UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 23 – Septiembre de 2010

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 3-4
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García Gonzalez
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio
Textos: Vilma Giudice
Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo
webmaster: Elda Beatriz Micheli

Colabora

CARLOS
SALVADOR
Y BEATRIZ
FUNDACIÓN
CANARIA

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 5-6
ISSN: 1815-0640

Editorial

"Esta es, amigos, la utopía de la educación. En ella se encuentra el impulso hacia una sociedad más justa y más libre. Entre todos, en este tiempo de esperanzas renovadas, con el esfuerzo colectivo y una pasión sin límites, podremos hacer realidad los sueños que hoy aquí y para siempre nos mantendrán unidos"

Álvaro Marchesi.
Secretario General de la OEI.
Congreso Iberoamericano de Educación.
Metas 2021.

Estimados colegas y amigos:

Con enorme satisfacción hemos presentado nuestra publicación en el Congreso Iberoamericano de Educación, donde alrededor de 3000 docentes de todos los niveles han compartido sus experiencias y proyectos, pudimos difundir nuestra propuesta a docentes de matemática de los países asistentes, quienes mostraron un enorme interés por los artículos disponibles y la posibilidad de acceder a ellos gratuitamente.

En este número, disponemos de artículos interesantes sobre incorporación de estrategias de enseñanza a partir de juegos, construcciones con distintos materiales, viñetas y dibujos. Se hace referencia a las actitudes que adoptan los futuros docentes en una interesante investigación así como al desarrollo de competencias para la resolución de problemas. Las secciones fijas nos ofrecen nuevas sugerencias para aplicar en el aula que pueden adaptarse a diferentes edades y contextos.

Tenemos dos noticias muy significativas para celebrar:

- La incorporación de la Asociación Mexicana de Investigadores del uso de tecnología en Educación Matemática a la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática. Les damos la más cordial Bienvenida.
- La presentación del Curso para la formación permanente en el área de las Matemáticas: Ñandutí. Propuesto por los catedráticos Luis Balbuena Castellano y Agustín Carrillo Albornoz con el apoyo de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) para colaborar con la formación permanente del profesorado de Enseñanza Secundaria de todos los países de la región.

Deseamos extender una cordial Bienvenida y deseos de éxito en su funciones a los nuevas/os presidentas/es de Sociedades de Educación Matemática de Chile, Ecuador, Paraguay, Perú y Portugal. También queremos agradecer muy especialmente la colaboración permanente, desde el inicio de la FISEM, que nos brindaron las autoridades que hoy se retiran, quiénes con entusiasmo, compromiso y dedicación dieron el apoyo necesario a todas las acciones que realizó la FISEM hasta el momento. Esperamos siempre tenerlos junto a nosotros.

Como siempre nuestro agradecimiento a los autores que colaboraron en esta edición y la invitación a todos para publicar en próximos números de UNION.

Un fuerte abrazo

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

Editorial

“Esta é, amigos, a utopia da educação. Nela se encontra o impulso para uma sociedade mais justa e mais livre. Entre todos, neste tempo de esperanças renovadas, com o esforço colectivo e uma paixão sem limites, poderemos fazer realidade os sonhos que hoje aqui e para sempre manter-nos-ão unidos”

Álvaro Marchesi.
Secretario General de la OEI.
Congreso Iberoamericano de Educación.
Metas 2021.

Estimados colegas e amigos:

Com enorme satisfação apresentámos nossa publicação no Congresso Iberoamericano de Educação, onde ao redor de 3000 docentes de todos os níveis compartilharam suas experiências e projectos, pudemos difundir nossa proposta a docentes de matemática dos países assistentes, quem mostraram um enorm interesse pelos artigos disponíveis e a possibilidade de aceder a eles gratuitamente.

Neste número, dispomos de artigos interessantes sobre incorporação de estratégias de ensino a partir de jogos, construções com diferentes materiais, viñetas e desenhos. Faz-se referência às atitudes que adoptam os futuros docentes numa interessante investigação bem como ao desenvolvimento de concorrências para a resolução de problemas. As secções fixas oferecem-nos novas sugestões para aplicar no aula que podem se adaptar a diferentes idades e contextos.

Temos duas notícias muito significativas para celebrar:

- A incorporação da Associação Mexicana de Pesquisadores do uso de tecnologia em Educação Matemática à Federação Iberoamericana de Sociedades de Educação Matemática. Damos-lhes a mais cordial Bem-vinda.
- A apresentação do Curso para a formação permanente no área das Matemáticas: Ñandutí. Proposto pelos catedráticos Luis Balbuena Castelhano e Agustín Carrillo Albornoz com o apoio da Organização de Estados Iberoamericanos para a Educação, a Ciência e a Cultura (OEI) para colaborar com a formação permanente do profesorado de Ensino Secundário de todos os países da região.

Desejamos estender uma cordial Bem-vinda e desejos de sucesso em sua funções aos novas/vos presidentas/é de Sociedades de Educação Matemática de Chile, Equador, Paraguai, Peru e Portugal. Também queremos agradecer muito especialmente a colaboração permanente, desde o início da FISEM, que nos brindaram as autoridades que hoje se retiram, quem com entusiasmo, compromisso e dedicación deram o apoio necessário a todas as acções que realizou a FISEM até o momento. Esperamos sempre os ter junto a nós.

Como sempre nosso agradecimiento aos autores que colaboraram nesta edição e o convite a todos para publicar em próximos números de UNION.

Um forte abraço

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

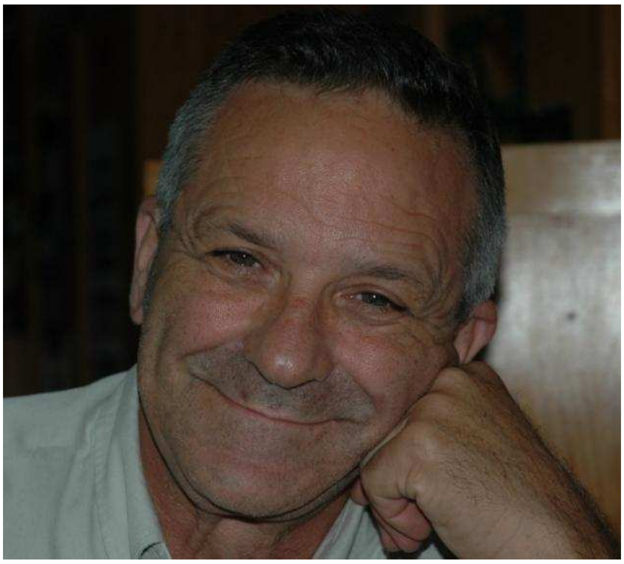
Septiembre de 2010, Número 23, páginas 7-8
ISSN: 1815-0640

Despedida de la Secretaría General de FISEM

Luis Balbuena Castellano

Estimadas amigas y estimados amigos:

Las despedidas suelen ser tristes y esta no es una excepción. El día 12 de octubre de 2010 voy a “desengancharme” formalmente de una historia que comenzó allá por 1995, en Santiago de Chile. Habíamos acudido desde España Gonzalo Sánchez Vázquez, Sixto Romero y yo a participar en un congreso del CIAEM. En una reunión de responsables de Sociedades planteé la idea de crear una Federación que nos aglutinara a todos y que nos permitiera trabajar en paralelo y cooperativamente. Por aquel entonces, había pocas Sociedades y, en algunos casos, eran tan recién nacidas que nos pareció sensato posponer la decisión hasta que esas noveles Sociedades se consolidasen en sus respectivos ámbitos y dieran a conocer sus objetivos y trabajos entre el profesorado. Pero la idea estaba lanzada y se siguió trabajando sobre ella. Preparamos un borrador de estatuto y un borrador de reglamento al que se hicieron muchas aportaciones en las varias reuniones que hicimos aprovechando encuentros internacionales y, finalmente, en el mes de julio de 2003, la utopía se convirtió en realidad. En Puerto de la Cruz (Tenerife-Islas Canarias-España) se creó formalmente la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática cuyo acróstico, FISEM, ya se nos va haciendo familiar y con significado.



Las Presidentas y Presidentes asistentes a la sesión de constitución de la FISEM tuvieron a bien elegirme como Secretario General y, desde entonces y hasta el día antes anunciado, he estado tratando de coordinar nuestro quehacer procurando que la llama encendida no se apagara. Obviamente son muchas las personas a las que estoy agradecido por haberme apoyado en esta misión que, como supondrán y siendo algo que nacía casi de la nada, no ha estado exenta de momentos delicados. Son también muchas las anécdotas y vivencias de todos estos años y como no me es posible nombrar a cuantos han estado ahí, conmigo, dando aire a esta nave, quiero hacer un agradecimiento general a todos y a todas ellas. Porque las ayudas no solo han sido de consejos o de buenas palabras sino que se ha “arrimado el hombro” en los momentos en que fue necesario, dedicando horas personales en muchos casos, para ofrecerlas a esto que es de todos. Quiero, no obstante, pedirles permiso para nombrar a cinco personas que han sido determinantes y claves en esta historia que, aunque para mí acaba pronto, espero que continúe sin interrupción: se trata de Gonzalo Sánchez Vázquez (¡Imagínense la emoción que me produjo la concesión del premio epónimo!), Doña Nelly Vázquez de Tapia, Alicia Villar Icasuriaga, Ubiratán D´Ambrosio y Miguel Ángel Riggio. Sus actitudes, sus consejos y sus alientos fueron el gran estímulo para que hiciese mi trabajo procurando aplicar el rigor más exquisito y, por tanto, para que todo esto saliese adelante. Agradecimiento, ¡cómo no! a las Sociedades argentina, uruguaya y peruana que me han distinguido generosamente concediéndome el título de socio de honor.

Pero la tristeza de la despedida, se ve amortiguada, en este caso, con la alegría de saber que voy a ser relevado por un nuevo Secretario General que se distingue por su gran valía tanto personal como profesional. Agustín Carrillo de Albornoz Torres es esa persona y espero que cuente también con el mismo apoyo de todos para seguir avanzando en la senda que también hemos trazado entre todos.

Y no quiero extenderme más aunque ganas no me falten. Pero lo dejaré para otra ocasión…

Es evidente que, aunque me voy formalmente, no lo será en la práctica porque seguiré ahí, colaborando en todo cuanto pueda para conseguir que la FISEM ayude a todo el profesorado de nuestro ámbito porque así, en definitiva, estaremos ayudando a nuestros estudiantes y a nuestros respectivos países.

Gracias, gracias, gracias

Un abrazo

Luis Balbuena Castellano

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 9-10
ISSN: 1815-0640

Presentación del nuevo Secretario General de FISEM

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Hola a todos y a todas:

Una vez leída la carta de despedida de Luis Balbuena os podéis imaginar lo difícil que es para mi redactar mi carta para presentarme como nuevo secretario de la FISEM, aunque durante este último año haya actuado como cosecretario a su sombra y al que tengo que agradecer las palabras que me ha dedicado y sobre todo el contar con su apoyo para asumir estas tareas.

Difícil por que la tarea que debo asumir es la de sustituir a Luis, que ha sido uno de los responsables de la existencia de la FISEM cuyas primeras conversaciones para su creación inició hace unos cuantos años y porque ha sido responsable de su funcionamiento desde su creación, apoyado por las distintas sociedades.

Como debo presentarme, os diré que soy profesor de matemáticas en el Instituto de Educación Secundaria “Sierra Morena” de Andújar, que se encuentra en la provincia de Jaén (Andalucía) y que desde hace algunos años desempeño el cargo de secretario general de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, por lo que al asumir este nuevo cargo tendré que ampliar mis tareas como secretario en las que espero que la experiencia en THALES me pueda ayudar.

Cuando presenté mi candidatura como cosecretario planteaba algunas líneas de actuación que quisiera recordar y que estarán marcadas por las enormes distancias entre los países pertenecientes y los costes que supone cualquier actuación de tipo presencial, por lo que harán que Internet sea imprescindible en el desarrollo de las tareas propuestas.

Como puntos de actuación planteaba entre otros la gestión de la legalización como entidad jurídica de la FISEM, algo complicado dada su internacionalidad pero necesaria para poder participar en las distintas convocatorias de ayudas necesarias para poder afrontar las distintas actividades que se realizan. Además, planteaba la necesidad de una actualización permanente de la Web para convertirla en referente para las distintas sociedades y para sus asociados, así como la colaboración con la revista Unión y con la organización del próximo CIBEM (Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, que será en Montevideo, Uruguay, en 2013).

Al asumir la secretaría general lo que puedo ofrecer es mi trabajo y colaboración en cuantas tareas consideréis que puedo ayudar, y espero contar con vuestro apoyo para intentar desarrollarlas de la mejor manera posible.

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

agustincarrillo@telefonica.net

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, página 11-12
ISSN: 1815-0640

Bienvenida a A.M.U.I.T.E.M.

La **Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en La Educación Matemática** ha solicitado su adhesión a la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática y el Presidente de la Federación, el profesor Miguel Díaz Flores, de Chile, les ha dirigido el siguiente mensaje:

Señor Juan Carlos Cortés, Presidente.

PRESENTE

Hemos recibido en esta Presidencia de FISEM, con gran agrado, la solicitud de la asociación que preside para convertirse en miembro activo de esta Federación. Han llegado a la Secretaría General los documentos que exige nuestro reglamento de régimen interior. Una vez examinados los mismos, puedo transmitirle con gran satisfacción que:

LA ASOCIACIÓN MEXICANA DE INVESTIGADORES DEL USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA ES, DESDE EL DÍA DE HOY, MIEMBRO DE PLENO DERECHO DE LA FEDERACIÓN IBEROAMERICANA DE SOCIEDADES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA - FISEM TOMANDO, POR TANTO, USTED PARTE DE LA JUNTA DE GOBIERNO DE LA MISMA.

Le ruego que trasmita a sus asociados nuestra más cordial bienvenida a esta Federación que, con su incorporación se da un gran paso adelante en cuanto a consolidación y a suma de esfuerzos para trabajar en pro de la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todo nuestro ámbito.

También comunicaré su adhesión al resto de las sociedades ya federadas.

Lo que le comunico desde Viña del Mar - Chile - a 9 de julio de 2010.

Saludos cordiales de Miguel A. Díaz F., Presidente de SOCHIEM y de la FISEM

Desde UNIÓN celebramos esta incorporación y hacemos votos para que se sigan sumando sociedades y asociaciones dedicadas a la mejora del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas de otras naciones.

A partir de este número de UNIÓN, el profesor Juan Carlos Cortés figurará en la Junta de Gobierno de la FISEM y en consecuencia, en las páginas de esta revista. le damos la más cordial bienvenida.

Está de más decir que invitamos a nuestros colegas mexicanos a que nos transmitan sus muchas experiencias e investigaciones para hacerlas llegar a los miles de profesoras y profesores que nos visitan de manera continuada.

Con afecto

Equipo Editor de UNIÓN

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Septiembre de 2010, Número 23, página 13-14
ISSN: 1815-0640

Walter Otto Beyer Kessler

Breve Reseña

Nació en Caracas, Venezuela en el año 1954. Es Licenciado en Matemáticas por la Universidad Central de Venezuela (UCV), en 1981. Cursos de Postgrado en Investigación de Operaciones (UCV) y Ciencias de la Computación (Universidad Simón Bolívar), realizados en la década de 1980. Maestría en Educación mención Enseñanza de la Matemática en el Instituto Pedagógico de Caracas-Universidad Pedagógica Experimental Libertador, obtenida en 1995. Doctor en Educación (UCV), en 2010, defendiendo la tesis "*Estudio evolutivo de la enseñanza de las matemáticas elementales en Venezuela a través de los textos escolares: 1826-1969*", con mención "Excelente".

Profesor Jubilado, con la categoría de Asociado, del Área de Matemática de la Universidad Nacional Abierta (UNA) adonde su ingreso fue por concurso de oposición en 1981.

Profesor invitado en las Maestrías en Educación mención Enseñanza de la Matemática del Instituto Pedagógico de Maracay y del Instituto Pedagógico de Caracas, dictando los cursos Didáctica de las Matemáticas, Resolución de Problemas, Metodología de la Investigación, Enseñanza por Proyectos, Modelaje Matemático e Historia de las Matemáticas. Fue profesor del curso Historia de la Matemática en la Facultad de Ciencias de la UCV

Dirección de 16 Trabajos de Grado (11 de Licenciatura y 5 de Maestría), sobre temas de Educación Matemática. Actualmente dirige dos Trabajos de Grado de Maestría.

Autor del libro "*Elementos de Didáctica de las Matemáticas*". Coautor de diversos módulos instruccionales de la Universidad Nacional Abierta; de los libros "*Tópicos en Educación Matemática*", "*Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática*" y "*Lenguaje, comunicación y significado en Educación Matemática*" y de las series de fascículos "*Matemática para Todos*", "*El Mundo de la Matemática*" y "*Matemática Maravillosa*", que circularon con el diario Últimas Noticias, editados por la Fundación Polar.

Publicación de artículos de investigación y de divulgación en diversas revistas. Colaborador del Calendario Matemático del CENAMEC durante los años 1994-2003. Fue editor de los Boletines EM y NOWARA, así como Co-director de la revista

Enseñanza de la Matemática. Miembro de diversos comités editoriales y árbitro de varias publicaciones.

Conferencista, ha dictado de cursos y talleres así como presentado ponencias y reportes de investigación en eventos nacionales e internacionales. Miembro del Comité Organizador del III CIBEM.

Fundador del Capítulo de la Región Capital de la ASOVEMAT y Presidente Nacional de esta Asociación durante el Período 2000-2004. Actualmente cronista oficial de la misma. Fundador del Grupo de Investigación y Difusión sobre Educación Matemática (GIDEM), participando como investigador activo entre 1999-2009.

Líneas de trabajo: Evolución histórica de la Educación Matemática en Venezuela, Comunicación en el Aula, Resolución de Problemas y Enseñanza por Proyectos.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Septiembre de 2010, Número 23, páginas 15-44
ISSN: 1815-0640
firma invitada

Senderos, caminos y encrucijadas de las matemáticas y la educación matemática en Venezuela

Walter Otto Beyer Kessler

Resumen

Este artículo recoge sintéticamente la evolución histórica de las Matemáticas y de la Educación Matemática en Venezuela. Partimos del conocimiento matemático que poseían las comunidades autóctonas para luego seguir los caminos seguidos en su desarrollo tanto por la matemática escolar como por la matemática académica. Este último rubro se considera referido sólo a Caracas. Finalmente, hacemos un recorrido por la evolución histórica de la Educación Matemática.

Abstract

This paper contains synthetically the historical evolution of mathematics and mathematics education in Venezuela. We begin with the mathematical knowledge possessed by aboriginal communities and then we continue the course of the development by both school mathematics and academic mathematics. This last item is only referred to Caracas. Finally, we follow the route of the historical evolution of the Mathematics Education.

Resumo

Este artigo recolhe sinteticamente a evolução histórica das Matemáticas e da Educação Matemática em Venezuela. Partimos do conhecimento matemático que possuíam as comunidades autóctonas para depois seguir os caminhos seguidos em seu desenvolvimento tanto pela matemática escolar como pela matemática acadêmica. Este último rubro considera-se referido só a Caracas. Finalmente, fazemos um percurso pela evolução histórica da Educação Matemática.

1. Introducción

Este artículo proporciona una panorámica de la evolución de las matemáticas y de su enseñanza/aprendizaje en tierras de la actual Venezuela. Se siguen aquí los pasos de la matemática en dos grandes vertientes: la escolar y la académica, partiendo del conocimiento matemático que poseían, y aún poseen, los aborígenes. Finalmente, se aborda la génesis y evolución de la Educación Matemática en el país. En razón de lo antes señalado, nos retrotraemos en el tiempo, a la época precolombina, para poder partir del conocimiento matemático propio de las etnias autóctonas. Éste ha sido establecido sobre la base de las investigaciones arqueológicas, antropológicas y etnomatemáticas realizadas en el transcurso de los años, aunque todavía se desconocen muchos aspectos importantes y su estudio actual muestra un mestizaje cultural producto del contacto e influencia de otras culturas, lo cual impide en ocasiones el poder discriminar lo propio de lo adquirido. Siguiendo el hilo histórico, se aborda la creación en la Colonia de los primeros institutos formales de enseñanza, prestando especial atención al componente matemático. Se prosigue con la evolución de la escuela bajo el régimen republicano.

