os alunos sem acuidade visual dentro dos padrões normais entrevistados não consideram que o sistema de cotas proposto pelo PROUNI[6] no Brasil seja adequado às suas pretensões e aspirações, mas ao analisarem as práticas educacionais a que são submetidos acreditam que não estão prontos para competir com os demais em pé de igualdade.

> *Atualmente eu acho que esse sistema é até justo, mas o ideal é que nós tivéssemos as mesmas condições que os outros alunos. Eu fui procurar cursinho para o ano que vem e não consegui nenhum, não tem cursinho preparado para atender deficientes visuais. Nem mesmo curso de línguas eu consegui fazer. Quando eu fui procurar curso de Inglês para fazer não encontrei nenhum que estivesse preparado para ensinar um dv.* (Aluno 3)

Os estudos que temos realizado na área da Educação Matemática com indivíduos sem acuidade visual dentro dos padrões, corroboram nossa concepção de uma sociedade consciente da diversidade, que se estrutura para atender as necessidades de cada cidadão. É preciso que se deixe de encarar a cegueira como sendo apenas uma condição limitadora ou mesmo incapacitadora. O cego ou portador de baixa visão apresenta os mesmos sentimentos e aspirações daqueles considerados "*videntes*". Possui, portanto, potencial que precisa ser estimulado e trabalhado a fim de possibilitar sua integração no mundo em que vive. Não de uma forma complacente, mas sim como um direito.

No projeto que estamos desenvolvendo, entramos no campo da investigação, mas acreditamos ser mais importante a passagem da investigação para a ação. O modo de trabalhar Matemática com os cegos pode facilitar a reflexão e busca para outros grupos de educandos com necessidades educacionais especiais (guardadas as diferenças) e inclusive para a Didática da Matemática em geral, pois se a metodologia de investigação é análoga, as soluções podem ser indicadoras de direções a seguir em cada caso. Dentro dessa perspectiva, cada aprendiz é percebido como um aprendiz com necessidades educacionais especiais cabendo a Educação Matemática, como a todas outras áreas da Educação, estruturar-se para potencializar suas competências e habilidades, e fazer desaparecer a palavra e o conceito “deficiente”.

[6] Programa Universidade para Todos foi criado pela MP nº 213/2004 e institucionalizado pela Lei nº 11.096, de 13 de janeiro de 2005. Tem como finalidade a concessão de bolsas de estudos integrais e parciais a estudantes de baixa renda, em cursos de graduação e seqüenciais de formação específica, em instituições privadas de educação superior, oferecendo, em contrapartida, isenção de alguns tributos àquelas que aderirem ao Programa.

Bibliografia

- Brasil (1998): Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Adaptações Curriculares / Secretaria de Educação Fundamental. Secretaria de Educação Especial. Brasília: MEC/SEF/SEESP.
- Cole M., Wertsch J.V. (1996): “Beyond the individual-social antinomy in discussions of Piaget and Vygotsky”. Human Development, 39, pp. 250-256.
- Fernandes, S. H. A. A. (2004): “Uma análise vygotskiana da apropriação do conceito de simetria por aprendizes sem acuidade visual”. São Paulo, 300 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Fernandes, S H A A; Healy, L (2006): “Desafios na avaliação do conhecimento matemático de aprendizes com deficências visuais”. En: VIII Encontro Paulista de Matemática, 2006, São Paulo. Anais do VIIIEPEM. São Paulo: SBEM, v. 1.
- Fontana, A., Frey J. H. (2000): “From Structured Questions to Negotiated Text”. En: Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. (Ed.). Handbook of Qualitative Research. 2ed. USA: Sage Publications, Inc. pp. 645-672.
- Martín, E.; Marchesi, A. (1995): Desenvolvimento metacognitivo e problemas de aprendizagem. En: Coll, C.; Palacios, J.; Marchesi, A. (Org.). “Desenvolvimento Psicológico e Educação: Necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar”. Tradução Marcos A. G. Domingues. Porto Alegre: Artes Médicas. v. 3, Cap. 2.
- Martins, V. “Quem necessita de Educação Especial?” Disponível em: http://www.deficienteeficiente.com.br/materia01.htm. Acesso em: 22 set. 2002.
- Revista Nova Escola. (2003): “Inclusão que dá certo”. São Paulo: Abril, n. 165, set. 67p.
- Oliveira, M. K. (2002) “Vygotsky: Aprendizado e desenvolvimento um processo sócio-histórico”. São Paulo: Scipione, pp. 25 – 40.
- SARESP 2005. Disponível em: http://www.saresp.edunet.sp.gov.br/2005. Acesso em: 15 abr. 2006.
- Valsiner, J; Veer, R.; van der. (1996): “Vygotsky - Uma síntese”. Tradução de: Cecília C. Bartalotti. 4. ed. São Paulo: Loyola.

Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes, Bacharel e Licenciada em Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Mestre em Educação Matemática pela PUC-SP. Doutoranda em Educação Matemática da PUC-SP, trabalhando em pesquisas que se centram nos processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos de alunos sem acuidade visual inseridos em salas regulares.
E-mail: solangehf@gmail.com

Lulu Healy, Doutora em Educação Matemática pelo Instituto da Educação, Universidade de Londres, docente no Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP, e coordenadora do grupo de pesquisa *Tecnologia e Meios de Expressão Matemática*.
E-mail: lulu@pucsp.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 77-94
ISSN: 1815-0640

Ideas para la clase de logaritmos

Raquel Susana Abrate y Marcel David Pochulu

Resumen

En este trabajo presentamos algunas sugerencias de diseño de actividades para la clase de logaritmos, tratando de buscar la comprensión de los conceptos y procedimientos e intentando dotarlos de mayor sentido para los estudiantes. Para ello, proponemos recuperar la construcción histórica por la que atravesaron, las nociones de progresión geométrica y aritmética, y algunas de sus múltiples aplicaciones.

Abstract

In this article some suggestions of design activities for the logarithm lesson are presented, trying to look for the comprehension of concepts and procedures and providing a major sense for the students. To do it, we propose to get back the historical construction they have crossed over, the conceptions of geometrical and arithmetical progression and some of the multiple applications.

Introducción

En una gran cantidad de casos, la enseñanza de los logaritmos se realiza de manera algorítmica y descontextualizada. Generalmente se parte de la definición, se dan algunos ejemplos, luego se enuncian y ejemplifican las propiedades y finalmente se realizan los ejercicios. Asimismo, los ejercicios suelen ser largas listas donde hay que calcular el logaritmo de un número –en diferentes bases– de manera directa o valiéndose de las propiedades; o bien, el cálculo de dicho número aplicando finalmente el antilogaritmo.

En este sentido, acordamos con Lefort (2001) pues sostiene que aunque esta introducción sea matemáticamente satisfactoria, se halla bastante lejos de ser evidente para los estudiantes y su propiedad fundamental queda oculta. Además, el problema histórico que llevó a concebir los logaritmos también estaría ausente a pesar de que su uso, para presentar esta nueva noción, tiene la ventaja de la simplicidad: se trata sencillamente de construir una tabla que permita realizar rápidamente multiplicaciones, divisiones y potencias.

Creemos que muchas veces el modo en que se enseña Matemática dificulta que se comprenda la relevancia del tema, que se entiendan los obstáculos del pasado y que adquiera real sentido, al menos en parte, para muchos de nuestros alumnos. Enseñar contenidos matemáticos desprovistos de su historia suele acarrear el inconveniente de que pueden ser concebidos por los alumnos como algo artificioso y arbitrario de esta ciencia. La perspectiva histórica no sólo permite conocer cómo se crearon y construyeron los conceptos y las teorías que hoy manejamos, producto de un trabajo acumulativo, sino también, faculta para comparar técnicas y métodos actuales con otros que se utilizaron en el pasado. Así, el quehacer matemático se torna valioso al poner de manifiesto que un mismo problema se resolvió de maneras diferentes en distintas épocas.

Pensamos que recurrir a la narración de las vicisitudes que debieron sortearse a lo largo del tiempo, hasta llegar a estos conocimientos, puede ser una manera de "humanizar" el contenido matemático, aproximándolo a la realidad del alumno, y tal vez, una manera más apropiada para iniciar su abordaje.

Asimismo, al enfoque histórico debiéramos anexarle su aplicación, no sólo a contextos intramatemáticos, sino también extramatemáticos, para que el alumno pueda comunicarse mediante la Matemática y se apropie de diferentes visiones de esta ciencia, construyendo la suya propia. La integración de distintas áreas es uno de los aspectos que estimula el interés de los alumnos y por eso proponemos diseñar y planificar algunas actividades para ser llevadas al aula con este propósito, a la vez que colaboran en la construcción de nuevos conceptos. Como expresa Schoenfeld (1985) *"de bien poco sirve saber lo fundamental, si no se sabe cuándo ni dónde usarlo*", a lo que agregamos que, la posibilidad de usarlo requiere conocimientos previos que permitan conocer un concepto matemático en una situación no matemática. ¿De qué manera es posible llevar esto a la práctica? Creemos que poniendo el acento en el proceso de aprendizaje más que en el de enseñanza y resaltando que "hacer Matemática" implica, entre otras cosas, resolver diferentes problemas, utilizando los mismos contenidos matemáticos en distintas situaciones.

Abordando los logaritmos en la clase de Matemática

Retomando la idea original de Napier, que motivara el surgimiento de los logaritmos, nos proponemos abordar el tema de un modo similar, aunque mucho más acotado y simplificado. Podríamos comenzar calculando, como lo hacemos habitualmente y sin ayuda de la calculadora, las siguientes multiplicaciones:

a) 16 x 512 b) 81 x 19683 c) 256 x 262144 d) 625 x 1953125

Aplicando el algoritmo de la multiplicación tendríamos:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 5 & 1 & 2 \\
 & \times & & 1 & 6 \\
\hline
 & 3 & 0 & 7 & 2 \\
+ & 5 & 1 & 2 & \\
\hline
 & 8 & 1 & 9 & 2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccccc}
 & & & 1 & 9 & 6 & 8 & 3 \\
 & & & & \times & & 8 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 9 & 6 & 8 & 3 \\
+ & 1 & 5 & 7 & 4 & 6 & 4 & \\
\hline
 & 1 & 5 & 9 & 4 & 3 & 2 & 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
262144 \\
\times \quad 256 \\
\hline
1572864 \\
+\ 1310720 \\
524288 \\
\hline
67108864
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
1953125 \\
\times \quad 625 \\
\hline
9765625 \\
+\ 3906250 \\
11718750 \\
\hline
1220703125
\end{array}
$$

Ahora bien, podríamos construir una tabla que contenga algunas potencias de base y exponente natural, como la que aparece a continuación (Tabla Nº 1), y localizamos en ella cada uno de los resultados obtenidos.

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1.024	3.125
6	64	729	4.096	15.625
7	128	2.187	16.384	78.125
8	256	6.561	65.536	390.625
9	512	19.683	262.144	1.953.125
10	1.024	59.049	1.048.576	9.765.625
11	2.048	177.147	4.194.304	48.828.125
12	4.096	531.441	16.777.216	244.140.625
13	8.192	1.594.323	67.108.864	1.220.703.125
14	16.384	4.782.969	268.435.456	6.103.515.625

13	**8.192**	**1.594.323**	**67.108.864**	**1.220.703.125**

Tabla Nº 1: Potencias de base y exponente natural

Vemos que todos los resultados conseguidos se ubican en la fila correspondiente a n = 13. Es decir, que 13 es el exponente al que hay que elevar el 2 para obtener 8.192, o el 3 para obtener 1.594.323, o el 4 para obtener 67.108.864, o el 5 para obtener 1.220.703.125.

Este exponente, en Matemática se denomina *logaritmo.* En particular diríamos que el logaritmo de 8.192, en base 2, es 13 y lo denotamos:

$$\log_2 8.192 = 13 \text{ pues } 2^{13} = 8.182;$$

o que el logaritmo de 1.594.323 en base 3 es 13 y lo denotamos:

$$\log_3 1.594.323 = 13 \text{ pues } 3^{13} = 1.594.323;$$

Y así sucesivamente. No obstante, volveremos sobre este concepto para terminar de comprenderlo.

Ubicamos ahora en la tabla cada uno de los factores correspondientes a las multiplicaciones planteadas al inicio de la actividad y tratamos de expresarlos como potencias con igual base. Por ejemplo:

$$16 \times 512 = 8.192$$
$$2^4 \times 2^9 = 2^{13}$$

Hemos tomado este ejemplo en particular, pero es fácil comprobar que las restantes multiplicaciones involucran los mismos exponentes.

Tal como pudimos constatar, el cálculo de las multiplicaciones propuestas con la actividad se vuelve más complejo y tedioso, a medida que aumenta el número de dígitos de los factores. Si en cambio expresamos a cada uno de los factores como potencias de igual base, las cuales podemos encontrar en una tabla similar a la anterior, y utilizamos propiedades ya conocidas por nosotros, el cálculo puede tornarse mucho más sencillo.

Por ejemplo, 16 x 512 puede resolverse, sin efectuar el algoritmo de la multiplicación, utilizando sólo la tabla expuesta, de la siguiente manera:

$$16 = 2^4 \text{ y } 512 = 2^9\text{, por lo que } 16 \times 512 = 2^4 \times 2^9$$

Aplicando propiedades de las potencias:

$$16 \times 512 = 2^4 \times 2^9 = 2^{4+9} = 2^{13}$$

Buscamos ahora en la tabla, en la columna correspondiente a 2^n, su valor para $n = 13$. El mismo es 8.192, coincidentemente con el valor que encontráramos cuando resolvimos la multiplicación mediante el algoritmo habitual.

Del mismo modo, podemos hacer:

$$81 \times 19.683 = 3^4 \times 3^9 = 3^{13} = 1.594.323$$
$$256 \times 262.144 = 4^4 \times 4^9 = 4^{13} = 67.108.864$$
$$625 \times 1.953.125 = 5^4 \times 5^9 = 5^{13} = 1.220.703.125$$

De manera similar, podríamos efectuar otras operaciones, como divisiones, por ejemplo, pues:

$$\frac{67.108.864}{263.144} = \frac{4^{13}}{4^9} = 4^4 = 256$$
$$\frac{1.220.703.125}{625} = \frac{5^{13}}{5^4} = 5^9 = 1.953.125$$

También podríamos verificar otras propiedades de la potencia, como ser:

$$4^7 = 16384 = 2^{14} \Rightarrow 4^7 = 2^{14} \Rightarrow (2^2)^7 = 2^{14}$$
$$2^0 = 3^0 = 4^0 = 5^0 = 1$$

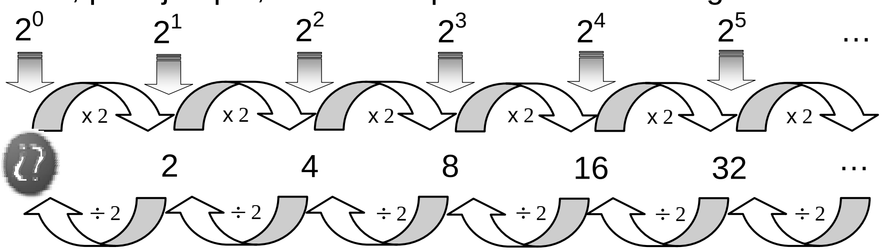
El lector se habrá percatado de que esta actividad tuvo como propósito fundamental mostrar a los alumnos que las multiplicaciones se pueden convertir en sumas y las divisiones en restas, con lo que se facilita notablemente el cálculo, más cuando los números implicados son muy grandes y se cuenta, obviamente, con tablas apropiadas. Hoy no tendría sentido realizarlas de esta manera, pero el concepto que vino a originar esta búsqueda de simplicidad de los cálculos, trasciende la utilidad que tuvo en su época, y precisamente en este aspecto centraremos nuestro trabajo en las secciones siguientes.

Una propiedad que suscita errores

En Abrate, Pochulu y Vargas (2006), se expresa que a veces termina siendo sólo una convención, para muchos alumnos, el hecho de que una potencia con base no nula y exponente cero de por resultado uno. Por lo general, al intentar resolver una situación de esta naturaleza, los alumnos no siempre recuerdan aquella regla "instituida" en algún momento de su formación matemática. Usualmente apelan a justificaciones que guardan cierto grado de coherencia interna con el razonamiento seguido, como el considerar que $a^0 = 0$ pues *"se multiplica cero veces la base"*, o que $a^0 = a$ puesto que *"si se multiplica cero veces la base, queda la misma base",* pero que son inconsistentes para las leyes y propiedades establecidas para los números enteros.

Observemos que las tablas propuestas para abordar el concepto de logaritmo nos brindan una oportunidad más para reforzar esta dificultad que presentan los alumnos aún en ciclos superiores, pues aparece una serie de potencias donde podemos ver claramente la ley de formación que subyace en ella.

Tomemos, por ejemplo, la serie de potencias de base igual a 2:



Notemos que la serie es geométrica de razón 2 y que los exponentes conforman una serie aritmética cuya diferencia es 1.

Una alternativa sería conjeturar qué valor se le podría asignar a 2^0. No obstante, para que la serie tenga sentido (se multiplica por 2 a un término para obtener el siguiente, o equivalentemente, se divide entre 2 a uno de ellos para conseguir el anterior), no queda otra alternativa que asignar un 1.

El mismo análisis puede hacerse con las otras series de potencias, incluso con una base negativa, pues también es frecuente que los alumnos infieran que $(-a)^0 = -1$, extrapolado de $a^0 = 1$, con $a > 0$.

Una leyenda que se relaciona con el tema[1]

En el siglo IX, se escribieron en Arabia los primeros libros sobre el juego del ajedrez, cuyos autores fueron: Al-Razí, Al-Sarajsí y Al-Adlí. Este último escribió “El Libro del Ajedrez” en el que se narra por vez primera, la célebre *leyenda de los granos de trigo*, donde se le atribuye la invención del Ajedrez a alguien llamado Sissa.

La Historia cuenta que Sissa inventó este juego con el objeto de agradar al rey y combatir su tedio, mostrándole además que un rey sin su pueblo está inerme, pues no tiene poder ni valor. Fascinado con el juego, el rey le ofreció a Sissa cumplirle un deseo. No obstante, Sissa decidió darle al rey una lección de humildad, y pidió lo siguiente: dos granos de trigo por la primera casilla del tablero, cuatro granos por la segunda, ocho por la tercera, dieciséis por la cuarta, y así sucesivamente hasta completar las sesenta y cuatro casillas. Digamos, estaríamos continuando con la serie de potencias de base 2 que iniciamos anteriormente.

El rey, extrañado de que alguien con tanta inteligencia pidiera algo en apariencia tan simple, ordenó que se le concediera su petición. Al poco tiempo, su visir le indicó que era imposible satisfacer la demanda, pues la cantidad de trigo que pedía Sissa era muchísimo más de lo que ellos podrían llegar a tener. Surge naturalmente como interrogante ¿Qué cantidad de granos de trigo le debía entregar el rey?

Ahora bien, si nos dejamos llevar por la imaginación y el placer de recrearnos con la Matemática, podríamos hacer varios análisis importantes que nos conducirían a retomar temas que seguramente abordamos en la currícula escolar. Por ejemplo, si pensamos que tal cantidad de granos de trigo pudiera juntarse de un solo golpe, cosa que es imposible aún recolectando todas las cosechas de trigo del mundo durante un siglo, y contáramos un grano de trigo por segundo, sin parar, ¿Cuánto tardaríamos? Muy posiblemente debamos hacer cambios de unidades para que nuestra respuesta adquiera sentido.

A su vez, podríamos también cuestionarnos cuánto pesaría esta carga de trigo. Desde luego, tendríamos que hacer algunas experiencias previas para determinar el peso aproximado de un grano de trigo, e indagar la capacidad máxima de carga de un camión de transporte de granos, más si nuestra intención está en brindar una respuesta medianamente aceptable al interrogante.

Asimismo, valdría la pena hallar la cotización internacional promedio del trigo, por toneladas, al cierre de la Bolsa de Valores y estimar el costo de esta cantidad de cereal. Con seguridad, habrá que hacer algunas conversiones de moneda y nos llevaría a incursionar por el mundo financiero.

[1] Leyenda tomada de http://www.portalajedrez.com/anecdotas/leyendagranostrigo.php

Pero si nuestra curiosidad y capacidad de asombro desea continuar, podríamos considerar la posibilidad de colocar los granos de trigo uno tras otro. Ahora bien, deberíamos también estimar el grosor y el largo de un grano de trigo, y entonces cabe preguntamos ¿Qué tan larga sería nuestra hilera? ¿De un Kilómetro? ¿De mil Kilómetros? ¿Llegaríamos al otro lado del mundo? ¿Podríamos darle una vuelta a la tierra?

Nuevamente, la búsqueda de respuestas a estos cuestionamientos conducirá a integrar muchos más contenidos de los que podemos estar imaginando en este momento.

Más propiedades de los logaritmos

Podríamos redescubrir las propiedades del logaritmo a partir del análisis de las tablas antes utilizadas. ¿De qué manera? Recordemos que "el logaritmo de un número es el exponente al cual se debe elevar la base del logaritmo para obtener dicho número (argumento)".

Volviendo sobre el ejemplo:

$$16 \text{ x } 512 = 2^4 \text{ x } 2^9 = 2^{13} = 8.192$$

Según lo expresado anteriormente, 4 es el exponente al que hay que elevar el 2 para obtener 16. En otras palabras, 4 es el logaritmo en base 2 de 16 lo que simbólicamente escribimos: $\log_2(16) = 4$. También, y con el mismo criterio: $\log_2(512) = 9$ y $\log_2(8.192) = 13$.

Observemos que, 4 + 9 = 13, lo que podría escribirse como:

$$\log_2(16) + \log_2(512) = \log_2(8.192) = \log_2(16 \times 512)$$

Del mismo modo, mirando las columnas de la tabla correspondientes, podemos establecer las siguientes igualdades:

$$\log_3(81) + \log_3(19.683) = \log_3(1.594.323) = \log_3(81 \times 19.683)$$
$$\log_4(256) + \log_4(262.144) = \log_4(67.108.864) = \log_4(256 \times 262.144)$$
$$\log_5(625) + \log_5(1.953.125) = \log_5(1.220.703.125) = \log_5(625 \times 1.953.125)$$

Podríamos continuar con cálculos similares, y luego de un número significativo de ejemplos, convencernos como para "generalizar" este resultado diciendo que: *El logaritmo de un producto, en una base dada, es la suma de los logaritmos -en la misma base- de cada uno de los factores, si éstos existen.* En lenguaje simbólico escribiríamos:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

Algo similar ocurre con el logaritmo de un cociente. Recordemos que en un ejemplo anterior, dividimos:

$$\frac{67.108.864}{263.144} = \frac{4^{13}}{4^{9}} = 4^{4} = 256$$

Llevando a cabo un análisis análogo al realizado para el producto, y teniendo en cuenta el concepto de logaritmo, tendremos que:

$$13 - 9 = 4 \Rightarrow \log_4(67.108.864) - \log_4(262.144) =$$
$$= \log_4(256) = \log_4\left(\frac{67.108.864}{262.144}\right)$$

O también, en la división:

$$\frac{1.220.703.125}{625} = \frac{5^{13}}{5^{4}} = 5^{9} = 1.953.125$$

Notamos que:

$$13 - 9 = 4 \Rightarrow \log_5(1.220.703.125) - \log_5(625) =$$
$$= \log_5(1.953.125) = \log_4\left(\frac{1.220.703.125}{625}\right)$$

De manera análoga al análisis que realizamos con el producto, y con un buen número de ejemplos demostrativos, podríamos concluir y generalizar que: *El logaritmo de un cociente, en una base dada, es la diferencia entre los logaritmos del dividendo y del divisor, en la misma base, si éstos existen.* En lenguaje simbólico escribiríamos:

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

Finalmente, podríamos deducir la propiedad del logaritmo respecto de la potencia, si analizamos también uno de los ejemplos citados. Vimos que:

$$4^{7} = 2^{14} = 16.384$$

Es decir, que:

$$\log_4(16.384) = \log_4\left(4^{7}\right) = 7$$

Además, podríamos pensar a 4^7 de la siguiente manera:

$$4^{7} = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$

Por la propiedad anteriormente mencionada, referida al logaritmo de un producto, y generalizándola para *n* factores, tenemos:

$$\log_4\left(4^7\right)=\log_4\left(4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\right)=$$
$$=\log_4(4)+\log_4(4)+\log_4(4)+\log_4(4)+\log_4(4)+\log_4(4)+\log_4(4)=$$
$$=7\times\log_4(4)=7\times1=7$$

En consecuencia, según este criterio, también podemos escribir:

$$\log_2\left(4^7\right)=\log_2\left(4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\right)=$$
$$=\log_2(4)+\log_2(4)+\log_2(4)+\log_2(4)+\log_2(4)+\log_2(4)+\log_2(4)=$$
$$=7\times\log_2(4)=7\times2=14$$

Resultado que ya conocíamos pues habíamos visto anteriormente que $4^7 = 2^{14}$, y por esta razón, también podríamos escribir:

$$\log_2\left(4^7\right)=\log_2\left(2^{14}\right)=14\times\log_2(2)=14\times1=14$$

De manera similar, puede analizarse a partir de la tabla que:

$$\log_3(81)=\log_3\left(3^4\right)=4\times\log_3(3)=4\times1=4$$

Efectivamente 4 es el exponente al que hay que elevar el numero 3 para obtener 81, es decir, 4 es el logaritmo de 81 en base 3.

Podríamos sugerir a los alumnos que busquen con otros ejemplos, como el que sigue y tantos como se consideren significativos introducir en la clase:

$$\log_5(390.625)=\log_5\left(5^8\right)=8\times\log_5(5)=8\times1=8$$

Esto nos permite concluir que:

El logaritmo de un número positivo, en la misma base, es igual a 1. En símbolos:

$$\log_b(b)=1$$

El logaritmo de una potencia -en una base determinada- es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de esta potencia, si éste existe. En símbolos:

$$\log_b\left(a^n\right)=n\times\log_b(a)$$

Podríamos continuar buscando más propiedades de logaritmos de este modo, pero consideramos que no constituye el eje de este artículo, y corremos el riesgo que el lector pierda el objetivo que perseguimos con la presentación de este tema en la clase de Matemática.

Buscando el error

Estamos convencidos de que la corrección sistemática del error no favorece su eliminación. Por el contrario, creemos que un camino posible se encuentra intentando que los alumnos sean los que perciban los errores. Darle lugar al error en la clase es trabajarlo descubriendo las hipótesis falsas que llevaron a producirlo, buscando los posibles caminos hasta redescubrir los conceptos validados y matemáticamente aceptados, comparando versiones correctas con erróneas, etc.

Si el error es descubierto como consecuencia de una interacción o debate entre profesor y alumno, promoverá la superación, puesto que los estudiantes pueden modificar sus viejas ideas cuando están convencidos de que hay otra que es mejor. Veamos una actividad que esconde un error y conlleva a un proceso de reflexión y análisis de lo realizado.

Sabemos que:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Como a un número mayor le corresponde también un logaritmo mayor, tendremos que:

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) > \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Aplicando una de las propiedades de logaritmos que mencionamos anteriormente:

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) > 2 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Si dividimos ambos miembros de la desigualdad por $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$, resulta:

$$1 > 2$$

¿Dónde está el error de este razonamiento? Pues si aceptamos como válido lo realizado, estaríamos contradiciendo el orden que se establece para los números reales.

Una actividad que conduce a un desafío e integra contenidos

Las tablas de logaritmos y las reglas de cálculo (reglas numeradas con multitud de tablas paralelas) eran imprescindibles en cualquier centro de cálculo, hasta la aparición de las calculadoras y ordenadores. Actualmente los logaritmos ya no son necesarios para lo que fueron descubiertos. Sin embargo, ciertas características y utilidades que, durantes estos siglos se les han descubierto, los han hecho sobrevivir al desarrollo de la electrónica. Planteamos aquí una actividad que pensamos conduce a un desafío e integra contenidos, más si nos proponemos analizarla y reflexionar sobre ella.

¿Qué pasaría si al efectuar un producto, como lo hacíamos anteriormente, alguno de los factores no figura en la tabla porque no es potencia entera de 2, ni de 3, ni de otra base que aparece allí? Supongamos, por ejemplo, que debemos hacer la multiplicación entre 64 y 400.