Se siguen los derroteros de las iniciativas llevadas a cabo para fundar estudios superiores de matemáticas en estas tierras. Unas provenientes del sector militar; las otras del ámbito civil. Su evolución se refiere básicamente restringida a lo acontecido en Caracas y en su universidad. Sin embargo, en otras regiones del país existieron cátedras universitarias en las que se hacían estudios de matemáticas. Así, la Universidad de Carabobo, creada en Valencia en 1892, contaba con una Facultad de Ingeniería y en la Universidad de Mérida se fundó una Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas en 1932; pero también en muchos de los Colegios Nacionales (luego denominados Federales) llegaron a formarse ingenieros durante el siglo XIX. Asimismo, en Maracaibo para 1867 existió una Escuela de Ingeniería elevada a Instituto Nacional y dependiente de la Academia de Matemáticas de Caracas.

La evolución de las matemáticas escolares se sigue hasta la época actual así como el desarrollo de las matemáticas académicas, primero vinculadas estas últimas a los estudios de ingeniería y luego como cuerpo de conocimiento independiente. También se considera la formación autodidacta de algunos venezolanos ilustres y la importancia de la fundación del Instituto Pedagógico Nacional (IPN). Adicionalmente, se estudia la génesis de la Educación Matemática, considerando varias etapas de su desarrollo.

2. Las matemáticas amerindias

Encontramos que, en tierras de lo que hoy es Venezuela, las comunidades autóctonas poseían diversas maneras de contar y empleaban una variada gama de unidades de medida. Así, la etnia *Warao*, cuyo hábitat es el delta del río Orinoco, posee un sistema de numeración de base 5; mientras que los *Cuicas* (antiguos habitantes del actual Estado Trujillo) "contaban hasta la decena, con el uso de las dos manos, y de allí en múltiplos". (Urdaneta, 1997, p. 44) A modo de ilustración, en la Tabla 1, se muestran algunos de los registros lingüísticos en las lenguas *warao* y *cuica* para la denominación de algunos números:

Warao	cuica	número
Isaka	Kari	1
Manamo	Gem	2
Dijanamo	Shuent	3
Orabakaya	Pete	4
Mojabasi	Kamo	5
Mojo matana isaka	Catseunt	6
Mojo matana manamo	Maen	7
Mojo matana dijanamo	Mavipita	8
Mojo matana orabakaya	Mavishuent	9
Mojo reku	Tabis	10

Tabla 1

Sotelo (1987) y Beyer (2005) explican con bastante detalle la estructura del sistema de numeración empleado por esta etnia. En su conteo, “son importantes las siguientes palabras: *Mojo*: mano, manos; *warao*: hombre, hombres; *omu*: pie, pies.” (Beyer, 2005, p. 296). Por ejemplo, “mojo matana manamo”, que es 7, significa literalmente “dos de la otra mano”; es decir una mano, son 5, más 2 de la otra mano y “warao isaka arai mojabasi” se traduce como “un hombre más cinco”, vale decir 25.

Hay estudios realizados con diversas culturas indígenas, como el de González Ñáñez (2005) sobre los *Kurripakos*, en los cuales se asienta que en muchas de ellas el vocablo empleado para el conteo es dependiente del tipo de objetos a numerar. Así, *apa* significa uno; pero para referirse a objetos con forma de hueco o agujero se emplea *apâtji* (*apâtji irrîrri*, "un hueco"; *apâtji takjâkjeti*, "una cortada"); mientras que para los objetos delgados y cortos se usa *ápjèvi* (*ápjèvi jáikufi*, "un palito"; *ápjèvi âvi*, "una aguja”). Sánchez (2009) realiza un interesante estudio comparado de diversos sistemas de numeración presentes en las etnias indígenas venezolanas.

Otro aspecto interesante de las culturas amerindias es el relacionado con sus maneras de medir. Las medidas se caracterizan por venir sujetas a condicionantes como las necesidades de la vida diaria y del hábitat, pero también se vinculan con su cosmogonía. Para el tiempo, la aparición de las Pléyades marca el comienzo del año para muchas etnias, otras (p.e. los *Warao*) se siguen por la regularidad de las crecientes del río Orinoco. La cuenta de los meses se rige por las lunaciones y por los fenómenos significativos de su ambiente. Los *Warao* denominan “*joida á jo jebura*” a julio-agosto, que significa “meses del agua verde” y señalan por “*joida a sakana a jotana*” parte de agosto. “Joida” hace referencia a inundación, en esa época son las crecidas del Orinoco. Sánchez (2009) describe diversos tipos de mediciones que ejecutan los *Ye’kuana* para construir su vivienda típica: la churuata. Señala que “una forma de medir es usando la extensión de los brazos.” (p. 45)

Las diversas etnias muestran en sus viviendas, en la cestería, en la alfarería y en otros elementos culturales diversidad de formas y diseños. Muy resaltantes son vestigios como los petroglifos. Para Cora (1972) éstos “son reflejos de ideas, de percepciones, de imágenes fantásticas más o menos conscientemente elaboradas. [… además] mitos, leyendas, petroglifos, costumbres, están estrechamente ligados entre sí” (p. 13) y con el conocimiento matemático de sus realizadores. Por supuesto, las restantes categorías de Bishop (1999) pueden ser encontradas al estudiar la cultura de los pueblos aborígenes. Allí también están los juegos y una gran cantidad de mitos que conforman su cosmovisión. Asimismo, los aspectos vinculados con la localización tienen una presencia notoria en el registro lingüístico de muchas etnias. La Tabla 2 muestra algunas expresiones del *warao*.

Warao	Castellano
awere	cerca
yatuka	cerca pero no del todo
awerea	cercanía, en las cercanías
emo	lejos
ajaka a riboto	dirección contraria al viento
ajaka ajaya	dirección de costado al viento
ajaka eïamo	dirección a favor del viento
ayeya	dirección con el viento en el costado izquierdo
a rai sabasabá-mo	dirección contraria a las espaldas de alguien

Tabla 2

3. Senderos que conducen a estudios formales y a las matemáticas escolares

En un principio fueron los misioneros, principalmente franciscanos y dominicos, quienes improvisaron los primeros intentos de enseñanza. Ésta se llevó a cabo de una manera poco formal y como parte necesaria para la enseñanza de la religión.

Grisanti (1950) ubica en Coro, en 1560, el comienzo de la instrucción pública, centrada en la gramática castellana, la moral y los rudimentos del latín, siendo su promotor el Obispo Fray Pedro de Ágreda. Grisanti (1950) y Ruiz (1992) aclaran que el primer instituto formal de enseñanza primaria elemental apareció en Caracas un cuarto de siglo después de fundada la ciudad. Así, en 1591 Luis de Cárdenas Saavedra hizo la solicitud de su apertura y el Cabildo autorizó la creación de dicho instituto educativo en 1592, para lo cual se ordenaba la recolección de una limosna a los fines de sufragar sus gastos. Ese mismo año de 1592 también se estableció un preceptorado de gramática, autorizado por el Rey con 200 pesos anuales de renta.

Grisanti (1950) señala que "la instrucción pública en Venezuela, durante los primeros tiempos de la Colonia, carece en lo general de relieve." (p. 35) Por su lado Ruiz (1992) hace una apreciación similar indicando que la escuela de primeras letras "tardó mucho en arraigarse y tuvo una débil y accidentada existencia." (p. 11) La situación era que, para fines del siglo XVIII, en Caracas apenas existían tres escuelas mal dotadas: la Pública dependiente del Cabildo, la anexa a la Real y Pontificia Universidad y la que funcionaba en el Convento de San Francisco. Posteriormente, en los inicios del siglo XIX, es creada la escuela de pardos.

Además de la escasez de escuelas, el nivel de las pocas existentes era muy bajo. Adicionalmente el acceso a la instrucción estaba restringido a las capas dominantes de la sociedad y la mayoría no tenía consagrado este derecho. Diversas fueron las voces que criticaron la educación, muchas de ellas influidas por la Ilustración. Las más connotadas, la de Miguel José Sanz y la de Don Simón Rodríguez. Este último, en 1794, hace una fuerte crítica a la escuela de ese entonces, acompañada de una propuesta para su reforma. Decía que la escuela "no tiene la estimación que merece […] basta observar la limitación a que está reducida y la escasez con que se sostiene para conocerlo". (Rodríguez, 1794, p. 199)

Esta debilidad de la escuela es aún más marcada en lo que a la enseñanza de las matemáticas se refiere. Señala Rodríguez (1794) que "la necesidad ha obligado a tantos a suplir la falta de Escuela formal con el auxilio de un particular en estudio privado […hay] tantos que ignoran la Aritmética" (pp. 199-200). Puede afirmarse que durante un lapso prolongado, su estudio en estas tierras estuvo restringido a los rudimentos de la aritmética y al conocimiento de algunas unidades de medida.

El poco interés por ahondar en el estudio de las matemáticas se puede adjudicar en parte a que privaba en el pensamiento de ese entonces la idea de la poca necesidad de este conocimiento. Rodríguez (1794) señalaba: "Hay quien sea de parecer que los artesanos, los labradores y la gente común, tienen bastante con saber firmar; y que aunque esto ignoren, no es defecto notable: que los que han de aprender la carrera de las letras, no necesitan de la Aritmética […] aún en el presente se tiene el estudio de la Caligrafía y Aritmética por necesario a sólo los dependientes." (p. 200)

Ello es explicable por la poca importancia que estas tierras tenían para la Corona española y la jerarquía político-administrativa que les fue adjudicada, siendo un conglomerado de Provincias dependientes de diferentes Virreinatos y Audiencias, hasta su integración política y administrativa en la Capitanía General de Venezuela (1777) y con la creación de la Real Audiencia de Caracas en 1786. Además, la existencia de una economía poco desarrollada, sustentada por una tecnología rudimentaria, hacía innecesaria la presencia de una matemática con un nivel más allá de las cuatro operaciones elementales y, ocasionalmente, el uso de algunas herramientas basadas en la proporcionalidad.

Aún en los inicios del período republicano se mantuvo por un tiempo el *statu quo* educativo de la época Colonial y es sólo con una ley de 1826 que se empiezan a dar cambios. Pero éstos eran más nominales que reales ya que la naciente república quedó exhausta y arrasada por el largo conflicto bélico que culminó con la separación de España. Además, la sucesión de enfrentamientos entre diferentes caudillos y el hecho de que la financiación de la escuela pública dependiera de las Diputaciones Provinciales fueron causas fundamentales para que esta institución no floreciera y en consecuencia fuese casi inexistente la enseñanza de la matemática.

4. Un camino alternativo hacia el conocimiento matemático

Un camino alternativo para la obtención de conocimientos, en particular de matemáticas, fue el autodidactismo. Esto puede establecerse a través de la revisión de la lista de los libros de matemáticas que circularon en la época colonial y que estaban en manos de personas, muchas de ellas fuera del mundo académico.

Los acuciosos estudios realizados por diversos bibliógrafos (Dorta, 1967; Pérez Vila, 1970; Leal, 1978) hacen constar que obras de importantes matemáticos españoles llegaron a estas tierras, como la *Aritmética* de Miguel Gerónimo de Santa Cruz, la *Guía de contadores* de Montereal Piamontés, la *Aritmética* de Juan Pérez de Moya, la *Aritmética* de Andrés Puig. Asimismo circularon los libros de Tomás Vicente Tosca y los de Benito Bails. Estas obras estuvieron en manos de un público diverso, en particular de comerciantes y hacendados. Estos individuos de las clases propietarias llegaron a utilizar algunas herramientas un poco más sofisticadas (más allá de los rudimentos de la aritmética) las cuales adquirieron mediante su estudio.

También es notoria la inquietud de los intelectuales que accedieron por la vía del autodidactismo a conocimientos de geometría analítica y de cálculo, como son los casos de Andrés Bello y de José Rafael Acevedo y Acal. Encontramos que Bello, sobre el manuscrito de su oda *A la nave*, había realizado unos cálculos matemáticos que en "opinión del Dr. Francisco J. Duarte, son fórmulas de desarrollo algebraico de un problema de Geometría Analítica o de algún problema de Física, que revela un alto nivel universitario de conocimientos matemáticos." (Bello, 1952, pp. 36-37)

5. Hacia la matemática académica: ¿Caminos paralelos o encrucijada?

Una fecha importante para la matemática y la educación matemática lo constituyó el año de 1760. En dicho año el Coronel de Ingenieros Nicolás de Castro funda en Caracas una Academia de Geometría y Fortificación. Para esa época ya existían estudios superiores en Caracas, pues, en 1721 había sido creada la Real y

Pontificia Universidad, la cual se instaló en 1725. En sus inicios en la Universidad sólo se estudiaba teología, cánones, filosofía y leyes. Luego fueron agregados los estudios de medicina. Los estudios universitarios de tipo científico –como la matemática- tendrían que esperar bastante tiempo.

Además, de Castro decidió escribir textos por los cuales habría de guiarse la enseñanza en esta institución. Escribió sobre aritmética, geometría y fortificación. En la Biblioteca Nacional de Venezuela hay algunas notas manuscritas suyas sobre aritmética y geometría (Calatayud y García, 1990). Su obra sobre fortificación fue reproducida en 1950. Allí se señala que el libro fue empleado en dicha academia en 1762 y además, debajo del retrato del autor, se indica que fue “fundador de la Escuela Militar de Venezuela en el año de 1760, la más antigua del Nuevo Mundo.” (Castro, 1950, p. 1) Esta primacía de la Academia de Nicolás de Castro parece ser cierta ateniéndonos a los estudios de Vieira (1997) y de Capel (2001).

Puede considerarse esta Academia como la primera institución venezolana en proporcionar estudios técnico-científicos. Por vez primera se enseñan matemáticas superiores y desde una perspectiva académica. Es el inicio de un camino que va a conducir a la postre a la consolidación de dichos estudios en estas latitudes.

En esta misma vía se situó otro militar español: el Capitán de Artillería Manuel Centurión, quien en 1761 crea en La Guaira otra academia. Centurión planteaba que se estudiaría allí, en los inicios, la aritmética y los elementos de geometría. Una parte de los estudios tenía temas como álgebra, razones y proporciones, rudimentos de trigonometría y secciones cónicas. Continuaba después con una parte dedicada a la trigonometría, prosiguiendo con temas sobre mecánica y física con diversas aplicaciones a la ingeniería civil y militar.

Se aprecia entonces que algunos militares españoles comienzan a desbrozar el camino para el establecimiento de los estudios de matemáticas superiores. A comienzos del siglo XIX hubo otros militares quienes le dieron continuidad a las anteriores iniciativas. Así, el Coronel José Mires “fundó en Caracas, en 1808, una escuela de ingeniería militar donde se enseñaba: rudimentos de aritmética, álgebra, geometría, topografía y construcciones civiles, dibujo lineal y topográfico.” (Arcila Farías, 1961, p. 253) Por su lado, el Coronel Juan Pires y Correa funda en la ciudad de Cumaná, por esa época, otra escuela de ingeniería militar. Es de destacar que el Gran Mariscal de Ayacucho, Antonio José de Sucre, fue alumno tanto de Mires como de Pires, siendo uno de los primeros ingenieros militares de Venezuela.

Se tiene noticia de que en 1810 la Junta Suprema decretó la creación de una nueva institución de corte militar, a cuyo frente se había dispuesto colocar al militar español Francisco Jacot[1], quien había abrazado la causa independentista. Sin embargo, dadas las circunstancias socio-políticas de aquel momento, dicha institución nunca llegó a abrir sus puertas.

Sin embargo, el camino iniciado en 1760 por Nicolás de Castro no termina aquí, sino que posteriormente empalma con la creación de la Academia de Matemáticas que dirigirá el venezolano Juan Manuel Cagigal.

[1] Otros señalan al español Sebastián Andrés como director de tal instituto.

Otro camino se abre paso poco a poco, pudiéramos decir en paralelo al seguido por los militares antes citados. Ahora son personajes que no provienen del estamento militar, sino civiles quienes asumen la tarea de crear estudios matemáticos. Tenían éstos un denominador común: estaban imbuidos del pensamiento ilustrado y tenían vínculos con el sector eclesiástico.

Mención especial merece Baltasar de los Reyes Marrero quien, en 1789 cuando regentaba la cátedra de Filosofía en la Universidad, "comenzó a impartir nociones de aritmética, álgebra y geometría […] Pero bien pronto se hicieron sentir en el recinto de la Universidad de Caracas gritos de protesta por la forma tan novedosa que seguía Marrero en la enseñanza." (Leal, 1981, p. 61)

Por su lado, en 1790, Juan Agustín de la Torre, a la sazón rector de la Universidad, publica su *Discurso Económico: Amor a las letras en relación con la agricultura y el comercio* destinado a promover una cátedra de matemáticas en la Universidad de Caracas. En 1794 remite dicho discurso al Real Consulado, institución en la cual, para ese momento, se desempeñaba como asesor jurídico.

En 1797 José Antonio Felipe Borges, Rector de la Universidad, retoma el asunto ante el Real Consulado, pidiendo ayuda económica para abrir la cátedra. Como consecuencia de ello, el Síndico, en 1798 sugiere dotar a la cátedra y el Consulado aprueba sus recomendaciones. Para ello el Consulado solicitó las respectivas opiniones del Ayuntamiento y de la Universidad.

Otra iniciativa fue la del capuchino aragonés Francisco de Andújar, quien en 1798 solicita abrir una cátedra de matemáticas, licencia que le es concedida. Estableció un pensum de tres años el cual cubría aritmética, álgebra, geometría, geografía, trigonometría plana y esférica, hidráulica, náutica, logaritmos, astronomía, cónicas, dibujo, óptica y arquitectura civil. Era éste un ambicioso plan de estudios con abundantes temas de matemáticas y física el cual contaba además con múltiples aplicaciones a diferentes campos. Andújar, sin embargo, confrontó serios problemas para obtener un local en el cual impartir sus clases y, según Leal (1981), "el joven Simón Bolívar, que apenas tenía quince años de edad en ese entonces, cedió una de las habitaciones de su casa" (p. 89), comenzando allí su labor. La falta de apoyo del Consulado hizo naufragar el proyecto el cual sólo se llevó a la práctica por algunos meses. Es de acotar que el propio Libertador asistió a sus enseñanzas.

Por su parte, el Real Consulado manifestaba su interés por la creación de la cátedra, pero estaba a la espera de oír los resultados de la discusión del proyecto por parte de la Universidad y del Ayuntamiento para tomar una resolución definitiva.

6. Una encrucijada: cátedra universitaria o academia

Moría el siglo XVIII y ninguno de los dos caminos andados por los pioneros conducía a la meta deseada. No había fructificado la idea de establecer una cátedra de matemáticas; pero tampoco las academias fundadas por los militares tuvieron larga vida, aunque éstos obtuvieran mayor éxito relativo en sus intentos.

Mediado 1799, el Cabildo unánimemente resuelve que el Consulado dotara los fondos para una cátedra. Señala Leal (1981) que el Fiel Ejecutor "recomendó que actuara con prontitud y firmeza sin esperar que la Universidad patrocinara la fundación, pues se excusaría alegando 'la falta de fondos y arbitrios'." (p. 91) La Universidad, por su parte, rechazó tales acusaciones y a fines de dicho año, el Consulado señala las condiciones bajo las cuales proporcionaría dichos fondos. Este camino habría de conducir a una encrucijada. Pero, las sendas tomadas no condujeron a ninguna parte. Señala Leal (1981) que "hasta estos momentos el Consulado y la Universidad marchan en perfecta alianza; pero pronto esta armonía se quebrantará." (p. 92) Es decir, no tardaron en suscitarse las desavenencias por cuanto "el Consulado modificó sus anteriores acuerdos y en lugar de una simple cátedra sugiere la fundación de una Academia donde enseñarían las Matemáticas, la Física y la Química". (Ibid.) Más aún, dicha Academia funcionaría independiente de la Universidad y bajo la tutela del Consulado. "Ante esta pretensión del Consulado de querer erigir en forma autónoma una Academia y no una cátedra de Matemáticas, la Universidad reaccionó violentamente, pues no quería verse despojada de un proyecto que había promovido y que le correspondía por su índole científica." (Leal, 1981, p. 93)

La polémica, entablada entre el Real Consulado, que quería crear una Academia bajo su dirección, y la Universidad, que pretendía la fundación de un cátedra de matemáticas, cuyos gastos fuesen sufragados por aquél pero cuya organización y funcionamiento estuviese a cargo de ésta y no del Consulado, llegó a conocimiento del Rey, dado que ambas instituciones acudieron a su arbitrio. El destino de la querella fue que ninguna de las propuestas fructificara por cuanto el Monarca emitió una Real Orden, en 1805, señalando que no era prudente la creación de la Academia, mientras que la Universidad necesariamente debía contar con los recursos del Consulado. Ambas instituciones dejaron de ocuparse de ello.

7. Se abren dos nuevos caminos

Llegó, pues, la nueva centuria y se avecinaban las convulsiones sociales y políticas que produjeron a la postre a la separación de España. Como antes señaláramos la Junta Suprema decretó en 1810 la creación de una Academia que nunca llegó a funcionar. El largo conflicto bélico que condujo a la Independencia de Venezuela hizo postergar una vez más la creación de una cátedra o de una academia en la que se enseñase matemática. Fue necesario esperar la última visita de Simón Bolívar a su ciudad natal para que se diese un paso decisivo.

En 1827, Simón Bolívar, Presidente de la República de Colombia, sanciona los *Novísimos Estatutos de esta Universidad Central de Venezuela*, documento que recoge los elementos de una reforma radical de esa casa de estudios. Ésta había sido creada como Real y Pontificia en 1721, ahora ya no era ni Real ni Pontificia. Uno de los grandes artífices de este proceso, quien además ocupó el Rectorado de la Universidad, fue el médico José María Vargas, personaje que va a jugar un importante papel tanto en el desarrollo de la ciencia como en el de la educación en el país. En particular estimuló la creación de los estudios superiores de matemáticas.

Los *Estatutos* establecen de manera oficial la creación de los estudios matemáticos a nivel superior. En ellos se señala: "Artículo 61. Se leerán en esta Universidad dos cátedras de gramática latina […] otra de matemática, geografía y cronología" (Bolívar, 1983, s. n.) Las matemáticas formarían parte de los estudios de filosofía. Se designó para la cátedra a José Rafael Acevedo y Acal, quien la ocupó hasta 1840. Su formación matemática la obtuvo en parte en sus estudios en el Seminario Tridentino de Caracas y la profundizó de manera autodidacta, lo cual puede afirmarse con bastante seguridad.

La creación de la cátedra fue un gran paso adelante y a partir de ese momento los estudios de matemáticas serían parte integrante de la formación universitaria. Sin embargo, todavía quedaba un largo trecho que recorrer para que dichos éstos alcanzasen el nivel de la investigación científica. Esto ocurriría hacia la segunda mitad del siglo XX. No está muy claro qué se enseñaba y cuál era el nivel de dichos estudios. Al respecto expresa Leal (1981) que “las lecciones que se dictaron en esa cátedra eran poco avanzadas, pues únicamente existían las clases de aritmética, álgebra, topografía y geometría práctica.” (p. 98) Ya antes Arcila Farías (1961) había hecho similar comentario.

No hay una base documental que sustente las aseveraciones de Leal y Arcila Farías de que eran poco avanzados estos estudios. Como contra-argumento, se tiene que Acevedo ejerció como Subdirector de la Academia de Matemáticas, la cual se fundaría poco después, y mereció la plena confianza de su Director, Cagigal, para dictar cursos de nivel superior en ella. Asimismo, se convalidaban en ésta los estudios matemáticos realizados en la Universidad por los del primer bienio de la Academia. También son significativas las apreciaciones de Vargas, quien en un informe acerca de los resultados de la cátedra consideraba que los alumnos salían “bien instruidos en las materias de su asignatura.” (Arcila Farías, 1961, p. 312) Brito (2002) también discute el nivel alcanzado por los estudios matemáticos en la cátedra de Acevedo llegando a conclusiones similares a las nuestras.

Por otra parte, el regreso a su patria de Juan Manuel Cagigal fue momento propicio para que se retomase el tema de la creación de una academia. En la iniciativa nuevamente estuvo involucrado el insigne Dr. José María Vargas. Se abre pues un nuevo camino.

El Congreso designa en 1830 una comisión para estudiar la propuesta de apertura de una academia de matemática. Ésta presenta su informe el 3 de octubre de 1830 y el 14 de ese mes se autorizó la creación de la institución. La decisión se hizo efectiva al año siguiente por Decreto Ejecutivo firmado por el General José Antonio Páez y se instaló oficialmente el 14 de noviembre de 1831. Se designó a Juan Manuel Cagigal como Director y primer maestro, y a José Rafael Acevedo y Acal como segundo maestro. Ambos detentaron dichos cargos hasta 1841.

En el Decreto se señalaba: “Art. 1º Se establece en la Universidad de Caracas una Academia de matemáticas con sus aplicaciones á los trabajos civiles y á la ciencia de la guerra, en la que se dará un curso previo de educación para los alumnos militares, un curso completo para las aplicaciones á los trabajos civiles, y otro para los alumnos militares aspirantes al cuerpo de ingenieros.” (Páez, 1831) A pesar de que el Decreto señalaba a la Academia como dependiente de la Universidad, en su funcionamiento práctico todos los informes realizados por Cagigal fueron dirigidos al Ministerio de Guerra y Marina. Esto estaba asociado al hecho de que en su seno se formaban los ingenieros militares.

Era este instituto uno más moderno y de mayor nivel que la cátedra de matemáticas. Los estudios estaban conformados por tres bienios. Al finalizar el primero se obtenía el título de Agrimensor del Estado. Al terminar el segundo se alcanzaba el grado de Ingeniero Civil. Cursado el tercero se era Ingeniero Militar. La vida de la Academia fue bastante accidentada siendo limitantes para su buen funcionamiento la escasa dotación que se le asignaba así como el exceso de alumnos. Sin embargo, en 1833 egresa la primera promoción de agrimensores.

El camino seguido por la Academia habría de bifurcarse con el paso del tiempo. Ella fue la génesis de nuevas instituciones. Así, en 1860 un decreto de reforma de ésta conduce a la creación del Colegio de Ingenieros, cuerpo al cual estarían adscritos todos los ingenieros del país y que se instala en 1861. La aplicación del Decreto quedó en manos del Ministerio de Guerra y Marina. Es de destacar que el Colegio tendría entre sus atribuciones el fomento de las matemáticas y de las ciencias naturales en Venezuela, así como la supervisión de la Academia. En consecuencia la esta última perdía gran parte de su autonomía.

En posteriores reformas la Academia desaparece totalmente como institución independiente. Así, mediante un decreto de 1872 los estudios de ésta son trasladados a la Universidad Central, creándose dentro de ella –en 1874- la Facultad de Ciencias Exactas, en la cual seguirían formándose tanto los ingenieros civiles como los militares. Sin embargo, en 1877 otro decreto restituye la Academia. Por último ésta termina siendo absorbida por la Universidad como Facultad de Ciencias Exactas. También se creó en 1888 un observatorio astronómico al cual pasaron buena parte de los libros e instrumental de la antigua Academia completándose así su disolución, iniciada años antes.

El papel jugado por la Academia fue muy relevante para el desarrollo de las ciencias exactas en el país, no sólo formando individuos altamente capacitados en el campo de la ingeniería y de la arquitectura, quienes eran los que tenían el mayor nivel de conocimiento matemático; sino porque también muchos de los egresados de este instituto fungieron de profesores en los distintos niveles educativos. También un buen número de ellos escribió obras didácticas y muchos participaron como evaluadores de obras matemáticas -sugeridas como libros de texto- las cuales les eran remitidas por la Dirección General de Instrucción Pública.

Finalmente, en 1890, fue creada la Escuela Militar para la formación de oficiales consumándose así la separación definitiva entre los estudios civiles y los militares, separación que en opinión de Zawisza (1980) se había iniciado con el referido Decreto de 1860 de reforma de la Academia.

En conclusión, puede decirse que la Academia de Matemáticas fue la simiente que dio origen a los estudios científicos de nivel universitario, a la formación de ingenieros civiles y militares, así como a la formación de la oficialidad. Como se ha visto, cada uno de estos ramos tomó con el paso del tiempo su propio derrotero.

8. Por el sendero de las matemáticas escolares: 1826-1870

Hay que volver atrás en el tiempo para poder recorrer el camino que siguió la enseñanza elemental, aquella que en ese entonces se llamaba de primeras letras.

Una vez separada de España, Venezuela, la nueva nación independiente, tenía ante sí un sinfín de problemas por los cuales preocuparse, entre ellos el educativo.

En el inicio de la naciente república, dadas las circunstancias políticas y económicas reinantes, pocos fueron los cambios realizados en el ámbito de la educación. Hubo que esperar a que unificada con Nueva Granada y bajo la denominación de República de Colombia se promulgase, en 1821, la primera ley referida a la instrucción. No obstante, en líneas generales, esta ley de 1821 era bastante escueta y en poco orientaba el hecho educativo. Así, además de diversos aspectos genéricos establecidos en un conjunto de apenas 17 artículos, sólo son destacables el ordenar la uniformidad del método de enseñanza y proponer el establecimiento de escuelas normales siguiendo el método de Lancaster.

Cinco años más tarde surge una nueva legislación, esta vez una ley mucho más amplia con su respectivo reglamento. En ella se retoma el aspecto de la uniformidad de la enseñanza y se crea un organismo rector: la Dirección General de Instrucción Pública. La enseñanza se guiaría por el sistema mutuo de Bell y Lancaster y el temario correspondiente a matemáticas lo formaban *las cuatro reglas de la aritmética para los números enteros, decimales y denominados*. Esta ley rigió la enseñanza elemental prácticamente hasta 1870, por cuanto el Código de Instrucción Pública de 1843 se dedicó fundamentalmente a regimentar la educación secundaria y la superior.

Basándose en lo planteado en la Ley de 1826, en 1838, el gobierno venezolano decide establecer la Dirección General de Instrucción Pública como órgano competente para conocer de buena parte de los asuntos educativos. En ella ocuparon papel relevante el ingeniero y matemático *Juan Manuel Cagigal* y el médico *José María Vargas*. A pesar del arduo trabajo de sus integrantes, las limitaciones en sus atribuciones y la escasez de recursos disponibles hicieron que este organismo no pudiese solventar diversos problemas ingentes de la educación Venezolana. Por otro lado, su desaparición en 1854 y luego la cruenta Guerra Federal (1859-1863) contribuyeron a ahondar el estancamiento de la educación venezolana de esa época.

Volviendo a 1826, en ese año se produce un acontecimiento de gran importancia para la enseñanza de las matemáticas. Se imprimió en Caracas una reedición de la *Aritmética* de Lucas María Romero y Serrano. Esta obra configuró la primera de su género editada en el país y dio pie a la creación de una bibliografía nacional de obras didácticas de matemáticas. El hecho de que no hubiese habido una obra previa de su tipo impresa en tierras venezolanas fue planteado por Brito (2002) y estudiado en profundidad por Beyer (2009a).

El libro en cuestión está presentado siguiendo el modelo catequístico. Estas obras expuestas en forma de catecismos predominaron durante largo tiempo, hasta bien entrado el siglo XX. Beyer (2009b) estudia los libros de aritmética que bajo tal modalidad fueron usados en la escuela venezolana y la estrecha relación entre este tipo de obras y el método de enseñanza mutua, oficialmente acogido.

9. El *Decreto sobre Instrucción Pública, Gratuita y Obligatoria* de 1870: El inicio de un nuevo camino

El año de 1870 marca de manera indeleble la educación venezolana con un Decreto que emitiera el gobierno de Guzmán Blanco. Por medio de este instrumento legal por vez primera Venezuela hace una normativa propia para reglamentar su educación primaria. Se rompe con el esquema que hasta ese entonces había imperado en la escuela. El Decreto disponía, en su Artículo 2º, que debiera enseñarse en "la instrucción obligatoria […] que la Ley exige a todos los venezolanos de ambos sexos, y que los Poderes Públicos están en el deber de dar gratuita y preferentemente […] la aritmética Práctica, el Sistema Métrico". (Guzmán Blanco, 1870, p. 118)

La incorporación del Sistema Métrico Decimal obedeció en gran parte al hecho de que Guzmán Blanco proyectó una modernización del país así como al desarrollo de las fuerzas productivas y, adicionalmente, la instalación en territorio venezolano de un buen número de empresas foráneas lo hacían necesario. Así lo demuestran los estudios de González Deluca (1991) y Flores (1995). Además hay que agregar que Venezuela había adoptado oficialmente dicho sistema de medidas mediante una ley promulgada en 1857.

Adicionalmente, siguiendo las influencias del positivismo (principalmente las ideas de Spencer) así como los planteamientos educativos de Pestalozzi es adoptada la enseñanza objetiva como método pedagógico.

En esta nueva época se impulsa grandemente la producción de obras escolares por parte de autores nacionales y en las investigaciones realizadas por Beyer (2006, 2009a) se describe y analiza con detalle el desarrollo de dicho proceso.

Otro hecho resaltante de esta época lo constituyó la creación de las primeras escuelas normales, la apertura de nuevas escuelas primarias y que por primera vez el Estado asumiese las directrices y la financiación de las escuelas. Esto implicaba un cambio radical con la situación precedente en la cual "las rentas públicas destinadas a la educación, nunca cubrieron las abrumadoras necesidades de las escuelas primarias, y las Diputaciones Provinciales, a cuyo cargo estaba el buen funcionamiento de las mismas, no prestaron atención al fomento de la instrucción ni a la consecución de las rentas para su mantenimiento." (Lemmo, 1976, p. 15)

También en 1870, y como consecuencia del citado Decreto, se instaló la Dirección Nacional de Instrucción Pública. Asimismo, en 1871 se abrió en Caracas una escuela primaria modelo, con carácter experimental, en la cual se impulsaron las nuevas concepciones educativas. Una novedad lo constituyó el que en ese plantel se estableció un detallado plan pedagógico el cual discriminaba tanto las asignaturas a ser estudiadas como los respectivos horarios de clase. En lo que a matemáticas se refiere, allí se enseñaba aritmética, geometría y el sistema métrico decimal. En aritmética la instrucción versaba sobre las cuatro operaciones con números enteros y decimales; así como las proporciones, todo ello con aplicaciones. Por su parte, la geometría se veía a un nivel muy elemental y era de un carácter esencialmente práctico.

Como complemento a la reforma emprendida salió a la luz un órgano de prensa de carácter pedagógico, *El Abecé*, mediante el cual se promovía la difusión de las nuevas ideas educativas, pero éste también tenía como finalidad suplir la ausencia de material didáctico apropiado y cónsono con el modelo pedagógico que se quería implantar. Sin embargo, de este periódico, de circulación quincenal, apenas salieron once números entre 1871 y 1872. En él pueden encontrarse como apoyo a la enseñanza de las matemáticas materiales para el aprendizaje de los números. Una decisión trascendental fue la de elevar al rango ministerial las instancias encargadas de la política educativa. Es así que en 1881 se decreta la creación del Ministerio de Instrucción Pública.

No obstante, y a pesar del esfuerzo realizado, a fines de la centuria la situación educativa del país dejaba mucho que desear. Los diversos conflictos de orden político, entre otras causas, atentaban contra el progreso educativo. En lo concerniente a la educación matemática que se impartía en la escuela la situación no era mejor.

10. Los estudios de matemáticas superiores en el último cuarto del siglo XIX: caminos diversos

Disuelta la Academia de Matemáticas, como ya se ha dicho, los estudios superiores de esta ciencia pasaron totalmente a la Universidad. Seguían siendo parte de los planes de formación de los ingenieros, aunque éstos y las actividades del Colegio de Ingenieros también se orientaron hacia la realización de trabajos e investigaciones relacionadas con las ciencias naturales. En particular la astronomía ocupó un papel relevante como área de estudio.

Para 1874, en la Facultad de Ciencias Filosóficas, se enseñaba aritmética, álgebra, geometría y trigonometría. Es de acotar aquí que "la Facultad de Ciencias Filosóficas se convirtió durante más de veinte años (1874-1897), en un curso obligatorio para los estudiantes que iban a ingresar en la Facultad de Ciencias Exactas." (Leal, 1981, p. 261) Entre los textos que en ella se emplearon estaban las obras de Lacroix y de Legendre. Posteriormente, en 1897 es promulgado un nuevo Código de Instrucción Pública en el cual el componente matemático que se dictaba en la Facultad de Ciencias Filosóficas es sustituido por asignaturas de tipo literario y materias vinculadas con las ciencias naturales. Por su parte, para 1874 los cursos de geometría analítica y cálculo (diferencial e integral) eran dictados en la Facultad de Ciencias Exactas.

En 1883 la estructura universitaria fue reducida a cuatro facultades, siendo la de Filosofía la encargada de la formación de ingenieros y en ésta se ubicaban los estudios de matemáticas superiores. Al respecto señala Leal (1981) que "los alumnos que cursaban todos los siete años de Filosofía, recibían el título de Ingeniero Civil, previa presentación de diploma de Agrimensor." (p. 170) Los tres primeros años conducían a la obtención del título de Bachiller, el cual era indispensable para matricularse en las restantes facultades.

La Universidad para ese entonces se veía sacudida por una renovación académica producto de la introducción de las ideas positivistas.

Aquí es de hacer notar que para este momento la Universidad había dejado de formar ingenieros militares. La ingeniería civil y la militar habían separado sus caminos.

Asimismo, es de destacar, que para 1883 es creada dentro de la Universidad una cátedra de Pedagogía destinada a la formación de maestros para las escuelas elementales.

Posteriormente, en 1893 es creada la Escuela de Ingeniería la cual adquiere carácter independiente a partir de 1895. Dentro de ella se formaban ingenieros y allí estaban ubicados los estudios de matemáticas superiores como parte de la formación de dichos profesionales.

El Código de Instrucción Pública de 1897 señala la Facultad de Ciencias Exactas como una de las seis que integran a la Universidad. En ella se cursaban, entre otras, las asignaturas de Álgebra Superior, Geometría Analítica y Descriptiva y Cálculo Infinitesimal. Paralelamente, y como instituto especial, seguía funcionando la Escuela de Ingeniería, en cuyo plan de estudios aparecían estas mismas materias de matemáticas superiores. Dicha Escuela estaba bajo la tutela del Colegio de Ingenieros.

Para fines de 1899 la Facultad de Ciencias Exactas es una de las cinco que conforman la estructura de la Universidad Central de Venezuela, por cuanto la sexta facultad (la de Farmacia), establecida en el Código de Instrucción Pública de 1897, en la práctica no llegó a establecerse. La Facultad de Ciencias Exactas seguía siendo el centro de formación en el cual se estudiaban las matemáticas académicas en la Universidad Central de Venezuela y los profesionales de la ingeniería eran quienes manejaban este saber científico. Para el momento no existía aún en Venezuela la matemática como profesión independiente.

A la postre, iniciado el siglo XX, en 1904 para ser más precisos, el Código de Instrucción Pública promulgado ese año hizo depender la Escuela de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas quitándole la autonomía de la cual gozaba. Al siguiente año, un nuevo Código de Instrucción Pública establece que los estudios de la Facultad de Ciencias Exactas son los de la Escuela de Ingeniería adscrita a ella.