En este caso, como el 64 es una potencia de 2 (también lo es de 4 en la tabla mostrada anteriormente) podríamos expresar al 400 como una potencia en la misma base. Como 400 es un valor comprendido entre 256 y 512, entonces es una potencia de 2 comprendida entre 28 y 29, y el exponente que estaríamos buscando debiera ser un número comprendido entre 8 y 9. Si contáramos con una calculadora científica, o un software adecuado, hallaríamos que el exponente buscado se obtiene de calcular:

$$
\begin{aligned}
2^n &= 400 \\
\log\left(2^n\right) &= \log(400) \\
n \cdot \log(2) &= \log(400) \\
n &= \frac{\log(400)}{\log(2)} \cong 8{,}643856190
\end{aligned}
$$

Ahora bien, pensemos por un instante que no disponemos ni de calculadora ni de software (a lo sumo podríamos llegar a tener la calculadora que nos brinda un teléfono celular, tan común en la época en la cual vivimos) y que muy “ligeramente” llevamos a cabo un proceso de *interpolación lineal* para efectuar el cálculo. No obstante, somos conscientes de que este procedimiento nos conducirá a encontrar una aproximación a dicho exponente. El razonamiento sería:

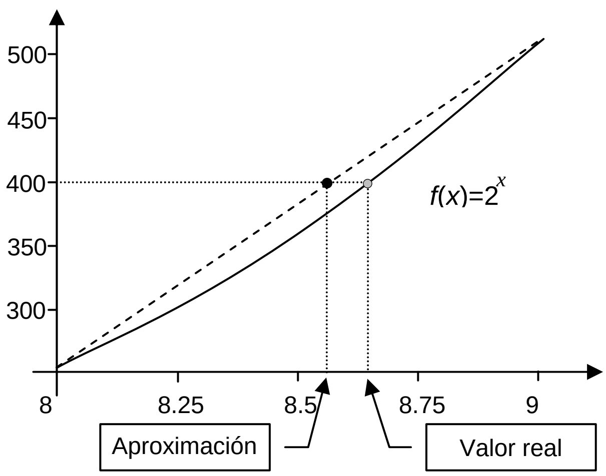
$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 256 & \text{———} & 8 & & \\
 & 144 & & & & y & \\
256 & & 400 & \text{———} & x & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & 512 & \text{———} & 9 & &
\end{array}
$$

Esto es, si a una diferencia de 256 entre las potencias (512 – 256) le corresponde una diferencia de 1 (9 – 8) entre los exponentes, entonces a una diferencia de

144 (400 – 256) le corresponderá: $\mathrm{y} = \dfrac{144.1}{256} = 0{,}5625$, por lo que el exponente buscado es *n* = 8 + y = 8,5625. Logramos, de esta forma, que nuestra multiplicación se transforme en:

$$64 \times 400 = 2^6 \cdot 2^n \cong 2^6 \cdot 2^{8{,}5625} = 2^{14{,}5625}$$

Hacemos notar que la aproximación de $2^{8{,}5625} \cong 378{,}0674934$ al 400 deviene, sencillamente, porque hemos calculado el exponente pensando en una variación proporcional (lineal) entre los números. De hecho, hemos aplicado una “regla de tres simple”, cuando en realidad la variación es exponencial. Lo expuesto anteriormente resulta más evidente si lo analizamos a través de una gráfica:



Como habíamos dicho que no disponíamos de una calculadora científica, no nos resultaría fácil hallar que $2^{14{,}5625} \cong 24.196{,}31958$, en consecuencia, nos vemos nuevamente tentados a realizar otra *interpolación lineal*. En este caso tendríamos:

		14	16.384		
	0,5625			y	
1		14,5625	x		16.384
		15	32.768		

Armando convenientemente la proporción y resolviendo resulta:

$$y = \frac{0{,}5625 \times 16.384}{1} = 9.216$$

En consecuencia, el valor buscado es 16.384 + 9.216 = 25.600.

Sintetizando lo realizado hasta el momento tenemos:

$$64 \times 400 = 2^6 \cdot 2^n \cong 2^6 \cdot 2^{8{,}5625} = 2^{14{,}5625} \cong 25.600$$

Sin embargo, efectivamente $64 \times 400 = 25.600$, muy a pesar de que el resultado se obtuvo tras sucesivas aproximaciones lineales. Naturalmente surge como interrogante ¿Por qué ocurre esto? y allí está el desafío que le proponemos al lector.

Cabe hacer notar que esta situación no sólo se presenta en el ejemplo propuesto. Tampoco es generalizable a cualquier producto. Sí, por ejemplo, se presenta cuando uno de los factores puede ser expresado como una potencia de base natural y exponente entero, y el otro no.

Ideas para la clase de logaritmos

Sostenemos que los logaritmos son quizás una de las herramientas matemáticas mas desaprovechadas en la educación escolar, ya que no se le da un fundamento real a dicha función. Fuera de cálculos técnicos, los logaritmos presentan utilidades como remarcamos a continuación.

Las escalas logarítmicas: En ocasiones resulta ventajoso emplear escalas logarítmicas en lugar de escalas aritméticas para llevar a cabo representaciones gráficas. Las escalas logarítmicas son utilizadas en diversas áreas, a los fines de representar datos que tienen una variación muy grande o un rango de variabilidad muy amplio. Por ejemplo, en técnicas de vacío, la presión de gas varía desde 1 atmósfera[2] hasta un rango de 10^{-13} – 10^{-15} atmósferas. Evidentemente, si utilizamos escalas convencionales (lineales o aritméticas) se hace prácticamente imposible plasmar tal rango de variabilidad.

En cambio, si consideramos logaritmos decimales, sabemos que: $\log_{10}(1) = 0$, $\log_{10}(10^{-15}) = -15$ y ahora tenemos el intervalo [-15; 0] donde la presión es fácilmente representable en una escala que llamaremos logarítmica. La denominamos logarítmica porque en vez de indicar el valor de la variable se señala su logaritmo.

Crear actividades que demanden el uso de escalas logarítmicas no resulta complicado, más si podemos acceder a la Internet, la cual puede tornarse una fuente inagotable de información y datos de primera mano. Recordemos que como red originariamente científica, puede encontrarse gran cantidad de información útil para la clase de Matemática.

El diseño de la actividad que realicemos dependerá, obviamente, de nuestra creatividad y de los intereses de nuestros alumnos. No obstante, tomaremos aquí un ejemplo particular, el cual sólo muestra algunas de las aplicaciones que tiene el tema en cuestión.

Supongamos que deseamos recopilar información acerca del peso mínimo y máximo que tienen los mamíferos marinos de la Patagonia Austral (Argentina). Con seguridad nos sorprenderemos por la variedad y diversidad de datos que encontraremos en la red sobre este tema, lo que conllevará a enriquecedoras puestas en

[2] La unidad de presión denominada atmósfera equivale a la presión de la atmósfera terrestre sobre el nivel del mar. 1 atmósfera $\cong$ 760 milímetros de mercurio $\cong$ 101.325 pascales.

común entre profesor y alumnos. Por lo pronto, aparecerán datos referidos a los recién nacidos y a los adultos, discriminados por sexo, pues existen notables diferencias entre ellos (por ejemplo, entre los elefantes marinos, una hembra alcanza un peso máximo de 900 kg, mientras que un macho los 3500 kg).

Representar los pesos mínimos y máximos de los mamíferos marinos en una escala aritmética puede no aportarnos demasiada información para aquellos animales de porte más pequeño. No obstante, la representación en escala logarítmica resulta sumamente adecuada, y hasta sencilla de realizar si contamos con algún software matemático o planilla de cálculo.

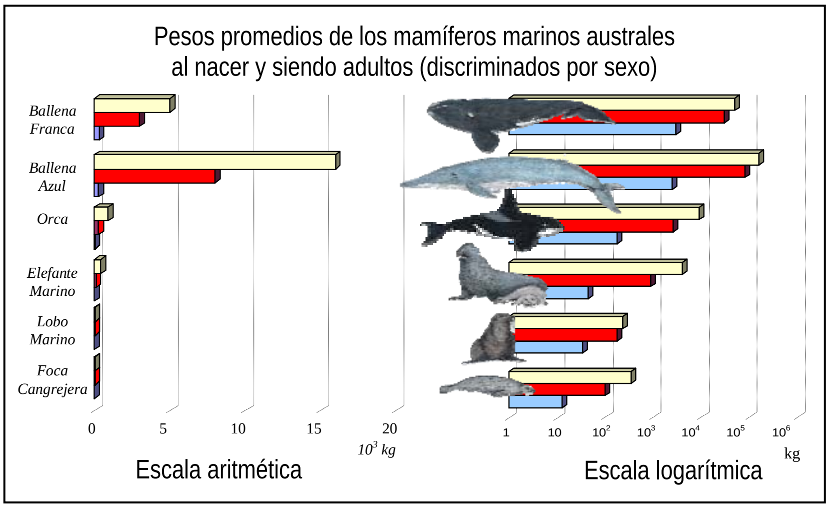


Figura Nº 01: Comparación entre escala aritmética y logarítmica

La lectura e interpretación de estas escalas (Figura Nº 01) es un tema interesante en sí, pues nos lleva a debatir cómo las mismas pueden confundir a los incautos.

Los sonidos que oímos: La pérdida de la audición, no parece ser un problema preocupante para la mayoría de los miembros de nuestra sociedad. Constantemente nos exponemos a la agresión sonora, la cual hasta nos invade y en algunos casos vamos a buscarla: el sonido de una discoteca, por ejemplo, el tradicional "poné más fuerte" un aparato de reproducción de sonido, o un *disc-man* escuchado con un volumen tan alto, que quien se sitúa a pocos pasos del oyente, puede también escuchar su música.

El oído humano puede acomodarse a intervalos de presiones e intensidades sonoras bastante grandes: entre 2×10^{-5} y 20 N/m^2 para la amplitud de la presión y desde 10^{-12} hasta 1 vatios/m^2 para la intensidad. El valor más bajo, en ambos casos, se toma como umbral de audición, mientras que el más alto, que produce sensación dolorosa en la mayoría de las personas, es el umbral de dolor.

Debido a este gran intervalo al que resulta sensible el oído, se utilizan escalas logarítmicas para describir los niveles de presión y de intensidad de una onda sonora. Vale aclarar que al crecer la intensidad de una onda sonora geométricamente, la sensación percibida lo hace de forma aproximadamente aritmética; es decir, que al doble de intensidad nosotros escuchamos sólo un poco más. Esto es lo verdaderamente problemático de la cuestión, pues sensitivamente no percibimos como tales a los grandes aumentos de intensidad sonora. Por esta razón, se introdujo la escala de medidas en bel y decibeles (en honor a Alexander Graham Bell), en la cual un sonido de intensidad *I* tiene, por definición, un nivel de intensidad de: $D = 10 \cdot \log\left(I / I_0\right)$ decibeles.

En consecuencia, cada vez que la intensidad se multiplica por 10, se añaden 10 decibelios al nivel. Esto es, un sonido que ejerce una intensidad sonora 1.000 veces más grande que otro tendrá un nivel de intensidad sonora sólo 30 decibeles mayor. Por ejemplo, supongamos que queremos comparar el nivel de intensidad de una conversación normal con el de un martillo neumático. Podemos buscar en bibliografía especializada, o en la Internet, los valores de intensidad correspondientes. Así tendremos:

Conversación normal: $$D = 10 \log\left(\frac{3 \times 10^{-6}}{10^{-12}}\right) = 10 \log\left(3 \times 10^{3}\right) \cong 65 \text{ decibeles}$$

Número 1000 veces más grande $\Downarrow$ ***Difiere en 30 unidades*** $\Downarrow$

Martillo neumático: $$D = 10 \log\left(\frac{3 \times 10^{-3}}{10^{-12}}\right) = 10 \log\left(3 \times 10^{9}\right) \cong 95 \text{ decibeles}$$

Las discusiones que de estas actividades se desprenden son ilimitadas, pues se pueden analizar incrementos en decibeles de una onda sonora y compararlos con el incremento de intensidad, relacionar la distancia de una fuente sonora con la intensidad en decibeles, determinar la ganancia de potencia de un amplificador de sonido o equipo de música, entre otras.

Destructividad de un terremoto: Una primera medida de la intensidad de los terremotos son los daños que ocasiona, pero para lograr una caracterización más precisa, se han desarrollado diversas escalas. Pareciera lógico medir los sismos por la energía que liberan, aunque muchas veces son números muy grandes. Por ejemplo, hay terremotos cien mil millones de veces más fuertes que otros, y por otro lado, algunos que no parecen ser muy intensos liberan tanta energía como una explosión.

Para evitar números tan grandes, igual que ocurre para medir los sonidos, las escalas usan logaritmos. La escala sismológica de Richter, también conocida por su nombre más adecuado de escala de magnitud local (ML), es una escala logarítmica arbitraria que asigna un número para cuantificar el tamaño de un terremoto. Fue nombrada así en honor de Charles Richter (1900-1985), sismólogo nacido en Hamilton, Ohio, Estados Unidos.

Richter desarrolló su escala en la década de 1930 y calculó que la magnitud de un terremoto o sismo puede ser medida mediante la fórmula $M = \log_{10}(A) + C$, donde *A* es la amplitud de sus ondas superficiales en milímetros y $C = 3{,}3 + 1{,}66 \log_{10}(D) - \log_{10}(T)$ es una constante que depende del período *T* de las ondas registradas en el sismógrafo y de la distancia *D* de éste al epicentro, en grados angulares. Naturalmente la magnitud *M* es una medida logarítmica.

El uso del logaritmo en la escala es para reflejar la energía que se desprende en un terremoto. Nuevamente, el logaritmo incorporado a la escala hace que los valores asignados a cada nivel aumenten de forma exponencial, y no de forma lineal. Al ser logarítmica la magnitud *M*, una diferencia de 1 unidad en magnitud significa 10 veces más de amplitud en la onda sísmica registrada, lo cual puede ser catastrófico en sus efectos. Un terremoto de magnitud 1 o 2 es muy débil, y los de magnitud mayor que 7 devastadores, pero veamos algunos ejemplos concretos.

El 19 de noviembre de 1973, a las 11:19 hs, se produce un terremoto de magnitud 5,40 en Argentina, causando daños en varias localidades del este de las provincias de Salta y Jujuy, especialmente en Santa Clara. Aproximadamente cuatro años después (23 de noviembre de 1977, a las 9:26 hs) se produce otro terremoto, pero de magnitud 7,40 que provocó daños importantes en casi toda la provincia de San Juan, especialmente en la ciudad de Caucete, donde murieron 65 personas. También ocasionó leves daños en la zona norte del Gran Mendoza[3].

Si observamos, la diferencia entre estos dos sismos no parece muy grande, pues $M_1 = 5{,}40$ y $M_2 = 7{,}40$.

En consecuencia tendríamos $\log(A_1) + C = 5{,}40$ para el primer caso, y $\log(A_2) + C = 7{,}40$ para el segundo.

Restando miembro a miembro estas igualdades vemos que:

$$\log(A_2) - \log(A_1) = 2$$

Si aplicamos las propiedades de logaritmos abordadas anteriormente tenemos $\log(A_2 / A_1) = 2$. Es decir:

$$\frac{A_2}{A_1} = 10^2 \Rightarrow A_2 = 100A_1$$

Lo que indica que el terremoto de Caucete fue aproximadamente 100 veces más intenso que el ocurrido en Santa Clara. Otra vez, las posibilidades de actividades vuelven a ser numerosas, llevándonos a integrar la Matemática con otras disciplinas.

El carácter ácido, básico o neutro de las disoluciones: Para indicar el nivel de acidez de una sustancia, solemos hablar del pH. Si bien esta expresión es universalmente utilizada, la misma alude al potencial hidrógeno (pH) que tiene una sustancia. En disoluciones diluidas en lugar de utilizar la actividad del ion hidrógeno, se le puede aproximar utilizando la concentración molar del ion hidrógeno (por ejemplo, una concentración de $[H+] = 1\times10^{-7}$ M). Expresar concentraciones de iones con exponente negativo resulta en la práctica incómodo; por esta razón en el año 1909, el

[3] Fuente: http://www.inpres.gov.ar/seismology/seismology/historic/hist.panel.htm

químico danés Soren P. L. Sorensen introdujo el concepto de pH, como el logaritmo decimal del inverso de la concentración de iones expresada en moles/ litro. Esto es**:** $pH = \log\left(1/H^{+}\right)$**.**

Aplicando ahora el logaritmo de un cociente, la expresión anterior puede escribirse tal como la conocemos:

$$pH = \log(1) - \log\left(H^{+}\right) = -\log\left(H^{+}\right)$$

Si no olvidamos que el valor del pH es un logaritmo en base 10, es fácil de entender que un pH = 9 es 10 veces mas alcalino que un pH = 8, o que un pH = 6 es 10 veces mas ácido que pH=7, y que un pH=5 es 100 veces mas ácido que un pH = 7.

De este modo, si preguntamos ¿qué pH tiene el agua de un acuario? y alguien nos responde: *"Aproximadamente entre 6 y 7"*, podríamos deducir que esta respuesta demuestra la ignorancia del aficionado sobre la dimensión e importancia de este parámetro. Pensemos que si el agua es ligeramente ácida, con pH entre 7,0 y 6,8, la mayoría de los peces de río lograrían vivir en ella. Si el pH es menor de 6,8, no son muchos los peces que viven en este tipo de agua. Sin embargo, los seres que habitan grandes lagos y los animales marinos son prácticamente inflexibles en su relación con el pH debido a la gran estabilidad de los parámetros químicos de sus aguas de origen[4].

Conclusión

Los logaritmos surgieron de una idea muy simple y aún hoy siguen siendo un instrumento importante, tal vez modesto, pero esencial para el conocimiento científico. No obstante, adherimos a las palabras de Martínez Negrete (2004) cuando expresa que:

> Muchas veces enseñando Matemáticas, el alumno pregunta al profesor para qué le sirven, por ejemplo, los logaritmos. Es difícil responder satisfactoriamente a la mayoría de las personas esta válida inquietud. El maestro teme reconocer que en términos estrictamente prácticos y cotidianos, saber de logaritmos es tan inútil como entender alguna revolución o conocer el ciclo de Krebs. Sin embargo estos conocimientos son vitales para comprender la realidad, y frente a las problemáticas de la existencia tener mejores enfoques y herramientas de análisis para su solución. (p. 4)

A su vez, desde los lineamientos curriculares se enfatiza la necesidad de que los alumnos adquieran esquemas de conocimiento que les permitan ampliar su experiencia dentro de la esfera de lo cotidiano y accedan a sistemas de mayor grado de integración. En este sentido, creemos que la Historia de la Matemática se constituye en un valioso aliado para abordar los logaritmos, pues muestra cómo un proceso de construcción humana, lento y laborioso, con contribuciones diversas, se fue liberando poco a poco de la experiencia sensible tendiendo a una mayor generalidad, unidad y armonía.

[4] Fuente: http://www.mundoacuariofilo.org/portal/

Bibliografia

- Abrate, R., Pochulu, M. & Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo. Villa María: Universidad Nacional de Villa María.
- Lefort, X. (2001). “Historia de los logaritmos: Un ejemplo del desarrollo de un concepto en matemáticas”. Proyecto Penélope: Documentos de Historia de las Ciencias. Disponible en Internet: http://nti.educa.rcanaria.es/penelope/es_conflefort.htm
- Martínez Negrete, R. (2004). “Matemáticas: su enseñanza en el placer”. En: Ciencia Abierta. Vol. 23, (CA-23-electrónica). Dirección en Internet: http://cabierta.uchile.cl/revista/23/articulos/pdf/edu6.pdf
- Schoenfeld, A. (1985). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. Madrid: M.E.C.

Raquel Susana Abrate. Es profesora en Matemática y Computación, y Licenciada en Pedagogía de la Matemática por la Universidad Blas Pascal (Argentina). Docente de Matemática del nivel medio, superior no universitario y universitario. Sus investigaciones actuales se centran en: La resolución de problemas en la formación de profesores y el uso de metáforas en el discurso docente. Contacto: Chile 280, Villa María, Córdoba (Argentina).
E-mail: raquelsabrate@arnet.com.ar

Marcel David Pochulu. Es profesor en Matemática y Computación, y Licenciado en Pedagogía de la Matemática. Además, tiene una Maestría en Docencia Universitaria y el Doctorado en Didáctica de la Matemática. Docente de Matemática del nivel medio, superior no universitario y universitario. Sus investigaciones actuales se centran en la resolución de problemas en la formación de profesores y el uso de metáforas en el discurso docente. Contacto: Colabianchi 847, Villa María, Córdoba (Argentina).
E-mail: mpochulu@arnet.com.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 95-108
ISSN: 1815-0640

El reparto de lo escaso

María Candelaria Espinel Febles

Resumen

El reparto de un bien escaso cuando es insuficiente para satisfacer las demandas de todos los acreedores, se conoce como problema de bancarrota. Mediante el problema del Talmud se muestra cómo actúan cinco reglas de reparto: proporcional, igualar ganancias, igualar pérdidas, por orden de llegada y la regla talmúdica. Todas las reglas surgen desde la intuición y la racionalidad y son una buena muestra de cómo abordar situaciones problemáticas para distribuciones complicadas. La resolución de problemas, como tema básico del currículo de matemáticas, ofrece la oportunidad de trabajar las reglas de reparto citadas en el aula con alumnos de secundaria. Obedecen a una variedad de principios de equidad e imparcialidad y que muestran estrategias de distribución que los alumnos pueden aceptar como lógicas y racionales

Abstract

The bankruptcy problem deals with the problem how to divide an estate among all creditors when the estate is insufficient to meet the deceased´s debts. The problem of the Talmud shows how five rules of distribution act: proportional, constraint equal award, constraint equal loss, random arrival and contested garment consistent. All the rules arise from the intuition and the rationality and are a good example of how approaching problematic situations for complicated divide. The resolution of problems, as basic subject of curriculum of mathematics, offers the opportunity to work in the secondary classroom with students using the mentioned rules of divide. This respect a variety of principles of fairness and impartiality and that show strategies of allocation that the students can accept like logics and rationale.

Introducción

Realizar repartos justos es una cuestión difícil que conlleva una amplia clase de problemas matemáticos. De forma cotidiana, la regla a la que más se acude para realizar repartos es el reparto proporcional, donde cada demandante obtiene una fracción de la propiedad a repartir, proporcional a su participación. Si bien, hay situaciones donde asignar una fracción de la propiedad, va en contra de la hipótesis de racionalidad que se supone a las personas. Un ejemplo paradigmático de tal situación lo tenemos en la Biblia con el juicio de Salomón. El reparto salomónico de dar medio niño a cada madre choca con el raciocinio de la verdadera madre.

Un caso conocido de reparto que parece imposible es el famoso *problema de los camellos* (Tahan, 2000): Tres hermanos reciben como herencia 35 camellos. La mitad para el mayor, la tercera parte para el mediano, y la novena parte para el más joven. El reparto que lleva a

$$17\ \tfrac{1}{2} + 11\ 2/3 + 3\ 8/9 = 33\ 1/8$$

no convence a los tres hermanos. Sin embargo, parece hacerse justicia con el reparto

$$18 + 12 + 4 = 34$$

Treinta y cuatro camellos para los hermanos y un camello para el que hace de juez que previamente aportó uno suyo para "repartir" 36 en lugar de 35. Esta solución suele sorprender a los estudiantes y puede ser fuente de profundas reflexiones matemáticas (Gámiz y Flores, 2006). La misma historia vale tomando otro número de camellos: 17, 53, 71, etc.

Otro caso emblemático de reparto, es el *problema del Talmud*. Este problema se ha puesto de moda tras la concesión del premio Nóbel de Economía 2005 a Robert Aumann, que precisamente se ha dedicado a investigar algunos problemas (Aumann y Maschler, 1985) que aparecen en el Mishna, texto sagrado que es la base de la legislación civil, criminal y religiosa Judía.

Problema planteado en el Talmud: un deudor en bancarrota debe a sus acreedores las cantidades de 100, 200 y 300, respectivamente. El deudor sólo dispone de 100. ¿Cómo debe repartirse esa cantidad entre los acreedores? Según el Mishna cada uno de los acreedores se llevará un tercio. Para el caso en que el deudor dispusiera de 200, el acreedor al que se le debe 100 se llevará 50 y los otros dos 75 cada uno. Y si el deudor dispone de 300, entonces a cada acreedor le corresponde 50, 100 y 150, respectivamente.

La situación se resume en la tabla 1.

		Demanda		
		100	***200***	***300***
Estado	**100**	33.33	33.33	33.33
	200	50	75	75
	300	50	100	150

Tabla 1

En este artículo utilizaremos este problema del Talmud, como hilo conductor para exponer los problemas de bancarrota y mostrar cinco reglas de reparto con el objetivo de divulgar su uso en la resolución de problemas en las matemáticas de secundaría. El trabajo se organiza con una introducción, descripción de las cinco reglas, luego éstas se aplican al caso particular de dos demandantes y se compara su efecto según cuatro supuestos distintos de estados disponibles con cuatro demandantes. Se finaliza con algunas reflexiones sobre la resolución de éstos problemas en el aula como una forma de estimular el interés por las matemáticas en nuestros alumnos.

Los problemas de reparto forman parte de la historia de las matemáticas. La idea básica que motiva esta clase de problemas de reparto, llamados de *bancarrota*, está en buscar cómo dividir de forma justa algo que es insuficiente para satisfacer las demandas de los acreedores. Por tanto, hay que asignar una cantidad insuficiente de forma que los demandantes o acreedores queden de acuerdo en que su deuda ha sido cubierta de la mejor forma posible. Lo que se busca es la regla de reparto que aplique criterios razonables, éticos y operativos.

En un problema de bancarrota hay un capital que se denomina estado (E) que debe ser dividido entre un número de demandantes, cuya demanda (D) total excede al estado disponible.

Una regla de bancarrota asigna a cada problema unos pagos que cumple las dos propiedades siguientes:

- Ningún agente obtiene más de la cantidad que demanda, lo que se resume diciendo que la regla es razonable, y

- La suma de las cantidades obtenidas por los acreedores es la totalidad del estado, es decir, la regla es eficiente.

Muchas situaciones económicas pueden modelizarse como un problema de bancarrota, donde la cuestión está en cómo dividir un recurso entre agentes que presentan demandas sobre un cierto bien disponible pero no suficiente para satisfacer todas las demandas. Las cinco reglas no se definen formalmente, sino que se realiza una aproximación intuitiva para ilustrar la racionalidad de cada una de ellas. Para ilustrar las diferencias entre ellas se presenta la solución al caso del Talmud para ver los distintos métodos de distribución y la lógica de cada uno de ellos.

El profesorado de primaria y secundaria, interesado en divulgar aplicaciones sencillas de las matemáticas a la vida cotidiana, puede utilizar en el aula sin necesidad de grandes conocimientos matemáticos por parte de los alumnos. La resolución de problemas es el motor de la actividad matemática. Los problemas de reparto forman parte de las matemáticas tradicionales. Creemos que los problemas de bancarrota son sugerentes y apropiados para llevar al aula de secundaria, igual que otros problemas propios de teoría se juegos (Gura, 2005). Situaciones como la distribución de impuestos, repartos de beneficios o las herencias ofrecen interesentes ejemplos sobre los que los alumnos pueden reflexionar y aportar sus propias soluciones y observar que la solución no consiste en un único reparto, sino en poner de acuerdo a los demandantes sobre la regla a elegir. Las distintas soluciones pueden surgir de una forma natural y redescubrir algunas de las reglas más conocidas para problemas de bancarrota.

1. Algunas reglas de reparto

Para estos problemas se ha fijado una terminología estándar y las reglas han sido caracterizadas por un conjunto de axiomas que se pueden consultar en la literatura especializada, por ejemplo, Thomson (2003).

Problema de bancarrota: Dividir la propiedad o estado E de la empresa entre todos los acreedores o demandantes $d = (d_1, \ldots, d_n)$. El problema de reparto surge porque la propiedad es insuficiente para satisfacer las demandas de todos los acreedores, es decir,

$$0 < E \leq D = d_1 + \ldots + d_n$$

A continuación se describen cinco reglas de reparto para problemas de bancarrota. Se suaviza en la presentación de cada una la parte teórica con el fin de plantear una situación donde hay un problema de distribución. Se muestra cómo actúa cada regla en el problema del Talmud. Y se añaden algunas reflexiones para situar este tipo de problemas en el currículo de la enseñanza secundaria, bien en secundaria obligatoria o en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales.

Regla de Reparto Proporcional

Cada demandante obtiene una fracción de los activos que es proporcional a su participación en las demandas totales. El demandante i obtiene la cantidad: $E\, d_i / D$.

La solución del problema del Talmud mediante el reparto proporcional se recoge en la tabla 2.

		Demanda		
		100	***200***	***300***
Estado	**100**	16.66	33.33	50
	200	33.33	66.66	100
	300	50	100	150

Tabla 2

La solución, tabla 1, que ofrecen los eruditos en el Talmud coincide (como se ve en la tabla 2) con la regla del reparto proporcional cuando el estado es 300, pero no coinciden para los otros dos estados.

La duda es saber si el reparto del estado 200 sigue alguna regla, y en caso de que exista si funciona para los tres estados. Esta inquietud la abordan Aumann y Maschler en 1985.

La forma que parece más natural para abordar situaciones de reparto es la proporcionalidad. Cada demandante obtiene una fracción del estado que es proporcional al peso de su participación en las demandas totales.

El reparto proporcional es el más frecuente en casi todos los ámbitos. En España cuando una empresa se declara en quiebra, la liquidación a los acreedores se realiza de forma proporcional a las deudas que la empresa ha contraído con ellos. En defensa de la regla de proporcionalidad hay que decir que es una regla que no se somete a la manipulación mediante la posible unión o división de los acreedores. Veremos esto más adelante con un ejemplo.

Regla de Ganancia Igualitaria

Otorga la misma cantidad a todos los demandantes sin dar a ninguno más de lo que demanda. Cada demandante i recibe E/n, siendo n el número de demandantes. Si esta cantidad es mayor que lo que demanda i, la cantidad que sobra se reparte en partes iguales entre el resto de los demandantes.

La solución del problema del Talmud mediante esta regla se recoge en la tabla 3.

		Demanda		
		100	***200***	***300***
Estado	**100**	33.33	33.33	33.33
	200	66.66	66.66	66.66
	300	100	100	100

Tabla 3

Esta regla da prioridad a las demandas más pequeñas. Todos los acreedores son tratados por igual sin importar el peso o tamaño de su demanda, si bien ninguno va a recibir más de lo que solicita, pues es lo que se considera para que la regla sea razonable.

Esta regla de ganancia igualitaria de puede ilustrar mediante un método geométrico (Malkevitch, 2005; González-Alcón y Alemán, 2006). Se dibujan envases o tanques con igual base y altura proporcional al tamaño de las demandas. Se comienza llenando todos los tanques con igual cantidad de líquido en cada uno, y manteniendo las alturas tan iguales como sea posible hasta que las alturas totales ascienden hasta el valor de E. La idea es que la cantidad se reparte en partes iguales entre todos los envases sin llegar a superar el tamaño del envase. Por ejemplo, con tres demandantes, de cantidades 10, 30 y 100, para un estado, E = 40; en un primer paso a cada demandante se le asignaría: 140/3 = 13.33. Como esta cantidad sobrepasa lo que pide el primer demandante (no cabe en el primer tanque), se reparte el exceso (3.33) en partes iguales a los otos dos demandantes y por tanto, los pagos que recibirá cada uno son 10, 15 y 15.