Así, los estudios de matemáticas superiores estaban supeditados a los de ingeniería y eran los profesionales de esta área quienes fungían de matemáticos. Su labor era esencialmente la de la aplicación de las ciencias exactas a la resolución de problemas de agrimensura, arquitectura, ingeniería, física y astronomía.

11. Las matemáticas escolares en el siglo XX

Al entrar la nueva centuria se mantenían las deficiencias de la escuela elemental ahondadas por el poco interés que mostraba el régimen autocrático imperante en darle educación al ciudadano común. Puede hablarse de un franco retroceso palpable en la baja tasa de escolaridad y por la desaparición en la práctica de las escuelas normales.

Abad y otros (1984) indican, refiriéndose a los años que corren entre 1888 y 1935, que “la tónica general del período fue de un progresivo deterioro de los índices cuantitativos del sistema.” (p. 28) Hubo una disminución en la asignación de recursos al sector educativo y “al final del período, la formación docente estaba cubierta por tres normales” (op. cit., p. 29), una de ellas de carácter privado.

Hubo que esperar a que comenzara la segunda década del nuevo siglo para que se empezaran a tomar algunas medidas que reorientaran la escuela elemental. Sin embargo, muchas iniciativas se referían más a cambios en el ordenamiento legal, los cuales no repercutirían en una mejora real y efectiva en la praxis educativa.

En opinión de Márquez Rodríguez (1964), la educación elemental para 1936 podría definirse por "*su carácter elitesco, y su inutilidad práctica*." (p. 106) En semejantes términos se expresa Fermín (1989) quien asevera de manera contundente que "de 1899 a 1936 la educación venezolana permaneció en la más absoluta indiferencia. Desde la creación de la República ese fue el peor momento histórico de la educación. Fueron años de barbarie, de oscurantismo, de negación de la libertad, de casi total ignorancia." (p. 50)

Sin embargo, es de señalar algunas medidas de trascendencia tomadas durante el largo período dictatorial que vivió Venezuela y que culminó con la muerte del General Juan Vicente Gómez en 1935.

Uno de los pasos más importantes dados en ese entonces fue el establecimiento, en 1911, de los primeros programas nacionales para la enseñanza primaria, seguidos años después por los correspondientes al nivel secundario. Además, la escuela elemental ahora estaba discriminada por grados y sus estudios tenían una duración total de seis años. La estructura curricular era concéntrica. El Código de Instrucción Pública de 1912 recoge los elementos de la reforma llevada a cabo por el Ministro José Gil Fortoul.

Para Rodríguez (1988) se inicia aquí una etapa en la historia de la educación que abarca los años 1911-1936 y que denomina *La Enseñanza Científica para las Elites*.

Beyer (2009a), siguiendo a Rodríguez (1988), también llama a esta época *La Enseñanza Científica para las Elites* y la caracteriza señalando que "continúan influyendo las ideas del positivismo y de la enseñanza objetiva. Asimismo, aparecen las primeras manifestaciones de la Escuela Nueva y otras ideas didácticas influyentes provienen de la pedagogía alemana. Sin embargo, puede afirmarse que priva el eclecticismo" (p. 741) en el orden pedagógico.

De esta crisis general, por supuesto, no escapaba la educación matemática en sus diferentes vertientes.

Un nuevo período en el campo educativo se abre camino a partir de 1936. Una vez fallecido Juan Vicente Gómez, en 1935, se suscitan cambios políticos bastante notorios en todos los ámbitos y la educación no sería la excepción. Así, además de crearse un plantel específico para formar profesores de secundaria y para la educación normalista, el Instituto Pedagógico Nacional (IPN), las ideas de la Escuela Nueva tomaron auge. También se producen en 1936 dos cambios curriculares y llegan a tierras venezolanas educadores de otras latitudes, especialmente chilenos.

Esta nueva dinámica de la educación venezolana va a representar avances tanto cuantitativos como cualitativos, impactando de hecho en la educación matemática en todos sus niveles. Además, ahora, aparte de los ingenieros entraban en escena otros profesionales, los egresados del IPN en la especialidad de matemáticas, quienes poseían también una formación de orden superior en esta área disciplinar.

Los programas y las obras didácticas elaboradas para el nivel primario reflejaron abiertamente las nuevas tendencias educativas. Además, a la par de una mejora sustancial en las tasas de escolaridad y de prosecución, es posible palpar aquí una notoria mejora de corte cualitativo, en particular en matemáticas, con respecto a épocas anteriores.

En este período, el cual se extiende hasta 1969, son varios los instrumentos jurídicos que rigen al sistema educativo. Sin embargo, en 1955 se promulgó una nueva ley de educación que perduró hasta 1980 y de manera similar los programas para la escuela primaria aprobados en 1944 permanecieron vigentes hasta 1969; es decir, un cuarto de siglo de vigencia en ambos casos. Puede apreciarse entonces que durante un prolongado período se mantuvo el *statu quo* en el campo educativo.

Posteriormente, afincada en una concepción educativa regida por el conductismo, a partir de 1969 tuvo su entrada la Matemática Moderna. Esta visión de la matemática fue incorporada en el marco de una reforma completa del sistema educativo en sus niveles primario y secundario, la cual incluyó también la sustitución de las enseñanzas normalista y técnica por menciones del bachillerato en estas especialidades.

Prácticamente durante una década estuvo vigente esta orientación en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, aunque cabe afirmar que las críticas no se hicieron esperar y casi desde los inicios de su implantación hubo voces discordantes, tanto con respecto a la política educativa en general como con la referida a la educación matemática en particular.

Estas nuevas ideas educativas, promovidas en gran medida a través de las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática, entraron a Venezuela en parte debido al hecho de que a estas Conferencias asistieron delegados venezolanos quienes, ante la problemática de la educación matemática nacional, creyeron ver en dicha orientación una salida a la problemática vigente.

Ante el evidente fracaso de la reforma emprendida en 1969, en especial en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, se planteó nuevamente en 1980 una reforma global del sistema educativo, cambiando la ley que la regía e instituyendo, a partir de ese momento, la escuela básica de nueve años, dividida ésta en tres etapas de tres años cada una. El título de bachiller (en ciencias o en humanidades) se obtenía luego de cursar dos años de educación secundaria.

En la actualidad está en proceso otra reforma de todo el sistema educativo. Sin embargo, el balance que puede efectuarse no es nada halagüeño por cuanto existe un marcado déficit de profesores de matemáticas para el nivel secundario, la formación de éstos y de los docentes de primaria no es la deseable, hay deficiencias notorias en la estructura curricular y el rendimiento de los alumnos es bajo, siendo además su nivel de conocimientos matemáticos bastante pobre, por sólo citar algunos de los problemas más acuciantes que se confrontan.

12. Las matemáticas superiores. En 1936 se abre un nuevo camino: el Instituto Pedagógico Nacional (IPN)

En 1936, como ya ha se ha mencionado con anterioridad, se abre otro tipo de estudios superiores los cuales por su importancia y su influencia en el quehacer educativo merecen ser tratados con más detalle. Se trata de los que conducen a la formación de profesores especializados por disciplinas para la educación secundaria y normal en el Instituto Pedagógico Nacional (IPN), en donde se estableció una especialidad para formar el profesorado de matemáticas.

En los primeros tiempos esta novísima institución pasó por diversas crisis y reformas y posteriormente sufrió varios cambios de nombre, adquiriendo con el paso de los años el rango de estudios universitarios. Durante mucho tiempo fue un ente dependiente del Ministerio encargado de los asuntos educativos.

Hasta 1959 el IPN fue el único instituto de su tipo en Venezuela. Actualmente es una del conjunto de instituciones similares que fueron absorbidos posteriormente por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, fundada en 1983.

Del IPN surgieron ideas renovadoras para la educación y sus primeros egresados obtuvieron sus respectivos títulos en 1942, a pesar de que algunos hubiesen culminado con anterioridad sus estudios, pero aspectos de índole legal hicieron postergar su graduación. La influencia del IPN se multiplicó con la presencia de sus egresados en otras instituciones y por el hecho de que un buen número de ellos participó en actividades renovadoras como la elaboración de nuevos programas y algunos también se dedicaron a escribir obras didácticas. Entre los primeros, y muy destacados en el campo de la educación matemática, estuvieron Boris Bossio Vivas y Raimundo Chela.

El IPN tuvo una notoria influencia a nivel institucional y asimismo sus egresados quienes, a título personal, participaron en todo lo referente al acontecer educativo de los años subsiguientes a su creación. Así, el IPN y sus egresados jugaron un papel de primerísima importancia en los cambios curriculares, en la formación de docentes, en la elaboración de políticas educativas así como en la realización de diversos estudios y diagnósticos sobre la situación de las escuelas y de los liceos del país. Con relación al desarrollo de la educación matemática en Venezuela su intervención fue determinante, muy especialmente por su relación con las CIAEM y la implantación de la Matemática Moderna en Venezuela.

Razones de espacio impiden destacar a muchos de los personajes vinculados al IPN los cuales contribuyeron de manera decisiva en el mejoramiento de la educación matemática venezolana. En razón de ello nos detendremos un poco sólo en dos de ellos.

Emblemático es el caso de Bossio Vivas, quien produjo una prolífica obra cuyas características e importancia fueron investigadas por Bolívar (2005) y, Beyer y Bolívar (2008). Estos estudios condujeron, entre otras cosas, a determinar, por una parte, la trascendencia de Bossio Vivas como autor de textos para los niveles primario, secundario y normal; y, por otra parte, el ser este pedagogo un difusor relevante de las ideas educativas de la Escuela Nueva.

Por lo que respecta a Chela, fue éste el primer venezolano en doctorarse en matemáticas y fue además un incansable impulsor para la creación de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela (UCV), dentro de la cual ejerció la docencia y la investigación dejando profundas huellas. Asimismo, este insigne matemático y educador participó en innumerables actividades tendentes al mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles.

De Bossio Vivas y de Chela puede decirse que están entre los primeros en reflexionar acerca de la problemática de la enseñanza/aprendizaje de su disciplina. Publican diversos escritos sobre la temática e intervienen activamente en favor de producir cambios significativos en los aspectos didácticos de las matemáticas. En su destacada labor es menester señalar que ambos actuaron como docentes en el propio IPN y orientaron e inspiraron a generaciones enteras de nuevos profesores.

Desde el IPN también se promovieron las primeras investigaciones referidas al campo de la Didáctica de las Matemáticas y *en 1974 se crean allí los estudios de postgrado en Educación Matemática, a nivel de maestría, los primeros de su tipo en toda América Latina*.

13. El camino definitivo de las matemáticas académicas en el siglo XX

Después de seguir diversos derroteros, y sufriendo varios cambios de denominación en la primera mitad del siglo XX, finalmente, en 1953 los estudios de ingeniería civil en la UCV quedan ubicados dentro de una Facultad de Ingeniería y se crea, separándose de ella una Facultad de Arquitectura y Urbanismo. Sin embargo, los de índole científica permanecieron dentro de esta Facultad de Ingeniería, adscritos a la Escuela de Ciencias. El paso decisivo se produce en 1958 cuando estos últimos se separan de la Facultad de Ingeniería, creándose una Facultad de Ciencias en la UCV con una Escuela de Física y Matemáticas. Un interesante libro escrito por Orellana Chacín (1980) recoge los hechos más resaltantes en torno a las matemáticas en los veinte años posteriores a la creación de la Facultad de Ciencias de la UCV.

La nueva Facultad rindió sus frutos bien pronto teniendo a sus dos primeros egresados con el título de Licenciados en Matemáticas en 1962: Mauricio Orellana Chacín y Jesús Salvador González[2]. Estos dos matemáticos tuvieron una importante participación en todo el acontecer tanto de las matemáticas como disciplina como de la educación matemática.

Después se crearon más facultades o dependencias similares en otras universidades: en 1962, en la Universidad de Oriente; en 1967, en la Universidad de Los Andes; en 1969, en la Universidad Simón Bolívar; en 1976, en La Universidad del Zulia; y posteriormente, en la Universidad Nacional Abierta y en la Universidad de Carabobo. Por otra parte, en la década de 1970 se abrieron los primeros postgrados en matemáticas, el primero de ellos en la Universidad de Carabobo en 1970 la cual curiosamente, para la época, carecía de estudios de pregrado en matemáticas.

Adicionalmente, avanzados los años 1970 la Facultad de Ciencias de la UCV estableció un convenio con la Facultad de Humanidades y Educación, de la misma universidad, para formar docentes para la enseñanza secundaria. De allí han egresado un buen número de profesores que además de su aporte dictando clases en secundaria han realizado, para poder licenciarse, un Trabajo de Grado, que en algunas oportunidades ha sido una buena contribución al área disciplinar de la EM.

[2] Fallecido el 6 de febrero de 2008.

Puede afirmarse que en estos momentos existe en Venezuela una comunidad de matemáticos profesionales sólidamente establecida, con diversas universidades ofreciendo licenciaturas en el área así como postgrados en los cuales se alcanzan los títulos de magíster y de doctor. Realizan reuniones científicas, poseen un boletín y se organizan alrededor de la Asociación Matemática Venezolana.

Algunos matemáticos han realizado una significativa labor produciendo textos escolares o participando en las olimpíadas matemáticas. Pero, es de lamentar que – a veces- la comunidad de matemáticos profesionales no asuma a plenitud su papel de aportar significativamente al campo de la EM, generándose con ello cierto aislamiento entre la comunidad de matemáticos y la de educadores matemáticos.

14. La comunidad de educadores matemáticos y su andar

Es difícil ubicar el momento y el lugar precisos que han dado génesis a la incipiente comunidad de educadores matemáticos venezolanos. Ya en anteriores apartados de este ensayo se han proporcionado algunos elementos y se han citado personajes cuya obra y actividad contribuyó al desarrollo de la EM en Venezuela.

A la par del desarrollo de las instituciones y de las normas legales que fueron instituyendo las matemáticas escolares y las académicas, muchos de los protagonistas de este proceso, preocupados por la problemática de la educación matemática, fueron generando discusiones y acciones en pro del mejoramiento de la enseñanza/aprendizaje de la disciplina y algunos de ellos dejaron constancia de ello en sus escritos y por su participación en medidas tendentes a este propósito.

14. 1. Los primeros pasos

Los antecedentes más lejanos tal vez se pudiesen ubicar en el último cuarto del siglo XIX con la conformación de las primeras escuelas normales en 1876 y con los primeros individuos formados específicamente en conocimientos de índole pedagógica, como son los casos de Mariano Blanco y Julio Castro. Estos personajes fueron enviados becados por el gobierno del General Antonio Guzmán Blanco a la Escuela Normal de Trenton (NJ, EE. UU.), en 1874. Como consecuencia de ello, Blanco y Castro escribieron una importante obra sobre su quehacer, publicada inicialmente en 1877 (Blanco y Castro, 2008), la cual fue empleada durante mucho tiempo como texto de pedagogía en las Escuelas Normales venezolanas.

Asimismo, es de destacar que tanto Blanco como Castro realizaron una encomiable labor de formación de docentes en las Escuelas Normales del país, llegando a ocupar incluso el cargo de director. Por su parte, Castro escribió varios libros de texto, algunos de ellos de matemáticas, así como obras de pedagogía.

14. 2. La época *Romántico-Intuitiva*

Sin embargo, un punto de partida más nítido lo constituye el año de 1936. Esta primera época, que pudiera denominarse *Romántico-Intuitiva* se extiende hasta los años 1973-74. Ya hemos hecho alusión en este escrito a diversos acontecimientos acaecidos en 1936, lo suficientemente importantes como para marcar un punto de inflexión. Asimismo, se han mencionado ya ciertas instituciones creadas durante este lapso, como el IPN y la Facultad de Ciencias de la UCV, así como a algunos personajes de destacada actuación como Bossio Vivas y Chela.

En este intervalo temporal acontecen otros hechos importantes. Se llevó a cabo en 1961 el *Primer Seminario para la Enseñanza de la Física y las Matemáticas*, primer evento de su tipo desarrollado en el país y del que se tenga noticia cierta (Beyer, 2001). Se envían delegaciones a las CIAEM. Surgen los primeros postgrados (maestrías): el de Matemáticas en la Universidad de Carabobo, en 1970; el de Enseñanza de la Matemática, en el Instituto Pedagógico, en 1974 (primero de América Latina). En 1974 está documentada la primera tesis doctoral en EM elaborada por un venezolano: Freddy Mulino Betancourt.

Hemos podido documentar como primera publicación periódica con orientación hacia la EM la revista *Matemática Elemental*, la cual sale a la luz en 1967 en el Instituto Pedagógico Experimental de Barquisimeto. Esta revista, como otras de su tipo, tuvo corta vida: apenas tres números. A pesar de su breve existencia, ésta significó un importante paso adelante para ese entonces.

Otra institución, fundada en 1973 y dependiente del Ministerio de Educación, la cual va a jugar un rol muy importante es el *Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC)*. Allí se planificarán y ejecutarán un conjunto de actividades que van a incidir de manera significativa en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas en los períodos subsiguientes.

En esta época las personas que participan en todo lo relativo al mejoramiento de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas provienen fundamentalmente del Instituto Pedagógico de Caracas y de la Facultad de Ciencias de la UCV. Sus conocimientos acerca de la Didáctica de las Matemáticas no son profundos y actúan más bien siguiendo la intuición y adoptando los modelos de los países desarrollados, como fue el caso de la implementación de la Matemática Moderna.

14. 3. El período de los pioneros

En el siguiente período, que podemos extender hasta 1980 y que denominaremos de los *Pioneros*, ya existen en el país algunas personas con formación específica en el campo de la Didáctica de las Matemáticas. Asimismo, está la presencia de un instituto específico, el CENAMEC, para ocuparse de una manera más rigurosa del estudio de la problemática de la enseñanza/aprendizaje de las ciencias y de la propuesta de soluciones, en particular para las matemáticas.

A través del CENAMEC se desarrollará un vasto plan de capacitación de docentes en servicio; se impulsan a partir de 1976 las Olimpiadas Matemáticas; se ensayan nuevos métodos educativos; se realizan estudios diagnósticos y se hacen programas y materiales didácticos experimentales.

En 1975 Caracas es la sede de la *IV CIAEM*. Allí se presentan los trabajos y reflexiones de quienes venían actuando en el campo de la EM. Como consecuencias inmediatas, se sintió la necesidad de que existiesen organismos que agrupasen a los educadores matemáticos y de tener publicaciones específicas.

En 1977 se aprueba el Convenio entre las Facultades de Ciencias y de Humanidades y Educación, al cual hemos aludido anteriormente, para formar profesores de secundaria, teniendo su primer egresado en la especialidad de matemáticas en 1980. También en 1977 es creada una maestría en matemáticas en la Universidad de Los Andes en la cual se le abre cauce a los estudios de EM. En esta iniciativa tuvo actuación destacada el profesor José Vívenes.

En 1977 la comunidad matemática organiza en la ciudad de Mérida el *I Congreso Venezolano de Matemáticas*, al cual asisten los educadores matemáticos por no poseer un evento propio de esta naturaleza. En 1979, en Cumaná, se desarrolla el II Congreso con amplia asistencia de educadores matemáticos. Para el año siguiente se realiza el III Congreso y se crea allí la *Sociedad Venezolana de Matemáticas*, siendo su primer Presidente José Vívenes. La Sociedad agruparía tanto a los matemáticos profesionales como a los educadores matemáticos. Sin embargo tal simbiosis no funcionó y la Sociedad tuvo una existencia efímera.

Venezuela comienza a relacionarse de manera más profunda con la comunidad internacional de EM con la asistencia en 1976 de Jesús González al *ICME-3* y luego la de José Vívenes al *ICME-4*, en 1980, quienes traen ideas renovadoras y emprenden una ardua labor para llevarlas a la práctica.