Regla de Pérdida Igualitaria

Se intenta que todos los demandantes pierdan lo mismo. Para ello se suman todas las demandas, D, y lo que falta para cubrir las demandas, D-E, se divide en partes iguales entre todos los demandantes: (D-E)/n. A cada demandante i se le asigna la diferencia ente su demanda y la pérdida: d_i-(D-E)/n. Si dicha cantidad es negativa no se le asigna nada, y se quitaría a partes iguales de las demandas del resto.

La solución del problema del Talmud mediante la pérdida igualitaria se recoge en la tabla 4.

		Demanda		
		100	***200***	***300***
Estado	**100**	0	0	100
	200	0	50	150
	300	0	100	200

Tabla 4

Con las tres demandas del Talmud y un estado de 100, las perdidas de cada acreedor son, respectivamente, 100, 200 y 200. Para, E = 200, el primer demandante pierde 100, y los otros dos 150 cada uno. Y el perjuicio que sufren los tres acreedores es el mismo, 100, para E = 300.

Con esta regla el grado de descontento de los acreedores tiende a igualarse. A los acreedores a los que se les debe poco dinero, la regla les trata bastante mal. La regla da prioridad a las demandas elevadas. Este método de asignación se suele aplicar cuando se trata de cubrir necesidades, por ejemplo para el apoyo público del gasto en salud, u otras necesidades de bien para toda la comunidad.

Método del Orden de Llegada

Supongamos que se colocan a los demandantes en fila y que según van llegando se les da lo que demandan, siempre que haya cantidad suficiente. El demandante que llega primero se le da su parte, luego al que llega el segundo, si queda propiedad, y así con toda la fila hasta que resta propiedad a repartir. Como todos los órdenes de llegada de los demandantes se consideran igualmente posibles, el número de ordenaciones es n!, siendo n el número de acreedores. La cantidad que este método asigna a cada demandante es la media de lo que obtienen los demandantes en todas las ordenaciones.

Para ilustrar esta interpretación tomemos el caso E = 300 del Talmud, y las demandas 100, 200 y 300. Las seis posibles ordenaciones de los tres demandantes se muestran en la primera columna de la tabla 5. Así, en el orden 123, el demandante 1 recibe 100, el demandante 2 recibe 200, y se acaba el capital por lo que el demandante 3 no recibe nada en esta ordenación.

	1	2	3
E = 300	*100*	*200*	*300*
123	100	200	0
132	100	0	200
213	100	200	0
231	0	200	100
312	0	0	300
321	0	0	300
Suma	300	600	900
Orden de Llegada	50	100	150

Tabla 5

La solución del problema del Talmud por el método se orden de llegada se recoge, para los tres estados considerados, en la tabla 6.

		Demanda		
		100	***200***	***300***
Estado	**100**	33.33	33.33	33.33
	200	33.33	83.33	83.33
	300	50	100	150

Tabla 6

El método del orden de llegada coincide con el valor de Shapley, que es uno de los conceptos más importantes en la teoría de juegos cooperativos y ha generado una abundante literatura. Se llama valor de Shapley a la asignación que recibe cada jugador en una propuesta de reparto según un criterio de arbitraje propuesto por Lloyd Shapley. El criterio consiste en asignar un pago a cada jugador en proporción al número de coaliciones potencialmente vencedoras en las que el jugador participa. Puede encontrarse una contribución para abordarlo mediante la combinatoria con estudiantes de secundaria en Espinel (2000).

La solución que aparece en la tabla 6, para el método del orden de llegada coincide con la regla del Talmud, tabla 1, y con la regla del reparto proporcional, tabla 2, cuando el estado es 100 o cuando es 300, pero no coincide para un estado de 200. En el problema del Talmud, se apunta como reparto justo 50, 75 y 75, cuando E = 200. Solución que no coincide con ninguna de las cuatro reglas presentadas hasta aquí. Si bien se observa que la solución, 33.33, 83.33 y 83.33, que aporta el valor de Shapley para juegos cooperativos, es la que más se parece a la del Talmud. Algo así debieron observar Aumann y Maschler (1985) para aplicar la teoría de juegos y dar con la solución en el nucleolo del juego que esta vez si coincide con la solución talmúdica o regla del bien disputado que se recoge a continuación.

Regla del Bien Disputado o Talmúdica

Esta es una regla que se apoya en el sentimiento de las personas. La idea es que, al parecer, los acreedores tienden a fijarse en lo que ellos esperaban ganar cuando el capital a repartir es pequeño, y miran sus pérdidas cuando el capital que hay para repartir es grande. Así que para que todos los acreedores queden satisfechos, si el estado es pequeño, digamos menor que la mitad de la deuda de todos los acreedores, se reparte igualando las ganancias. Y si el estado es grande, esto es mayor que la mitad de la deuda de todos los acreedores, se reparte igualando las pérdidas.

El método de bien disputado se puede encontrar desarrollado como un proceso racional en Aumann y Maschler (1985).

La solución depende de la relación entre la suma que demandan los acreedores y el estado. Primero se ordenan las demandas de menor a mayor:

$$d_1 \leq ... \leq d_n, \text{ siendo } D = d_1 + ... + d_n$$

Aplicar la regla supone comparar el estado, E, con la mitad de la deuda total, D/2. El problema de bancarrota puede plantearse como un problema de toma de decisiones, donde surgen cuatro casos.

Caso I. $E \leq D/2$ y $E \leq n\, d_1/2$.
Caso II. $E \leq D/2$ y $E \geq n\, d_1/2$.
Caso III. $E \geq D/2$ y $E \leq (D - nd_1/2)$.
Caso IV. $E \geq D/2$ y $E \geq (D- n\, d_1/2)$.

Veamos cada uno de los cuatro casos, y cómo actúa la regla de asignación mediante el problema del Talmud.

En los dos primeros casos el estado o capital a ser distribuido es pequeño en relación a la demanda total, esto es, $E \leq D/2$.

Caso I. $E \leq D/2$ y $E \leq n\, d_1/2$.

En este caso, según la regla, se asigna a cada acreedor la cantidad: E/n .

Nótese que si el estado o cantidad disponible para repartir es demasiado pequeña en relación a la suma de todas las demandas, no es posible asignar la mitad de la demanda más pequeña a cada acreedor, por eso se divide el estado de forma igualitaria entre todos los acreedores.

Si $E = 100$, $D = 600$, y $d_1 = 100$. La regla asigna a cada uno de los cuatro acreedores la cantidad: 33.33.

Caso II. $E \le D/2$ y $E \ge n\, d_1/2$.

La división en este caso sigue el siguiente proceso. La cantidad $d_1/2$ es la primera que se proporciona a todos los acreedores. La cuota del primer acreedor se fija en $d_1/2$. La cantidad restante E se divide entre todos los acreedores, excluyendo el primero, hasta que todos obtengan $d_2/2$. La cuota del segundo acreedor se fija en $d_2/2$ y de nuevo la restante E se divide entre los acreedores, excluyendo el primero y el segundo, y hasta que todos obtengan $d_3/2$, y así se continúa el proceso.

Si E = 200, D = 600, y $d_1 = 100$, así que $200 \le 600/2$ y $200 \ge 3.100/2$, por tanto la regla asigna, respectivamente, 50, 75 y 75.

En los dos casos siguientes, la cantidad o estado E a ser distribuida es grande en relación a las demandas, esto es, $E \ge D/2$.

Caso III. $E \ge D/2$ y $E \le (D - nd_1/2)$.

La distribución para este caso sigue el proceso siguiente. Todos los acreedores reciben primero $d_1/2$. En este primer momento el primer acreedor tiene la cantidad más pequeña $d_1/2$ (la diferencia entre la demanda y $d_1/2$). El resto de E es un conjunto aparte y se utiliza para igualar las pérdidas del resto de los acreedores. El objetivo es poner a cada acreedor la pérdida más cercana a $d_1/2$ que E permita. Para ello se sigue el siguiente procedimiento. El acreedor con mayor pérdida (acreedor n) le será adjudicada una pérdida que iguale a la pérdida del acreedor (n-1). El siguiente paso es igualar la pérdida de los acreedores n y (n-1) con la pérdida del acreedor (n-2) y así sucesivamente hasta que E se acabe.

Si E = 300. Se cumple que $300 \ge 600/2$ y $300 \le (600-3.100/2)$, quedando las asignaciones, respectivamente, en 50, 100 y 150.

Caso IV. $E \ge D/2$ y $E \ge (D- n\, d_1/2)$.

En este caso, el estado E, es suficiente para igualar las pérdidas de todos los acreedores. De aquí que el remanente de E sea igualmente distribuido entre todos los acreedores. Este último caso puede resumirse en

$$(E-D + nd_i)/n$$

Este IV caso no se presenta en el Talmud. Los resultados de la aplicación de esta regla al problema del Talmud se mostraron en la introducción de este artículo, tabla 1.

El reparto realizado a través de la regla del bien disputado es el mismo que se obtiene a través del nucleolo. El nucleolo es el conjunto de repartos que minimiza los excesos. Mediante el concepto de nucleolo se busca el reparto socialmente más justo en el sentido de que la coalición que resulte más desfavorecida en el reparto esté lo menos perjudicada posible.

2. Discusiones y ejemplos

Las cinco reglas de reparto consideradas en este trabajo conllevan asignaciones a los demandantes que aplican un determinado principio (igualar pérdidas, igualar ganancias o proporcionalidad), también se pueden definir nuevas reglas que se consideren justas según otros principios o según el objetivo o ambiente donde se plantee el reparto. Veamos algunas cuestiones que pueden resultar paradigmáticas.

La regla proporcional verifica la propiedad de no manipulabilidad, esto es, ningún acreedor mejorará su asignación uniéndose a otros acreedores o dividiendo sus demandas en otras más pequeñas. De las cinco reglas descritas, el reparto proporcional es la única no manipulable.

Veamos un ejemplo, para un estado, E = 40, con tres demandas individuales: 10, 30, 100. Por tanto, D = 140. Usando la regla de ganancia igualitaria, los demandantes consiguen 10, 15 y 15 respectivamente. Sin embargo si la persona que demanda 30 decide separarse en dos de 20 y 10, surgen cuatro demandas individuales: 10, 10, 20 y 100 el reparto de ganancia igualitaria asigna: 10, 10, 10 y 10. Así el demandante que pedía 30 y que conseguía 15, al separar su demanda consigue 20.

	10	30	100
40	10	15	15

	10	10	20	100
40	10	10	10	10

Esta paradoja no afecta al reparto proporcional. Cada acreedor obtiene una fracción del estado que es proporcional a su participación en las demandas totales.

Reparto entre dos

Algunos problemas de reparto que se recogen en textos antiguos aluden a una situación en la que dos individuos demandan partes de un solo bien, por ejemplo de una pieza de tela. De ahí procede el nombre de la regla del “bien disputado”.

El Mishna plantea y resuelve el siguiente problema para dos acreedores. Dos tienen una tela, uno de ellos la reclama entera, el otro reclama la mitad. Entonces al primero se le concede ¾ de la tela, al otro ¼ .

Veamos otros casos para dos acreedores y cómo se ve la regla talmúdica o del bien disputado. Si uno de los acreedores pide la pieza entera y el otro 3/2, la regla talmúdica le da la mitad a cada uno. Si embargo para el caso en que un acreedor pide 1/5 y el otro 3/2, la regla le da al primero sólo 1/10 y al segundo casi todo el bien: 9/10. En la tabla 7 se recogen estos tres casos, como modelos A, B y C. Además se muestra las asignaciones a los tres modelos por medio de las cinco reglas de reparto.

E = 1	Modelo A		Modelo B		Modelo C	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
Regla	1 / 2	1	1	3 / 2	1 / 5	3 / 2
Proporcional	1 / 3	2 / 3	2 / 5	3 / 5	2 / 17	15 / 17
Ganancia Igualitaria	1 / 2	1 / 2	1 / 2	1 / 2	1 / 5	4 / 5
Perdida Igualitaria	1 / 4	3 / 4	1 / 4	3 / 4	3 / 20	17 / 20
Orden Llegada	1 / 4	3 / 4	1 / 2	1 / 2	1 / 10	9 / 10
Bien Disputado	1 / 4	3 / 4	1 / 2	1 / 2	1 / 10	9 / 10

Tabla 7

Nótese que el método del orden de llegada y la regla del bien disputado en los tres modelos dan la misma solución. Esto no es casual, las dos soluciones de estas reglas coinciden siempre cuando hay dos acreedores. En ninguno de los tres modelos la regla de reparto proporcional coincide con la del bien disputado, de hecho el reparto proporcional no es una regla talmúdica.

Obsérvese cómo para el Modelo C, a excepción de orden de llegada y bien disputado, todas las reglas dan soluciones distintas.

La regla de reparto proporcional para dos acreedores se puede mostrar en un sistema cartesiano donde los ejes representan a los dos acreedores. La asignación que le corresponde a cada acreedor se obtiene como el punto donde se corta la recta de posibles asignaciones con la recta que une la respectiva demanda con el origen. Así la intersección de la recta $d_1 + d_2 = 1$ con la recta $d_2 = 2\, d_1$ da la solución (1/3, 2/3) que corresponde al Modelo A.

Equidad para cuatro acreedores

A lo largo del artículo se han estudiado problemas de Bancarrota para dos acreedores y tres acreedores mediante el Talmud. A continuación se muestra un ejemplo con cuatro acreedores y distintos estados con el objetivo de comparar cómo actúan las cinco reglas de reparto.

Se consideran cuatro acreedores con deudas, $d_1 = 100$, $d_2 = 200$, $d_3 = 300$, $d_4 = 400$, por tanto, una deuda total, D = 1000 (1000 = 100 + 200 + 300 + 400).

En las siguientes tablas se muestran los repartos correspondientes según cuatro estados, E = 60, 400, 700 y 850.

E = 60	100	200	300	400	
Proporcional	6	12	18	24	60
Ganancia Igualitaria	15	15	15	15	60
Pérdida Igualitaria	0	0	0	60	60
Orden Llegada	15	15	15	15	60
Bien Disputado	15	15	15	15	60

E = 400	100	200	300	400	
Proporcional	40	80	120	160	400
Ganancia Igualitaria	100	100	100	100	400
Pérdida Igualitaria	0	0	150	250	400
Orden Llegada	41.66	71	125	158.33	400
Bien Disputado	50	100	125	152	400

E = 700	100	200	300	400	
Proporcional	70	140	210	280	700
Ganancia Igualitaria	100	200	200	200	700
Pérdida Igualitaria	100	200	200	200	700
Orden Llegada	66.66	141.66	191.66	300	700
Bien Disputado	50	116.6	216.6	316.6	700

E = 850	100	200	300	400	
Proporcional	85	170	255	340	850
Ganancia Igualitaria	100	200	275	275	850
Pérdida Igualitaria	25	125	225	325	850
Orden Llegada	75	164.583	252.083	358.333	850
Bien Disputado	62.5	162.5	262.5	362.5	850

Tabla 8

Las asignaciones que aparecen en la tabla 8 nos permiten observar la táctica de estas reglas.

Mientras el estado crece es posible mediante cualquiera de las cinco reglas satisfacer la demanda de los acreedores. Si hay dinero es fácil contentar a todos los demandantes.

Cuando el bien a repartir es escaso, la dificultad es evidente, pues estamos ante el reparto de la “miseria”. Es evidente que la regla de pérdida igualitaria perjudica a los acreedores con bajas demandas. Seguro que, en este sentido, la forma que parece más natural para abordar situaciones de reparto es la proporcionalidad.

Si bien aun aplicando reglas diferentes se puede obtener la misma solución. Para E=60, las soluciones de tres reglas coinciden con una asignación de 15 para cada acreedor. Para E=700, la regla de ganancia igualitaria y la regla de pérdida igualitaria asignan el mismo reparto. El método del orden de llegada y la regla del bien disputado coinciden en sus asignaciones cuando el estado es 60 y en los otros tres estados el valor de las soluciones es bastante parecido.

3. Algunas reflexiones y la resolución de problemas

El artículo se ha escrito pensando en posibles aplicaciones en la Enseñanza Secundaria. Los sistemas de reparto justo y en concreto el problema de bancarrota, ofrecen la oportunidad de plantear problemas en el aula de secundaria donde los alumnos no les baste con aplicar una regla aritmética, sino que se reclame de ellos una defensa y justificación a las soluciones aportadas. Los problemas de reparto, y la búsqueda de métodos justos puede ser un gran incentivo para estudiantes avanzados o talentosos en matemáticas. En los cursos de secundaria obligatoria los estudiantes tienen los conocimientos matemáticos suficientes para captar cada una de las reglas aquí descritas. Los estudiantes pueden aportar sus propias reglas de reparto, comparar con las que ofrecen sus compañeros y discutir las soluciones.

Las cinco reglas de reparto introducidas nos invitan a reflexionar sobre cuál es el reparto razonable, especialmente si nosotros mismos nos viéramos involucrados en una situación dispondríamos de pautas para defender nuestros propios intereses. Y al mismo tiempo hacer un reparto compatible con lo que cada una de las personas implicadas cree merecer. Así que con la resolución de este tipo de problemas estamos aportando estrategias y métodos de resolución de problemas. Y constatar que en lugar de poner de acuerdo a los demandantes para repartir los bienes abundantes o escasos, es importante fijar previamente una buena y razonable regla de reparto. Estando la regla fijada es más fácil resolver los conflictos personales.

La proporcionalidad es la regla más conocida y es la que aplican los estudiantes, pues se incentiva desde la enseñanza oficial. De hecho, hay en España un atractivo casi enfermizo por aplicar la "la regla de tres". O bien, según el desarrollo del currículo que los alumnos tengan más reciente, aplican el álgebra. Así, por ejemplo, para resolver el reparto de 100 entre tres demandantes que aportaron 100, 200 y 300, denominan por x al porcentaje que le corresponde a cada demandante, y formulan la ecuación: $100x + 200x + 300x = 100$, operan $600x = 100$, por tanto $x = 1/6$. Así que el pago del primer demandante es 1/6.100, el segundo recibe 1/6 .200 y el tercero 1/6. 300.

El método proporcional parece lógico y justo porque utiliza el tamaño de las demandas. Si se mira el problema de bancarrota por la proporcionalidad de las pérdidas se llega a la misma solución, algo que sería interesante incentivar desde la enseñanza. Por ejemplo, en el problema del Talmud para E = 100, el reparto proporcional que le corresponde a cada acreedor es 16.66, 33.33 y 50. La pérdida total es 500 (= 600–100). Si se realiza un reparto proporcional de esta pérdida se obtiene: 500.1/6 = 83.33; 500.2/6 = 166.66 y 3/6. 500 = 250. Así se tiene, 100-83.33 = 16.33; 200-166.66 = 33.33 y 300-250=50. Esto es, la misma solución que cuando utilizamos las demandas.

La regla de igual pérdida disminuye las demandas en igual medida entre todos los acreedores, con la única condición de que ningún acreedor le corresponda cantidades negativas. Esta regla proporciona un reparto en el que el grado de descontento de los agentes tiende a igualarse.

Como es sabido repartir nunca es trabajo fácil. Todos conocemos situaciones de reparto donde la abundancia o escasez de un bien impide un acuerdo entre las personas involucradas. Pensemos en las frecuentes disputas entre hermanos por la herencia. Para trabajar con los alumnos se puede tomar un ejemplo real o bien simular entre ellos una situación. Por ejemplo si tres compañeros participan en una actividad en la que han invertido tiempo o dinero. Pongamos una ganancia de 300 euros. Si esta cantidad no es suficiente para cubrir las aportaciones de cada uno, hay que decidir sobre cuál es el reparto razonable según el tiempo o el dinero que cada uno ha invertido. Por ejemplo Ana, Beatriz y Carlos han invertido 120, 150 y 180 euros respectivamente; podemos preguntarles si les parece justo el reparto de 80, 95 y 125 que les asigna el método de orden de llegada.

Bibliografía

- Aumann, R. J. (1982). Game Theory in Talmud. En http://dept.econ.yorku.ca/~jros/docs/AumannGame.pdf
- Aumann, R.J. y Maschler, M. (1985). Game Theory Analisis of Bankruptcy Problem from the Talmud. Journal of Economic Theory, 36, 195-213.
- Espinel, M. C. (2000). El poder de las coaliciones en algunas instituciones. UNO, 233, 57-70.
- Gallestegui, M.C.; Inarra, E. y Prellezo, R. (2001). Bankruptcy and Fishing Regulation: The Northern European Anglerfish Fishery. Marine Resource Economics, 17, 4, 291-307.
- Gámiz, L. C. Y Flores, P. (2006). Papel pericial de las matemáticas. Los repartos. http://ddm.ugr.es/personal/pflores/textos/aRTICULOS/Propuestas/REPARTOS.pdf
- González-Alcon, C. y Alemán, M. (2006). Reglas hidráulicas para problemas de bancarrota. SEIO 2006. En www.seio2006.ull.es/resumenes.php
- Gura, E. (2005). Using game theory to increase students´ motivation to learn mathematics. En www.ratio.huji.ac.il
- Malkevitch, J. (2005). Resolving Bankruptcy Claims. En http://www.ams.org/featurecolumn/archive/bankruptcy.html
- Tahan, M. (2000). El hombre que calculaba. Veron editores. Barcelona
- Thomson, W. (2003): Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey. Mathematical Social Sciences, 45, 249-297.

Maria Candelaria Espinel Febles. Profesora Titular de Didáctica de la Matemática, Universidad de La Laguna. Tenerife. España.
E-mail: mespinel@ull.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 109-115
ISSN: 1815-0640

Materiales y recursos para las matemáticas: el folio usado

Francisco Morales Villegas

Resumen

Se ofrecen diversas actividades matemáticas en el aula usando folios como material didáctico.

Abstract

Several mathematical activities into the classroom are given, using the sheets of paper as didactic material.

Introducción

En los 50 pasamos del pizarrín al papel, fue una revolución en la escuela. La aparición del bic y la marcha de los tinteros también supuso un antes y un después en las clases. En los 90 llegaron los primeros ordenadores a los centros, con poco más que interminables listas de números y letras verdes sobre un fondo negro. Ahora los portátiles, proyectores, pizarras digitales, cámaras y demás aparatos electrónicos acompañados de programas que hacen posible lo imposible, nos prometen un futuro de ciencia ficción.

Pero volvamos a la realidad, ¿Quién cuenta con esta tecnología? Y, si la tenemos, ¿funciona? Hay materiales asequibles presentes en las aulas y de gran valor educativo (dados, cartas, dominós, juegos de mesa, loterías, geoplanos, pentominos…), pero si hay un material al alcance de cualquiera en un centro escolar, es el folio. Además de para hacer juguetes (barcos, aviones, animales…), juegos escritos (tres en raya, bloqueado, salto de la rana, hundir la flota, los cuadrados, etc.), un simple folio usado puede servir, con un poco de imaginación, para introducir, afianzar y aclarar conceptos matemáticos. No se trata de sustituir unos materiales por otros, ni de si son mejores o peores, sino de aprovechar un material abundante en todas las aulas y, en principio, carente de valor.

Origen de la actividad

En mi centro, en el pasillo destinado a las matemáticas, tenemos "El problema del mes". El primer día de cada mes se colocan tres problemas para los diferentes ciclos de primaria. Los que tienen interés en participar, copian el problema y se lo llevan a casa para resolverlo. Cuando han dado con una solución, la anotan en un papel y la introducen en una urna que hay junto a los problemas. El último día del mes, mis alumnos y yo corregimos los problemas, separamos los que están correctos y pasamos por las clases explicando las soluciones válidas que hemos encontrado.

En muchas ocasiones, los propios trocitos de papel que llevaban los chicos en la mano, servían de apoyo para contestar a las preguntas que les hacían en las aulas. Por esto, decidí investigar qué sería posible explicar con la ayuda de un folio usado. De esta manera daríamos un sentido a nuestra caja de papel reciclado y manejaríamos diferentes conceptos matemáticos.

Como no tenemos libros de texto que gobiernen nuestro trabajo, pudimos dedicar varias sesiones a esta actividad. Lo que viene a continuación partió de mi grupo de 6º (24 alumnos de entre 11 y 12 años, con 11 extranjeros de 10 países diferentes), por lo que tiene que interpretarse como una forma de utilizar un material a partir de conocimientos ya adquiridos en este curso o en otros anteriores.

Cada uno eligió el concepto matemático que más dominaba o más le gustaba y sobre él desarrolló unas explicaciones y ejemplos para utilizar el folio en otra aula del colegio. Quienes compartían los mismos conceptos matemáticos se unieron en grupos y compartieron el trabajo. Se expuso cada trabajo en la clase para tratar de encontrar posibles defectos y mejorar tanto aspectos de transmisión oral, como de posición ante el público, tono de voz, muletillas, claridad de lo expuesto, etc. Después empezaron a pasar por las clases que nos lo solicitaron (los niveles dependieron de la actividad a realizar) explicando los conocimientos que habían trabajado.

Ejemplos de actividades

Para favorecer la comprensión de los lectores no españoles, indicamos las edades de los alumnos según el nivel educativo:

- Infantil: 3-6 años
- Primaria, primer ciclo: 6-8 años
- Primaria, segundo ciclo: 8-10 años
- Primaria, tercer ciclo: 10-12 años

Sistema de numeración decimal y posicional

Infantil y Primer ciclo

Con dar la vuelta al folio usado, puedo rodear todas las cantidades numéricas que encuentre, puedo buscar cardinales y ordinales, compararlas, ordenarlas de menor a mayor, buscar las cantidades repetidas, buscar si hay alguna escrita con letra…

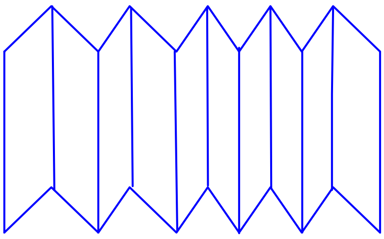
Se reparte un folio reciclado a cada alumno. En él, escriben el dígito que quieran. Se les da una consigna del tipo “formen números del 100 al 200, formen números pares de 3000 a 4000, etc.” Los alumnos se agrupan libremente hasta formar la cantidad solicitada. Un mismo grupo puede ofrecer varias soluciones válidas.

Con el mismo folio del ejemplo anterior, se agrupan primero (cuatro o cinco por grupo) y se les da la orden de “gana quien más se acerque a 4862”. Deberán colocar sus cifras para conseguir acercarse lo más posible.

Los niños, en grupos pequeños, escriben los números del 1 al 9. Los colocan sobre la mesa y se dan media vuelta para no mirar lo que hacemos. A uno cualquiera de los números le damos la vuelta para ocultarlo y ellos tienen que adivinar cuál ha sido. Si les resulta muy fácil, podemos voltear dos números.

Los niños, en grupos pequeños, escriben los números del 1 al 9. Con estas cifras copian su número de teléfono, la edad de la maestra, el número de la clase…

Segundo ciclo



Divido una hoja en 10 a modo de acordeón. Explicamos que hacen falta las 10 partes para hacer un folio, cada tira es la décima parte. Podemos ahora construir y comparar cantidades enteras con un decimal.

Tercer ciclo

Cada uno tiene un trozo de papel en el que escribe un dígito al azar. En grupos de tres, formar todos los números primos de 2 o tres cifras que se puedan.

Operatoria

Cualquier ciclo de primaria

Cada alumno escribe un dígito en un trozo de papel. Pedimos una cantidad a un voluntario (nos dirá 20, 45, 1000, etc., también nosotros podemos dar esa cifra). Elegimos 4 o 5 trozos de papel al azar y pedimos que con esas cantidades y las operaciones que ellos conocen, se aproximen lo más posible a la cantidad requerida.

Multiplicación

Primer o segundo ciclo

Para multiplicar dos números, tengo que doblar el folio en tantas filas y columnas como indiquen los factores de la multiplicación. Al desdoblar el papel, tengo a la vista las piezas que me facilitan explicar el total, la propiedad conmutativa y la distributiva.

División

Segundo ciclo

Dibujamos en el folio los objetos que queremos repartir (por ejemplo 18 vasos) y lo repartimos entre un número de personas (por ejemplo 5). Vamos rompiendo el folio para dar a cada uno lo que pensamos que le corresponde. Si nos pasamos, llegaremos a las últimas personas sin vasos suficientes, y tendremos que empezar de nuevo. Si nos sobran demasiados, podremos volver a repartir uno o dos más a cada uno. Observamos que todos tienen el mismo número de vasos y si sobran o no después del reparto (el resto).

Resultó ser muy interesante que después de realizada una división, repetirla dividiendo entre el cociente. Se sacaron muchas conclusiones.

Líneas y ángulos

Segundo ciclo

Hacer un pliegue en el papel para obtener una línea recta. Hacer otra paralela, perpendicular y secante. ¿Somos capaces de construir dos rectas que se corten en dos puntos?

Con el folio, hacemos un cuadrado. Lo dividimos por la diagonal para obtener dos triángulos rectángulos. Así obtenemos ángulos de 45º y 90º. El de 45º lo dividimos por la mitad para obtener 22,5º.

Con estas plantillas, estimamos la medida de ángulos dados. Para ello, unimos dos o tres diferentes.

Tercer ciclo

Hacemos determinados dobleces sin orden ninguno. Después buscamos ángulos agudos, obtusos, rectos... Observar características como que si una recta corta a dos paralelas, se producen ángulos iguales y complementarios.

Medida de longitudes

Primer y segundo ciclo

Medir objetos presentes en el aula utilizando el ancho/largo del folio como patrón.

Descubrir la importancia de los múltiplos y submúltiplos de la unidad de medida.

Sabiendo que el folio mide 21x29, haciendo sucesivos dobleces, hallar en un solo folio 10, 20 y 30 centímetros. Utilizarlo para realizar medidas.

Medida de superficies

Tercer ciclo

Sabiendo que el folio mide 21x29, hacer los dobleces necesarios para obtener 1 dm^2. ¿Cuántos harán falta para formar un metro cuadrado?

Si unimos 10 bloques de 1 dm^2 se forma la décima parte. Construirlo entre toda la clase.

Construir un rectángulo. Calcular su área. Observar que de ese rectángulo salen dos triángulos iguales, de ahí que el área sea la mitad.

Con la regla y el decímetro cuadrado, estimar el área y perímetro de determinadas figuras.

Construimos cuadrados de 5, 6, 7, 8… centímetros de lado y escribimos dentro su área. Esas cantidades son los cuadrados de los números.

Geometría

Segundo y tercer ciclo

Construir con plegado y cortado determinadas figuras planas (cuadrado, diferentes triángulos, rectángulo, rombo, trapecio, trapezoide...)

Buscar las diagonales de una figura plana doblando el papel.

Buscar ejes de simetría de una figura plana doblando el papel.

Construir figuras simétricas doblando el folio y cortando a nuestro antojo.

Doblar un folio, y tomando el doblez como eje de simetría, recortar de cualquier manera. Abrir para ver la figura formada.

Tercer ciclo

Partiendo de un cuerpo geométrico en plástico o madera, dibujar en el folio todas sus caras de modo que sea posible recortarlo y armarlo. Daremos valor a todas las soluciones.

Construir una cinta de Möbius a modo de truco matemático.

Papiroflexia

Primer ciclo

Con un simple barco de papel estamos trabajando conceptos como: mitad, triángulo, cuadrado, rectángulo, simetría, delante, detrás, dentro, fuera, vértice, lado… Podemos usar cualquier modelo sencillo.

Fracciones

Segundo y tercer ciclo

Cada alumno tiene un folio. Es la unidad. Dividimos el folio en un número de partes iguales para llegar al concepto de fracción. Vamos pidiendo diferentes fracciones, de modo que tengan que doblar para obtener el denominador y nos muestren sólo las partes que diga el numerador. Esa será la representación gráfica de la fracción. Hay varias soluciones para cada caso.

Cuando esté entendido, pediremos fracciones mayores que la unidad, para que tengan que juntar el folio de otro compañero al suyo. De esta manera quedará claro cuando una fracción es mayor o menor que la unidad, cuando vale dos, tres o cuatro unidades enteras y por qué.

Posteriormente podemos sumar o restar fracciones muy sencillas buscando otras equivalentes de igual denominador.

Álgebra

Tercer ciclo

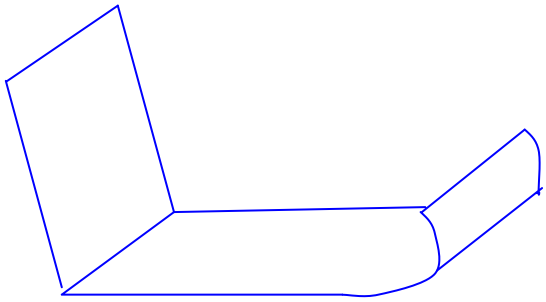
En varios folios escribo el número incógnita. Planteo una ecuación del tipo $2x + 6 = 14$ asociando a cada x, un folio con la solución en el reverso. A partir de preguntas del tipo “Si dos veces el valor del folio más 6 me da 14, ¿cuánto valdrán los dos folios?” “¿Cómo relacionamos el paso siguiente de que los dos folios valen 8?”, “¿Qué pasa cuando sumamos o restamos la misma cantidad a ambos lados de la igualdad?” Se puede llegar a la típica regla de que los números cuando cambian de lado de la igualdad, van con la operación opuesta.

La media y la moda

Tercer ciclo

De cada folio, saco cuatro tiras a lo largo (29 x 5 centímetros). Elegimos a 8 alumnos y repartimos a cada uno una tira. La tira la doblan tres veces por la mitad, de forma que quedará dividida en 8 partes iguales. Se les hace una pregunta cuya respuesta sea menor o igual que 8 (número de hermanos, televisores que hay en la casa, deportes que practica, horas que ve la tele diariamente…) En función de la respuesta, cada uno recorta su tira por uno u otro doblez y cada barra obtenida la pegamos en la pizarra para formar un gráfico de barras. Buscamos la que más se repita, será la moda. Una vez explicada la grafica, pegamos todas las tiras una a continuación de otra con cinta adhesiva para hallar el total, doblamos por la mitad tres veces consecutivas para dividirlo por 8 y obtenemos la media.

Medida del tiempo



Construimos con un trozo de folio de unos 10 por 15 centímetros varios deslizadores. También elaboramos unas fichas en las que anotaremos el nombre del piloto y los tiempos de duración de la prueba. Hacemos una carrera impulsando al deslizador con un soplo o mediante un tubo vacío de bolígrafo. Cada participante va haciendo su recorrido mientras un cronometrador anota el tiempo empleado. En la pizarra se van colocando con cinta adhesiva o masilla, los tiempos de cada piloto y su posición provisional. Cada vez que uno termina, se busca el lugar de la clasificación que le corresponde.

Nombre	Tiempo

Conclusiones

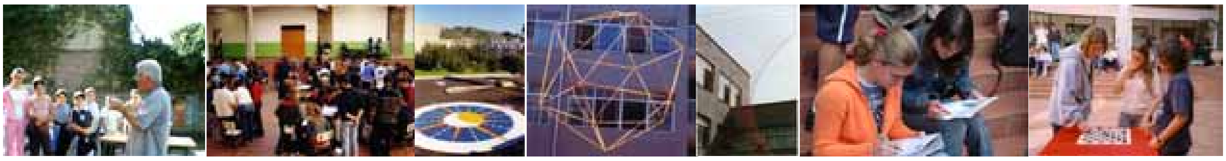
A partir de algo tan aparentemente improductivo como un folio usado, hemos conseguido que los alumnos de 6º, tan difíciles de motivar, reflexionen sobre sus conocimientos matemáticos. Sin darse cuenta, han repasado, estudiado, buscado información, explicado y debatido sobre matemáticas adaptándose a diferentes niveles de complejidad.

El folio ha sido una excusa, como lo pueden ser los juegos, la magia u otra actividad cualquiera. Lo que si hemos aprendido todos es que otra forma de trabajar es posible.

Francisco Morales Villegas nació en Santander (España) en 1962. Lleva 22 años dando clase en Tenerife y casi la mitad dedicado a las matemáticas. En la actualidad trabaja en el Colegio de Infantil y Primaria La Estrella (Arona, Tenerife, España). Sus clases son, tanto dentro como fuera del aula, con un enfoque constructivista.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 117-127
ISSN: 1815-0640



Dinamización matemática

I. E. S. El Doctoral
Gran Canaria, España

Matemáticas para todos

Cada año, y con motivo de la celebración del **Día Escolar de Las Matemáticas**, nuestro Departamento se plantea la realización de actividades que:

- Permitan exponer material elaborado por nuestro alumnado en las clases de matemáticas o en las optativas del Departamento.
- Hagan que alumnado, profesorado y personal no docente participen en dicha celebración.
- Impliquen trabajar un contenido específico del área que pueda ser abordado por todos los niveles.

Para la consecución de estos objetivos desarrollamos la Semana Matemática, que comienza con la presentación de las actividades que vamos a realizar y la invitación a todos a participar en las mismas.

Las propuestas que ofrecemos son de tres tipos:

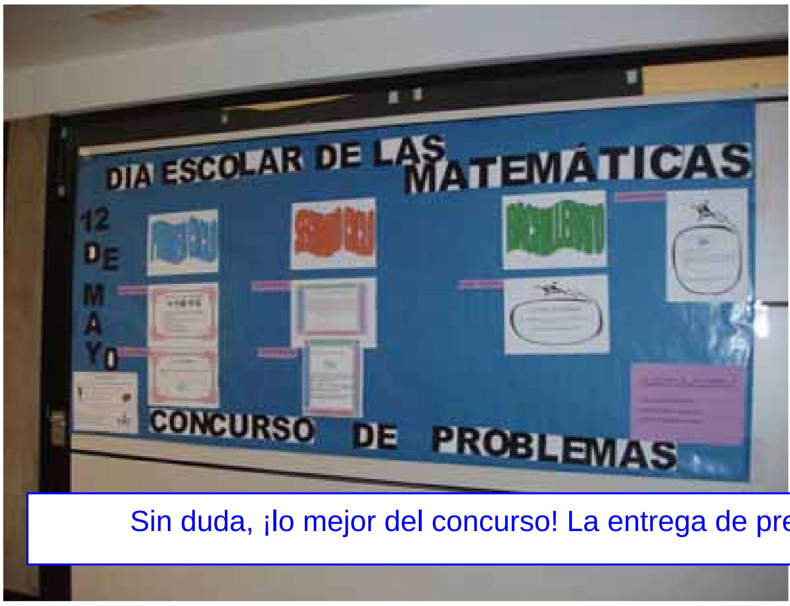
- **Taller.-** Durante esta semana abrimos un aula en los recreos y en ella ponemos a disposición de todos los que acuden un conjunto de juegos de diverso tipo: de estrategia, manipulativos, numéricos, geométricos, algebraicos…

Matemáticas para todos

Con puzzles, dominós, Torres de Hanoi, papiroflexia…

…durante los recreos todos, alumnos y profesores, nos divertimos haciendo matemáticas

- **Concurso de resolución de problemas por categorías**.- En días alternos publicamos un problema hasta un total de tres, para cada una de las categorías que son: Primer ciclo de Enseñanza Secundaria, Segundo ciclo, Bachillerato y Profesorado/personal no docente. Los participantes han de entregar sus soluciones a cualquier miembro del Departamento.



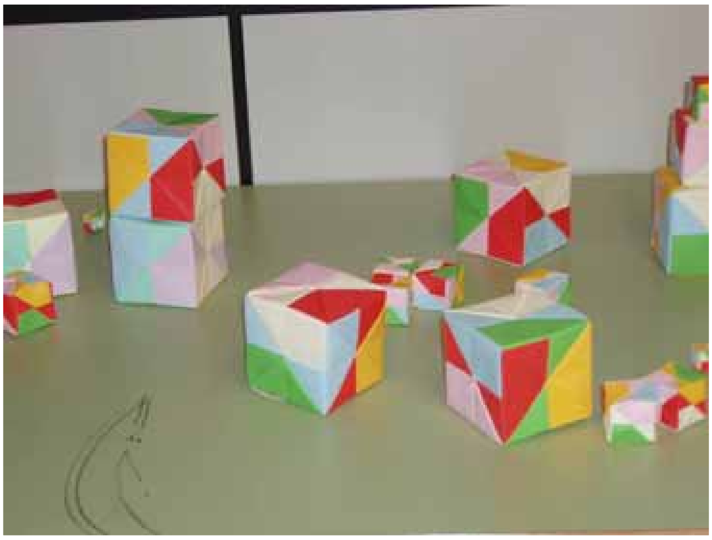
Sin duda, ¡lo mejor del concurso! La entrega de premios

- Decoración de los pasillos. Se trata de exponer en el centro el material que ha sido elaborado por nuestro alumnado.

Montaje del mural de la optativa de Bioestadística: Noticias de estadística y medicina.

Mural de CÓNICAS del alumnado de 1º de bachillerato de Ciencias de la Naturaleza

Mosaicos en camisetas, construcciones con el tangram oval y cubos a escala en papiroflexia. Taller de matemáticas de 4º de ESO.



Lo que hace cinco años se empezó con más ilusión que medios, se ha convertido en una tradición que, obviamente, ha ido evolucionando en estos años y que intentamos mantener. Podemos contar anécdotas de casi todo, y acompañarlo de fotos para mostrar que realmente durante una semana muchos disfrutan de las matemáticas. Por citar alguna de las actividades que más éxito han tenido:

- Partidas rápidas de Tangram

Siguiendo la dinámica de las partidas rápidas de ajedrez, hacíamos competir a parejas de alumnos en la construcción de un tangram; el primer equipo en hacerla pasaba a la fase siguiente. Inicialmente los alumnos competían dentro de su nivel pero terminaron enfrentándose alumnado de 4º de ESO con los de 1º. Para sorpresa de muchos terminó ganando un alumno de 1º de ESO. (Curso 2001/ 02)

- Desayuno matemático

Invitamos al profesorado a un desayuno en el que los objetos que utilizamos y la comida que llevamos tenían que ser referidas como figuras o cuerpos geométricos, así no había ‘rosquillas’ eran ‘toros’, los vasos eran ‘troncos de cono’, los posa-vasos no existían, sólo círculos… (Curso 2002/ 03)

- A vueltas con el tangram

Todos los grupos de 1º de ESO a 4º debían construir tres figuras con dicho puzzle, una de ellas tenía que ser el nivel y grupo de dicho curso. Teniendo en cuenta que había 23 grupos terminamos con 69 figuras de tangram montadas sobre cartulinas multicolor que decoraron el centro. (Curso 04/ 05)

Posando después de montar la exposición

- Eje cronológico. Mujeres en la historia de las Matemáticas

Con motivo de la celebración del Día de la mujer trabajadora el 8 de marzo, el Departamento trabajó con su alumnado una actividad que perseguía dos objetivos:

- Dar a conocer a aquellas mujeres que han participado en la construcción del conocimiento matemático.
- Entender que en los distintos períodos históricos, además de cambios políticos, sociales, económicos y culturales, ha habido cambios científicos que han contribuido a alcanzar una evolución tecnológica como la que ahora disfrutamos.

La actividad era bastante sencilla: construir un eje cronológico en el que aparecieran los nombres y biografías de mujeres matemáticas y su contribución a esta ciencia. Esta actividad se desarrolló en el curso 2003/04 y fue coordinada por las profesoras D.ª Ana Esther Jiménez Mendoza, D.ª Josefa Martín González, D.ª Domitila Robaina Álvarez y D.ª Teresita Talavera Santana

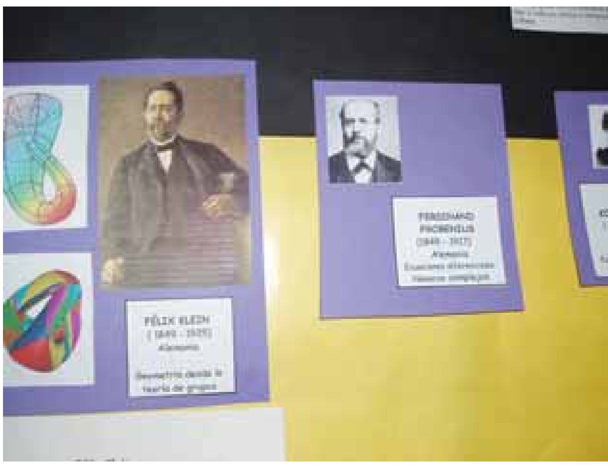
El eje cronológico fue retomado como actividad para el Día escolar de las Matemáticas en el curso 2005/06 y en él, además de las mujeres matemáticas, se incluyó el nombre y biografía de hombres matemáticos. En este curso coordinaron la actividad:

- D. Agustín González Santana
- D.ª Josefa Martín González
- D.ª Domitila Robaina Álvarez
- D.ª J. Rosario Sánchez Mateo

Las etapas en las que se trabajó fueron las siguientes.

- El profesorado coordinador montó el esquema del eje cronológico en uno de los pasillos del centro.
- En cada una de las etapas históricas se situaba un pequeño cartel con: nombre, fotografía, lugar y fechas de nacimiento y muerte, además de su aportación más importante, o conocida, al campo de las Matemáticas realizada por estas mujeres. Luego se amplío, con el mismo formato, para hombres.
- La elección de los matemáticos para incluir en el eje se hizo atendiendo a los más conocidos (Pitágoras, Tales, Ruffinni...) para los niveles inferiores, y a los que iban a aparecer por los contenidos específicos del nivel (Bolzano, Rolle, Cauchy, Gauss, Bernoulli, Laplace...) para Bachillerato.
- Desde 3º de E.S.O. a 2º de Bachillerato se repartió al alumnado las biografías que debían buscar.

- Los alumnos, una vez corregidas estas biografías, las fueron incorporando al eje en el lugar correspondiente.



Detalle del eje en el que se aprecia los datos que pedíamos, una reseña de su biografía y su aportación a las matemáticas.

- Concurso de problemas.

Sin duda alguna la actividad que más involucra es el concurso. Planteamos problemas asequibles para todos y que se centren en distintos bloques temáticos (visualización geométrica, problemas de lógica, juegos de palillos y monedas… y en estos años el sudoku, no podía faltar). Lo más divertido ha sido comprobar cómo profesorado y personal no docente participan. Nuestra administrativa fue la ganadora del curso 2005/ 06.

- Revista matemática.

Este curso planteamos como actividad para todos los niveles el diseño de una revista matemática, pero no iba a ser en papel, una pared serviría de revista-tablón. En sus distintas secciones: divulgación, noticias, pasatiempos, humor y opinión, el alumnado debía ir incorporando sus aportaciones extraídas de distintos medios de comunicación. La sección de opinión se reservó para ilustres matemáticos, sólo sus citas podían aparecer aquí.

Continuamos en nuestro propósito de acercar las matemáticas a todos cuantos formamos parte de un centro educativo, y por ello terminamos con una de nuestras invitaciones:

12 de mayo
Día escolar de las matemáticas

"Para mí no hay emoción o satisfacción comparable a la que produce la actividad creadora, tanto en ciencia como en el arte, literatura u otras ocupaciones del intelecto humano. Mi mensaje, dirigido sobre todo a la juventud, es que **si sienten inclinación por la ciencia, la sigan, pues no dejará de proporcionarles satisfacciones inigualables."** (Severo Ochoa)

Como cada año, el Departamento de Matemáticas les invita a ser partícipes de nuestra celebración con actividades, juegos y concursos.

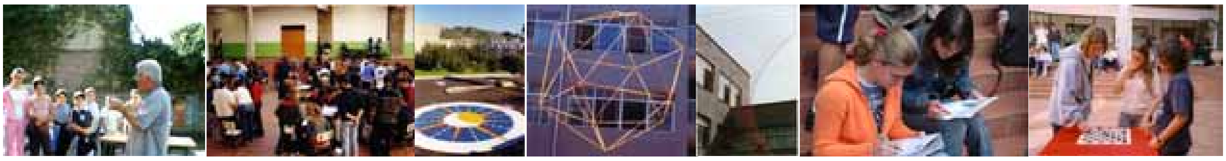
Te invitamos a hacer matemáticas

☺ Concurso de resolución de problemas. Aquí como en las olimpiadas: ¡LO IMPORTANTE ES PARTICIPAR!
☺ En nuestro pasillo encontrarás, un EJE CRONOLÓGICO con hombres y mujeres, matemáticos de todos los tiempos; del baloncesto a las estrellas con las CÓNICAS, y medicina con matemáticas en BIOESTADÍSTICA.
☺ Vente al aula **P-13** durante los recreos, del martes 10 al lunes 15 de mayo, encontrarás juegos y una exposición del trabajo realizado en el TALLER de matemáticas.

Autora: Josefa Martín González

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 129-136
ISSN: 1815-0640



Dinamización matemática

I. E. S. Viera y Clavijo
Tenerife, España

El año de la Ciencia, Euler y el Día del Libro

Como es sabido, el año 2007 ha sido declarado Año Europeo de la Ciencia. Por otra parte, es también el tercer centenario del nacimiento de Leonard Euler, uno de los grandes de la Ciencia en general y de las Matemáticas en particular al que, por cierto, se dedican varios artículos de esta revista.

Nos pareció, entonces que podríamos unir esos dos acontecimientos con la celebración del Día del Libro (en España se celebra el 23 de abril de cada año).

¿Qué hacer? Igual que de “don Quijote” la aventura más conocida es la de los Molinos de Viento (cap. VIII de la primera parte), de Euler, quizá, lo más extendido sea su intervención en la resolución del problema de los Puentes de Konigsberg.

El texto que presentamos fue escenificado mediante teatro leído por grupos de alumnos y alumnas del Instituto de Enseñanza Secundaria *Viera y Clavijo* de La Laguna (Tenerife-España), que pasaron por todas las clases a lo largo de la mañana bajo la coordinación de la Profesora Mercedes Gómez Cutillas.

Los puentes de Konigsberg

Hay que preparar:
El mapa
El plano de la ciudad
Fotos de Kant y Hilbert
Un papel grande y rotulador (puede ser la pizarra) para hacer el esquema

- Narrador (N).- Konigsberg es una ciudad que se encuentra en un enclave que pertenece hoy Rusia en el Mar Báltico pero que no está unido al resto del país. Obsérvese en el mapa que entre ese enclave y el resto de Rusia está Polonia.

Y es que ese territorio perteneció en su momento a Prusia y se lo anexionó Rusia tras la Primera Guerra Mundial cambiándole el nombre a la ciudad. Le puso Kaliningrado y así aparece aun en muchos atlas que no han actualizado los nombres después de la descomposición de la Unión Soviética.

Es una ciudad perteneciente a la famosa liga Hanseática. Fue muy próspera y en ella nacieron y vivieron muchos famosos personajes de los que vamos a destacar dos:

Emmanuel Kant y David Hilbert

El primero es un famoso filósofo con el que se juegan la PAU (Prueba de acceso a la Universidad) muchos estudiantes.

De él se pueden decir muchas cosas. Solo destaco estas:

- La **Crítica de la razón pura**, en la que trata de fundamentar el conocimiento humano y fijar asimismo sus límites; el conocimiento es trascendental y se realiza en el ámbito de las matemáticas y de la física.
- La **Crítica de la razón práctica**, donde establece la necesidad de un principio moral a priori, el llamado imperativo categórico. En la moral, el hombre debe actuar como si fuese libre, aunque no sea posible demostrar teóricamente la existencia de esa libertad.
- **La Crítica del juicio**, que estudia el llamado goce estético y la finalidad en el campo de la naturaleza.

El segundo es un matemático de los más importantes que han existido. Se hizo muy famoso cuando en el año 1900, en el Congreso mundial de matemáticos que se celebró ese año en París, propuso en una conferencia los 20 problemas que estaban abiertos en aquel momento y que debían ser el reto de los matemáticos a lo largo del siglo XX que estaba a punto de comenzar. Y, en efecto, fueron un gran reto porque orientaron la investigación matemática de muchos estudiosos.

Pero vamos a lo nuestro.

Discurre el año 1735, casi mediados del siglo XVIII…

Tres ciudadanos pasean tranquilamente por la orilla del río Pregel que cruza la ciudad.

Escuchen. Escuchen atentamente el diálogo que mantienen.

- **Ciudadano1 (C1).-** Te digo que no es posible
- **Ciudadano 2 (C2).-** Pues yo creo que si, lo que ocurre es que no hemos tenido la suficiente paciencia para comprobarlo.
- **C1.-** Te insisto en que no. Lo he intentado muchas veces y no lo he conseguido. Y se de muchos paisanos que también lo han intentado.
- **C2.-** Pues un primo mío, que es muy meticuloso, me ha dicho que sí es posible porque él anotó los recorridos que hizo y una tarde lo completó bien.
- **C1.-** Permíteme que lo dude pues además ¿por qué no…
- **Visitante (V).-** Perdonen que les interrumpa, pero ya saben que yo llegué ayer y no se de qué están hablando. ¿Me lo pueden explicar? Tal vez yo, que soy de fuera, les pueda ayudar en eso que parece una disputa.
- **C1.-** No, amigo, no se trata de ninguna disputa que nos tenga enfrentados. Es solo un reto que tenemos desde hace tiempo y que incluso la alcaldía ha ofrecido 100 monedas de oro a quien lo resuelva. Por eso le decía a mi amigo que dudo que su primo lo haya resuelto porque, que yo sepa, nadie ha cobrado la recompensa…
- **V.-** ¡Hombre! Esto se pone interesante pues ese dinerillo no me vendría mal así que díganme de qué va este asunto para intentar llevarme las cien monedas.
- **C1.-** De acuerdo, aunque espero que me des algo ya que te lo voy a explicar… Ves que estamos paseando a la orilla de este río que baña la ciudad. Fíjate que hay dos islas en él, ¿las ves?
- **V.-** Sí, en efecto, veo dos islas una un poco mayor que la otra y veo también que está unidas por un puente.
- **C1.-** ¡Ya!, y además de ese puente que las une, la mayor está unida a tierra firme con dos puentes a cada orilla y la pequeña también pero con uno a cada orilla. Donde estamos solo se ven los que vienen a esta orilla pero en el esquema están todos.
- **V.-** Sí, ya veo, un tremendo lío de puentes. Pero ¿cuál es ese famoso reto?
- **C1.-** ¡Tranquilo, hombre, que hasta ahora nadie se ha llevado las cien monedas!… Se trata de lo siguiente: hay que dar un paseo por estos puentes de tal manera que empezando donde tú quieras, pases por todos los puentes pero sin recorrer ninguno más de una vez, ¿entendido?
- **V.-** Más o menos… repítemelo, por favor.
- **C2.-** ¡Sí, hombre, no es tan complicado! Si miras el esquema verás que hay siete puentes, ¿ves? Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis y siete. Pues bien,

tienes que hacer un recorrido por todos de forma tal que solo pases una vez por cada puente.

- **V.-** ¿Y eso tan fácil no lo ha logrado nadie?
- **C1.-** ¡Chacho, no te pases de listo! Ni don Emmanuel, que era una eminencia, lo consiguió, ¿cómo lo vas a conseguir tú que eres un "pelao"?
- **C2.-** ¡Miren quién viene por allí! Nada menos que la señora alcaldesa…
- **C1.-** Seguro que viene a intentar, una vez más, llevarse las cien monedas…
- **C2.-** ¡Qué!, Sra. Alcaldesa, ¿cómo va lo de los puentes? ¿Ya ha cobrado alguien las cien monedas?
- **Alcaldesa (A).-** ¡Qué va! El otro día fue un individuo creyendo que tenía la solución pero le falló y se fue como vino.
- **C2.-** (Ese debió ser el rebenque de mi primo)
- **C1.-** Entonces, ¿qué va a pasar, alcaldesa?
- **A.-** Ayer la corporación decidió poner el problema en manos de un famoso matemático que, aunque es suizo, trabaja ahora cerca de aquí, en San Petersburgo. Ya salió esta mañana un correo a caballo para tratar de conseguir que esté aquí la semana próxima.
- **C1.-** ¿Y usted cree que va a venir solo por las cien monedas de oro?
- **A.-** ¡No hombre!, como le contrata el ayuntamiento, si lo resuelve se le pagará algo más, ya lo habíamos pensado…
- **C2.-** ¿Y quién es ese señor?
- **A.-** Tenemos buenas referencias de él. Se llama Leonardo Euler. Dicen que es muy trabajador y serio.
- **V.-** ¡Ah!, si, yo lo he oído nombrar. Estuvo en Berlín. Tiene fama de muy inteligente, vamos, de superdotado y ha publicado varios libros.
- **A.-** ¿Cómo varios libros? Según nos informaron se pasa la vida escribiendo y tiene no se cuantos publicados.
- **C1.-** Estaremos pendientes de la llegada del sabio.

N.- Nuestros personajes volvieron a sus casas ese día y volvían nuevamente al siguiente intrigados por el problema planteado, especialmente el Visitante.

Una semana después…

- **A.-** ¡Qué!, don Leonardo, ¿tiene ya el recorrido que hay que hacer para resolver el problema que le planteamos?
- **Euler (E).-** Bueno, pues si, ya lo tengo solucionado, si…
- **A.-** ¡Y qué! ¿Cuál es el recorrido? ¿Por dónde hay que empezar? ¿Es cierto que hay que empezar en una de las islas y acabar en la otra? Eso, al menos es lo que piensa mucha gente.
- **C1.-** ¿Ven? Mi primo tiene razón. Verá don Leonardo, tengo un primo que dice haberlo solucionado pero nadie le cree. Espero que sea lo que él dice y que la Señora Alcaldesa lo reconozca y le de las cien monedas…
- **E.-** ¡Tranquilos! Moderen la ansiedad…

- **A.-** ¿Cómo que la moderemos si llevamos muchos años tras la solución de este recorrido y usted, que llegó ayer por la tarde nos dice que lo ha resuelto?
- **E.-** Si, lo he resuelto…
- **A.-** Pues díganos de una vez la solución.
- **E.-** La solución, queridos ciudadanos, es que no tiene solución…
- **A-C1-C2-V.-** ¿¿¿¿¿Cómo??????
- **E.-** Lo que han oido. Es-te pro-ble-ma no tie-ne so-lu-ci-ón. Tal re-co-rri-do no es po-si-ble.
- **A.-** ¡Imposible!
- **E.-** Eso, imposible.
- **A.-** No, que no puede ser, tiene que haberlo. Por favor, don Leonardo, no nos tome el pelo…
- **E.-** No se empeñe, alcaldesa. Se lo voy a demostrar aunque tal vez me quede sin lo que me ha prometido…
- **A.-** Si me convence, lo cobrará, ¡palabra de alcaldesa prusiana!…
- **E.-** He pasado ese problema a un esquema que hice y que le voy a reproducir y explicar. Espero que quede todo claro. Este punto representa una orilla, este otro, la otra orilla. Las dos islas son estos otros puntos que coloco en medio. Para entendernos, a estos puntos les llamaré “vértices”.

Y ahora voy a trazar los siete puentes que hay entre ellos mediante unas líneas que llamaré “aristas”:

Una arista entre las dos islas porque como ven hay un puente entre ellas.

Entre la isla mayor y las orillas, dos puentes hacia cada lado.