En lo relacionado con publicaciones sobre temas de EM cabe señalar el persistente sentimiento existente entre los educadores matemáticos de su imperiosa necesidad. Sin embargo, “dada la fuerte vinculación que aún guardaba la Educación Matemática con la comunidad de matemáticos las publicaciones disponibles reflejaban esta situación: estaban más abocadas a los temas de matemáticas que a los aspectos educativos de esta disciplina.” (Beyer, 2008, p. 11)

En 1973 había comenzado a circular en la Universidad de Oriente, la *Revista de Matemáticas y Física*[3], que recogía temas de ambas disciplinas así como de su didáctica. Su existencia abarcó el período 1973-1981, editándose 27 números de la misma. Por 1975 se inicia la publicación de la revista *Aleph sub Cero* en la Universidad Nacional Experimental del Táchira. Tiempo después, en 1979, en el Pedagógico de la ciudad de Barquisimeto se retoma la idea de una publicación y surge la *Revista de Matemática*. Tampoco fue prolongada la aparición de este nuevo órgano de difusión. En este mismo año hubo el proyecto de una revista sobre EM que sería editada por el CENAMEC, sin embargo el mismo no se llevó a la práctica.

Para finales de esta época regresan al país, con sus respectivos doctorados en Didáctica de las Matemáticas, José Vívenes y Emilio Medina (en 1979) y Lelis Páez (en 1980). También los educadores matemáticos en esta etapa histórica empiezan a organizar sus propios eventos. Dos importantes seminarios se realizaron en Barquisimeto, que era un polo de referencia obligado en el acontecer de la EM.

Como puede observarse, en este lapso que corre hasta 1980 se fueron estableciendo las bases para la creación de una comunidad de educadores matemáticos, aunque faltó tener en los inicios del período mayor claridad y ambición de metas. Sin embargo, faltaba aún mucho camino por andar.

14. 4. El período de expansión lenta y de definición

En la etapa anterior, la amplia labor llevada a cabo por el CENAMEC y la participación de los Pedagógicos existentes, conjuntamente con la colaboración de un buen número de individualidades, condujo a la creación de los nuevos

[3] Uno de sus promotores fue José Vívenes.

programas, de material didáctico diverso y a la formación del profesorado que llevaría a la práctica la implantación de la reforma educativa planteada en la nueva Ley Orgánica de Educación, aprobada en 1980, mediante la cual se establecía la Escuela Básica de nueve años, divididos en tres etapas.

Partiendo de las experiencias acumuladas, los educadores matemáticos van en la búsqueda de su independencia como comunidad. Desean desprenderse de cierta tutela que la comunidad matemática aún ejercía sobre ellos y buscar sus propios derroteros. Se comienza a tener conciencia de que el quehacer del educador matemático es distinto al del investigador matemático; es decir, le toca afrontar problemas particulares insertos en un campo de estudio distinto. Es ésta la impronta de este período que se extiende desde 1980 hasta 1992.

Esta nueva concepción de la EM en nuestro medio se va forjando poco a poco, en parte por la experiencia adquirida por aquellos que saliendo de nuestras fronteras cursaron estudios de postgrado específicos dentro del campo de la Didáctica de las Matemáticas. Además, estuvo la importante contribución de algunos destacados educadores matemáticos que visitaron nuestro país, como son los casos de Luis Santaló, Claude Gaulin y Ubiratán D'Ambrosio, quienes dejaron honda huella aquí.

A través del CENAMEC y de la creciente actividad desarrollada en la UCV por la profesora Lelis Páez, a la sazón coordinadora del convenio de cooperación existente entre las Facultades de Ciencias y la de Humanidades y Educación, se fueron organizando diversas iniciativas de capital importancia. Entre éstas cabe destacar los siete Encuentros realizados en el CENAMEC que sirvieron de punto de convergencia entre docentes de aula y aquellos que realizaban la incipiente labor de investigación en Didáctica de las Matemáticas; y cinco sesiones del *Seminario Nacional Permanente de Educación Matemática*, motorizadas por la profesora Lelis Páez. La mayor parte de estas actividades se llevaron a cabo en Caracas.

Hacia finales de este período se inicia un interesante proceso de regionalización de los eventos. Comienzan a realizarse jornadas y encuentros de educadores matemáticos en el interior del país. Barquisimeto, ciudad que mediante su Instituto Pedagógico había estado vinculada a muchas iniciativas anteriores, es la sede en 1989 de una de estas primeras actividades y en cuya organización ayudó decididamente el CENAMEC. A ésta le siguieron otras similares en Maturín, Barinas y Valencia. En Beyer (2001) se hace un recuento detallado de estos eventos así como de otros, que no eran promovidos específicamente por los educadores matemáticos pero tenían dentro de su temario aspectos vinculados con la problemática propia de la EM, los cuales serían otros tantos puntos de encuentro para quienes se preocupaban por la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas y podían allí presentar sus estudios y reflexiones.

Algunos coterráneos seguían asistiendo a eventos internacionales como las CIAEM e incluso fueron designados como miembros del Comité Interamericano. A pesar de los avances en ciertas áreas también hay estancamiento en otras y aún retrocesos. Así, la Maestría del IPC cayó en un estado de postración el cual se extendió hasta 1987 cuando hubo una redefinición de ésta. Mas su reformulación obedeció más a las necesidades de unificación curricular de los diversos postgrados que ofrecían los distintos Institutos Pedagógicos, con miras su incorporación a la naciente Universidad Pedagógica Experimental Libertador, que a la evolución del área. Es decir, el rediseño curricular no estuvo marcado ni por las necesidades intrínsecas de la educación ni por el desarrollo que a nivel internacional había tenido la EM.

Sin embargo, podemos señalar como avance la creación de otros postgrados con nivel de maestría en el área de la EM: en la Universidad de Carabobo, en su Facultad de Ingeniería en 1980; en Barquisimeto, en el Instituto Pedagógico en 1983; en La Universidad del Zulia, en 1987; en la Universidad de Oriente, en 1988; en Maracay, en el Instituto Pedagógico en 1988; en la Universidad de Carabobo, en su Facultad de Ciencias de la Educación en 1990 y en la Universidad Nacional Experimental del Táchira, en 1992.

Puede apreciarse, pues, un gran crecimiento en la oferta de postgrado. Pero, a pesar del alto número de egresados las repercusiones, en la mejora de la educación matemática, no han sido las esperadas y de estos postgraduados son muy pocos los que han continuado estudios doctorales y escasa la investigación realizada por ellos. Vale decir que los avances cualitativos no se compadecen con la expansión cuantitativa alcanzada durante este período. Parcialmente ello fue debido al hecho de que el interés en la realización de un postgrado estaba más vinculado al ascenso dentro de la carrera profesional y a las correspondientes mejoras de sueldo que ello conllevaba. Adicionalmente, muchos de los alumnos de las maestrías ya eran profesores de educación superior escasamente vinculados con los niveles inferiores del sistema educativo y ocasionalmente el alcanzar un título de postgrado les permitía a otros migrar de su cargo en educación secundaria a uno en el nivel universitario. Otro factor que pudiera mencionarse es el de la orientación de los postgrados, a veces marcadamente sesgada hacia las matemáticas, muy escolarizados y con escaso componente relacionado con la EM.

Entre las limitaciones del momento está la ausencia de un órgano periódico dedicado exclusivamente a la EM. Este vacío lo llenan parcialmente las publicaciones no específicas dedicadas al amplio campo de la educación como la *Revista de Pedagogía* y *Paradigma*, fundadas en 1971 y 1980, respectivamente.

14. 5. El período de despegue

El año de 1992 marca un hito en la historia de la EM venezolana. El potencial acumulado fructifica y las semillas sembradas en la etapa anterior germinan y nace la *Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT)* en el marco de la celebración del *II Encuentro de Profesores de Matemáticas de las Regiones Nor-Oriental, Insular y Guayana*. Asimismo, hace su aparición un órgano oficial de la naciente Asociación: la revista *Enseñanza de la Matemática*, primera publicación periódica venezolana dedicada íntegramente a la Educación Matemática.

Estos acontecimientos son claro indicio de un salto cualitativo y le dan un efectivo impulso a las actividades vinculadas con la EM en el país. Marcan además la definitiva separación y autonomía de la EM la cual va deslindando su camino de aquel que han seguido las matemáticas académicas.

La ASOVEMAT funda y activa capítulos en distintos lugares del país, los que con diferentes grados de organización y de influencia van generando un conjunto de actividades, apoyándose en entidades existentes como el CENAMEC o en las instituciones formadoras de docentes y postgrados. Sin embargo, el funcionamiento de dichos capítulos era y es muy disímil. Algunos han mantenido la continuidad y otros han tenido intermitentemente períodos de actividad y de inactividad. También están aquellos que han desaparecido y a la par se han creado otros nuevos.

Por otro lado, se crean nuevos postgrados tanto a nivel de especialización como de maestría y muy recientemente la ardua labor del colega Fredy González ha hecho que la UPEL decidiera la apertura de un doctorado específico en Educación Matemática. Sin embargo, como antecedente de éste hay que destacar que en algunos de los doctorados previamente existentes (en Educación y en Ciencias Humanas) ya se habían establecido líneas de investigación en el área y había graduados cuyas tesis versaban sobre tópicos propios de la Educación Matemática.

Asimismo, un buen número de venezolanos ha cursado estudios doctorales allende las fronteras nacionales, en España, México, Cuba, Alemania, Francia, EE. UU., habiendo en consecuencia en la actualidad una buena cantidad de personas con este nivel académico, muchos de los cuales son investigadores activos.

A raíz de esta evolución ha aumentado considerablemente la presencia de venezolanos en eventos internacionales en los cuales han participado éstos como ponentes y conferencistas, así como también han ocupado cargos en algunas organizaciones internacionales vinculadas con la Educación Matemática. También algunos venezolanos participan frecuentemente como árbitros de revistas internacionales y como miembros de los jurados evaluadores de tesis doctorales fuera de las fronteras nacionales. Todo ello hace ver la integración de nuestros investigadores al quehacer de la comunidad internacional.

Asimismo, Venezuela en este período fue sede de dos importantes eventos internacionales: el *III CIBEM* (Caracas, 1998) y la *RELME-21* (Maracaibo, 2007), ambas con activa participación de la ASOVEMAT en su realización. A nivel nacional la ASOVEMAT ha organizado seis ediciones del *Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM)*. El primero de ellos se efectuó en Maturín en el año 1994 y el sexto en Maracay en el año 2007. El venidero octubre ha de realizarse la séptima edición de este Congreso. Además se le ha dado continuidad a los eventos de carácter regional y adicionalmente han surgido seminarios, cursos y reuniones promovidos por entidades independientes de la ASOVEMAT. En años recientes han ido creándose varios grupos y núcleos de investigación en distintas universidades así como también se han diversificado las líneas de trabajo y las problemáticas tratadas por los investigadores.

En este período puede observarse que continúa el crecimiento cuantitativo de las actividades vinculadas con la Educación Matemático. En lo que concierne al orden cualitativo también es notoria una fuerte solidificación de algunos aspectos importantes, aunque es de apreciar que aún existe un gran desfase entre ambos factores.

15. Educación Matemática venezolana: *Quo Vadis*?

En este último apartado esbozaremos ciertas apreciaciones muy personales acerca de la evolución pasada y el porvenir de la Educación Matemática en

Venezuela. Algunas de ellas las hemos discutido con colegas y otras están plasmadas en diversos documentos y actas, surgiendo de allí la existencia de disímiles apreciaciones al respecto.

Aquí es menester acotar que el desarrollo histórico sintetizado en los apartados anteriores de este artículo es un elemento referencial que permite determinar fortalezas y debilidades, sobre cuya base es factible indicar rumbos a seguir.

Esencialmente, en lo antes expuesto en este artículo, hemos destacado más bien las fortalezas y los elementos más sólidos de la incipiente comunidad de educadores matemáticos venezolanos. No obstante también es importante prestar atención a las debilidades a los fines de afianzar los logros, superar los escollos y no equivocar el camino a seguir para poder avanzar con pie seguro hacia la consecución de una mejor educación matemática para Venezuela.

Al evidente avance y fortalecimiento en el país de la investigación en nuestro campo de conocimiento hay que oponerle, como una palpable debilidad, el que los resultados de la misma generalmente quedan en las actas de congresos y en los artículos de revistas, pero poco han servido para la mejora efectiva de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas en las aulas de nuestros planteles. Esto puede atribuirse a diversos factores como la debilidad organizativa que aún tiene nuestra ASOVEMAT, la cual se manifiesta en la inestabilidad de algunos de sus capítulos y en la intermitencia en la periodicidad de la revista *Enseñanza de la Matemática*; en que a esta Asociación le falta afianzar vínculos orgánicos con los docentes de aula y en el no acceso a las instancias de decisión política. Varios de estos puntos son señalados en el *Informe de Gestión* correspondiente al período (2004-2007) (ASOVEMAT, 2007). Esta situación esencialmente persiste en la actualidad.

Por otro lado, el impacto de los postgrados nacionales ha sido sumamente limitado. Incluso es bastante discutible la formación que en muchos de ellos se les proporciona a los cursantes la cual, en oportunidades, no los empapa de las investigaciones relevantes en las áreas curriculares que allí se consideran. Tomando como punto referencial el señalamiento de Luengo (1998) quien, sobre la Educación Matemática, expresa que “la formación de investigadores en esta área de conocimiento es esencial y debe hacerse desde los intereses de investigación específicos del campo, con la metodología y los paradigmas propios de la Didáctica de la Matemática, centrándose en los problemas del campo y sobre la base de los marcos teóricos ya consolidados.” (p. 25) Pero, muchas de las Maestrías, o por lo menos buena parte de los cursos que allí se dictan, se apartan ostensiblemente del camino señalado por Luengo.

En resumidas cuentas hay un notorio divorcio entre la producción intelectual de muchos colegas y el impacto en los cambios curriculares, en la praxis de aula y en los materiales didácticos que son empleados en nuestras instituciones educativas.

Tal vez en épocas anteriores hubiese sido posible afianzar más la comunidad por cuanto existieron circunstancias favorables a ello, pero no hubo la suficiente claridad para percatarse de esto y ciertos avances fueron más bien tímidos.

El adónde va la Educación Matemática venezolana y los posibles escenarios que se pudiesen presentar son temas que habíamos avanzado ya en la Conferencia Inaugural del VI COVEM, en el 2007. En ese momento indicábamos, basándonos en comparaciones realizadas con el desarrollo de otras comunidades, como la española o la brasileña, que en el inicio del *Período de los pioneros*, hubo la oportunidad real para el surgimiento en Venezuela de un núcleo fuerte de EM y de afianzar sólidamente las bases de esta área de conocimiento, en instituciones como el IPC. Juzgamos que aquellos que para el momento tenían una relativamente alta formación en el área, conociendo otros medios académicos –los de los países en los cuales realizaron estudios de postgrado- a su llegada del exterior les faltó tener mayor perspectiva y ambición de propósitos, privando en ellos un cierto sentimiento de timidez y de cortedad de metas en relación con las posibilidades reales de aquel tiempo. En consecuencia, se aprecia que esto fue hasta cierto punto "una oportunidad perdida", ya que no se apuntalaron ciertos logros alcanzados, no se emprendieron algunas importantes tareas que hubiesen fructificado bajo aquellas circunstancias y lo más grave fue que no se creó escuela, una generación de relevo, privando tal vez más el esfuerzo y las metas individuales por encima de lo colectivo.

Consideramos que el desarrollo en Venezuela de la EM debería sustentarse en cinco polos: las *organizaciones*, las *publicaciones*, los *eventos*, los *postgrados* y la *investigación*. Estos cinco componentes deberían funcionar de manera sistémica con una dinámica y una interacción que haga que se fortalezcan mutuamente. Apreciamos que se han dado algunos pasos equivocados por no percibir esto.

Aprendiendo de las lecciones del pasado, sopesando el momento actual y con la mirada puesta en el futuro podríamos vislumbrar diversos escenarios posibles, dependiendo de los caminos que se sigan de aquí en adelante.

Un primer escenario que podríamos concebir se establecería de persistir y aún acrecentarse muchas de las debilidades presentes en el desarrollo de nuestra comunidad. Este escenario pesimista sería posible de mantenerse o incrementarse la brecha entre los avances cuantitativos y los cualitativos; de prevalecer el *statu quo* de muchas de las Maestrías; de no formarse una generación de relevo; de mantenerse la ausencia de un órgano regular de difusión propio de la comunidad; de privilegiarse con exageración el trabajo individual de los investigadores; de no existir una interrelación orgánica entre los diferentes grupos de investigación existentes; de no atenderse debidamente las necesidades del ámbito escolar en los aspectos de currículum, formación docente y elaboración de materiales didácticos acordes con las necesidades de nuestra educación. Sería "una segunda oportunidad perdida".

Un segundo escenario, sería aquel en el cual algunos parámetros de nuestro quehacer mejoren más que todo en términos cuantitativos, dando la impresión de un avance y consolidación, aunque no haya en realidad mayores adelantos en el orden cualitativo o éstos sólo se den en parcelas muy localizadas y persistan las debilidades en algunos puntos críticos. Sería el mantenimiento del *statu quo*: crecimiento con falta de consolidación. Se entiende aquí por avances cualitativos no sólo aquellos que pueden apreciarse en términos de los productos de investigación o en la calidad de los postgrados, sino aquellos mediante los cuales los educadores matemáticos, más allá de ser reconocidos dentro del ámbito académico nacional o internacional, formen una verdadera red nacional de investigadores e incidan, de manera determinante, en la realidad educativa del país. Sería una especie de “estado estacionario”.

Es posible plantear un tercer escenario, positivo y alentador, que podríamos denominar de “desarrollo autónomo”, entendiendo por “autónomo” el apoyarnos lo más posible en las fuerzas internas para que ello revierta en consolidación, así como también debe haber un alto grado de originalidad en todos los ámbitos de nuestro quehacer. Este escenario, hacia el cual debería orientarse nuestro andar, pasaría, en primer lugar, por plantearnos un redimensionamiento de la ASOVEMAT, estableciendo dentro de ella una sólida y activa presencia de docentes de los niveles primario y secundario de nuestra educación, con una agenda de actividades agresiva que considere en todas sus vertientes la grave problemática educativa que confronta nuestra sociedad.

En el campo de la investigación urge establecer una estructura organizativa que vaya más allá de la que poseen las universidades e institutos similares. Es decir, hay que construir una sólida articulación entre los grupos y núcleos de investigación existentes para conformar una verdadera red. Actualmente están presentes las bases para tal desarrollo puesto que existe la masa crítica suficiente tanto de investigadores como de resultados producto de la labor de éstos. Asimismo, existen algunos mecanismos institucionales que pudiesen ser usados a tal fin.

Fortalecer la ASOVEMAT y establecer una fuerte red investigación debieran tener un estrecho nexo con la redefinición de buena parte de las maestrías existentes y servir para el afianzamiento de las nacientes experiencias en estudios a nivel doctoral. La excesiva escolaridad en algunos postgrados debería ser sustituida por un mayor énfasis en los aspectos vinculados con la investigación.

Sobre los eventos cabría decir que estos son abundantes, y han proliferado tal vez con exageración, consumiendo gran parte del esfuerzo organizativo. Creemos que aquellos promovidos por la ASOVEMAT, para que cumplan a cabalidad sus fines, deberían estar supeditados a una política y organización nacionales, teniendo la adecuada relación con los otros componentes señalados.

Finalmente en el rubro de las publicaciones ha habido un franco retroceso en las vinculadas con la ASOVEMAT. Hay que revertir esta situación estableciendo una política de la Asociación que garantice la salida regular de la revista *Enseñanza de la Matemática*. Asimismo, debe reactivarse la edición de los boletines. Pero, más allá de la ASOVEMAT ha habido un avance notable en términos de publicaciones. Diversos grupos de investigación han producido un buen número de libros, algunos de los cuales han circulado fuera de las fronteras del país. También las revistas nacionales que abordan temas sobre educación y pedagogía reflejan en sus páginas los productos de nuestra comunidad. Sin embargo, hay una tendencia de algunos investigadores de preferir las publicaciones foráneas a las nacionales. Se requiere por lo tanto reequilibrar esto para fortalecer las publicaciones nacionales.