Entre la isla menor y las orillas un puente por cada lado.

Vamos a contarlos y comprueben conmigo que están las siete aristas que representan a los siete puentes: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis y siete. Están todos, ¿verdad?

- **A.-** Sí, bueno, ¿y qué?
- **E.-** Pues que este esquema le demuestra que es imposible hacer el recorrido que usted me pide. No se puede recorrer este tipo de “grafo”-que es como he llamado a este esquema- pasando una sola vez por cada arista. En términos más coloquiales, lo que se plantea es si se puede trazar este gráfico con un lápiz sin pasar dos veces por una arista si bien por los vértices puede pasar las veces que sea necesario. Y eso, insisto, es imposible.
- **A.-** Pero Señor Euler, ¿usted ha estudiado eso bien? ¿Está seguro de lo que dice?
- **E.-** ¡Por supuesto! Anoche descubrí unas leyes que rigen los recorridos por los grafos. Según ellas, un grafo solo se puede recorrer en las condiciones que usted me pide si sus vértices son todos pares o so-lo tie-ne dos im-pa-

res. Vamos a ver cómo son los vértices de este grafo: (*Contar todas las aristas en cada vértice*). ¿Lo ve? ¡Todos los vértices, los cuatro, son impares! ¡Es imposible hacer el recorrido!

- **A.-** Sí, parece que es evidente, le he estado dando vueltas al asunto en lo que usted hablaba y veo que si, que tal recorrido no existe. Convocaré esta tarde al ayuntamiento en una sesión de urgencia para que usted lo comunique de manera oficial y mañana espero poder pagarle lo convenido. Propondré además que una calle de esta ciudad lleve su nombre pues ha ahorrado muchos quebraderos de cabeza a sus ciudadanos.
- **C1.-** ¡Ya, alcaldesa!, me parece una buena iniciativa pero con las carreras que muchos nos hemos dado por estos puentes en busca de las cien monedas, al menos hemos aportado a la humanidad un gran invento: el futing…

FIN

N.- Debemos clarificar que hoy la ciudad ya no tiene estas islas ni estos puentes pues el tiempo y los bombardeos de la Segunda Guerra Mundial los han modificado…pero esa aportación de Euler la consideran muchos como el inicio de una rama nueva de las matemáticas llamada "topología" así que fíjense todo lo que dio de sí el problema de los puentes de Konigsberg

Día del Libro

Leonard Euler y los Puentes de Königsberg

Por Luis Balbuena

Viera y Clavijo

24 de abril de 2007

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Junio de 2007, Número 10, páginas 137-153
ISSN: 1815-0640
Formación Inicial en la Enseñanza Primaria

Formación docente para el maestro normalista de nivel primario en Bolivia

Begoña Grigoriu Rocha

SOBOEDMA - BOLIVIA

Antecedentes

Desde la promulgación de la Ley 1565 de Reforma Educativa, en julio de 1994, Bolivia vive un proceso de transformación de la educación en general, y como consecuencia la formación docente también.

El Ministerio de Educación y Cultura desarrolló una serie de eventos dirigidos a analizar la situación de la formación docente, los cuales contaron con la participación activa de directivos y docentes de las Escuelas Normales y permitieron el estudio del currículo vigente.

De los eventos realizados nace el Diseño Curricular Base para la Formación de Maestros del Nivel Primario, en noviembre de 1999. Este diseño fue considerado y conceptualizado por los mismos docentes como una construcción histórica, política y cultural, susceptible de modificaciones en la cual ellos juegan un papel fundamental, no sólo como mediadores sino como recreadores de la misma.

La transformación del Sistema de Formación Docente se inició con el proceso que condujo a la transformación de algunas Escuelas Normales en Institutos Normales Superiores (INS). Esta reorganización institucional, acompañada de la transformación curricular, tuvo como objetivo principal permitir a estos institutos desarrollar un proceso educativo pertinente, relevante, actualizado y democrático que forme recursos humanos capaces de responder a las demandas y necesidades del Sistema Educativo en el marco de una dinámica de cambio permanente.

Se reconoció la necesidad de fortalecer algunos aspectos en razón de existir interpretaciones diversas en los distintos centros de formación, entre los cuales están:

- Clarificar la estructura curricular de formación docente; adecuar, más aún, el currículo para atender la diversidad social y cultural de nuestras regiones;
- Ampliar y fortalecer la formación de maestros bilingües;

- Poner en marcha estrategias especificas para reivindicar la profesión docente mediante la formación de maestros más autónomos, comprometidos con su labor, responsables, actualizados y fundamentalmente reflexivos;
- Reconceptualizar los procesos de formación permanente de maestros en servicio desde los centros formadores;
- Generalizar la transformación de todas las Escuelas Normales en Institutos.

En el año 2004 el Ministerio de Educación y Cultura firmó un convenio con la Agencia de Cooperación Española, para la capacitación de los docentes que trabajan en los Institutos Normales dependientes del Estado, con el compromiso de que los beneficiarios de dichas capacitaciones sean los encargados de realizar una nueva propuesta para el Diseño Curricular de Formación Docente. Este proceso concluirá en julio de 2007 y el diseño que surja de él tendría que ser incluido en una futura reforma a la ley de educación.

Teniendo en cuenta los cambios que Bolivia está viviendo, y las necesidades y expectativas sociales que han surgido en el sector educativo, la sociedad en general ha coincidido en que es necesario transformar la formación del educador y las instituciones educativas para responder a las nuevas demandas y desarrollar una educación de calidad, equidad y pertinencia social, cultural y lingüística. Esta temática retoma su importancia porque este nuevo gobierno ha propuesto modificaciones a la reforma de 1994.

El anteproyecto de Ley de Reforma Educativa “Avelino Siñani y Elizardo Pérez”, presentado al Congreso Nacional en septiembre no ha sido hasta el momento aprobado y con el cambio de Ministros de Educación, se espera un reestructuración de dicha propuesta que incluya la participación de los maestros en su elaboración.

Institutos normales superiores

Los Institutos Normales Superiores son los centros de formación de maestros para el nivel primario y profesores para el nivel secundario o bachillerato. El grado académico que otorgan es de Técnico Superior en Educación, con mención en una especialidad concreta.

Estos centros son, en su gran mayoría, dependientes del Estado, pero existen también importantes y reconocidos institutos normales dependientes de Iglesias o de personas particulares. Hay en Bolivia 25 Institutos Normales Superiores, de los cuales 22 son dependientes del Estado y 3 privados.

Algo a destacar en los últimos años es que algunos de los Institutos han pasado de depender de diferentes Universidades, a ser nuevamente dependientes del Ministerio de Educación.

Una de las reformas planteadas para el proceso de formación de maestros en los INS, es suprimir la diferenciación entre maestros urbanos y rurales, esta propuesta ha sido muy resistida desde diferentes sectores por motivos tanto técnico – pedagógicos, como por razones de intereses y beneficios sectoriales.

Existen Institutos que forman profesores monolingües que se desenvolverán en ámbitos urbanos y otros que forman profesores bilingües o multilingües, siendo ésta la única diferenciación en la formación de los maestros.

Existen nueve Institutos Normales Superiores públicos que forman docentes para la aplicación de una educación intercultural y bilingüe en lengua originaria y castellano.

Los maestros formados en estos centros tendrían (por haberse formado tanto en español como en la lengua originaria de cada región) que ejercer su profesión en las áreas rurales donde es imprescindible el manejo de la lengua originaria, lamentablemente son estos los primeros en ocupar los puestos en las principales ciudades

Requisitos de ingreso

El requisito fundamental para el ingreso a cualquiera de los Institutos Normales Superiores (INS) es la presentación del título de bachiller; a este requisito se suma la aprobación del examen de ingreso y una entrevista personal para determinar el área en el que debe formarse y el perfil psicológico. En algunos INS existe además un semestre inicial de nivelación, para suplir las deficiencias de la formación en el nivel secundario.

Estructura y duración de la carrera

Existen dos tipos de maestros del nivel primario:

Polivalentes, formados para dos ciclos:

- El primer ciclo de Primero a Tercero de primaria
- El segundo ciclo de Cuarto a Sexto de primaria.

Se prepara al maestro para qué desarrolle con su grupo de alumnos todos los contenidos de las diferentes áreas del Programa Analítico de cada curso, logrando el desarrollo de las competencias planteadas para cada nivel.

Especialistas (7º y 8º de Primaria). Reciben la formación para desempeñar su labor docente en un área determinada dentro del tercer ciclo del nivel primario. Por ejemplo, Matemáticas, Lenguaje, etc. Estos maestros deben planificar con los demás profesores del ciclo, para poder adecuar su trabajo y complementar el de los otros, desde la óptica del desarrollo integral.

La estructura curricular está organizada en seis semestres de formación para los cuales se prevé una carga horaria total de 3.600 horas, compuesta por cuatro ámbitos de formación que constituyen el tronco común destinado a cubrir 3.200 horas, y un espacio de tiempo de libre disponibilidad, para las restantes 400 horas, que cada institución utiliza en forma autónoma para las prioridades que identifique. Los ámbitos son:

a) Formación general
b) Práctica docente e investigación
e) Formación especializada
d) Formación personal

En la estructura curricular, la organización de los cuatro ámbitos de formación mencionados apunta, de manera general, a los siguientes aspectos centrales:

Todo maestro debe conocer y comprender los conceptos de currículo, educación y enseñanza y su vinculación con el contexto sociocultural, el proceso de desarrollo evolutivo del niño y del adolescente y las necesidades educativas particulares de estos, incluyendo las necesidades especiales, además de los medios para realizar una buena gestión educativa y la influencia de la tecnología en el campo de la educación (formación general).

Por otro lado, todo maestro necesita realizar prácticas en las tareas educativas que desempeña para conocer de cerca el contexto, apoyándose en la investigación permanente para aprender a observar, introducir innovaciones pertinentes en la enseñanza y sistematizar los procesos que genera en dicha práctica (práctica docente e investigación).

Además, según en que nivel y ciclo educativo trabaje un maestro debe conocer y comprender los contenidos y conceptos claves de las áreas de conocimiento (por ejemplo, lenguaje y comunicación, matemática, etc.) y de los temas transversales (salud y sexualidad, democracia, etc.), y ser capaz de diseñar experiencias de aprendizaje apropiadas para cada una de ellas (formación especializada).

Finalmente, un maestro debe construir determinadas capacidades personales que contribuyan a fortalecer su autoestima y le permitan liderar un buen proceso de aprendizaje en el aula (formación personal).

Para desarrollar una formación integral, cada área de los cuatro ámbitos está integrada por disciplinas que se relacionan y complementan a través de sus objetos de estudio, tradiciones, procedimientos metodológicos y de investigación o sus particulares propuestas para la resolución de problemas.

a) El ámbito de la formación general

Este ámbito tiene el propósito de brindar las bases teóricas fundamentales para la profesión docente, independientemente del nivel o ciclo educativo y de la especialidad o disciplina escolar en la cual se trabaje, por ello se pretende:

- Formar maestros abiertos a las nuevas concepciones educativas para desarrollar cambios en los procesos de enseñanza y aprendizaje comprendiendo aspectos conceptuales, metodológicos e instrumentales de los nuevos enfoques de la educación boliviana.
- Desarrollar competencias para interpretar el contexto social, cultural, lingüístico, educativo y las particularidades del desarrollo de los alumnos y sus continuas transformaciones, para adecuar el currículo y los procesos de enseñanza a esas diferentes realidades.
- Construir la capacidad de utilizar y analizar críticamente los recursos metodológicos y tecnológicos contemporáneos en un medio escolar cuya gestión está orientada por el mejoramiento continuo y la calidad de sus servicios.

Con este fin, el ámbito de formación general esta constituido por las áreas:

- Educación y sociedad
- Aprendizaje, enseñanza y currículum
- Psicología evolutiva
- Gestión educativa
- Integración educativa
- Tecnología de la información y comunicación aplicada a la educación

b) El ámbito de práctica docente e investigación

Este ámbito tiene como propósito desarrollar competencias prácticas ligadas al conocimiento y vivencia del desempeño docente en una realidad escolar específica, por lo cual se lleva a cabo en escuelas que utilizan la misma modalidad, monolingüe o bilingüe, en la que se está formando el maestro. Por ello se pretende:

- Desarrollar experiencias de práctica pedagógica en aula que permitan al futuro maestro comprender y valorar los desafíos que surgen de la diversidad sociocultural y lingüística y de la dinámica de demandas y cambios permanentes que se presentan en ese contexto.
- Conocer instrumentos de investigación educativa para favorecer la adecuación y pertinencia del proceso de enseñanza en respuesta a los contextos de trabajo.
- Poner en práctica las competencias desarrolladas en los ámbitos de formación general, especializada y personal, en un contexto escolar real.

Con este fin, el ámbito de práctica docente e investigación está constituido por un área integrada cuyos contenidos y actividades abordan de manera concreta el trabajo pedagógico en aula.

Cabe mencionar que la organización del tiempo para esta área se organiza por semestre y se distribuye en dos espacios.

Por un lado, se dedica un tiempo a clases presenciales en el centro de formación y, por otro, un tiempo de mayor duración dedicado a la práctica real *in situ* en las escuelas del nivel primario.

c) El ámbito de la formación especializada

El ámbito de formación especializada tiene el propósito de desarrollar las competencias específicas necesarias para desempeñarse como docente en un nivel o ciclo educativo particular, enseñando una o varias áreas de conocimiento también específicos. Por ello, se pretende:

- Formar maestros con conocimientos teóricos y prácticos, especialmente didácticos, para poder enseñar las áreas de conocimiento en forma integrada o por especialidad y los correspondientes temas transversales dispuestos para cada ciclo de aprendizaje.
- Desarrollar la diferenciación de las estrategias metodológicas y de evaluación específicas requeridas para desempeñarse en cada ciclo de aprendizaje y en cada situación sociocultural y lingüística.

Con este fin, el ámbito de formación especializada está constituido por las siguientes áreas, cuyos contenidos varían según el ciclo en el que se desempeña el maestro:

- Lenguaje y comunicación
- Didáctica de la segunda lengua
- Matemática
- Ciencias de la vida (maestro polivalente)
- Ciencias Naturales
- Ciencias Sociales y Ética
- Expresión y Creatividad
- Tecnología y conocimiento práctico
- Ética y moral
- Temas Transversales (género, salud, ciudadanía, etc.)

Cabe aclarar que en la modalidad monolingüe se desarrollan estas áreas en castellano y la didáctica de la segunda lengua se refiere a una lengua diferente al castellano. En cambio, en la modalidad bilingüe la lengua originaria de la región se utiliza en todas las áreas, por el catedrático y los alumnos, y la didáctica de la segunda lengua se refiere al castellano que se incorpora de manera gradual y progresiva.

A modo de ejemplo, se expone en lo que sigue, los contenidos específicos en el área de matemáticas para la formación del:

A. Maestro polivalente del primer y segundo ciclo del nivel primario

B: Maestro especialista en matemática del tercer ciclo del nivel primario

A. Módulos para la formación del maestro polivalente del primer y segundo ciclo del nivel primario

Módulo 1: "La matemática en la sociedad. Los conjuntos numéricos"

Matemática cultura y sociedad. Grandes hitos en la historia de las matemáticas occidentales. Historia contemporánea de la enseñanza de las Matemáticas: visión crítica de grandes corrientes (la reforma de las matemáticas modernas: origen, sentido, consecuencias, crítica, el movimiento de las matemáticas concretas). Etnomatemáticas: la pluralidad de la generación, de conocimientos y prácticas matemáticas. Perspectiva histórica de la etnomatemática: las matemáticas de los Incas, los Mayas y los Aztecas.

Números naturales: Evolución histórica de la numeración oral y escrita (tipos de grafías numéricas). Construcción del sistema de numeración decimal. Operaciones con números naturales, algoritmos, propiedades. Situaciones problemas en diferentes contextos. Comparación del sistema de numeración decimal con otros sistemas (Mayas, romanos, binario, quinario). Divisibilidad.

Fracciones y decimales: Fracción como razón, medida y porcentaje. Equivalencias entre fracciones. Orden. Operaciones con fracciones. Equivalencia entre números decimales y fracciones decimales. Valor de posición en los números decimales. Operaciones con números decimales (aproximaciones).

Magnitudes: Medidas de uso tradicional y universal. Sistema internacional de medida (longitud, capacidad, peso, volumen, tiempo, temperatura, área). Conversiones de unidades de medida (múltiplos y submúltiplos). Sistema monetario. Problemas que se resuelven con los números decimales.

Modulo 2: "Epistemología de la matemática elemental. Números enteros y números racionales"

Construcción de los conjuntos numéricos: Números naturales, números enteros y números racionales.

Números enteros: Números enteros sus operaciones y propiedades. Orden. Ecuaciones e inecuaciones de primer grado en Z. Situaciones problemas.

Números racionales: Números racionales y sus operaciones. Orden, densidad. Expresiones decimales exactas periódicas y no periódicas. Notación científica. Situaciones problemas.

Proporcionalidad: Razones y proporciones numéricas, tablas de proporcionalidad directa e inversa. Representaciones gráficas. Magnitudes directamente proporcionales, magnitudes inversamente proporcionales. Aplicaciones en diferentes contextos (datos estadísticos, noticias de periódicos, etc.)

Módulo 3: "Especialidad y Geometría 1"

Percepciones y magnitudes espaciales en las diferentes culturas: Sistemas de medición de superficies andinas: la producción agrícola de un área como medida de superficie (la fanega), las magnitudes relativas (el tupo).

Nociones geométricas básicas en el plano y en el espacio: Relaciones espaciales. Figuras y cuerpos geométricos, sus relaciones y propiedades. Ángulos y rectas. Triángulos, segmentos notables. Teorema de Pitágoras. Cuadriláteros. Polígonos regulares e irregulares, perímetro y área. Descomposición de polígonos en triángulos y cuadriláteros, áreas de polígonos irregulares. Movimientos en el plano. Plano cartesiano, lectura de mapas y planos. Composición de triángulos y cuadriláteros para formar poliedros de caras triangulares y cuadriláteras. Volúmenes de cuerpos geométricos. Poliedros regulares. La circunferencia y el círculo: elementos y posiciones relativas, polígonos regulares y la circunferencia. Figuras tridimensionales derivadas del círculo (cónicas). Relación entre los poliedros y los cuerpos redondos.

Módulo 4: "La historia del álgebra y su lenguaje"

Historia del álgebra: Investigación bibliográfica. Grandes matemáticos.

Álgebra: Número decimal irracional (π $\sqrt{2}$). Numero real, orden en R, la recta real. Operaciones. Lenguaje algebraico, uso y características. Operaciones con expresiones algebraicas. Productos notables y Factorización. Fracciones algebraicas, operaciones con fracciones algebraicas. Potenciación y radicación. Funciones lineal y ecuación de primer grado. Gráfico de una función, función lineal, resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Planteo y resolución de problemas. Sistemas de ecuaciones, soluciones gráficas y algebraicas, situaciones problema con sistemas de ecuaciones. Inecuaciones lineales. Situaciones problemas con inecuaciones lineales.

Módulo 5: "Estadística y probabilidad

Nociones de estadística y probabilidad: Recolección de datos, clasificación y presentación de tablas y gráficos. Frecuencias. Estadígrafos. Combinatoria, permutación y variación. Conceptos de probabilidad. Sucesos y propiedades

Laboratorio matemático: Construcción de instrumentos. Materiales y juegos: Ábacos andinos. Tangram, geoplano. Instrumentos caseros para medir longitudes, volúmenes, cuerpos geométricos: pirámides, prismas, icosaedros y otros. Estrategias didácticas para trabajar en el aula.

B. Módulos para la formación del maestro especialista en matemática del tercer ciclo del nivel primario

Módulo 1: "La matemática en la sociedad. Los conjuntos numéricos"

Matemática cultura y sociedad. Grandes hitos en la historia de las matemáticas occidentales. Historia contemporánea de la enseñanza de las Matemáticas: visión critica de grandes corrientes (la reforma de las matemáticas modernas: origen, sentido, consecuencias, crítica, el movimiento de las matemáticas concretas). Etnomatemáticas: la pluralidad de la generación, de conocimientos y prácticas matemáticas. Perspectiva histórica de la etnomatemática: las matemáticas de los Incas, los Mayas y los Aztecas.

Los conjuntos. Numéricos: Números naturales y sus operaciones. Evolución histórica de los sistemas de numeración. Divisibilidad. Números enteros sus operaciones y propiedades. Orden. Números racionales y sus operaciones. Orden, densidad. Notación científica: Número decimal irracional. Números reales y sus operaciones, orden y densidad en R.

Módulo 2: "Especialidad y Geómetra 1"

Percepciones y magnitudes espaciales en las diferentes culturas: Sistemas de medición de superficies andinas: la producción agrícola de un área como medida de superficie (la fanega), las magnitudes relativas (el tupo).

Nociones geométricas básicas en el plano y en el espacio: Relaciones espaciales. Figuras y cuerpos geométricos, sus relaciones y propiedades. Ángulos y rectas. Triángulos, segmentos notables. Teorema de Pitágoras. Cuadriláteros. Polígonos regulares e irregulares, perímetro y área. Descomposición de polígonos en triángulos y cuadriláteros, áreas de polígonos irregulares. Movimientos en el plano. Plano cartesiano, lectura de mapas y planos. Composición de triángulos y cuadriláteros para formar poliedros de caras triangulares y cuadriláteras. Volúmenes de cuerpos geométricos. Poliedros regulares. La circunferencia y el círculo: elementos y posiciones relativas, polígonos regulares y la circunferencia. Figuras tridimensionales derivadas del círculo (cónicas). Relación entre los poliedros y los cuerpos redondos.

Modulo 3: "Proporcionalidad y Geometría II"

Proporcionalidad: Razón y proporcionalidad numérica. Proporcionalidad directa e inversa, constante de proporcionalidad. Tablas de proporcionalidad. Aplicaciones. Repartos, proporcionales. Aplicaciones (industriales: mezclas, aleaciones y geométricas: perímetros de figuras semejantes).

Geometría II: Formas de razonamiento y métodos de argumentación en la geometría: La demostración .en geometría. Congruencia de figuras, congruencia de triángulos. Relaciones métricas. Semejanza de triángulos. Teoremas de la congruencia en triángulos. Segmentos proporcionales y teorema de Thales. Teoremas relativos a la proporcionalidad de trazos en triángulos, cuadriláteros y circunferencia.

Módulo 4: "Historia del álgebra y su lenguaje"

Historia del álgebra: Investigación bibliográfica. Grandes matemáticos.

Conceptos fundamentales del álgebra en R. Números reales y sus propiedades. Expresiones algebraicas y sus operaciones. Productos notables y factorización. Fracciones algebraicas y sus operaciones. Ecuación e inecuaciones de primer grado. Resolución de problemas. Función lineal, función parte entera, función valor absoluto.

Módulo 5: "Tendencias del álgebra y su lenguaje gráfico"

Nociones de geometría analítica: Pendiente, paralelismo y perpendicularidad. Ecuación de la recta. Resolución de problemas con ecuaciones de la recta. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolución de problemas. Función cuadrática. Ecuaciones de segundo grado. Resolución de problemas. Función exponencial y logarítmica. Progresiones y Sucesiones.

Análisis histórico de la enseñanza de la matemática: Matemática tradicional. Matemática moderna y matemática actual.

Lógica y conjuntos: Análisis de la implementación del enfoque conjuntista en las escuelas bolivianas. Proposiciones. Álgebra de proposiciones, reglas de inferencia, esquemas y cuantificadores. Conjuntos, operaciones con conjuntos, producto cartesiano, relaciones.

Modulo 6: "Estadística y probabilidad"

Nociones de estadística y probabilidad: Formas de presentación de la información, tablas y gráficos. Frecuencias. Parámetros estadísticos. Combinatoria, técnicas de conteo, diagramas de árbol, variación y permutación. Concepto de probabilidad. Probabilidad experimental. Definición clásica de Probabilidad.

Definición axiomática. Sucesos, álgebra de sucesos. Probabilidad condicional, probabilidad total, teorema de Bayes.

Técnicas de. Investigación en el campo de la educación matemática: investigación bibliográfica. Investigaciones sencillas de campo: encuestas, observaciones de clases, análisis de observaciones, presentación de resultados.

Laboratorio matemático: Construcción de instrumentos, materiales y juegos: Ábacos andinos, tangram. Geoplano, instrumentos caseros para medir longitudes, pesos, temperaturas, volúmenes, cuerpos geométricos: pirámides, prismas, icosaedro y otros.

d) El ámbito de la formación personal

Este ámbito tiene corno propósito ampliar la formación humana del maestro en el sentido de construir un mayor conocimiento de sí mismo, de autovaloración de sí y de los otros, con quienes convive y trabaja, y proveerlo de instrumentos para lograr una adecuada comunicación con los niños o adolescentes con los que trabaje y con las sociedades de las cuales forma parte.

Con este fin, para el ámbito de formación personal se propone desarrollar las siguientes Áreas:

- Aprendizaje y desarrollo de una lengua originaria.
- Liderazgo.
- Ética y responsabilidad social.

El área de “Aprendizaje y desarrollo de una lengua originaria” está dirigida a fortalecer el manejo de la dicha lengua en maestros bilingües y a enseñar la lengua originaria de la región a maestros monolingües castellanos.

Tiempo de libre disponibilidad

Cada INS dispone de un tiempo de libre disponibilidad para desarrollar actividades complementarias en temas que considere pertinentes.

Fuente: Diseño Curricular Base para la formación de maestros del nivel Primario

Para conocer la distribución de módulos por semestres (ver anexo 1, Malla Curricular).

Otras modalidades de formación docente

La carencia de docentes en las zonas rurales más alejadas ha llevado a las autoridades educativas a buscar otras alternativas de formación docente en el marco de la Reforma Educativa.

Entre ellas la Profesionalización a Distancia de Maestros Interinos y el Bachillerato Humanístico Pedagógico. La primera opción es encomendada a Institutos Normales del sector público y privado, la segunda fue asumida desde el sistema público a través de la Unidad de Reforma Educativa

- **Profesionalización a distancia de maestros interinos**

Esta modalidad se viene desarrollando en Institutos Normales, su finalidad es que los profesores interinos, con más de 5 años de trabajo puedan acceder a un programa de capacitación que les permita obtener un título profesional, pero fundamentalmente les permita adquirir las competencias necesarias para el idóneo cumplimiento de la función que vienen desempeñando de manera empírica.

Maestro interino es la persona que sin tener una formación pedagógica, ni grado académico desempeña labores de enseñanza, sobre todo en escuelas y colegios de las zonas rurales de Bolivia. Hasta hace unos años, al completar un determinado tiempo continuo de trabajo con un examen se les otorgaba el título de "Titular Por Antigüedad".

La Normal Católica ha organizado a sus docentes de las diferentes áreas generando un modelo de capacitación semipresencial. Su finalidad es la evaluación del aprendizaje de los estudiantes que participan en este tipo de formación y el reforzamiento de los aspectos que sean identificados como problemáticos y/o deficientes como resultado de dicha evaluación.

Los equipos docentes, constituidos por los catedráticos regulares de las diferentes carreras y áreas, han desarrollado los módulos de aprendizaje que los estudiantes deben trabajar con apoyo de tutores contratados en cada región en que se cuenta con profesores interinos inscritos para estos cursos.

Los tutores regionales cumplen labores de acompañamiento cotidiano del aprendizaje, definiendo con el grupo de estudiantes a su cargo la frecuencia y las modalidades de sus reuniones dentro del marco global establecido por la Normal Católica.

Estos tutores regionales son coordinados por el docente principal del área en la Normal Católica quien se constituye en un Tutor de tutores y es responsable de todo el proceso de planificación y evaluación.

- **Bachillerato Humanístico Pedagógico**

El Bachillerato en Bolivia corresponde a lo que en otros países se denomina Educación Secundaria o Media. Es el requisito para poder continuar cualquier estudio universitario. De acuerdo a las áreas del conocimiento que se prioricen en los 2 últimos años, puede ser Humanístico, Técnico o Humanístico Pedagógico.

La principal finalidad de este programa consiste en formar bachilleres que puedan desempeñarse como maestros en el Primer Ciclo del Nivel Primario y con ello cubrir las plazas que están ocupadas por maestros interinos.

Las Unidades Educativas del Nivel Secundario, bajo la opción Científico Humanística, pueden ofertar una especialización en Pedagogía conducente a un Bachillerato Humanístico con mención en Pedagogía que habilite a los estudiantes para ejercer la docencia en el Nivel Primario. En este caso, el programa de estudios enfatiza las áreas de Comunicación y Lenguaje, Matemática, Psicología, Filosofía, Lógica y Ética, a las cuales se añade un área de Ciencias de la Educación y Didácticas.

Debido al proceso de cambio del Sistema Educativo Nacional, que se está viviendo esta modalidad está momentáneamente suspendida.

Anteproyecto de Ley de Educación Boliviana “Avelino Siñani y Elizardo Pérez”

En el Congreso Nacional de Educación realizado en la ciudad de Sucre, en septiembre de 2006, el entonces Ministro de Educación Felix Patzi, presentó el Proyecto de Ley, que fue aprobado en medio de controversias por el abandono de los represente de las Iglesias, los maestros y las universidades, debido a que no se tomaron el cuenta sus aportaciones y se pretendió ”imponer” una reforma excluyente, centrada totalmente en valores “ indigenistas”.

Este documento plantea para la Formación Docente lo siguiente:

> “La formación docente es única, fiscal, gratuita y diversificada. Única, en cuanto a jerarquía profesional, calidad pedagógica y científica, donde desaparece lo urbano y rural. Fiscal y gratuita ya que el Estado asume la responsabilidad. Diversificada en tanto responde a las características económicas productivas, socioculturales y lingüísticas de los pueblos indígenas originarios de cada región dentro del territorio boliviano.
>
> Los Institutos Normales Superiores se transforman en Escuelas Superiores de Formación de Maestros y Universidades Pedagógicas de post-grado dependientes del Ministerio de Educación y Culturas. Las escuelas superiores otorgan el título de licenciatura con 5 años de estudio.”