Puntos álgidos e importantes son los referidos a la intervención urgente y necesaria de nuestra comunidad en el diseño e implementación de nuevas políticas en torno a la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, particularmente en asuntos como currículo, formación de docentes y elaboración de materiales didácticos.

Se ha indicado una posible senda a seguir, un norte deseable, aunque estamos conscientes como señala el poeta que "*Caminante, son tus huellas/el camino, y nada más;/caminante, no hay camino,/se hace camino al andar.*"

Bibliografía

Abad, L. y otros (1984). *Organización y consolidación del sistema educativo (1830-1935). La educación en Venezuela 2*. Centro de Reflexión y Planificación Educativa, Caracas.

Arcila Farías, E. (1961). *Historia de la ingeniería en Venezuela. Tomo* I. Colegio de Ingenieros de Venezuela, Caracas.

ASOVEMAT (2007). Informe de Gestión: período noviembre 2004-octubre 2007. Mimeo, Maracay.

De Barral, B. (1979). *Diccionario castellano-warao*. Litografía Melin, Caracas.

Bello, A. (1952). *Obras completas. Tomo I. Poesías*. Ediciones del Ministerio de Educación, Caracas.

Beber, W. (2001). Pasado, presente y futuro de la Educación Matemática venezolana. Parte II. *Enseñanza de la Matemática* 10(2), 3-20.

Beber, W. (2005). Matemáticas, desarrollo humano, cultura y naturaleza. En: D. Mora (Coord.) *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática*, 277-313. Editorial Campo Iris, La Paz.

Beber, W. (2006). Algunos libros de Aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1912. *Revista de Pedagogía* 27(78), 71-110.

Beber, W. (2008). La Educación Matemática venezolana: Un esbozo de su evolución. Mimeo, Caracas.

Beber, W. (2009a). *Estudio evolutivo de la enseñanza de las matemáticas elementales en Venezuela a través de los textos escolares: 1826-1969*. Tesis Doctoral (no publicada). Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Beber, W. (2009b). Catecismos y matemáticas: confluencia de corrientes de pensamiento. *Paradigma* 30(1), 117-150.

Beber, W. y Bolívar, W. (2008). Análisis de textos primarios: la obra de Boris Bossio Vivas. *Enseñanza de la Matemática* 17(1), 3-29.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Ediciones Paidós Ibérica, España.

Blanco, M. y Castro, J. (2008) *Métodos de enseñanza*. Fundación Editorial El Perro y La Rana, Caracas.

Bolívar, S. (1983) *Los estatutos republicanos de la Universidad Central de Venezuela 1827*. Edición facsímil del Rectorado de la Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Bolívar, W. (2005) *Boris Bossio Vivas: Su obra, aportes e impacto*. Trabajo Especial de Grado (no publicado). Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Brito. O. (2002). *Los libros de matemáticas en la Venezuela del siglo XIX*. Trabajo Especial de Grado (no publicado). Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Calatayud, F. y García, L. (1990). *Juan Manuel Cagigal, precursor de los estudios matemáticos modernos en Venezuela*. Trabajo de Grado (no publicado). Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Capel, H. (2001). Los ingenieros militares y su actuación en Canarias. *Scripta Vetera*. [En línea]. Recuperado el 12 de febrero de 2003, de http://www.ub.es/geocrit/sv-80.htm.

De Castro, N. (1950). *Fortificación regular*. Imprenta Nacional, Caracas.

De Cora, M. M. (1972): *Kuai-Mare. Mitos aborígenes de Venezuela*. Monte Ávila Editores, Caracas.

Dorta, E. (1967). *Materiales para la historia de la cultura en Venezuela (1523-1828)*. Fundación John Boulton, Caracas-Madrid.

Fermín, M. (1989): *Momentos históricos de la educación venezolana*. Editorial Romor, Caracas.

Flores, C. (1995). *Los comerciantes financistas y sus relaciones con el gobierno guzmancista 1870-1888*. Biblioteca de la Academia Nacional de la Historia, Caracas.

González Peluca, M. (1991). *Negocios y política en tiempos de Guzmán Blanco*. Universidad Central de Venezuela, Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico, Caracas.

González Náñez; O. (2005). *Equisangulo. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 1(2). [En línea]. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/20292/1/articulo5.htm.

Grisanti, A. (1950): *Resumen histórico de la instrucción pública en Venezuela*. Editorial Iqueima, Bogotá.

Guzmán Blanco, A. (1870). Decreto sobre Instrucción Pública, Gratuita y Obligatoria. En: A. Lemmo (1976) *La educación en Venezuela en 1870*, 118-132. Universidad Central de Venezuela, Ediciones de la Facultad de Humanidades y Educación, Caracas.

Leal, I. (1978). *Libros y bibliotecas en Venezuela colonial (1633-1767)*. *(2 Tomos)*. Biblioteca de la Academia Nacional de la Historia, Caracas.

Leal, I. (1981). *Historia de la UCV*. Universidad Central de Venezuela, Ediciones del Rectorado de la UCV, Caracas.

Lemmo, A. (1976). *La educación en Venezuela en 1870*. Universidad Central de Venezuela, Ediciones de la Facultad de Humanidades y Educación, Caracas.

Luengo, R. (1998). "Una panorámica sobre la Educación Matemática en España." Conferencia. *III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Caracas. Mimeo.

Márquez Rodríguez, A. (1964). *Doctrina y proceso de la educación en Venezuela*. Autor, Caracas.

Orellana, M. (1980). *Dos décadas de matemática en Venezuela*. Universidad Nacional Abierta, Caracas.

Páez, J. (1831). Decreto estableciendo una Academia de Matemáticas." *Gaceta de Caracas*, Nº 46 (miércoles 23 de noviembre).

Pérez Vila, M. (1970). *Los libros en la Colonia y en la Independencia*. Imprenta Nacional, Caracas.

Rodríguez, N. (1988). *Criterios para el análisis del diseño curricular*. *Cuadernos de Educación,* Nº 134. Cooperativa Laboratorio Educativo, Caracas.

Rodríguez, S. (1794). "Reflexiones sobre el estado actual de la Escuela." En: S. Rodríguez (2001). *Obras Completas, Tomo I*, 195-222. Ediciones de la Presidencia de la República, Caracas.

Ruíz, G. A. (1992). *La escuela de primeras letras de Caracas. Documentación: 1767-1810*. Universidad Central de Venezuela, Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico, Caracas.

Sánchez, D. (2009). El Sistema de Numeración y algunas de sus aplicaciones entre los aborígenes de Venezuela. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática* 2(1), 43-68. [En línea]. Recuperado el 3 de mayo de 2008, de http://www.etnomatematica.org/v2-n1-febrero2009/sanchez.pdf.

Sotelo, M. (1987). *Historia de los números*. Editorial Algoritmo, Caracas.

Urdaneta, R. (1997). *Diccionario general de los indios Cuicas*. Sociedad de Amigos de la Biblioteca Pública Central “Mario Briceño Iragorry”, Trujillo.

Vieira, B. (1997). Contribuição dos militares portugueses para a introdução da cultura matemática no Brasil. En: S. Nobre (ed.) *Anais Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e Seminário Nacional de História da Matemática*. Águas de São Pedro, São Paulo, Brasil.

Zawisza, L. (1980). *La Academia de Matemáticas de Caracas*. Ministerio de la Defensa, Caracas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 45-58
ISSN: 1815-0640

Aspectos históricos, sociales y educativos de la orientación espacial

Margherita Gonzato; Juan D. Godino

Resumen

En este trabajo realizamos una breve síntesis histórica de la cartografía como campo de la actividad humana en la que se ponen en juego habilidades de orientación espacial. Así mismo, referimos la presencia de estas habilidades en diversas profesiones y el uso de nuevos recursos tecnológicos que facilitan la orientación espacial. Esta información es útil para abordar la enseñanza del tema incluido en las directrices curriculares de la escuela primaria y secundaria

Abstract

In this paper we propose a brief historical overview of cartography as a field of human activity which uses abilities of spatial orientation. Moreover, we write about the presence of these skills in various professions and the use of new technological resources that facilitate spatial orientation. This information is useful to the teaching of this subject which is present on the curriculum of primary and secondary school

Resumo

Neste trabalho realizamos uma breve síntese histórica da cartografía como campo da actividade humana na que se põem em jogo habilidades de orientação espacial. Assim mesmo, referimos a presença destas habilidades em diversas profissões e o uso de novos recursos tecnológicos que facilitam a orientação espacial. Esta informação é útil para abordar o ensino do tema incluído nas directrizes curriculares da escola primaria e secundária..

1. Introducción

El desarrollo de habilidades de orientación espacial es un objetivo incluido en las directrices curriculares. Así, en el Decreto de Enseñanzas Mínimas del MEC para la educación primaria (6-11 años), área de matemáticas (MEC, 2006a), se indica que en el primer ciclo se comienza con la descripción de posiciones y movimientos, en relación a uno mismo y a otros puntos de referencia, la interpretación y descripción verbal (uso de vocabulario geométrico) de croquis de itinerarios y su elaboración.

Los niños utilizan los conceptos de izquierda-derecha, delante-detrás, arriba-abajo, cerca-lejos y próximo-lejano. Se pretende evaluar las capacidades de orientación y representación espacial, teniendo en cuenta tanto el lenguaje utilizado en la descripción como la representación en el plano de objetos y situaciones. Progresivamente se pasa a los contenidos del segundo ciclo en los que se introducen los planos y las maquetas, como representaciones elementales de espacios conocidos, la descripción de las posiciones y los movimientos en un contexto topográfico. En el tercer ciclo se pretende que los alumnos interpreten una representación espacial realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares, se introduce el sistema de coordenadas cartesianas y la representación elemental del espacio con escalas y gráficas sencillas.

Por lo que se refiere a la enseñanza de la orientación espacial en secundaria obligatoria (12-16 años) observamos que por ejemplo el currículo español (MEC, 2006b) trata distintos aspectos del tema en diferentes materias: geografía (lectura e interpretación de mapas), matemática (coordenadas cartesianas y geográficas), educación física (recorridos de orientación), educación visual (uso de la perspectiva) y tecnologías (vistas y perspectivas de objetos y sistemas técnicos).

En este trabajo incluimos información que puede servir para justificar la inclusión del tema de la orientación espacial desde los primeros niveles educativos. Nos referimos al interés práctico de la elaboración e interpretación de mapas (cartografía) y a la aplicación de las habilidades de orientación espacial en distintas actividades profesionales y de la vida cotidiana. Esta información puede ser útil al profesor como fuente de motivación y sugerencia de posibles actividades para los alumnos. Comenzamos indicando algunas distinciones entre habilidades de orientación y visualización espacial.

2. Habilidades relacionadas con la orientación y la visualización espacial

Para resolver una tarea de Orientación Espacial, frecuentemente se requieren capacidades tanto de Orientación Espacial como de Visualización Espacial, y muchas veces están tan entrelazadas que puede ser difícil distinguirlas. Para McGee (1979) y Tartre (1990) una tarea es considerada de *Visualización Espacial* si requiere que toda la representación o una de sus partes sea movida o alterada mentalmente. La visualización espacial involucra “la habilidad de manipular, rotar, girar o invertir mentalmente un objeto presentado como estimulo visual, de dos o tres dimensiones” (McGee, 1979, p.893).

Como habilidades relacionadas a la visualización espacial, McGee propone:

1. la habilidad de imaginar la rotación de un objeto, el desarrollo de un sólido, los cambios relativos de posición de un objeto en el espacio
2. la habilidad de visualizar una configuración en la que hay movimiento entre sus partes
3. la habilidad de comprender movimientos imaginarios en tres dimensiones, y manipular objetos en la imaginación
4. la habilidad de manipular o transformar la imagen de un modelo mental a otra disposición.

Por el contrario, para estos autores una tarea de *Orientación Espacial* no requiere el movimiento mental de un objeto, sino el cambio o el desplazamiento de la perspectiva percibida por el observador. McGee (1979) afirma que la Orientación Espacial “involucra la compresión de la disposición de elementos con un patrón de estímulo visual, la aptitud de no confundirse cuando se cambia la orientación de una configuración espacial, y la habilidad de determinar la orientación espacial con respecto al propio cuerpo" (p. 897). Como habilidades relacionadas a la Orientación Espacial, este autor propone:

- determinar las relaciones entre diferentes objetos en el espacio
- reconocer la identidad de un objeto cuando es observado desde diferentes ángulos, o cuando el objeto es movido
- considerar relaciones espaciales donde la orientación del cuerpo del observador es esencial
- percibir modelos espaciales y compararlos entre sí
- no confundirse cuando se varían las orientaciones con las cuales un objeto espacial es representado
- percibir modelos espaciales o mantener la orientación con respecto a objetos en el espacio.

De acuerdo con las definiciones de McGee, Diezmann y Lowrie (2009) ilustran un ejemplo de tarea de Visualización Espacial y un ejemplo de tarea de Orientación Espacial (fig. 1).

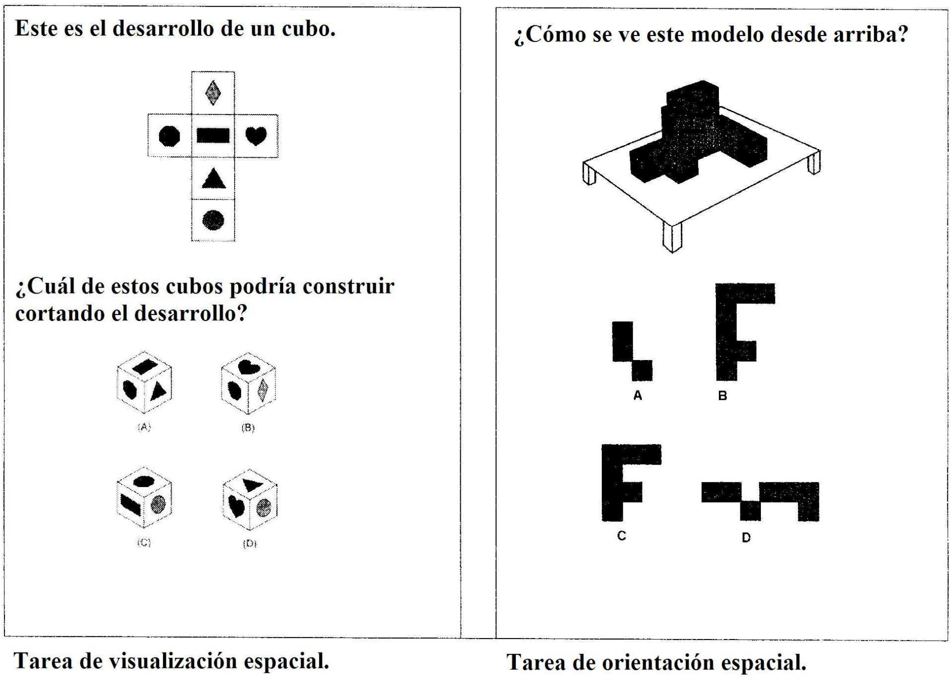


Fig. 1: Tareas de visualización y orientación espacial.

Las situaciones de orientación espacial comprenden diferentes tipos de tareas que podemos clasificar en dos grandes clases: la primera comprende las tareas que involucran la habilidad de orientarse en el espacio (interpretar y elaborar mapas de diferentes tipos de espacios, orientar mapas por medio de elementos naturales o con la brújula,…) y la segunda categoría incluye las tareas de orientación del propio cuerpo y de los objetos; se trata de actividades que requieren la capacidad de cambiar la perspectiva respecto de un objeto, o de una composición de objetos (por ejemplo la tarea de orientación espacial de la fig. 1).

Observamos que en cualquier tarea de Orientación Espacial están también involucradas habilidades de Visualización Espacial. Por ejemplo, en la lectura de un mapa que no sea orientado con respecto al espacio que representa, puede ocurrir (si no se puede mover el mapa) de tener que mover mentalmente la representación para que sea orientada con respecto a la realidad.

En este trabajo nos centraremos mayormente en la habilidad de Orientación Espacial, aunque muchas veces dicha habilidad está asociada a habilidades de Visualización Espacial.

3. Breve historia de la cartografía

Para poder comprender los procedimientos y las dificultades que están relacionadas con situaciones de Orientación Espacial describimos brevemente cómo y porqué nació la necesidad de representar el espacio a lo largo de los siglos y los procesos con los cuales la cartografía se convirtió en una disciplina científica[1].

Es opinión común que todos los pueblos primitivos han tenido cierta forma de cartografía rudimentaria: meros trazos momentáneos en la tierra, en la piedra, huesos, piel, y pinturas murales. Parece que un estímulo que favoreció la redacción de mapas sea la propensión que tuvieron algunas comunidades al movimiento, al desplazamiento desde su lugar de origen.

Los historiadores tienen diferentes versiones sobre cuales pueden ser considerados los documentos cartográficos más antiguos de los que disponemos. Algunos de estos son incisiones sobre tablas de arcilla que representan descripciones esquemáticas del mundo o regiones, como, por ejemplo, la Tabla de Ga-Sur (fig. 2), atribuida a la época de la dinastía de Sargón de Akkad (2300 - 2500 aC).

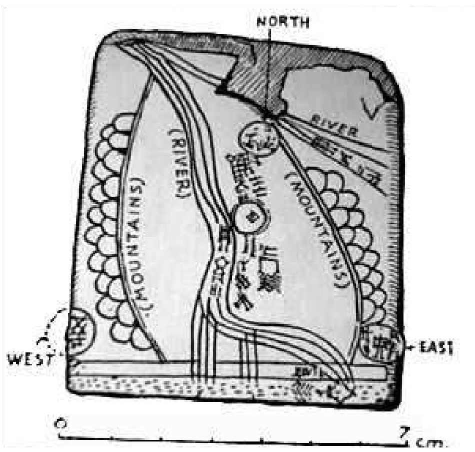


Fig. 2: Tabla de Ga-Sur y su posible interpretación.

[1] Esta síntesis se basa principalmente en Thrower (2002) y las imágenes son de dominio público en la web.

Los primeros mapas con fundamento científico provienen de Grecia y fueron elaborados por los filósofos que trataron de conjugar y reproducir con fidelidad las diferentes informaciones aportadas por viajeros diversos.

El primer intento de enfoque científico de la cartografía griega se encuentra con Dicearco de Messina (350 - 290 a. C.), filósofo griego, discípulo de Aristóteles, que señaló por primera vez la necesidad de una línea de referencia en una carta de la tierra conocida. Su línea iba de oeste a este, desde Gibraltar hasta Rodas (fig. 3). No se está seguro si él también indicó la necesidad de establecer una línea de referencia vertical.

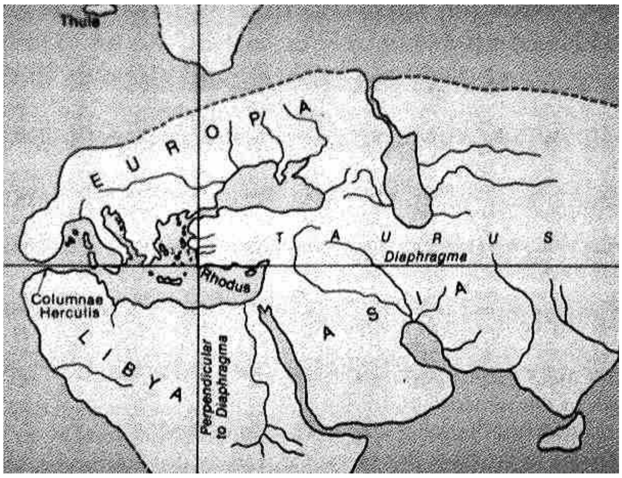


Fig. 3: Reconstrucción de la carta de Dicearco.

Posteriormente Eratóstenes (276 a 195 a.C.) sugirió que un cierto número de líneas fueran dibujadas en paralelo a una de referencia, pero no regularmente espaciadas.

Ptolomeo (ca. 100 - ca. 170 d.C.) recogió todos los conocimientos de sus predecesores y presentó en la *Geographike Syntaxis* el primer panorama completo del progreso cartográfico logrado hasta su tiempo. Publicó un método acerca de la determinación de coordenadas con base en meridianos y paralelos. Este tratado fue el trabajo teórico de referencia geográfica durante toda la Edad Media. La geodesia moderna se basa todavía en ciertos supuestos que figuran en este trabajo. Después de la obra de Ptolomeo y durante muchos siglos la cartografía se estancó y los marinos navegaban usando mapas improvisados.

Tenemos muchas referencias que dan testimonio de la existencia de mapas en la antigua Roma, por ejemplo los mapas esquemáticos que ilustran los textos de los clásicos latinos. Cuando se fundaba una colonia, o se subdividía un área, los planos se redactaban en doble ejemplar, uno sobre metal o piedra, para ser expuesto públicamente, y el otro sobre lino, para los archivos estatales. Aunque los documentos cartográficos que nos llegaron de la civilización Romana son pocos, se puede suponer que podían tener una predisposición a la construcción de mapas por diferentes factores: el gran número de carreteras a mantener, así como las guarniciones numerosas esparcidas por los cuatro rincones del imperio.

La construcción de las cartas náuticas en la Edad Media no se basó en principios matemáticos. En el siglo XIII el uso de la brújula magnética asociado a la rosa de los vientos permitió la elaboración de los primeros portulanos, que eran cartas marítimas que detallaban las costas y los puertos y tenían como fondo una retícula trazada a base de los rumbos o líneas de dirección de la rosa de los vientos. En la fig. 4 se muestra un ejemplo de portulano de 1541 que perteneció a Vesconte Maggiolo y donde se representa Europa, Mediterráneo y África del Norte (Mapa de la Staatsbibliothek de Berlín).

Fig. 4: Portulano del 1541.

Los viajes y los grandes recorridos por las costas de África y América dieron un nuevo y gran impulso a la cartografía. A partir del siglo XVI se dibujaron los primeros atlas para uso comercial y se desarrollaron muchas técnicas de proyección y coordenadas para dibujar mapas. Se comenzó con un concepto correcto, según el cual el mapa debía estar provisto de una red de meridianos y paralelos. También se adoptó el concepto de ortogonalidad de los meridianos y los paralelos, pero introduciendo un error que se mantuvo durante mucho tiempo: establecida una cierta escala de graduación en la longitud, también se adoptó la misma escala para la graduación en la latitud.

Los cartógrafos que se ocupaban de las cartas de navegación utilizaron la proyección cilíndrica de la Tierra (obtenida al colocar una esfera representante de la Tierra dentro de un cilindro tangente a la esfera misma a lo largo del ecuador, y colocando el punto de vista de proyección en el centro de la misma esfera). En el siglo XVI, Mercator, al introducir el concepto de aumentar la latitud (aunque no en forma matemáticamente rigurosa), sentó las bases de las nuevas cartas de navegación. Desde entonces, la cartografía tuvo una connotación científica y fueron los gobiernos estatales que se hicieron cargo del trabajo.

La teoría de los logaritmos y el cálculo infinitesimal, creado por Leibniz (1648 - 1716) y Newton (1642 - 1727), dio una forma matemática rigurosa al concepto de latitud creciente y proporcionó las expresiones con las cuales tal magnitud puede ser calculada. Finalmente en el siglo XX empezaron a utilizarse fotos aéreas para dibujar mapas y posteriormente se desarrolló el uso de satélites y nuevas técnicas que permitieron una alta precisión de detalle, con los cuales se consigue explorar la totalidad de la superficie terrestre.

En síntesis podemos constatar que la necesidad de elaborar mapas está estrictamente relacionada con el desplazamiento de las personas (comunidades nómadas, exploradores, militares y comerciantes) y con la edificación de las primeras ciudades, para organizar el espacio: los barrios, las calles,…

El problema de la proyección de la esfera terrestre en el plano y de la introducción de un sistema de referencia para localizar puntos fue un proceso largo y dificultoso: la distancia entre paralelos, la ortogonalidad del retículo de meridianos y paralelos y sus graduaciones fueron cuestiones que emergieron de los filósofos griegos y llegaron hasta el renacimiento. Así, de un lado, gracias al descubrimiento de nuevas áreas del mundo, los mapas referían a espacios geográficos mayores, y de otro lado gracias al desarrollo del conocimiento científico y cartográfico se dotaron de un sistema de referencia. Otro aspecto interesante que emerge es el uso de instrumentos (brújula, satélites,...) que permitió elaborar mapas más precisos y orientarse en espacios con pocos puntos de referencias, como los mares.

Este breve estudio histórico sobre la cartografía nos orienta sobre posibles situaciones problemas a adaptar para el desarrollo de la Orientación Espacial en la educación primaria, como la exploración de lugares desconocidos con el objetivo de elaborar mapas, la lectura de mapas hechos por otros, el usos de diferentes tipos de simbologías, la introducción de sistemas de referencias para ubicar lugares,… En educación secundaria se podrían introducir otros sistemas de referencias (por ejemplo con coordenadas polares,…), se podrían proponer problemas relativos a los diferentes tipos de proyecciones del globo terrestre sobre el papel, estudiar sus propiedades, sus defectos y sus utilidades.

Un estudio más profundo de los errores cometidos a lo largo de la historia en la representación plana de espacios conocidos, nos podría también orientar sobre las posibles dificultades, las concepciones erróneas, y los obstáculos de los estudiantes.

4. Nuevos sistemas de posicionamiento y de navegación

En diferentes campos de investigación y de trabajo se utiliza ahora un Sistema de Información Geográfica (SIG o GIS, en su acrónimo inglés). Por ejemplo, en la gestión de los recursos, la arqueología, la evaluación del impacto ambiental, la planificación urbana, la cartografía, la sociología, la geografía histórica, el marketing, la logística. GIS es una integración organizada de hardware, software y datos geográficos diseñados para capturar, almacenar, manipular, analizar y desplegar en todas sus formas la información geográficamente referenciada.

Un instrumento interesante de navegación es el GPS (Global Positioning System), que funciona mediante una red de satélites en órbita sobre el globo terrestre. Los terminales receptores GPS (Unidades GPS) indican la posición en la que están, informando sobre su latitud, longitud y altitud. Los receptores GPS se están incorporando en vehículos para dotarlos de un sistema de navegación. En todo momento este sistema informa sobre la posición exacta donde se encuentra el vehículo, el nombre de la calle y el sentido de marcha. Mediante un pequeño ordenador que lleva incorporados mapas de carreteras y planos urbano, puede servir para trazar distintos recorridos. Marcando los datos y las coordenadas geográficas, el ordenador indica el rumbo e, incluso, en qué calles o cruces puede girar el vehículo que lo integra.

Por otra parte existe diferente software que permite navegar sobre la superficie terrestre. Por ejemplo el programa informático de Google Earth (http://earth.google.com/) permite visualizar imágenes en 3D del planeta, combinando imágenes de satélite, mapas y el motor de búsqueda de Google, que permite ver imágenes a escala de un lugar específico del planeta. Introduciendo el nombre de una ciudad, de una calle se obtiene la dirección exacta, un plano o vista del lugar. Además, es posible medir distancias geográficas, ver la altura de las montañas, ver fallas y cambiar la vista, tanto en horizontal como en vertical. Con Google Maps (http://maps.google.es/), o Vía Michelin (http://www.viamichelin.es/) es posible obtener informaciones viales para planear un viaje, sean en coche propio, en transporte público o a pié.

En los sitios web de diferentes tiendas de mobiliario se encuadren herramientas de planificación para dibujar los planos de casa y ubicar muebles (por ejemplo http://www.ikea.com/ms/es_ES/rooms_ideas/splashplanners.html).

Todos estos recursos tecnológicos plantean cuestiones de innovación e investigación didáctica de gran interés: indagar cómo se puede incorporar su uso en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la orientación espacial en los niveles de educación primaria y secundaria.

5. El uso de la orientación espacial en diferentes trabajos y situaciones de la vida cotidiana

Pilotos, conductores, marineros, médicos, arquitectos, ingenieros, geógrafos, meteorólogos, topógrafos, físicos, electricistas, fontaneros, carpinteros, ciertamente utilizan en sus trabajos habilidades relacionadas a la Orientación y Visualización Espacial. Este uso requiere la habilidad de reconocer un objeto tridimensional desde ángulos diferentes, la habilidad de describir un espacio conocido con un lenguaje adecuado o con una representación gráfica, la habilidad de comprender una representación gráfica de un espacio.

Se puede pensar, por ejemplo, en un arquitecto que tiene que proyectar un edificio; frecuentemente en su trabajo tiene que colaborar con ingenieros civiles y presentar proyectos específicos a fontaneros, electricistas,… . El lenguaje gráfico tiene que ser compartido para que cada uno pueda comprender el plano asignado y trabajar correctamente.

Definiendo la habilitad de “relación espacial” como el “reconocimiento de un objeto tridimensional desde ángulos diferentes”, Suárez y col. (2004), afirman que esta habilidad es una de la más importantes de toda aquellas que un individuo debe poseer para el ejercicio de la ingeniería.

La habilidad de reconocer un objeto desde diferentes perspectivas está presente también en el trabajo del médico. Por ejemplo, para interpretar correctamente una radiografía de una parte del cuerpo tiene que distinguir entre los diferentes niveles de grises de las formas tridimensionales de la parte del cuerpo proyectado en el plano de la radiografía. La dificultad está en distinguir los diferentes niveles de profundidad.

Otro trabajo interesante desde el punto de vista de las habilidades de Orientación Espacial es el del arqueólogo. En Drewett (1999) se presentan diferentes situaciones que requieren la lectura y la elaboración de mapas: la interpretación de mapas antiguos para encontrar posibles lugares donde hay restos arqueológicos, la lectura de mapas de otros arqueólogos para conocer el punto exacto donde escavar, el dibujo de parte de una excavación (planos, secciones, estratigrafías,...), por medio de diferentes técnicas de proyección, el localizar exactamente sobre la superficie terrestre el lugar de un hallazgo arqueológico (ahora por medio de GIS o GPS). En la fig. 5 se muestra el plano de una granja medieval, Bullock Down, East Sussex, utilizado por arqueólogos para ilustrar las características de un sitio arqueológico.

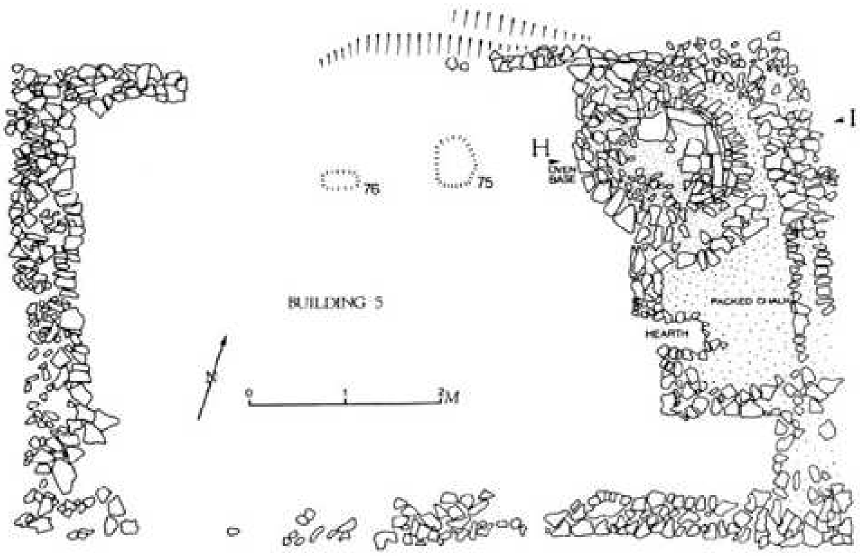


Fig. 5: Plano de una unidad familiar

Hay situaciones donde también se requiere la capacidad de hacer fotografías respetando algunas convenciones (la correcta inclinación, la distancia, poniendo una unidad de medida de referencia en la foto,...) e interpretar fotografías y dibujos de otras personas.

En conclusión, notamos que tanto en trabajos que requieren una formación académica como en trabajos que requieren un oficio, se pueden encontrar situaciones que necesitan una buena capacidad de Orientación Espacial: sea en la habilidad de reconocer un objeto desde diferentes perspectivas (por ejemplo, el médico que observa una radiografía de un hueso), como en la habilidad de trabajar con una representación espacial (por ejemplo el fontanero que tiene que leer y interpretar el plano de fontanería de un edificio para poderlo instalar correctamente).

También en situaciones cotidianas la Orientación Espacial está presente. Pensemos en el niño que tiene que conocer el camino para ir a la escuela, orientarse en una ciudad (el trabajo de Galvez, 1985, enfrenta el problema de los niños de la Ciudad de México que se pierden en la ciudad). Así mismo, se requiere “competencia espacial” para dar informaciones a un turista sobre el trayecto para ir a un sitio, para orientarse en una ciudad desconocida, leer los planos de las líneas de los transportes, para comprender un manual para construir un mueble o utilizar un electrodoméstico, para la elección de un mobiliario adaptado a una habitación, …

De estas actividades se deriva que es importante para cada individuo desarrollar dichas capacidades.

6. Orientación espacial en la enseñanza

Observamos que las orientaciones curriculares, por ejemplo en España (MEC, 2006a), o las orientaciones del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), tratan el tema de la "Orientación Espacial" sugiriendo algunos objetivos. Es interesante constatar que dichas propuestas curriculares aconsejan empezar a trabajar el tema considerando las orientaciones de cuerpos y objetos en el mundo real, seguir con la interpretación y la elaboración de representaciones espaciales elementales (croquis, mapas, planos y maquetas), y terminar con la construcción y uso de sistemas de coordenadas para especificar posiciones y describir trayectorias. Esta repartición temporal de los temas en los años es coherente con el desarrollo del conocimiento cartográfico a lo largo de la historia.

Podemos observar que la situación-problema central emergente de los currículos analizados es la de "especificar posiciones y describir trayectorias en el espacio": primero en el mundo real, después con el uso de representaciones elementales y al final con el uso de sistemas de coordenadas. Las Orientaciones Curriculares sugieren plantear situaciones para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana y aconsejan educar a través del entorno, lo que se puede abordar con diferentes situaciones. Por otra parte, en los objetivos relacionados con la orientación de objetos y cuerpos en el espacio físico y con el uso de representaciones se tratan sobre todo formas y objetos geométricos, y menos situaciones reales y cotidianas. Sería interesante reconstruir tipos de situaciones que permitieron desarrollar el conocimiento cartográfico a lo largo de la historia, como la exploración de lugares desconocidos con el objetivo de trazar mapas que orientaran a otros niños exploradores, la organización del espacio (por ejemplo del aula), la discusión de las diferentes simbologías utilizadas y de los errores cometidos.

Situaciones de Orientación Espacial podrían ser presentadas no sólo en el ámbito matemático, sino también en otras asignaturas, como pueden ser la geografía, el dibujo técnico y la educación física. En matemáticas el niño se enfrentaría a la organización del espacio, a la lectura de mapas y planos y a la introducción de sistemas de referencia para especificar lugares en los mapas; en geografía el niño se enfrentará a situaciones relacionadas con la lectura y elaboración de materiales cartográficos, que podrían ser incentivadas yendo al descubrimiento de nuevos espacios. Observamos que en estas situaciones (tanto en matemáticas como en geografía) el uso de recursos tecnológicos (brújula, GPS,..) podría ser de gran interés y motivación. Con el dibujo técnico el niño podrá aprender los procedimientos de la proyección y los convencionalismos normativos mientras que con la educación física podrá experimentar la orientación de su propio cuerpo con actividades motrices. Observamos así que en la escuela primaria el tema podría ser tratado de manera interdisciplinar.

En los contenídos y objetivos de diferentes materias descritos en el currículo de escuela secundaria obligatoria (MEC, 2006b) emergen distintos aspectos de la orientación espacial. Por ejemplo en geografía (primer curso, bloque 1) se prevé trabajar en la lectura e interpretación de imágenes y mapas de diferentes escalas y características. En educación física, en el bloque relacionado a actividades en el medio natural, emerge la realización de recorridos de orientación, a partir del uso de elementos básicos de orientación natural y de la utilización de mapas. Un objetivo previsto en educación visual es el de representar cuerpos y espacios simples mediante el uso de la perspectiva, las proporciones y la representación de cualidades de las superficies y el detalle de manera que sean eficaces para la comunicación. En matemáticas se pretende trabajar con coordenadas cartesianas (en el bloque de funciones y gráfica), ampliar y reducir figuras, obtener el factor de escala, trabajar con coordenadas geográficas y husos horarios, interpretar mapas y resolver problemas asociados (en el bloque de geometría). En la materia de tecnología se pretende representar mediante vistas (alzado, planta y perfil) y perspectivas objetos y sistemas técnicos sencillos, utilizar instrumentos de dibujo y aplicaciones de diseño gráfico por ordenador.

Por lo que se refiere a los recursos tecnológicos a utilizar en situaciones de Orientación Espacial, (tales como la brújula, el GPS, o los software informáticos disponibles en la red) observamos que en las propuestas curriculares no se mencionan.

7. Ejemplos de actividades para la escuela primaria y secundaria

Describimos algunos ejemplos de situaciones de orientación espacial encontrados en diferentes investigaciones en el campo de la didáctica de la matemática, y que se podrían proponer como tareas en la escuela primaria y secundaria. En el ejemplo 1 describimos una interesante actividad que se podría proponer en la escuela primaria para introducir los niños a la representación de espacios conocidos.

<u>Ejemplo 1</u>: "*El maestro lleva a los niños de visita a la estación de bomberos. Por el camino hablan acerca de las casas y las tiendas que pasan. Al volver a la escuela crean una maqueta de la ciudad utilizando bloques. El bloque rojo representa la estación de bomberos. Los niños "conducen" un mini coche de bomberos a través de las calles de la maqueta constituidas por los espacios entre los bloques. El maestro pone de manifiesto que mediante el dibujo de los contornos de los bloques en una grande hoja de papel, el modelo de la ciudad puede ser fácilmente reconstruido la siguiente vez que puedan jugar. Una forma conveniente de pasar a la representación bidimensional es que sean los niños quienes dibujen el contorno de los bloques. Más tarde se puede prescindir de los bloques y utilizar el plano como sustituto del modelo. Este "mapa" puede ser utilizado en lugar del modelo como una herramienta para pensar y para resolver problemas tales como encontrar el camino más corto de la estación de los bomberos a una casa determinada*." (Progresión de tareas de representación de espacios conocidos descrita por Wiegand, 2006, p. 93).

Otro ejemplo de actividad para la escuela primaria, que podría servir para introducir el dibujo en perspectiva caballera o para evaluar dicho conocimiento es el siguiente.

<u>Ejemplo 2</u>: *Dibuja las cuatros patas de la mesa* (Cuisinier y cols, 2007 p. 23):

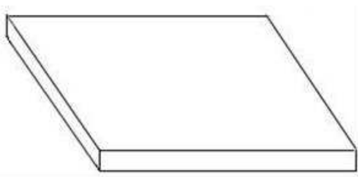


Fig. 6: Dibujo de una mesa en perspectiva caballera.

En el ejemplo 3 describimos una actividad que trata de las vistas de un objeto tridimensional y que podría ser propuesta en diferentes nivel educativos (adaptando la consigna).

Ejemplo 3: *Construye o dibuja en perspectiva una composición de cubos que tenga las vistas ilustradas en la fig.* 7. *¿Puedes quitar un cubo a la composición sin cambiar las vistas*? (Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009, p.)

Vista de frente Vista de perfil Vista de arriba

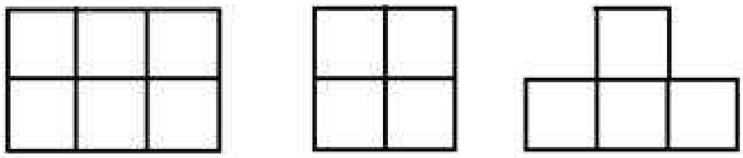


Fig. 7: Vistas de una composición de cubos.