Fuente: Resumen Ejecutivo Congreso Nacional de Educación

Con el cambio de ministros se espera que las controversias que se presentaron durante el Congreso Nacional de Educación sean resueltas, y por tanto, surja un nuevo proyecto que incluya propuestas de todos los sectores involucrados en el proceso educativo, y en especial de las de los maestros, principales actores en este proceso.

Anexo 1: Malla Curricular
Nivel: Primario
Primer y Segundo Ciclo de Primaria

Ámbitos de formación	M	Polivalentes para Primer y Segundo Ciclo					
		1 semestre		2 semestre		3 semestre	
Formación general	11			**Educ. y Soc. I** Historia y diversidad cultural en la educ. boliviana	1		
		Aprendizaje enseñanza y Currículo I Psicología del aprendizaje	1	**Aprendizaje enseñanza y Currículo II** Currículo y la Reforma Educ. boliviana	1	**Aprendizaje enseñanza y Currículo III** La organización de la enseñanza	1
		Psicología Evolutiva Desarrollo del niño y del adolescente	1				
						Integración educativa	1
Práctica docente e investigación	6	**Práctica docente e investigación I** Investigación educativa para la práctica	1	**Práctica docente e investigación II** Inserción en el aula y su contexto	1	**Práctica docente e investigación III** Práctica asistida I	1
		Unids. Educs. 30 hrs.		Unid. Educs. 60 hrs		Unids. Educs. 60 hrs	
Formación especializada	20	**Lenguaje I** Lenguaje y sociedad (sociolingüística y pragmática)	1	**Lenguaje II** La construcción del lenguaje (psicolingüística)	1	**Lenguaje III** Lingüística textual y enunciación. Literatura general y literatura infantil	1
		Didáctica de segundas lenguas I Conceptos básicos y fundamentos de EIB	1				

Polivalentes para Primer y Segundo Ciclo						
4 semestre		**5 semestre**		**6 semestre**		**M**
		Educ. y Soc. II Sociedad educ. y políticas educativas	1			2
Aprendizaje enseñanza y Currículo IV Contextualización y planificación del trabajo en el aula	1	**Aprendizaje enseñanza y Currículo V** Currículo y gestión de la escuela y aula	1			5
						1
		Gestión educativa Gestión y sistema educ. nacional	1			1
						1
Tecnología de la información y comunicación Tec. de la inf. y com. aplicadas a la educación	1					1
Práctica docente e investigación IV Práctica asistida II	1	**Práctica docente e investigación V** Práctica asistida III	1	**Práctica docente e investigación VI** La responsabilidad plena en el aula	1	6
Unids. Educs. 120 hrs		**Unids. Educs. 120 hrs**		**Unids. Educs. 170 hrs**		**560**
Lenguaje IV Iniciación a la lectura y a la escritura y desarrollo de la comunicación oral	1	**Lenguaje V** Desarrollo de la comunicación oral y escrita	1			5
				Didáctica de segundas lenguas II Enseñanza de segundas lenguas	1	2

		Matemática I La matemática en la sociedad. Los conjuntos numéricos	1	**Matemática II** Epistemología de la matemática elemental. Números enteros y números racionales	1	**Matemática III** Espacialidad y geometría I	1
		Ciencias de la Vida I Epistemología y didáctica en el área de Ciencias de la Vida	1	**Ciencias de la Vida II** Contenidos sobre Cs. de la vida: sociedades y espacios geográficos y los seres vivos	1	**Ciencias de la Vida III** Contenidos básicos en Cs de la Vida: las sociedades y culturas a través del tiempo; sociedad y actividades humanas; la materia y energía; la Tierra y el universo	1
				Expresión y creatividad I Comprensión y vivencia de la expresión y creatividad	1	**Expresión y creatividad II** Teoría y práctica de la expresión y creatividad	1
Formación personal	5			**Lengua originaria I** Comunicación oral y escrita en lengua originaria	1	**Lengua originaria II** Recuperación de la tradición oral y tecnología originaria	1
Libre disponibilidad (talleres operativos)*	5	**Nutrición salud y educación**	0.5			**Derechos Humanos y ciudadanía**	1
		Cristología	1				
Total módulos	**47**		**8.5**		**8**		**9**

* Los módulos de libre disponibilidad, según el enfoque propuesto por el MECyD, tienen un carácter flexible en cuanto a temática, contenidos y secuencialidad de acuerdo requerimientos del contexto.

Matemática IV La historia del álgebra y su lenguaje	1	**Matemática V** Estadística y probabilidad	1			5
						3
				Tecnología y CP Introducción a la Educ. tecnológica	1	1
						2
Etica y moral	1					1
Transversales Educación para la democracia, Educación para la salud y la sexualidad, educación para el medio ambiente, Educación para la equidad de género	1					1
Lengua originaria III Reflexión lingüística de la lengua originaria	1	**Lengua originaria IV** Producción de materiales en lengua originaria	1			4
Taller de liderazgo	0.5					0.5
		Ética y responsabilidad social	0.5			0.5
		Afectividad y autoestima	1			5
				Educación Preventiva de la salud	1	
				Lenguaje y Escritura	0.5	
	8.5		8.5		4.5	47

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia

Junio de 2007, Número 10 páginas 155-165
ISSN: 1815-0640

Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

Edward Lee Thorndike e uma conformação do professor de matemática norte-americano das primeiras décadas do século XX

Ivanete Batista dos Santos [1]

Neste texto, são examinados os manuais *The Thorndike Arithmetics* e *The Thorndike Algebra,* de autoria de Edward Lee Thorndike[2], com o objetivo de identificar as formas adotadas pelo autor para conformar, por meio de recomendações postas nesses manuais, professores que garantissem a implantação de uma forma diferençada de ensinar Matemática nos Estados Unidos das primeiras décadas do século XIX..

Em 1917, quando começou a produzir manuais sobre o ensino de Matemática Thorndike já era reconhecido como psicólogo por seus pares dentro e fora dos Estados Unidos. Desde que ingressou no *Teachers College*, em 1899, fez pesquisas sobre herança mental, diferença individual, diferença de sexos, memória, trabalho, fadiga, interesse, habilidades, organização do intelecto, e outros tópicos na Psicologia Educacional, porque, em cada caso, o conteúdo parecia importante para a teoria, para a prática ou para ambos. Freqüentemente, fez correções e descartou

[1] Universidade Federal de Sergipe. E-mail: ivanete@ufs.br

[2] Edward Lee Thorndike nasceu em 31 de agosto de 1874, em Williamsburg – Massachusetts, e morreu em 9 de agosto de 1949, em Montrose – New York. Filho de um pastor metodista, só ouviu falar em Psicologia, pela primeira vez, quando entrou na Wesleyan University (1893-1894). O interesse pela Psicologia foi despertado a partir da leitura, como exigência para os exames, do livro *Principles of Psychology* (1891), de autoria de William James. Segundo Thorndike (1936), mesmo tendo estudado, durante o primeiro semestre (1896-1897) em Harvard, um programa composto metade de Inglês, um quarto de Psicologia e um quarto de Filosofia, estudos filosóficos nunca o atraíram. Em 1897, pensou em si mesmo como um estudante de Psicologia e um candidato ao doutorado. Em 1888, Thorndike solicitou uma bolsa de estudo em Columbia e fez seu doutorado sob a orientação de Professor James Mckeen Cattell. O tema de sua tese, intitulada *Animal Intelligence: an experimental study of the associative processes in animal*, versou sobre a aprendizagem animal. Depois de trabalhar um ano no *College for Women of Western Reserve University* ingressou em 1899 no *Teachers College* como Instrutor de Psicologia Genética, onde permaneceu trabalhando por quarenta anos (Cf. Santos(2006)).

pesquisas por ter surgido outra melhor e dessa forma contribuiu tanto para a Psicologia quanto para a Educação.

No que diz respeito aos escritos sobre o ensino de Matemática, tem-se um quantitativo reduzido em relação ao conjunto da produção[3]. Ainda assim, pode ser considerado um "educador matemático" em seu tempo, pois, com o objetivo de melhorar o processo ensino-aprendizagem, estabeleceu, nas pesquisas por ele realizadas, ligações entre a Psicologia, a Educação e o ensino de Aritmética, Álgebra e Geometria, em particular[4].

De acordo com Jonçich (1968), os três manuais *The Thorndike Arithmetics* e os vários dicionários de Inglês[5] elaborados por Thorndike, são as mais nítidas evidências da contribuição desse psicólogo para a educação; mais exato é dizer que foram essas as produções de Thorndike que tiveram efeitos mais diretos no ensino e no currículo escolar.

Cabe destacar que, o sucesso de The Thorndike Arithmetics não deve ser entendido como aceitação unânime, mesmo porque, nos anos 1910, o ensino das matemáticas nos Estados Unidos, estava sendo debatido em várias associações de professores, preocupados em redefinir os objetivos e métodos dos conteúdos. Essa redefinição, na maioria dos casos, confrontava a "teoria da disciplina mental" como base da organização curricular, e tinha como meta firmar a "utilidade" dos conteúdos, procurando associá-los a atividades inerentes ao desenvolvimento econômico. O diferencial de Thorndike, segundo Santos (2006) é que, por exemplo,

---

[3] Conforme levantamento apresentado por Gates (1950) no Teachers College Record, 507 trabalhos, entre livros, artigos e monografias.

[4] Para Thorndike (1935, p. 507), Matemática significa "o estudo dos números, das medidas e do espaço. Matemática inclui aritmética, álgebra e geometria".

[5] Para Barnhart (1950), o "Dr. Thorndike" foi um dos principais lexicógrafos do seu tempo e o primeiro a aplicar os princípios da Psicologia da aprendizagem e usar métodos estatísticos na produção de dicionários. Dicionários produzidos pelo psicólogo: *Thorndike Century Junior Dictionary (1935); Thorndike Century Senior Dictionary (1941), Thorndike Century Junior Dictionary, Revised Edition (1942); Thorndike Century Beginning Dictionary (1945).*

ao advogar a favor de problemas com enunciados semelhantes às situações do cotidiano do aluno o psicólogo adotava princípios diferentes aos dos seus contemporâneos. Sua justificativa não estava baseada nem na teoria da disciplina mental, nem em uma suposta necessidade interna aos conteúdos matemáticos; estava sustentada na tese de que aprendizagem é conexão; por isso a indispensável presença de elementos idênticos para garantir a efetiva aprendizagem.

Por isso é fundamental compreender as recomendações para o professor em *The Thorndike Arithmetics,* que é um manual destinado ao aluno da *elementary school* norte-americana[6], formado por três volumes (*Book One, Two e Three*), que inaugura a produção de Thorndike voltada ao ensino de Matemática.

O prefácio é comum aos três volumes e, logo nas primeiras linhas, o autor afirma que neles são aplicados os princípios descobertos na Psicologia da Aprendizagem, na Educação Experimental e pela observação de práticas escolares bem sucedidas.

Por isso, ele afirma que *The Thorndike Arithmetics* difere de seus antecessores em aspectos como: não inclusão de conteúdo meramente como ginástica mental; substituição da preparação efetuada pela descrição verbal dos problemas, antes retirados das folhas de exames, por enunciados relacionados a problemas reais; o raciocínio não é compreendido como uma faculdade mítica, mas como cooperação, organização e controle de hábitos; o interesse é assegurado pela própria matéria, a Aritmética, e pela aplicação desta em situações adequadas; e, nada do que é necessário para a educação da criança é omitido por ser difícil.

[6] Optou-se, neste trabalho, por utilizar a nomenclatura *elementary school*, *secondary school*, *high school* e *college* utilizada à época nos Estados Unidos, por não haver, no caso do Brasil, cursos equivalentes em termos de duração e finalidades. Cabe ressaltar que a estrutura da escola elementar americana varia de acordo com os regulamentos estaduais e não existe uma definição única entre os limites da *elementary school* e da *high school,* a educação elementar e secundária, podendo variar respectivamente, entre 9 – 4 , 7 – 4, 8 – 3 , 8 – 5 e 7 – 5 séries (Cf. Overn, (1937)).

Já no manual *The Thorndike Algebra*, publicado uma década depois, em 1927, destinado ao aluno da *high school*, o autor reapresenta a informação de que também são aplicados os princípios descobertos na área da Psicologia da Aprendizagem, da Educação Experimental e da observação de práticas escolares bem sucedidas.

Esse pode ser um indicativo de que os princípios adotados na constituição dos dois manuais eram semelhantes, e, se consideradas a diferença temporal entre as duas publicações e as diferenças relacionadas às características específicas dos conteúdos aritméticos e dos algébricos, pode-se ter o indício de que Thorndike, de fato, conformou, por meio desses dois manuais, um padrão para o ensino de Matemática.

Constata-se que, em The Thorndike Arithmetics, o professor recebe as primeiras orientações a partir do prefácio e das notas referentes a cada volume. Diante do que parece ser um ponto fundamental para a garantia da aprendizagem, qual seja, obedecer à seqüência de conteúdos, a primeira recomendação é para que o professor siga rigorosamente a ordem dos conteúdos apresentada no livro, fosse ele um especialista da área ou um professor inexperiente.

Segundo Thorndike (1917a), o professor experiente ou especialista poderia seguir a organização proposta no livro para os conteúdos aritméticos, adicionar exercícios suplementares, usar problemas da vida diária do aluno como fonte, mas não omitir nenhuma seção ou introduzir novos princípios, pois os conteúdos estavam organizados seguindo uma hierarquia de hábitos e ferramentas, cuja finalidade era o desenvolvimento e aprendizagem do aluno.

O autor completa a orientação, informando que o professor inexperiente deveria seguir a seqüência do livro, mesmo que alguns exercícios propostos não fossem claros para ele. Todas as seções tinham uma definição parcial para ser usada em algum ensinamento novo, revisando algum ensinamento anterior ou elementos ensinados separadamente ou preparando algum avanço para as seções seguintes. Nas notas referentes a cada volume, o autor fez recomendações específicas ao professor. Em relação às peculiaridades do *Book I*, Thorndike (1917a) afirma:

> professores experientes poderiam, pelo exame e uso deste livro, entender a razão da escolha dos exercícios e problemas, pela ordem na qual eles aparecem e os métodos utilizados, com três possíveis exceções: (1) o precoce, variado e amplo uso da forma de equação com um número faltando ou uma quantidade para ser completada; (2) a introdução de multiplicando com dois ou três algarismos antes dos produtos por 6, 7, 8 e 9 serem aprendidos; (3) a racionalização de procedimentos pela verificação dos fatos é mais correta do que os argumentos que mostram que eles podem ser corretos (Thorndike, 1917a, p. vi).

A recomendação constante para o professor não omitir nenhuma seqüência de atividades e só fazer alteração com a autorização do supervisor fornece indícios de que, quando produziu o livro, os conceitos aplicados não eram de conhecimento de todos os professores. Apesar de ganhar destaque as expressões “habilidades”, “interesse” “integração de hábitos”, como eixos norteadores do padrão proposto, o autor não fornece maiores esclarecimentos sobre os mesmos, a não ser que eles estavam ancorados nas principais descobertas da Psicologia.

Por conta disso, as orientações, fornecidas no prefácio e notas referentes a cada volume, que recomendam basicamente a aplicação das atividades na ordem em que foram organizadas, pareciam insuficientes para garantir a aplicação da proposta que, como afirmou Thorndike (1917a), diferia de todas as que existiam anteriormente.

Identifica-se que, no entanto, em cada volume, aparecem várias notas de rodapé, denominadas *To the teacher* [Para o professor]. Na análise inicial dos manuais, essas notas não receberam a devida atenção. Um exame posterior, no entanto, indicou que elas foram utilizadas pelo autor como um dispositivo para garantir que os professores executassem a proposta.

Constata-se que as recomendações *To the teacher* foram colocadas naqueles pontos em que o professor poderia cometer algum desvio, oriundo de práticas anteriores ou de desconhecimento das chamadas habilidades que estavam sendo desenvolvidas. Em outras palavras, as notas estavam postas exatamente onde o autor queria implantar uma nova forma de agir do aluno, mas que, para isso, era necessário o professor também alterar sua prática.

Thorndike (1917a) informou no prefácio que linguagem difícil, raciocínio dedutivo e cálculos desorganizados presentes nos cursos de aritmética deveriam ser omitidos, pois era necessário que o aluno se percebesse capaz e pudesse alcançar aproximadamente cem por cento de eficiência na aprendizagem. Para garantir a execução desse propósito, o autor colocou oito *To the teacher* no *Book One*, do tipo:

> nesses e em muitos dos exercícios escritos seguintes sobre adição e subtração, não é necessário que os alunos copiem os exemplos. Faça-os colocar o topo de uma folha de papel abaixo da fileira dos exemplos a serem feitos e escrever apenas as respostas. Então, oriente-os a dobrar o papel abaixo de uma polegada e colocar esse novo topo abaixo da próxima fileira a ser feita. Isto reduzirá o tempo exigido em mais de cinqüenta por cento, aumentará a precisão das respostas, fará a correção do trabalho muito mais fácil. Ensine as crianças a escrever todas as respostas diretamente abaixo dos exemplos em questão e a manter as linhas dobradas (Thorndike, 1917a, pg. 25).

Observa-se, por essa orientação, que o autor a um só tempo estava propondo reduzir o tempo para execução da atividade, orientar o aluno a utilizar medida de comprimento e facilitar a tarefa do professor na hora da correção.

Tanto é assim que, para desenvolver os princípios das operações fundamentais, muitas vezes, as atividades foram organizadas de forma que o aluno não precisasse nem virar a página para colocar somas, diferenças, produtos, quocientes, produtos parciais. E, como a articulação entre as atividades pelo que foi dado a perceber era um aspecto fundamental no padrão pedagógico proposto por Thorndike, o professor, aos poucos, vai recebendo as sugestões por meio da seção *To the teacher*.

Também há recomendações que, em geral, significam alertas relativos não só ao controle psicofísico da criança, à medida que treinava os olhos e a mão para executar a atividade aprendendo a controlar o próprio tempo de execução, mas também para orientar o professor no momento de tratar de conceitos e conteúdos aritméticos, normalmente considerados problemáticos. Nesses momentos, o professor recebe orientação.

Segundo Thorndike (1917a), uma das primeiras dificuldades que o professor enfrentava ao trabalhar Aritmética era explicar ao aluno, no momento de adicionar números com dois dígitos, cuja soma parcial fosse igual ou superior a dez, a formação do sistema decimal. Antes de aprofundar tal questão, o autor, apresenta uma atividade para que o aluno sentisse necessidade de encontrar uma solução e coloca uma *To the teacher*, alertando o professor que "apenas poucos dos mais dotados alunos poderiam pensar em utilizar o 'vai um' por eles mesmos, mas era melhor para todas as crianças serem colocadas face a face ao problema para que sentissem a necessidade de encontrar sua solução antes de aprender a solução" (Thorndike, 1917a, p. 39).

Em outra nota, o professor é informado que existiam diferentes opiniões relativas à utilidade da nomenclatura dos termos relativos às operações: parcelas, soma, minuendo, subtraendo, dividendo, divisor, quociente e resto. Esses não eram termos necessários no primeiro volume de *The Thorndike Arithmetics.*

Apresentar o conceito de frações para o aluno, normalmente, segundo o autor, era uma tarefa que merecia cuidado. Nesse momento, mais uma vez, o professor recebe uma recomendação. Ao tratar de atividades sobre fração e números mistos, a *To the teacher* foi utilizada para recomendar ao professor não criticar os alunos que não respondessem corretamente, pois, em geral, as "pessoas dizem um meio ao invés de dois quartos, um terço ao invés de dois sextos", e assim por diante. Ao mesmo tempo, indicava a continuidade desse conteúdo no livro seguinte. Recomendava ainda que o professor não introduzisse nenhuma explicação, prova ou exercício relacionado à redução de frações até iniciar o segundo livro, pois o trabalho proposto para o *Book One* era apenas para ensinar o significado das frações e os usos delas na divisão, não os métodos de simplificação de frações. Além disso, o professor deveria deixar a criança dizer um meio por dois quartos, três sextos ou quatro oitavos no estágio correspondente ao que ela aprende a dizer *Dick* por *Richard* ou *Ted* por *Edward* (cf. Thorndike, 1917a).

Um outro aspecto importante para Thorndike (1917a, 1917b, 1917c) era o tempo. Apesar de ser possível identificar que o autor o utilizava como um instrumento de controle, abria mão dessa prerrogativa, quando o que estava em jogo era a aprendizagem do aluno. Um exemplo desse fato pode ser identificado na atividade de divisão com números terminados em zero, por exemplo, dividir 76500 por 1500. O autor informou que uma prática poderia ser cancelar os dois zeros do dividendo e do divisor, mas ele alertava que essa provavelmente não era uma boa opção, exceto quando o quociente fosse óbvio. A economia de tempo, nesse caso, de acordo com o autor, era muito pequena e poderia causar confusão na hora que o aluno precisasse utilizar a mesma lógica para trabalhar com problemas que envolvessem o sistema monetário norte-americano.

Verifica-se ainda que um outro aspecto que ganhou relevo na análise empreendida diz respeito à importância, repetida reiteradas vezes pelo autor, em associar os conteúdos aritméticos a situações da vida cotidiana. No *Book III*, por exemplo, em uma atividade envolvendo pagamento com cheque ou com ordem de pagamento, o autor recomenda:

> se for desejável que os alunos entendam os detalhes dessas formas e organizações, faça-os agir como em uma agência dos correios, em transportadora, em companhia de telégrafo, como bancários, vendedores e recepcionistas. Entender as formas atuais e pagar com dinheiro de brinquedo, usando-o como se estivesse na esquina de uma rua como em Nova York, em Chicago, em Nova Orleans e em São Francisco (Thorndike, 1917c, p. 45).

Observa-se que, mais uma vez, parece o autor ter a pretensão, com essa orientação, de instrumentalizar o aluno para que ele, posteriormente, pudesse desempenhar atividades correlatas fora do ambiente escolar. Por exemplo, o autor no *Book II,* quando apresentou uma atividade que consistia em adicionar uma bateria de exercícios formada por oito colunas, cada coluna com vinte números para serem adicionados. Nessa atividade, além das recomendações de praxe – não copiar, cobrir a coluna com uma folha de papel – o autor afirma que as duas páginas que compunham a atividade poderiam ser usadas durante todo o ano para prática de adição de colunas longas, porque, nos negócios, esse conteúdo fazia parte do trabalho mecânico. O foco dessa atividade era desenvolver no aluno a habilidade para obter resultados exatos.

A análise dessas notas indica que elas funcionavam como um meio de comunicação com o professor. Por meio da seção *To the teacher*, Thorndike (1917a, 1917b, 1917c), aos poucos, foi instituindo ou, ao menos, procurando alterar, para que a sua proposta fosse executada adequadamente, a prática cotidiana de ensinar os conteúdos aritméticos, à medida que o professor fosse adquirindo novos hábitos.

Com relação às recomendações dirigidas ao professor em The Thorndike *Álgebra* (1927) percebe-se, pelo exame de *The Thorndike Algebra,* que na seção denominada *Notes for the Teacher,* colocada logo após o prefácio, diferentemente do que foi feito em *The Thorndike Arithmetics*, o autor não enfatiza a recomendação, apresentadas reiteradas vezes no manual de 1917, de que o professor não devia alterar a seqüência dos conteúdos*.* As explicações versam basicamente sobre o tratamento dado aos conteúdos, em especial, sobre os aspectos que o diferenciavam dos outros livros que versavam sobre conteúdos algébricos com circulação à época, anos 1920.

Constata-se que, o autor inseriu poucas orientações por meio do dispositivo *To the teacher* para orientar a prática pedagógica do professor. Em *The Thorndike Algebra*, o autor fez uso do recurso *To the teacher* apenas duas vezes. Na primeira nota, a recomendação é para que o professor

> não exija que o aluno faça prontamente distinção entre os termos *fórmulas e equação*. Cientistas, engenheiros e muitos dos melhores matemáticos não o fazem. A fórmula é realmente uma equação generalizada. Uma equação é um caso especial de uma fórmula (Thorndike, 1927, p. 67).

A outra nota *To the teacher* está localizada na seção que trata de resolução de equações pelo método da substituição.

> Essa seção não pretende cobrir o tópico geral de equações simultâneas (...) mas simplesmente fornecer ao aluno experiência sobre os fatos que a técnica de estruturar equações, para a solução de um problema, é mais ampla do que o uso de uma equação apenas. E também direcionar a atenção para o axioma da substituição que tem sido usado intuitivamente na avaliação, fatoração e simplificação. Não ampliar o tratamento dessa vez mais do que é tratado aqui; e não use os termos "simultâneas", "sistema", "conjunto" ou "raiz" (Thorndike, 1927, p. 169).

As duas notas *To the teacher* são indicativas de uma opção do autor que defende, para a maioria dos casos, que os conteúdos não sejam iniciados por definições ou regras e nomenclaturas adequadas, mas que fossem apresentados de forma gradativa: primeiro, exemplo e uso; depois, a definição e nomenclatura adequada.

Supõe-se que o autor recorreu poucas vezes ao recurso *To the teacher* por ser o manual destinado a professores da *high school,* e que, provavelmente, tinham uma formação e conhecimento que lhes permitiam uma compreensão mais adequada para o uso do que, em temos de organização dos conteúdos e das atividades selecionadas, estava posto no manual. Uma outra possibilidade é que, depois de dez anos, só lembrando *The Thorndike Algebra* foi publicado em 1927 e *The Thorndike Arithmetics* em 1917, os conceitos e princípios aplicados na organização do livro já fossem de conhecimento de um maior contingente de professores.

Feitas essas considerações, não se pode perder de vista que, de forma implícita ou explícita o autor destinou ao professor recomendações colocadas nos itens em que pudesse cometer algum desvio e a medida que o professor as seguisse modificaria a própria prática pedagógica e se transformaria em colaborador da mudança nos modos de agir do aluno e dessa forma autor/psicólogo garantiria a implantação de um padrão pedagógico diferençado para o ensino de Matemática norte-americano da época.

Bibliografía

- BARNHART, Clarence L. 1950. Contributions of Dr. Thorndike to Lexicography. Teachers College Record. Volume 51.
- GATES, Artur I. 1950. The writings of Edward Lee Thorndike. Teacher College Record. Volume 51.
- JONCICH, Geraldine M. 1962. Science: touchstone for a New Age in Education. In:
- OVERN, Orlando E. A.1937. Changes in curriculum in elementary algebra since 1900 as reflected in the requirements and examinations of the College Entrance Examination Board. The Journal of Experimental Education. Volume V, n. º 4.
- SANTOS, Ivanete Batista dos Santos. 2006. Edward Lee Thorndoike e a conformação de um novo padrão pedagógico para o ensino de Matemática (Estados Unidos, Primeiras décadas do século XX). Tese de Doutorado. São Paulo: PUC/SP - EHPS.
- THORNDIKE, Edward Lee. 1917a. *The Thorndike Arithmetics*. Book one. Chicago: Rand McNally & Company. New York: Teachers College, Columbia University.

_____. 1917b. *The Thorndike Arithmetics*. Book two. Chicago: Rand McNally & Company. New York: Teachers College, Columbia University.

_____. 1917c. The *Thorndike Arithmetics*. Book three. Chicago: Rand McNally & Company. New York: Teachers College, Columbia University.

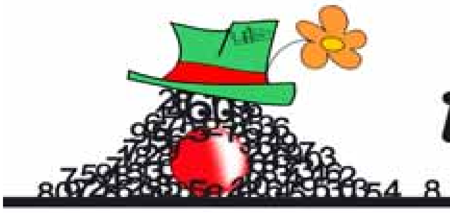
_____. 1927. *The Thorndike Algebra*. Chicago: New York: Rand McNally & Company.

_____. 1922. *The Psychology of Arithmetic. Algebra*. New York: Macmillan Company.

_____. 1935. *Thorndike Century Junior Dictionary*. New York: Scott Foresman and Company.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 167-173
ISSN: 1815-0640



¡¡Esto no es serio!!

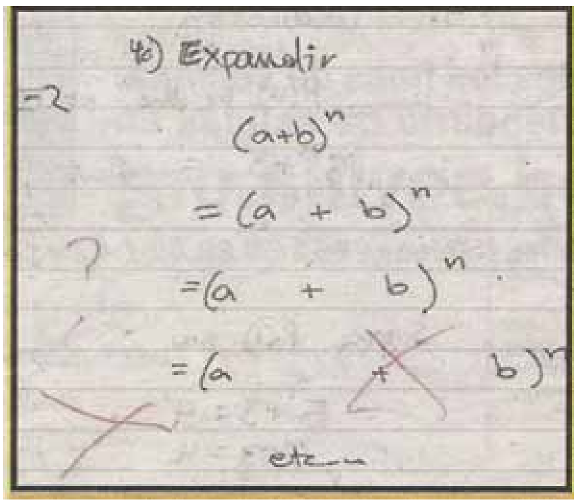
José Muñoz Santoja

Barbaridad tras barbaridad

En el año 2005 apareció el primer número de la revista UNION, y desde esta sección de humor nos propusimos que nuestros lectores nos enviaran elementos parecidos a los que presentábamos. En los siguientes números nosotros les reservaríamos un espacio dedicado a estas nuevas aportaciones, indicando quién era la persona que nos las había enviado. Hasta el momento hemos obtenido la callada por respuesta, por lo que no hemos tenido más remedio que suplir nosotros mismos a nuestros no colaboradores.

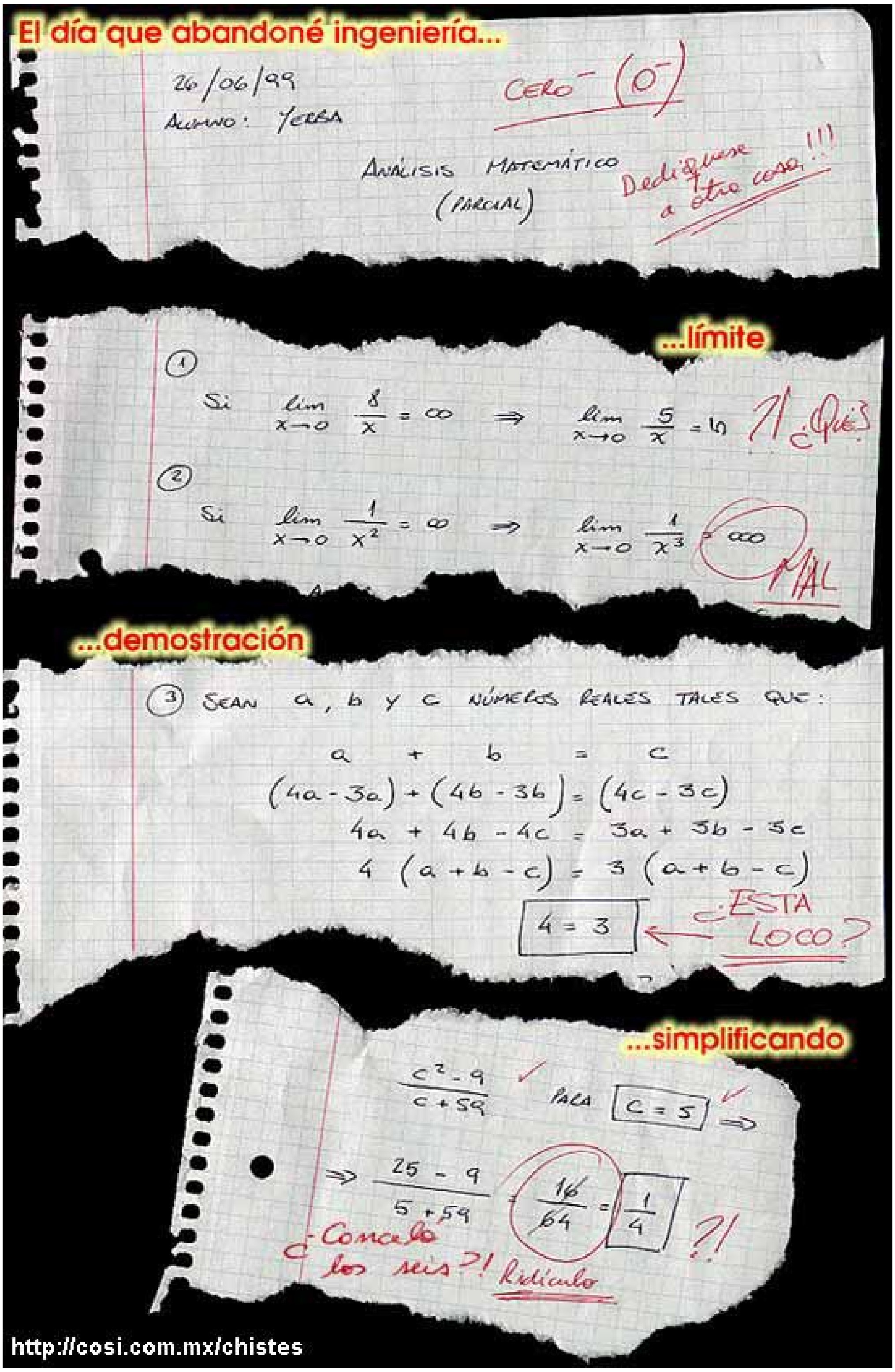
En el número 7 de UNION, que apareció el año pasado, dedicamos la sección a los disparates que cometían los alumnos en la demostración evidente de su falta de conocimientos. Como navegando por Internet hemos encontrado algunos ejemplos de esas barbaridades, hemos querido hoy hacer una segunda parte de este tema que siempre es gracioso y da mucho de sí. Muchos de estos errores aparecen ampliamente en la web, pero pensamos que esta sección debería recogerlos. Algunos errores son inventados, pero, después de llevar muchos años en la enseñanza, me atrevo a decir que he visto disparates por el estilo, y aún mayores.

Poco después de aparecer el artículo anterior, encontré una imagen (que después he vuelto a encontrar en Internet en varios idiomas) en el periódico *20 minutos*, que se reparte gratuitamente por muchas ciudades españolas. En dicho periódico aparecía la siguiente imagen:



En donde vemos la confusión entre expandir e inflar como si fuese un globo.

Otra imagen que se puede encontrar con facilidad en Internet, es la de un supuesto examen donde se reflejan varias equivocaciones que ya hace tiempo aparecían en las páginas de humor matemático.



En el caso anterior vemos una simplificación especialmente curiosa, además, da la casualidad de que el resultado sigue siendo válido. Existen varias simplificaciones más pululando por Internet. Voy a incluir un par de ellas, la segunda debe estar en inglés para que tenga sentido la broma.

$$\frac{\sqrt{\cancel{2}}}{\cancel{2}} = \sqrt{}$$

Solving the equation by one American:

$$\frac{1}{n}\sin x = ?$$

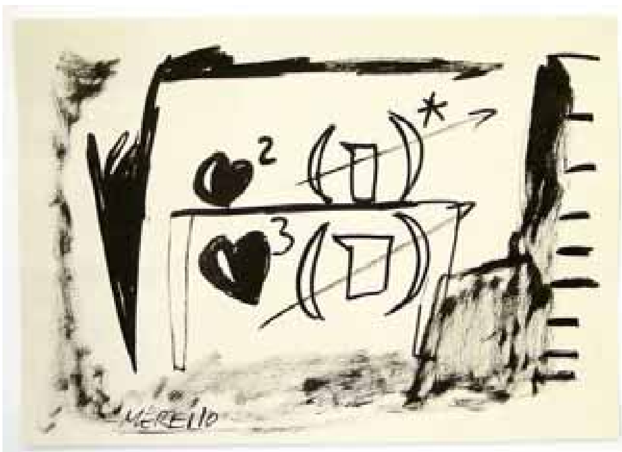
$$\frac{1}{\cancel{n}}\operatorname{si}\cancel{n}\,x =$$

$$six = 6$$

Sin embargo, puedo asegurar que una simplificación como la siguiente me la realizó en la pizarra uno de mis alumnos del antiguo Curso de Orientación Universitaria (el COU en el plan de estudios anterior). Debo reconocer que la impresión que me causó me hizo tardar varios segundos en responder.

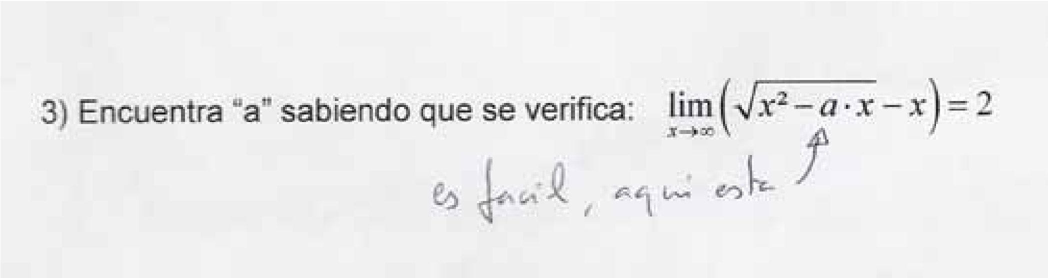
$$\lim_{x \to 1} \frac{4/\ln x}{2/x-1} = \frac{4/\ln 1}{2/1-1} = \frac{4/\cancel{0}}{2/\cancel{0}} = \frac{4}{2} = 2$$

Esta es una imagen que he encontrado en Internet de una obra titulada *Matemáticas del amor,* del pintor madrileño José Manuel Merello. Me parece que complementa de una forma artística lo anterior.



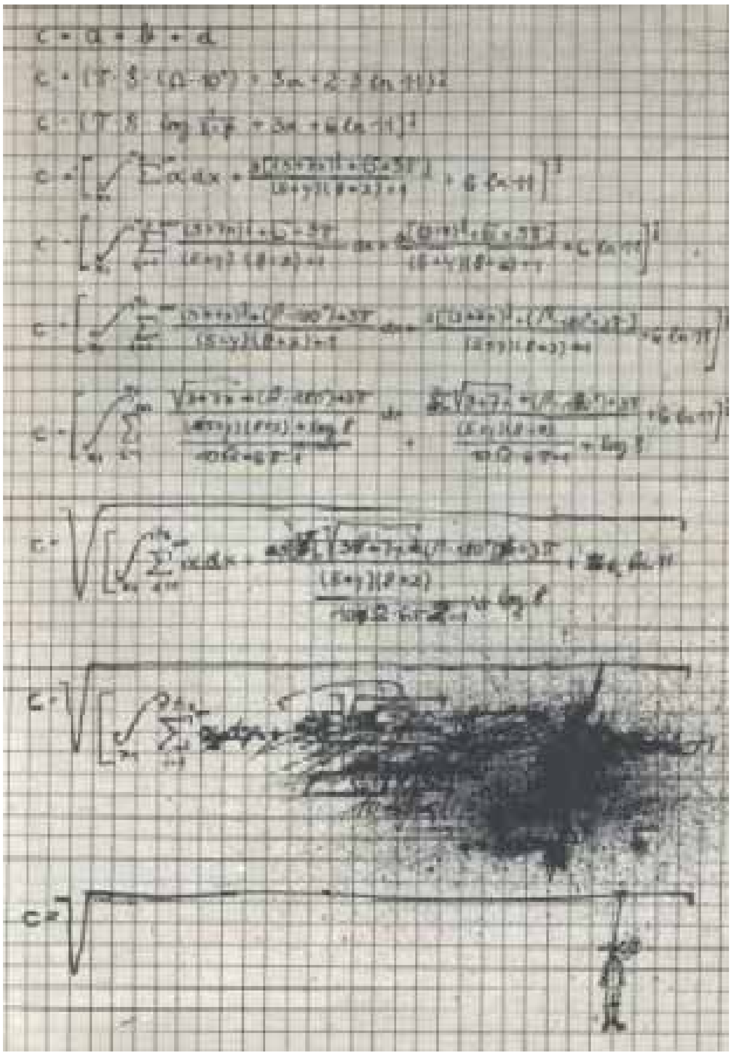
José Muñoz Santoja

En el anterior artículo sobre disparates incluimos una de las mejores chorradas que flotan por Internet. Se pedía buscar una x, que se encontraba muy fácilmente. He visto otros casos basados en la misma idea y me gustaría aportar mi granito de arena en este asunto; para ello he utilizado un popular enunciado hace unos años en los exámenes de Selectividad, los que deben hacer los alumnos que acaban su enseñanza secundaria y quieren acceder a la Universidad.


3) Encuentra "a" sabiendo que se verifica: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-a\cdot x}-x\right)=2$

es facil, aqui esta

A continuación, pasamos a exponer otra imagen que es fácil encontrar en algunas páginas web. Se demuestra claramente lo agobiante que puede llegar a ser un examen de matemáticas, sobre todo cuando es muy completo.



Como complemento de la imagen anterior os voy a enseñar una agradable sorpresa. La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES organiza concursos de fotografías y matemáticas desde hace casi veinte años. Los alumnos que participan presentan una fotografía junto con un título, que debe tener referencia matemática con la imagen. Hace muchos años una alumna llamada Laura Gallardo, que entonces estudiaba en el Instituto Hermanos Machado de Montequinto en Sevilla, presentó una fotografía que a mí siempre me ha hecho mucha gracia. Creo que todo el mundo conoce a la cantante Martirio y todos sabemos de su gusto por los volantes, las peinetas estrambóticas y sus famosas gafas de sol. Esta foto y el título son geniales: *Martirio matemático*.

En los dos artículos que hemos dedicado a este tema, hemos tratado las barbaridades de los alumnos, pero hay otro enfoque que es el de las equivocaciones o frases curiosas que dicen los profesores, en concreto los de matemáticas. Hay que tener en cuenta que los fallos garrafales que podamos tener los profesores muchas veces pasan desapercibidos, porque los alumnos tienen tan poco conocimiento del tema que no descubren el error, pero algunos sí que los cazan. Sabemos que hay muchos libros que recogen los fallos de los alumnos, pero he encontrado uno “Voy a pasar lista por orden cronológico” (Temas de Hoy), escrito por Miguel Villarejo y Javier Serrano, en el que aparecen frases de profesores recogidas por los alumnos. Muchas de ellas están dichas por profesores de matemáticas y hemos querido presentar algunas. El inconveniente es que muchas veces sólo son coletillas que los profesores dicen según la ocasión, pero que no tienen nada que ver con las matemáticas en sí, más bien con la desesperación del profesor ante el comportamiento o nulo conocimiento de la clase. Veamos algunas de ellas:

En primer lugar, aquí van algunas muestras de desespero que a veces habrán pasado por nuestra cabeza:

- Si la pizarra pudiera, chillaría.
- Aquí hay gente que sacrifica matrices, creo que es la última novedad en matemáticas.
- Hoy tengo una sensación muy extraña; algo así como que la gente sólo ha captado el 25% de lo que he dicho.
- Creo que soy San Juan, “la voz que clama en el desierto”.
- Si te preguntas por la estabilidad mental de tu profesora: -0,8.

A veces nos aparece alguna frase con el único objetivo de *motivar* a nuestros alumnos:

- A falta de otros juegos más sugerentes, les dejo unas ecuaciones para que pasen el rato.
- sen x cos x+ cos x – sen 2x +cos x sen x = 0. Ahí tenéis: un tren de mercancías de senos y cosenos a toda pastilla.
- Y para que no decaiga la juerga, van a llevarse ustedes a sus garitos particulares unos cuantos ejercicios.
- Tendremos dos exámenes: uno para suspender y otro para recuperar.
- Esto va a caer en el examen. ¡Lo sabré yo, que lo voy a poner!
- Reconozco que al enfrentarse a este tipo de ejercicios se comienza sintiendo náuseas, pero se acaba entrando en éxtasis.

En otras ocasiones nos liamos con las explicaciones o las comparaciones que hacemos o en los consejos que damos:

- ¿Qué es la mediana? ¿Un café con un poco de leche?
- En los problemas de matemáticas debéis moveros con agilidad, como si estuviérais en una discoteca.
- Sobre la caligrafía de una alumna “Tus logaritmos parecen que bailan la jota con el número e”.
- Os aconsejo que tengáis cuidado a la hora de hacer los cálculos porque, como ya sabéis, cada calculadora es un mundo.
- Tiene intríngulis: para dibujar una elipsoide dibujáis una esfera, y como no os sale bien, os sale una elipsoide.

- Infinito más infinito debe dar….¡Un infinito más grande!
- Una curva es una cosa redonda.
- Hablando del movimiento parabólico: “Si disparamos un cañón con una inclinación de 90º, hacemos el gilipollas y el enemigo se ríe de nosotros.
- Explicando el desarrollo de Taylor: “Derivada segunda partida por *dios*… [risas]. Bueno, seguro que también interviene.
- Un logaritmo es una mierda comparado con una potencia.

El problema es cuando vienen otros profesores a hundirnos nuestros esfuerzos:

- No sé cómo os enseñan la regla de Sarros, que es la regla más tonta, estúpida, imbécil, asocial, deprimente, gilipollas, irracional y absurda.

Dado que el tema clave de las nuevas enseñanzas serán las competencias base, no viene mal ver la aplicación de las matemáticas con ejemplos de la vida cotidiana:

- En un cono, si la altura es pequeña nos sale un sombrero de chinos; y si la altura es grande, nos sale un cucurucho de pipas.
- La derivada es pequeña, es decir, crece flojito.
- La trigonometría es como las cerezas: viene en racimos.
- Derivar una función de funciones es como pelar una cebolla.
- Existe una mayor probabilidad de encontrarse en un desierto con los *Back Street Boys* que con *Cindy Crawford*, por la sencilla razón de que ellos son más.
- El polinomio cero no tiene grado: es soldado raso.
- Un problema de geometría sin figura es como un jardín sin flor, un sábado sin sol y una doncella sin amor.
- El máximo valor de un seno es 1. Bueno, de un seno trigonométrico.

Ya sabemos que a veces merece la pena no rectificar. Y para acabar, algunas equivocaciones matemáticas, generalmente de profesores de otras materias que a veces se lían o se meten en camisa de quince varas.

- La velocidad de la clase es demasiado lenta, debemos ser el doble de rápida. Es decir, si vamos a una velocidad x, debemos ir a x+2.
- Tenéis que traer 6250 pesetas. Y si sois familia numerosa, la mitad, es decir, 4000… no, 3000… 3200… ¡Traedme una tiza!
- Las matemáticas no siempre son exactas. Por ejemplo, dos y tres no siempre son cuatro.
- Los tres planos del lenguaje son como los tres lados de un cubo.

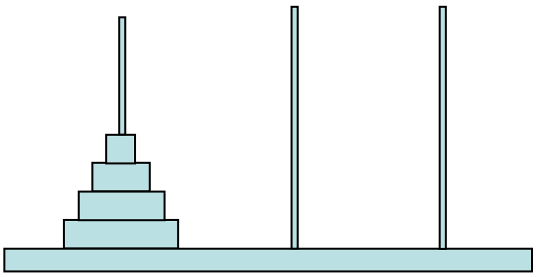
Junio de 2007, Número 10, páginas 175-181
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Se tienen tres varillas y cuatro discos de diferentes tamaños, apilados como se muestra en la figura. Los discos tienen una perforación en el centro para insertarlos en las varillas.



Se deben trasladar los cuatro discos a otra de las varillas, previamente determinada, ubicándolos en el mismo orden y respetando las siguientes reglas de juego:

1) *Un movimiento es el traslado de un disco de una varilla a otra.*
2) *Sólo se puede mover un disco a la vez.*
3) *Cada disco que se retira de una varilla debe llevarse directamente a otra varilla.*
4) *En ningún momento debe estar ubicado un disco cualquiera sobre otro de menor tamaño.*

¿Cuál es el menor número de movimientos?

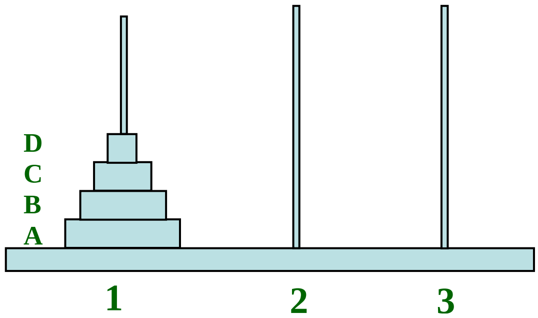
Estamos ante un antiguo problema de carácter lúdico, conocido como *Torres de Hanoi*. Se ha escrito bastante sobre este juego y se puede jugar hasta en algunas agendas electrónicas. En este artículo veremos algunos aspectos matemáticos de este interesante juego en el marco de los problemas de optimización e ilustraremos el uso de una notación adecuada en la resolución de algunos problemas.

Observemos que el problema está planteado como uno de optimización discreta, pues se pide realizar el traslado de discos en el *menor* número de movimientos y es obvio que la variable "número de movimientos" toma valores sólo en los números enteros.

Seguramente, luego de algunos intentos lograremos ubicar los cuatro discos en otra varilla, como pide el problema. Si jugamos tratando de minimizar el número de movimientos, posiblemente llegaremos a un número de movimientos que consideraremos es el mínimo. Sin embargo, ¿cómo estar seguros que tal número es el mínimo? Una posibilidad es examinar todos los casos y convencernos que nuestra secuencia de movimientos es la que tiene el menor número de elementos. Para ello puede ser muy útil un diagrama de árbol que nos vaya mostrando todas las posibilidades. Con ese propósito adoptamos una notación:

Notación

1. A las varillas las llamaremos 1, 2 y 3
2. Llamaremos A, B, C y D a los discos, considerando que A es el más grande y que los otros tienen tamaños decrecientes, siguiendo el orden alfabético



3. Usaremos ternas ordenadas para representar el conjunto de discos que hay en cada varilla, antes o después de cada movimiento.
4. La varilla en la que inicialmente están los discos es la 1 y la varilla a la que se desea hacer el traslado es la 3.
5. La situación inicial del juego propuesto queda descrita por la terna.

$$(ABCD,\ \Phi,\ \Phi)$$

que indica que los cuatro discos están en orden decreciente en la varilla 1 y que en las varillas 2 y 3 no hay disco alguno (un conjunto vacío de discos).

Con la notación adoptada, en un diagrama de árbol, con el punto inicial especificado, tendríamos dos posibles situaciones siguientes:

$$(ABCD,\ \Phi,\ \Phi) \begin{cases} (ABC,\ D,\ \Phi) \\ (ABC,\ \Phi,\ D) \end{cases}$$

Así podemos desarrollar el árbol completo, pero es fácil imaginar que será muy frondoso.

Diversos casos

La notación adoptada nos puede servir para mostrar fácilmente todos los movimientos posibles cuando tenemos menos discos; así, si llamamos *n* al número de discos, tendremos:

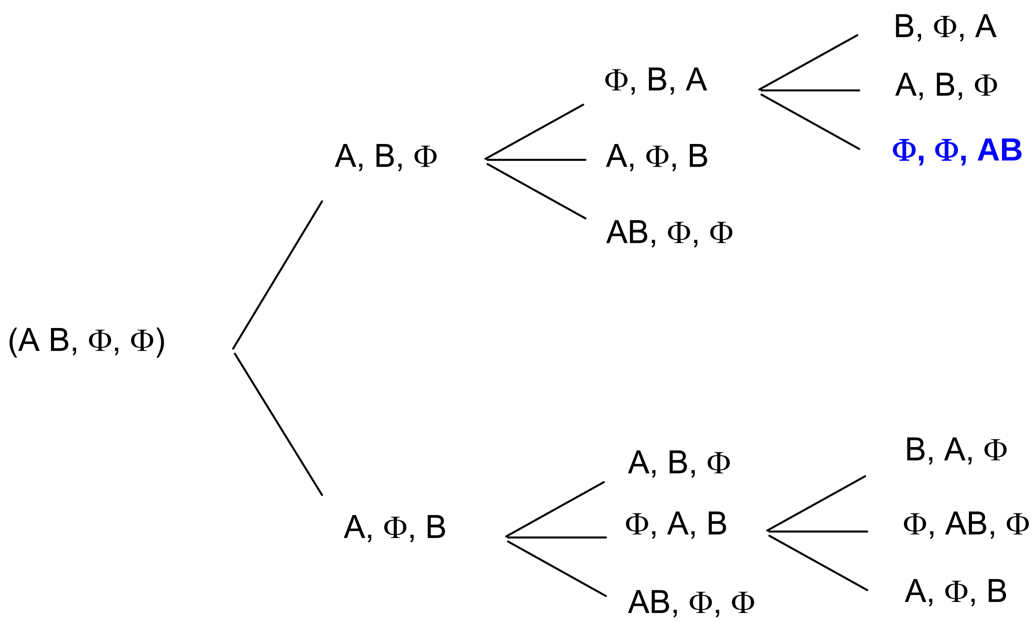
Cuando n = 1

Situación inicial: (A, Φ, Φ). Situación final buscada: (Φ, Φ, A).

Es obvio que **uno es el menor número de movimientos para trasladar un disco de una varilla a otra.**

Cuando n = 2

Situación inicial: (AB, Φ, Φ). Situación final buscada: (Φ, Φ, AB).



Se puede ver que se llega a la situación buscada en **tres** movimientos y no hay manera de hacerlo en un número menor de movimientos; así, **tres es el número óptimo de movimientos cuando se tienen dos discos.**

Observemos que los puntos de los cuales no salen ramas, ya han aparecido antes y no se continúan porque obviamente se repetiría la rama ya desarrollada y la llegada al punto deseado sería con un mayor número de movimientos.

Cuando n = 3

Situación inicial: (ABC, Φ, Φ). Situación final buscada: (Φ, Φ, ABC).

Es claro que para trasladar tres discos, tenemos que trasladar también dos discos. Como ya tenemos una forma óptima de trasladar dos discos, usemos esa forma para trasladar dos de los tres de este caso. Usamos tal forma para trasladar los dos discos más pequeños – B y C -, considerando el disco A como "piso" de esta torre de dos discos.

Veamos las tres etapas:

i) Consideramos BC como una torre de dos discos y la trasladamos a la varilla 2. (*3* movimientos)
ii) Trasladamos el disco A a la varilla 3. (*1* movimiento)
iii) Trasladamos la torre BC del poste 2 al poste 3, sobre el disco A (*3* movimientos)

Así se realizan en total *3* + *1* + *3* = ***7*** movimientos

Con este análisis, podemos afirmar entonces que **siete es el número mínimo de movimientos para trasladar 3 discos** de una varilla a otra, siguiendo las reglas establecidas, aun sin haber efectuado los movimientos específicos. El carácter de óptimo queda justificado por haber hecho uso solamente del número óptimo de movimientos (tres) para trasladar dos veces 2 discos (B y C) y una vez del número óptimo de movimientos (uno) para trasladar 1 disco (A). Podemos decir que el problema de trasladar 3 discos lo hemos convertido en tres subproblemas, cada uno de los cuales ha sido resuelto óptimamente, y esto garantiza que el problema también se ha resuelto óptimamente[1]. Esto es consistente con un principio mucho más general de la programación dinámica, conocido como el principio de optimalidad de Bellman.

Si hacemos un diagrama de árbol usando la notación adoptada, veremos claramente que con la secuencia óptima de movimientos se tienen las siguientes situaciones:

(ABC, Φ, Φ); (AB, Φ, C); (A, B, C); (A, BC, Φ);

(Φ, BC, A); (C, B, A); (C, Φ, AB); (Φ, Φ, ABC)

Se pueden distinguir los **siete** movimientos y las etapas (i), (ii) y (iii)

[1] Otra posibilidad sería considerar que la torre de dos discos está formada por los discos A y B, pero se ve fácilmente que así no tenemos los tres subproblemas con soluciones óptimas y que se emplean más de 7 movimientos.

Cuando n = 4

Siguiendo el mismo razonamiento, ya podemos responder a la pregunta del problema planteado, y sin necesidad de realizar los movimientos específicos:

Necesitamos 7 movimientos para trasladar la torre de tres discos (B, C y D) a la varilla 2, luego 1 movimiento para trasladar el disco A a la varilla 3 y finalmente otros 7 movimientos para trasladar la torre de tres discos de la varilla 2 a la varilla 3, sobre el disco A. Así, el mínimo número de movimientos que se necesita para trasladar los cuatro discos de la varilla 1 a la varilla 3 es

$$7 + 1 + 7 = \mathbf{15}$$

El lector queda invitado a hacer la verificación empírica, jugando con los discos.

Generalización

Llamemos ***M(n)*** al menor número de movimientos que se requieren para trasladar una torre de *n* discos de un poste a otro determinado. Luego del análisis hecho hasta ahora, es lógico concluir que para trasladar *n* discos de la varilla 1 a la varilla 3, en el menor número de movimientos, se procederá como sigue:

i) Considerar el disco más grande como piso de una torre de n-1 discos y trasladar esta torre a la varilla 2. (**M(n-1)** movimientos)
ii) Trasladar el disco más grande a la varilla 3. (**1** movimiento)
iii) Trasladar la torre de n-1 discos de la varilla 2 a la varilla 3, sobre el disco más grande ya trasladado (Otros **M(n-1)** movimientos)

Así se realizan en total $2M(n-1)+1$ movimientos y tenemos la expresión recursiva

$$\boldsymbol{M(n) = 2\,M(n-1) + 1, \text{ para todo entero } n > 1, \text{ con } M(1) = 1} \qquad (\mathbf{1})$$

Determinemos ahora una expresión general para $M(n)$, pues (**1**) sólo nos da una expresión en términos de $M(n-1)$.

- ***Una forma de obtener M(n):***

$M(1) = 1$

$M(2) = 2\,M(1) + 1 = 2\,(1) + 1 = 2 + 1$

$M(3) = 2\,M(2) + 1 = 2\,(2 + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$

$$M(4) = 2\,M(3) + 1 = 2(2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

En general,

$$M(n) = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1$$

Y observando que tenemos la suma de una progresión geométrica cuya razón es 2,

$$\boldsymbol{M(n) = 2^n - 1}$$

- ***Otra forma de obtener M(n):***

La expresión anterior también la podemos obtener empleando el método general de resolución de ecuaciones en diferencias de primer orden, no homogéneas, con coeficientes constantes y condición inicial dada, pues la relación establecida en (**1**) es un caso particular de este tipo de ecuaciones.

Usamos la notación habitual al trabajar con ecuaciones en diferencias: escribimos $M(n) = x_n$, y reescribimos (**1**):

$$x_{n+1} - 2x_n = 1, \text{ con } x_1 = 1 \qquad (\mathbf{1'})$$

La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es

$$(x_n)_h = K\,2^n\,,$$

donde K es una constante por determinar.

La solución particular de la ecuación dada es

$$(x_n)_p = -1$$

La solución general de (**1’**) es, entonces

$$x_n = K\,2^n - 1$$

Usando la condición inicial $x_1 = 1$, obtenemos que $K = 1$, y en consecuencia, la solución de (**1’**) es

$$\boldsymbol{x_n = 2^n - 1},$$

que es la misma expresión que obtuvimos de (**1**) usando la suma de una progresión geométrica.

Observaciones

a) Suele ocurrir que obteniendo experimentalmente que con 1 disco el número de movimientos es 1, con 2 discos es 3, con 3 discos es 7 y con 4 discos es 15, ya se afirma que con n discos el número mínimo de movimientos es $\mathbf{2^n - 1}$. Esto es interesante y revela una capacidad de intuir una fórmula general; sin embargo sólo es una conjetura y habría que probar la validez de esta fórmula para todo valor entero positivo de n.

b) También podemos demostrar que $\boldsymbol{M(n) = 2^n - 1}$ usando el método de *inducción matemática*. Se requerirá usar también la conclusión ya obtenida en (1) que podemos escribir

$$M(n+1) = 2M(n) + 1 \text{ para todo entero } n > 0, \text{ con } M(1) = 1. \qquad (\mathbf{2})$$

Veamos brevemente tal demostración:

- Ya verificamos que la fórmula es válida para $n = 1$; es decir

$$M(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

- Supongamos que es válida para n = h (*Hipótesis inductiva*):

$$M(h) = 2^h - 1$$

- Debemos probar que es válida para $n = h + 1$; es decir, que

$$M(h + 1) = 2^{h+1} - 1 \text{ (\textit{Tesis inductiva})}$$

- La prueba es sencilla:

$$\begin{aligned} M(h + 1) &= 2M(h) + 1 && \text{(Por (\textbf{2}))} \\ &= 2\,(2^h - 1) + 1 && \text{(Por la hipótesis inductiva)} \end{aligned}$$

Luego,

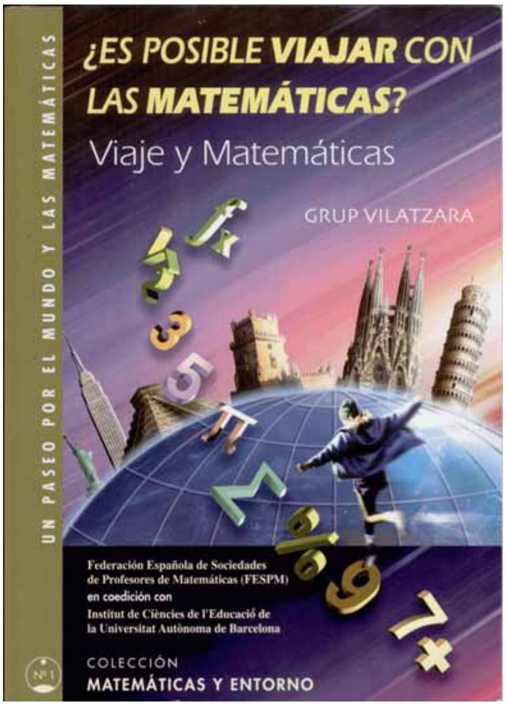
$$M(h + 1) = 2^{h+1} - 2 + 1 = 2^{h+1} - 1,$$

que es lo que queríamos demostrar.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Libros

Junio de 2007, Número 10, páginas 183-185
ISSN: 1815-0640



¿ES POSIBLE **VIAJAR** CON LAS **MATEMÁTICAS?**

Viaje y Matemáticas

Autores: Grupo Vilatzara (Pedro Cobo, Jordi Comellas, Joaquín Gimenez. Jaume Serra, Manel Sol y Xavier Vilella**)**

Colección: Matemáticas y entorno (Nº 1)

Edita: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona

Año: 2006

144 páginas

ISBN: 84-934488-2-6

Cuando Luis Balbuena me encomendó la lectura y mi opinión de este libro para su publicación en la revista UNIÓN, en principio, me pareció una labor comprometida y, a la vez, interesante. En primer lugar por ser la primera vez que iba a realizar un trabajo de este tipo y porque tenía en mis manos el primer volumen de la Colección "*Matemáticas y Entorno*" que ha comenzado a editar la *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas*, lo cual era realmente un compromiso lleno de responsabilidad.

Si estás interesado o interesada en hacer matemáticas de forma seria y lúdica a la vez, deberías leer este libro, pues proporciona múltiples actividades para la Educación Secundaria Obligatoria, adaptadas a todos los niveles, teniendo en cuenta que "*todos aprenderán matemáticas, pero no todos aprenderán lo mismo*".

El contexto aquí es el mundo, el viaje es la provocación, los lugares visitados son la motivación. Se trata de un libro del profesorado (el *Grupo Vilatzara* está formada mayoritariamente por profesorado de Secundaria), para el profesorado (todas las personas que lo lean podrán llevar las ideas que se presentan a su realidad cotidiana: el aula).

En el primer capítulo: "*Principios de nuestra propuesta*" se muestran las fundamentaciones en las que se basa el *Grupo Vilatzara* para realizar la propuesta y como dicen: "*Combinar vida con esquemas simbólicos, revivir historia propia y ajena y reconocer los elementos científicos que hay en ella, son algunos de nuestros objetivos para conseguir que nuestros estudiantes amen y entiendan las matemáticas como actividad que da respuesta a interrogantes cotidianos. La sorpresa es nuestra mejor arma motivadora y la confrontación nuestro deseo de estilo de enseñanza*". Se plantea la importancia de las matemáticas y la necesidad de contextualización, entendiendo **la actividad matemática como sistema de prácticas en contexto** (el contexto como lugar de provocación, motivación y descubrimiento; como facilitador de transferencia de aprendizaje; como lugar de cambio de actitudes ante las matemáticas; como promotor de racionalidad); **el contexto, como lugar de significación e interculturalidad** (el contexto como lugar de producción interactiva y discursiva de significados; como lugar de prácticas de ejemplificación y sensibilización) y **la cultura e historia local como contexto para la matematización**.

La idea principal de la propuesta es provocar desafíos al alumnado para que descubran los contenidos matemáticos, así como contribuir a desarrollar habilidades y competencias sobre la resolución de problemas en contextos significativos.

La parte práctica está dividida en los seis capítulos, tan interesantes y provocadores para ser utilizados en el aula, que me es imposible destacar ninguno. En cada uno de ellos se enuncia: el contenido matemático que trata, su contexto, los objetivos, el material necesario para su desarrollo y al final, se presenta un resumen de lo tratado con una amplia bibliografía y referencias webgráficas. Estos seis capítulos tienen los siguientes enunciados:

- La medida de las cosas: el metro
- Proporcionalidad, álgebra y geometría con íberos y romanos
- Descubre las matemáticas en el modernismo
- Centroamérica, la tierra del jaguar y los sistemas de numeración
- Chicago: la ciudad de los rascacielos
- El Polo Norte

Se parte de la idea de que cada capítulo cobra mayor sentido didáctico si el profesor tiene clara su intención y prepara una introducción, una puesta en escena y un desarrollo hasta las conclusiones que permitan convertirlas en algo cercano al concepto de actividades ricas, es decir, que introducen experiencias culturales del alumnado, ilustran las matemáticas usadas en situaciones verídicas, permiten una actividad cooperativa entre personas con diferentes niveles de competencia matemática, no se hacen excesivas demandas en términos de conocimiento matemático sofisticado y se admite que se usen procedimientos de resolución usando diferentes ramas de las matemáticas.

Las actividades que presentan se relacionan con visitas reales y visitas virtuales a diferentes lugares, entendiendo las matemáticas como un código más para poder entender e interpretar el entorno. Se han estructurado en forma de tareas problemáticas contextualizadas, creando un ambiente de resolución de problemas huyendo de las tareas rutinarias.

Por último, como escribe Claudi Alsina en el Prólogo del libro: "*no deja de ser bellísimo que con visitas, imágenes y unas pocas informaciones podamos enseñar matemáticas en contexto y con imaginación. La pizarra está negra. Por la ventana entra luz. ¡Feliz viaje!*"

Reseña: M. Eloy Morales Santana
I.E.S. La Minilla (Las Palmas de Gran Canaria)
Gran Canaria, España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 187-194
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Internet y Matemáticas

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

El título elegido puede resultar muy amplío, sobre todo si intentamos, con ayuda de un buscador, encontrar todas las referencias en la Web a estos términos ya que aparecerán cerca de un millón y medio, aunque si la frase la encerramos entre comillas nos quedaremos con unas tres mil referencias para comenzar a valorar la importancia y sobre todo la utilidad de Internet en Matemáticas.

No se trata de realizar una exposición teórica de lo que supone Internet como recurso en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sino de ofrecer unas breves indicaciones, desde la experiencia en el aula, de cómo afrontar su uso y su incorporación como un recurso más.

Es evidente que Internet ofrece gran cantidad de información y sobre todo materiales para utilizarlos en el aula pero antes de incorporarlos sería conveniente planteamos algunas cuestiones tales como ¿cuándo los utilizo?, ¿Para qué? ¿Cómo?, y algunas más sobre su utilidad o su eficacia.

Enciclopedias, cursos online, cazas del tesoro o webquest son algunos ejemplos de aplicaciones disponibles en Internet para su uso en el aula junto con la oferta de programas educativos de carácter libre o gratuitos que podemos descargar e instalar.

Un aspecto importante que siempre es necesario considerar es la planificación. No es aconsejable improvisar, ¿qué garantía tenemos de que la página o la aplicación encontrada con un buscador es la adecuada para los contenidos que deseamos trabajar? Este aspecto es vital a la hora de incorporar no Internet sino cualquier recurso que debe hacerse desde una planificación previa, con una programación lo más detallada posible de las actividades que se van a proponer.

Limitarnos al uso de un buscador para encontrar páginas sobre cada uno de los contenidos es una tarea sencilla, siempre encontraremos alguna Web, aunque casi seguro no será la más adecuada a los objetivos planteados o al nivel educativo en el que nos encontramos.

Es evidente que cuando se encuentra una Web interesante lo mejor es anotarla o incluirla en alguna relación o listado de direcciones que facilite su posterior uso, detallando lo mejor posible sus características y posibilidades didácticas. Quizás pensemos que esto no es necesario ya que hay numerosos portales que ofrecen una catalogación de páginas a las que en cualquier momento podemos acceder como ocurre por ejemplo con Divulgamat (www.divulgamat.net) o Redemat (www.recursosmatematicos.com) o El paraíso de las matemáticas (www.matematicas.net), entre otros.

Aunque es estas páginas encontremos casi todo lo que necesitamos, es conveniente que al igual que disponemos de nuestros propios recursos "más tradicionales" también tengamos nuestras propias páginas, no necesariamente elaboradas por cada uno de nosotros sino nuestra propia selección que se ajuste lo más posible a los contenidos sobre los que deseamos aplicarlas o utilizarlas.

Además, es conveniente compartir esta selección con el resto del profesorado del centro y si es posible hacerla pública como un nuevo portal particular y clasificado desde la experiencia en el aula.

En este sentido, desde la experiencia realizada en Andalucía y en otras comunidades autónomas de España con la incorporación de las TIC al aula quizás ha faltado la coordinación entre todos los implicados, de manera que no se duplicaran esfuerzos y se compartieran experiencias y conocimiento.

Los centros disponíamos de los elementos necesarios para compartir experiencias, bien a través de la Web oficial del Centro o a través de la plataforma educativa instalada en cada uno de ellos desde el inicio de la experiencia.

Algo tan sencillo como compartir una relación de enlaces o de recursos no se ha producido hasta la fecha, aunque ahora se han dado los primeros pasos para crear la base de datos denominada "Banco andaluza de recursos tecnológicos" (BARTIC).

Mientras tanto, es necesario establecer en cada centro los mecanismos necesarios para que la información sobre determinados recursos o páginas Webs sean de utilidad para todo el profesorado y permitan que todos los grupos puedan aprender con su uso.

En nuestro centro esto lo hemos resuelto a través de la plataforma educativa.

La plataforma educativa es un entorno diseñado para la enseñanza a distancia, por lo que en nuestra enseñanza que es presencia, es conveniente buscar y aprovechar las posibilidades que ofrece.

Además de su uso para trabajar con los distintos grupos de alumnos como un recurso más que complementa a los recursos tradicionales, que admite diverso material como archivos, texto, presentaciones, flash, java, mp3 o vídeo, entre otros, ofrece posibilidades para la propuesta y el envío de tareas, seguimiento del proceso de aprendizaje del alumnos, evaluaciones, además de mensajería, foros, encuestas, entre otras opciones.

La sección en el aula virtual correspondiente a la selección de enlaces Web es de gran utilidad ya que ofrece unas direcciones previamente seleccionadas y clasificadas por el profesorado para su utilización como apoyo al desarrollo de los contenidos del currículum.

Como se ha indicado anteriormente, no se trata de exponer una amplía relación de direcciones o sitios de utilidad, más bien intentamos ofrecer algunas características con ejemplos concretos de algunas páginas que pueden servir para trabajar en el aula pero sin olvidar una planificación previa.

Ante la pregunta ¿Qué buscamos en un Web para considerarla de utilidad como recurso didáctico? No hay una respuesta única ya que su utilidad dependerá del objetivo que se desea conseguir.

Una página puede ofrecer información muy bien estructurada sobre determinados contenidos, ofrecer animaciones o simulaciones que resultarán, además de útiles, de gran vistosidad y favorecerán el interés y motivación en el alumnado. También, pueden proponer una serie de actividades de carácter interactivo de manera que el alumnado realice las actividades propuestas y le guíe en el proceso de aprendizaje indicando la validez de las repuestas dadas.

Estas páginas de tipo interactivo son muy útiles para facilitar la utilización de Internet en el aula, por un lado motivan al alumnado y por otro permiten que en el aula se pueda trabajar con distintos ritmos de aprendizaje.

Indicaremos a continuación, algunas de las páginas que estamos utilizando para trabajar el álgebra en los primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria que destacamos por su sencillez y por las posibilidades que ofrecen.

En momentos en los que aún existe un amplío debate sobre la conveniencia o no del uso de la calculadora la primera página que proponemos ofrece numerosas actividades y opciones para trabajar el cálculo mental.

Creada por Nacho Diego está accesible en la dirección:

http://sauce.cnice.mecd.es/~jdiego/

A partir de la pantalla inicial que aparece en la imagen siguiente se accede a las distintas actividades.

Por ejemplo, en la sección correspondiente **Cálculo** ofrece numerosas aplicaciones para el desarrollo del cálculo mental.

Otra página, aunque creada para su uso en la Educación Primaria, ofrece una importante cantidad y sobre todo variedad de actividades para utilizarlas en los primeros cursos de la ESO.

Se trata de la página del CEIP San Bernardo de Los Silos (Tenerife) creada por Mario Ramos cuya dirección es:

http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/usr/eltanque/default.htm

Como se podrá observar en la pantalla de inicio que aparece a continuación existe una importante y variada oferta de actividades donde elegir.

En cualquiera de las opciones que se puedan seleccionar aparecerán actividades sencillas en las que la interactividad es su característica común.

Otra fuente a la que recurrir para encontrar nuevas páginas y materiales es la Web del CNICE; en el Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa del Ministerio de Educación y Ciencia de España, cuya dirección es http://www.cnice.mec.es/ los materiales están clasificados por áreas y niveles.

Como ejemplos, citamos algunas que utilizamos para trabajar los números decimales o las fracciones, cuyas direcciones son:

http://w3.cnice.mec.es/eos/MaterialesEducativos/primaria/matematicas/decimales/menu.html

http://w3.cnice.mec.es/eos/MaterialesEducativos/primaria/matematicas/fracciones/menu.html

Las actividades de distinto tipo que ofrece facilitan la introducción de estos conceptos así como la realización de distintas tareas, con algunos test para comprobar el aprendizaje del alumnado.

No olvidemos uno de los proyectos importantes del CNICE como es Descartes en el que encontraremos actividades para todos los contenidos de la Educación Secundaria Obligatoria.

Y por último, para no abusar del listado de páginas citaremos una Web que permite desarrollar entre otras actividades, el cálculo mental a través de juegos; esta página denominada "*supersaber*" la podemos encontrar en la dirección:

http://www.supersaber.com/

En ella encontramos algunas actividades no sólo de matemáticas sino también de áreas como lengua o sociales; en todas a través de juegos anima a luchar por llegar a la meta salvando una serie de obstáculos, en nuestro caso, en forma de problemas.

Como se puede observar la característica común de las páginas anteriores es la sencillez que hace que su uso por parte del alumnado no plantea apenas dificultades, lo cual se traduce en eficacia a la hora de comenzar a obtener el rendimiento que las distintas actividades que contienen nos ofrecen.

Es evidente que hay muchas páginas más, nuestro único objetivo es convencer al lector que es preferible seleccionar las Web que planteen mínimas dificultades, sobre todo pensando en el alumnado, cuando se trata de iniciarnos en la utilización de Internet como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas.

Algo similar podemos hacer con el resto de bloques del currículo, siempre encontraremos miles de páginas aunque dedicando algún tiempo encontraremos aquellas que se ajustan al nivel al que deseamos aplicarlas y con las actividades que nos interesan.

Antes de terminar, no quiero olvidarme felicitar a los autores de las páginas anteriormente citadas por el trabajo que han desarrollado y las posibilidades que ofrecen a todo el profesorado para beneficio de nuestros alumnos.

Agustín Carrillo de Albornoz Torres. IES Jándula de Andujar. Jaén. España.

Junio de 2007, Número 10, páginas 195 - 198
ISSN: 1815-0640

DOS = UNIÓN
La sección de unión para los estudiantes más jóvenes.
8

Por Santiago López Arca

Grafos

Seguro que alguna vez alguien te presentó el siguiente desafío: ¿Puedes trazar la *figura 1* sin levantar el lápiz del papel y sin recorrer dos veces el mismo segmento?

¿Y qué te parece la *figura 2*? ¿Podrás dibujarla con las condiciones que acabamos de establecer?

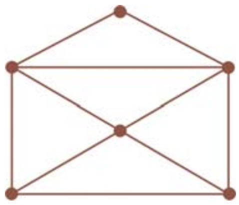


Fig. 1

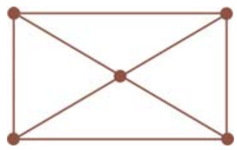


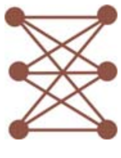
Fig. 2

Conscientes de estar siendo poco rigurosos, en matemáticas se dice que un dibujo de este tipo, formado por un conjunto de puntos de un plano que están conectados por segmentos o arcos de curva, es un ***grafo***. Los puntos se llaman ***vértices*** o nodos y las líneas de unión ***aristas*** o lados.

El número de vértices determina el ***orden del grafo***. El ***orden de un vértice*** es el número de lados que tienen por extremo ese vértice.

La teoría de grafos nos permite resolver problemas matemáticos de carácter teórico y también muchas situaciones problemáticas de tipo práctico que se presentan en la vida real: redes de conexión de alumbrado, o entre ordenadores, sistemas de transporte, redes de suministro de agua o gas... ayudándonos a establecer los caminos más cortos y a abaratar los costes.

Propongamos, a modo de toma de contacto, dos pequeños problemas. El primero: *¿cuántos caminos se necesitan para unir cinco casas de todas las formas posibles?* Y el segundo: *Tres amigos van paseando por la calle y se encuentran con tres amigas; se saludan los dos grupos, ¿cuántos saludos se efectuaron?* A continuación mostramos las soluciones a estos problemas utilizando grafos; ¿sabes interpretarlas? ¿Cuáles son las respuestas?

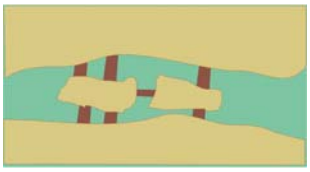


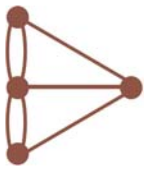
En el primero de los grafos cada vértice está unido con todos los demás (tiene todas las arista posibles), se dice que es *completo*. En el segundo grafo, el conjunto de vértices está separado en dos subconjuntos y cada vértice está unido con todos los vértices del otro subconjunto pero con ninguno de su propio subconjunto. Este es un *grafo bipartito completo*.

Pero vayamos al principio de la historia. Allá por el año 1735, *Leonhard Euler* (1707-1783), que entonces vivía en *San Petersburgo*, tuvo conocimiento del problema de los puentes de Königsberg (ahora *Kaliningrado*). La ciudad de Königsberg estaba constituida por cuatro sectores: dos situados en las orillas del río *Pregel* y otros dos asentados en dos islas de este río. Los cuatro sectores se conectaban entre sí por siete puentes, tal como se muestra en este grabado del siglo XVII.

Los habitantes se preguntaban si sería posible dar un paseo, saliendo y volviendo a sus domicilios, pasando una única vez por cada puente. Euler demostró que es imposible hacer el recorrido propuesto.

Para poder abordar el problema representó cada sector de la ciudad por un punto y cada puente por una línea, tal como se muestra en las siguientes figuras. Pero Euler no se conformó con resolver este problema particular, sino que construyó una teoría que permitió obtener la solución general para cualquier número de puntos unidos por líneas.





En 1736 presentó una memoria ante la *Academia de Ciencias de San Petersburgo* que puede ser considerada como la obra que sentó las bases de la teoría de grafos.

Para resolver el problema de los puentes de Königsberg, Euler razonó así: Si se desea diseñar un recorrido que permita partir y volver a un mismo punto, cada sector debe estar conectado con un número par de puentes lo que nos permitirá entrar y marchar de ese sector por puentes diferentes. También podremos iniciar el paseo en un lugar con un número impar de puentes para finalizar en otro que a su vez esté conectado con un número impar de puentes.

Andrea Gestal González

La teoría se resume con tres reglas:

1) Si un *grafo* está compuesto solamente por *vértices de orden par*, se puede recorrer de una sola pasada, saliendo de un determinado vértice y regresando a él.

2) Si un *grafo* contiene *sólo* dos *vértices de orden impar*, también se puede recorrer de una sola pasada, pero sin volver al punto de partida.

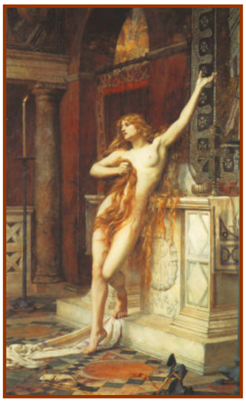
3) Si un *grafo* tiene más de dos *vértices de orden impar*, entonces el problema no se puede resolver.

Santiago López Arca

HIPATIA

Hoy voy a hablaros de Hipatia, un buen ejemplo de que las mujeres también pueden destacar cuando se mueven en campos relacionados con las ciencias o, más concretamente, en matemáticas, siendo capaces de trabajar en pie de igualdad con los hombres, desarrollando tareas que tradicionalmente fueron consideradas propias del género masculino, como es el caso de todas las actividades relacionadas con la técnica.

Hipatia (370-415) nació y murió en Alejandría (Egipto). Fue una de las primeras mujeres de la historia que contribuyó al desarrollo de las matemáticas. Su padre, al que ella adoraba, fue Teón de Alejandría, un ilustre filósofo y matemático de esa época, que actuó como maestro de Hipatia desde su infancia. Teón fue una excepción en la manera de pensar de su tiempo y permitió que su hija se convirtiera en astrónoma, filósofa y matemática, actitud que resultaba sumamente inusual en un sistema en el que las mujeres no tenían derecho a la educación y sus vidas transcurrían en los espacios privados de sus casas, de sus familias, de sus amigos y de las "tareas femeninas".



Teón quiso que Hipatia fuese "un ser humano perfecto" y con ese objetivo vigiló muy de cerca la educación de la mente y del cuerpo de su hija. Desde la mañana ella dedicaba varias horas al ejercicio físico; después tomaba baños que la relajaban y le permitían concentrarse para dedicar el resto del día al estudio de las ciencias, de la música y de la filosofía.

Teón trabajaba en el museo fundado por Tolomeo, emperador que sucedió a Alejandro Magno. El museo tenía más de cien profesores que vivían allí. Hipatia entró a estudiar con ellos y, aunque viajó a Italia y a Atenas para recibir algunos cursos de filosofía, se formó cómo científica en el Museo de Alejandría y trabajó en él hasta su muerte, llegando incluso a dirigirlo alrededor del año 400.

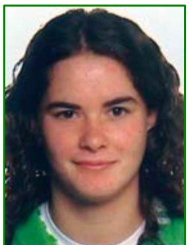
Hipatia se dedicó, durante veinte años, a investigar y enseñar geometría, astronomía, lógica, filosofía y mecánica en el museo. Ocupaba la cátedra de Filosofía Platónica por lo que sus amigos la llamaban "la filósofa". Al museo asistían estudiantes de Europa, Asia y África a escuchar sus enseñanzas sobre "La Aritmética de Diofanto" y su casa se convirtió en un gran centro intelectual.

Hipatia escribió comentarios a la *Aritmética de Diofanto*, al *Canon astronómico de Tolomeo* y a las *Secciones cónicas de Apolonio.* Estas y otras obras suyas fueron destruidas en el incendio de la Biblioteca de Alejandría.

Se convirtió en una de las mejores científicas y filósofas de su época, erudita de un conocimiento que los cristianos de entonces identificaban con el paganismo y que, por lo tanto, perseguían, quemando y destruyendo todos los templos y centros griegos, y persiguiendo a todos los académicos del museo, obligándoles a convertirse al cristianismo.

Hipatia se negó a renunciar al conocimiento griego, a la filosofía y a la ciencia que durante más de veinte años había aprendido y enseñado en el museo. En marzo del año 415, en tiempo de Cuaresma, fue acusada de conspirar contra el patriarca cristiano de Alejandría y, como consecuencia, fue asesinada.

Al asesinar a Hipatia, asesinaron a una mujer, una matemática y filósofa, la primera de la historia y la más notable de su época, aunque no se pudo asesinar el pensamiento filosófico y matemático griego.


Paula Catarina Sánchez Pedreira

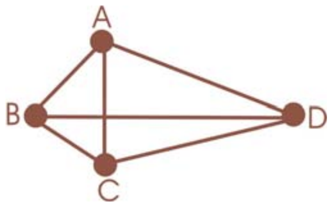
Fuentes:

Matemáticas en las matemáticas. Figueiras Ocaña, L. (y otras). Proyecto Sur.
http://es.wikipedia.org/wiki/Hipatia#Muerte_de_Hipatia
http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/nombres/mate1h.htm
http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Hipatia.asp

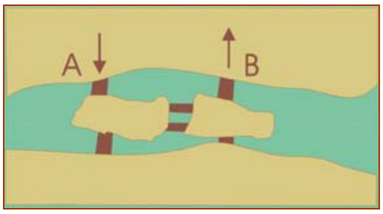
PENSAR ES DIVERTIDO

Investiga: Si un grafo tiene vértices de orden impar, el número de esos vértices (de orden impar) es par.

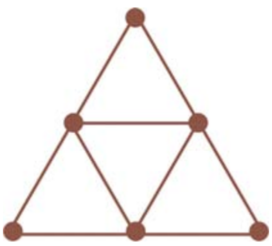
¿Cuántos caminos, ***que pasen una única vez por cada vértice***, se pueden establecer saliendo de A y volviendo a A?

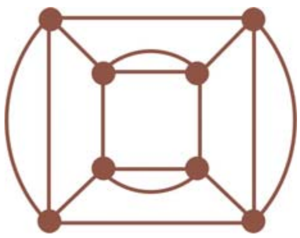


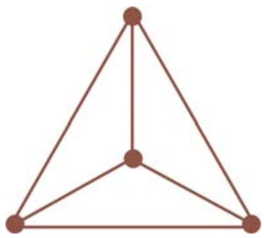
¿Cuántos caminos van de A a B pasando una única vez por cada uno de estos seis puentes?



¿Cuáles de las siguientes figuras se pueden trazar sin levantar el lápiz del papel y sin recorrer dos veces la misma arista?







UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, página 199
ISSN: 1815-0640

Información

Convocatoria de la dirección de Unión

La dirección de la revista UNION, que avala y nombra la Junta de Gobierno de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), ha de convocarse cada tres años.

La actual dirección cumple su mandato con el número 12 que se colgará en la red en el mes de diciembre de 2007. En consecuencia, se procede a realizar la convocatoria.

Aquellos profesores o profesoras que deseen hacerse responsables de la dirección de UNION, deberán enviar una solicitud a la Secretaría General de la FISEM antes del 30 de septiembre de 2007.

El procedimiento y los documentos a presentar son los siguientes:

- Solicitud dirigida al Presidente de la FISEM en la que consten al menos estos datos: nombre completo, domicilio, Sociedad federada a la que pertenece, e-mail, situación profesional y lugar de trabajo.
- Certificado del Secretario de su Sociedad en el que conste su condición de socio activo así como su antigüedad como tal que debe ser superior o igual a cinco años.
- Una memoria de un máximo de tres folios en la que exponga la orientación que desea dar a la revista así como las secciones fijas que va a crear y otros datos que aclaren la línea que tiene previsto aplicar.
- Currículum vitae.

Las solicitudes y la documentación se enviarán por correo postal a la Secretaría General de la FISEM cuya dirección postal es la siguiente:

Paulo Figueiredo Lima
Rua Bulandy, 227
50 741 – Recife – PE
Brasil

El solicitante comunicará al siguiente e-mail el envío de la documentación:
union.fisem@sinewton.org

Todas las solicitudes recibidas serán enviadas a la Junta de Gobierno de la FISEM para que decida cuál es la candidatura que presenta el programa más adecuado a los fines de la Federación.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, página 201
ISSN: 1815-0640

Normas para publicación en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 15 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen o abstract**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas. Preferiblemente se redactará también en inglés, además de la lengua original utilizada (español o portugués).
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos identificativos en** esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). "La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria". *Educación Matemática* 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). "Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma". *Revista de didáctica de las matemáticas* 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991). "Research on mathematical proof". En: Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230*.* Kluwer, Dordrecht.

Hernández, G., Juárez, I. y Lorenzo, K. (1998). "Recopilación de datos estadísticos y su tratamiento en la enseñanza secundaria". En: Nuez, M. y Pérez, O. (eds.), *Segundo Congreso Americano de Educación Matemática,* 223-234. Editorial JJ, Caracas.

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a union.fisem@sinewton.org