El siguiente es un interesante ejemplo de actividad que podría ser propuesta al inicio de la escuela secundaria para que los alumnos tomen conciencia de las diferencias entre la perspectiva caballera y la perspectiva con punto de fuga.

Ejemplo 4: Los alumnos reciben una escalera en miniatura que tiene los palos portantes paralelos y la siguiente consigna:

Imagináis y dibujáis una posible sombra, sobre una superficie plana, de esta escalera

a) Puesta al sol

b) Puesta adelante un foco de luz

Si es necesario, realizáis concretamente la experiencia.

Mirad los dibujos siguientes (fig. 8). *¿Cuáles son los que pueden ser una sombra de una escalera puesta al sol*? *¿Cuáles son los que pueden ser una sombra de una escalera puesta delante de un foco de luz*? (Cuisinier y cols, 2007, p.27)

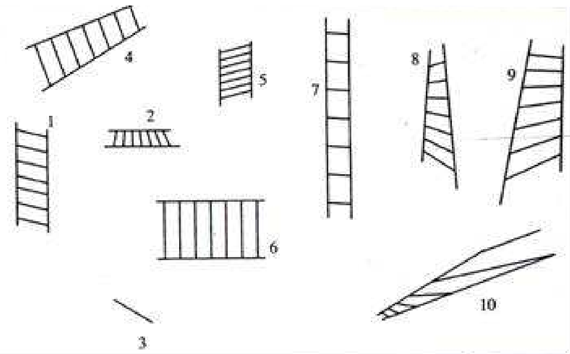


Fig. 8: Posibles sombras de escaleras, Cuisiner y cols (2007).

En la página web http://realworldmath.org/ se pueden encontrar ejemplos de actividades donde se requiere el uso del programa informático Google Earth disponible en la red y que se podrían proponer en el curso de matemáticas a partir de quinto nivel. Describimos un ejemplo de problema (ejemplo 5) que muestra cómo Google Earth puede presentar actividades que involucran la estimación del área de una superficie.

Ejemplo 5: Problema de la foresta amazónica. En esta actividad los estudiantes tienen que comparar dos imágenes de la selva amazónica, una del 1975 y la otra del 2001, que muestran la deforestación que tiene lugar en la Amazonía. Se requiere hacer una estimación del porcentaje de la zona deforestada. Esta actividad conecta a los estudiantes con un problema mundial utilizando la información de las Naciones Unidas para el Medio Ambiente (PNUMA), presente en la capa "Concienciación Global" de Google Earth. Actividades como ésta se pueden hacer con las informaciones presentes en las varias capas de Google Earth, como GoodPlanet, Greenpeace, National Snow e Ice Data Center, o UNICEF, y podrían ser utilizadas en aulas de ciencias o estudios sociales.

8. Observaciones finales

En este trabajo hemos resaltado la importancia que tienen hoy día las habilidades relacionadas con la Orientación Espacial en situaciones de la vida cotidiana, en diferentes trabajos y en el uso de los nuevos medios informáticos para ubicarse y trazar recorridos. Todo esto da valor y relevancia al tema, presente en las orientaciones curriculares de la escuela primaria y secundaria.

Un recurrido histórico sobre la cartografía nos ha permitido comprender cómo y porqué nació la necesidad de representar el espacio a lo largo de los siglos y los procesos con los cuales la cartografía se convirtió en una disciplina científica. Este estudio nos ayuda a comprender los procedimientos y las dificultades que están relacionadas con situaciones de Orientación Espacial, nos permite valorar las directrices curriculares y orientar propuestas de tareas en la escuela primaria y secundaria. Así mismo, un estudio en profundidad de los errores cometidos a lo largo de la historia en la representación plana de espacios conocidos, nos podría también orientar sobre las posibles dificultades, las concepciones erróneas, y los obstáculos de los estudiantes.

Consideramos que la información que hemos incluido en este artículo sobre aspectos históricos y usos sociales - profesionales de conocimientos relativos a la orientación espacial es útil, y en cierto modo necesaria, para el diseño de procesos instruccionales en educación primaria y secundaria. En el marco de la teoría de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje propuesta por Godino y colaboradores (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2009) el logro de una alta idoneidad epistémica - ecológica requiere que las situaciones - problema que se propongan a los estudiantes, y las configuraciones de objetos y procesos asociados, sean representativas de un significado de referencia. La elaboración de dicho significado de referencia requiere, a su vez, sistematizar previamente la información sobre la génesis histórica de los objetos conceptuales y procedimentales pretendidos y la fenomenología matemática y extra-matemática que dichos objetos permiten organizar.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC, MEC-FEDER y de la Beca FPU, AP2008-04560.

Bibliografía

Cuisinier, G., Docq, C., Gilbert, T., Hauchart, C., Rouche, N., Tossut, R. (2007). Les représentations planes comme fil conducteur pour l'enseignement de la géométrie. *Mathématique et Pédagogie*, 167, 17-57.

Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: an evidence base for instruction". En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds): *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, 417-424. Thessaloniki, Greece: PME.

Drewett, P.L. (1999). *Field Archaeology: An Introduction*. UCL Press, London.

Gálvez, G. (1985*). El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*. Tesis doctoral, Centro de Investigación del IPN Mexico.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* UNION 20. 13-31.

Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007): "The onto-semiotic approach to research in mathematics education". *ZDM. The International Journal on Mathematics Education* 39(1-2), 127-135. (Versión ampliada en español disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino).

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006a). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.*

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006b). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*

McGee, M.G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences*. Psychological Bulletin* 86(5), 889-918.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics. National Council of Tearchers of Mathematics.* Edición electrónica: http://standards.nctm.org/. Extraído día 1 del enero de 2010.

Suárez, J., Rubio, R., Gallego, R. y Martín, S. (2004). Desarrollo de un entrenador para la percepción espacial basado en realidad virtual mediante tecnologías de dominio público. En: XII Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas, Barcelona.

Tartre, L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education* 21(3), 216-229.

Thrower, N.J.W. (2002). *Mapas y civilización. Historia de la cartografía en su contexto cultural y social.* Traducción de la 2a edición de Francesco Nadal*.* Ediciones del Serbal, Barcelona.

Wiegand, P. (2006): *Learning and teaching with maps*. Routledge, London.

Margherita Gonzato. Estudiante de doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Ha cursado un Máster en Didáctica de la Matemática y está en posesión de una beca de Formación de Profesorado Universitario (FPU) del Ministerio de Ciencia e Innovación. (mgonzato@ugr.es)

Juan D. Godino. Catedrático de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Coordina un grupo de investigación sobre los fundamentos teóricos y metodológicos de investigación en Didáctica de la Matemática. Una selección de sus trabajos está disponible en la página web del grupo:

http://www.ugr.es/local/jgodino/ (jgodino@ugr.es).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 59-70
ISSN: 1815-0640

Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico

María Laura Distéfano, Sebastián Urquijo, Susana González de Galindo

Resumen

Para mejorar el dominio del lenguaje simbólico de ingresantes universitarios a la carrera de Matemática, se diseñó, implementó y evaluó una intervención educativa. Participaron 34 sujetos, de quienes se determinó el dominio del lenguaje simbólico y el razonamiento abstracto. Luego de la intervención, los resultados confirman que la participación en una experiencia educativa orientada específicamente a la enseñanza del lenguaje simbólico produce una mejora significativa en su uso y comprensión.

Abstract

An educational intervention was designed, evaluated and implemented, to improve the domain of symbolic language in freshmen to the University Programs in Mathematics. Data was obtained from 34 individuals, controlling the ability to manipulate symbolic language and abstract reasoning. After intervention, the results confirm that being involved in an educational experience, focused specifically on the teaching of symbolic language produces a major improvement in its comprehension and use.

Resumo

Para melhorar o domínio da linguagem simbólica de ingresantes universitários à carreira de Matemática, desenhou-se, implementou e avaliou uma intervenção educativa. Participaram 34 sujeitos, de quem determinou-se o domínio da linguagem simbólica e o razonamiento abstracto. Depois da intervenção, os resultados confirmam que a participação numa experiência educativa orientada especificamente ao ensino da linguagem simbólica produz uma melhora significativa em seu uso e entendimento.

1. Introducción

En el desempeño de la práctica docente con alumnos de primer año de carreras universitarias que cursan materias de Matemática y, particularmente Álgebra, se observa una dificultad recurrente con el manejo del lenguaje simbólico propio de la disciplina. Creemos que podría deberse al hecho de que los alumnos desconocen el significado y el uso apropiado de muchos de los símbolos matemáticos, y a que no están habituados a la lectura y la escritura simbólica. Esto deriva en problemas académicos, como por ejemplo, la comprensión de la bibliografía específica, ya que deben enfrentar una lectura compuesta mayoritariamente por símbolos.

Por otra parte, un objetivo prioritario de las clases es que los alumnos expresen correctamente las resoluciones de los ejercicios. Sin embargo, la dificultad para leer, escribir y entender el lenguaje simbólico complica esta tarea. Para quienes trabajamos en Matemática resulta impensable escribir una demostración, actividad primordial del quehacer cotidiano de esta ciencia, sin utilizar el simbolismo algebraico, instrumento con el que se puede expresar de manera concisa y unívoca el pensamiento y las ideas matemáticas. Sin un manejo apropiado del lenguaje simbólico, no es posible introducir al alumno en el desarrollo de la habilidad *demostrar*.

Se debe partir del hecho de que los estudiantes han adquirido, durante los primeros años de escolarización, el lenguaje simbólico utilizado en las operaciones aritméticas. Durante su educación en el nivel medio, han tenido entrenamiento en la traducción algebraica de problemas que conducen a la formulación de ecuaciones. En el nivel universitario, observamos que los estudiantes tienen diversas dificultades, entre ellas expresar propiedades matemáticas en forma simbólica, generalizar, o suponer que el uso de letras está asociado exclusivamente a la representación de incógnitas. Es frecuente que pretendan demostrar la validez de una propiedad mediante un ejemplo concreto, sin percatarse que de esa manera no se contempla la totalidad de los casos posibles.

Si se tiene en cuenta que un aspecto fundamental del lenguaje algebraico es la posibilidad de expresar simbólicamente la generalización de problemas y que esto permite la evolución de la Aritmética al Álgebra (Malisani, 1999), puede considerarse de relevante importancia su enseñanza sistemática al iniciar la formación en esta última.

Es a partir de estas situaciones particulares y suponiendo que podrían deberse a una formación deficiente en el dominio del lenguaje simbólico, que surge la propuesta de investigar los efectos de la enseñanza sistemática de este lenguaje. Se debe destacar que esta propuesta se diferencia de un curso de Lógica en el sentido de que, además del manejo de los símbolos básicos, para una primera aproximación al Álgebra también le concede importancia al aspecto semántico.

Para referirnos al lenguaje simbólico es necesario partir de algunas definiciones elementales provenientes de la semiótica. Para ello se considera que un signo es todo objeto o hecho físico que hace referencia a otra cosa. Entre los mismos se encuentran los *símbolos*, o signos convencionales, en los que la relación entre el significante y el significado es arbitraria, pues no hay ninguna relación natural o analógica que los ligue (Gianella, 1996). El símbolo se caracteriza porque la materialidad observable de la imagen alude a un significado ideal, lo que permite añadir al signo el componente de la abstracción. Dado que el símbolo es una convención semiótica, que aparece una vez que un grupo ha decidido usarlo como vehículo de expresión, para formar parte de ese grupo es necesario conocer el significado y el uso de ese símbolo. En el caso de la comunidad matemática, el sistema simbólico que le es propio debe ser transmitido expresamente a los alumnos que pasan a formar parte de dicha comunidad, es decir, es necesario convertirlos en *intérpretes*.

> La noción general de competencia comunicativa [...] requiere tener conciencia de las convenciones concretas, dependientes del contexto, conversacionales o escritas, vigentes, cómo influyen sobre lo que se comunica y cómo han de utilizarse de acuerdo al contexto. [...] Si hemos de considerar las matemáticas como un lenguaje, la competencia comunicativa se convierte en una cuestión importante y la comunicación significativa en una preocupación fundamental (Pimm, 1990, p.27, p.30).

Es decir que el dominio eficaz del lenguaje simbólico adquiere relevancia no sólo desde las posibilidades específicas del quehacer matemático, sino también desde un aspecto comunicacional, vital en todo proceso de enseñanza y aprendizaje. Los alumnos deben ser conscientes que en la comunicación matemática, tal como afirma Guzmán (1997), "*lo que interesa son las situaciones claras, unívocas, que para todos y en todas las circunstancias signifiquen lo mismo*".

Existe una diferencia fundamental entre la Matemática y otras ciencias que radica en el hecho de que los objetos matemáticos son abstractos y por consiguiente no manipulables como un objeto físico. Por lo tanto, no se puede acceder a ellos sin utilizar un sistema semiótico de representación. Para Duval (2006), los sistemas semióticos tienen un rol clave en el trabajo con objetos matemáticos que va más allá de la designación de los objetos o de la comunicación. Son esenciales en la actividad cognitiva del pensamiento, pues ningún tipo de actividad matemática puede ser ejecutada fuera de un contexto de representación. Los procesos matemáticos siempre implican sustituir una representación semiótica por otra. La semiosis es, por tanto, considerada como requerimiento para garantizar un primer paso hacia la noesis, tal como afirman Duval (2004, 2006) y D'Amore (2003, 2005). De acuerdo con estos autores, no puede haber noesis sin semiosis, es decir, no puede haber aprehensión conceptual de un objeto sin algún representante de éste. La semiosis determina las condiciones de posibilidad y de efectivización de la noesis.

Debe tenerse en cuenta que no todo sistema semiótico constituye un registro semiótico, sino sólo aquellos que permiten una transformación de las representaciones (Duval, 2006). Existen dos tipos de transformaciones, aquellas que se realizan entre representaciones dentro de un mismo registro (*tratamientos*) y las que se realizan entre representaciones pertenecientes a dos registros diferentes (*conversiones*). Es a través de los tratamientos y especialmente de las conversiones, que se tiene acceso a la comprensión de la Matemática y a los procesos de pensamiento específicos requeridos por la actividad en esta ciencia.

Sin embargo, las transformaciones entre las distintas representaciones no siempre son inmediatas ni evidentes, particularmente las conversiones. Éstas constituyen la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los alumnos y, con frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales (Duval, 2004). Duval (1998, 2006) atribuye tal dificultad al fenómeno que denomina de *no-congruencia*, el cual tiene lugar entre las representaciones de un mismo objeto que provienen de sistemas semióticos diferentes y tales que la transformación entre ellas no es inmediata ni transparente.

> Estos fenómenos de no congruencia constituyen el obstáculo más estable observado en el aprendizaje de la Matemática, a todos los niveles y en todos los dominios. (...) la conversión, en caso de no congruencia, presupone una coordinación entre los dos registros de representación movilizados, coordinación que nunca existe al inicio y que no se construye espontáneamente. (D'Amore, 2005, p. 32).

Las conversiones resultan de fundamental importancia en el proceso de aprendizaje, puesto que la habilidad de efectuar las mismas favorece la coordinación de distintos registros semióticos, imprescindible para la conceptualización de los objetos matemáticos.

Las traducciones entre el lenguaje coloquial o natural y el simbólico, en ambos sentidos, constituyen conversiones, que en la mayoría de los casos resultan no congruentes, lo que da lugar a dificultades en el proceso de enseñanza y que no siempre son consideradas por los docentes, tal como afirma Duval (2006, p. 114):

> Y en el aula tenemos una práctica muy específica de uso simultáneo de dos registros. Se habla en lenguaje natural, mientras se escribe en expresiones simbólicas como si las explicaciones verbales pudieran hacer el tratamiento simbólico transparente.

Lo expuesto soporta la idea de que el manejo adecuado de símbolos matemáticos depende del aprendizaje y del entrenamiento en su uso. Sin embargo, no se puede obviar el hecho de que autores como De Vega (1998) o Sternberg (1986) informan que la capacidad de razonamiento abstracto presenta asociaciones con el manejo de símbolos. Por lo tanto, para favorecer la validez de esta investigación, se consideró relevante tener en cuenta los efectos de esta capacidad.

Las consideraciones expuestas anteriormente justificarían la necesidad y la importancia de enseñar a los alumnos el manejo de distintos registros semióticos utilizados en Matemática y entrenar o ejercitar la habilidad de realizar transformaciones entre las distintas representaciones. En función de ello, este estudio se propuso diseñar, implementar y evaluar los resultados de una intervención educativa para la enseñanza y el entrenamiento en el uso del lenguaje simbólico, orientado específicamente a la adquisición de la habilidad de efectuar conversiones entre dicho lenguaje y el lenguaje coloquial, en ambos sentidos.

2. Metodología

2.1. Sujetos

Partiendo de una población de 62 sujetos, ingresantes a las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, inscriptos para cursar la asignatura Álgebra Lineal I, se constituyeron dos grupos de 25 alumnos, ninguno de ellos recursante de la asignatura, pareados en función del dominio inicial del lenguaje simbólico y de la capacidad de razonamiento abstracto. Uno de los grupos fue expuesto a la intervención educativa (Grupo con intervención) y el otro grupo no (Grupo de control sin intervención). Al finalizar la experiencia, se obtuvieron datos de 34 de ellos (17 de cada grupo).

2.2. Instrumentos

Para determinar el dominio inicial del lenguaje simbólico se utilizó una *Prueba de lenguaje simbólico* elaborada para tal fin. La misma fue validada previamente sometiéndola a consideración de docentes de la asignatura, quienes, teniendo en cuenta los objetivos establecidos para esta prueba, estuvieron de acuerdo con los ítems incluidos. En ella se requería de la traducción de expresiones del lenguaje coloquial al simbólico y otras en el sentido inverso. Todos los ítems involucraban conversiones no-congruentes. Las proposiciones enunciadas referían a contenidos curriculares correspondientes a la escuela media, de modo que su contenido conceptual no resultara un obstáculo en el desarrollo del ejercicio. En el encabezado del instrumento se colocó una lista con todos los símbolos necesarios, con sus correspondientes significados, para la resolución de los distintos ítems propuestos, de modo que el hecho de no recordar alguno de ellos no resultara un factor de error en las resoluciones.

Este instrumento se administró en ambos grupos en dos ocasiones, al inicio de la experiencia (pre-test) y al finalizar el último encuentro de la intervención (post-test).

Por otra parte, para contribuir a la homogeneidad de ambos grupos se evaluó la capacidad de razonamiento abstracto de los sujetos utilizando la *Escala de Razonamiento Abstracto* del *Test de Aptitudes Diferenciales (DAT)* (Bennett et al., 1992).

3. Procedimiento

Los sujetos del Grupo con intervención recibieron formación sistemática sobre lenguaje simbólico, en tres encuentros presenciales de 90 minutos de duración cada uno. Estos encuentros se realizaron de manera separada del dictado de la asignatura y fueron implementados dentro de las dos primeras semanas del ciclo lectivo. El Grupo sin intervención no tuvo actividad adicional en ese período.

El material didáctico utilizado en la intervención educativa presenta algunos símbolos básicos, con ejemplos de su uso y algunas reglas para su correcta aplicación. La experiencia estuvo restringida a un número reducido de símbolos ($\in, \notin, \wedge, \vee, \subset, \not\subset, \forall, \exists, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) que forman parte de lo que Pimm (1990) denomina *logogramas*. Son aquellos símbolos que han sido inventados especialmente para referirse a conceptos totales, sustituyen a palabras completas, y no se utilizan fuera de un contexto matemático. Esta restricción estuvo basada, por un lado, en seleccionar los símbolos que se consideraron de mayor necesidad para la introducción al estudio del Álgebra y, por otra parte, en el hecho de que los alumnos eran ingresantes y no poseían aún los conocimientos necesarios para incluir los símbolos que corresponden a conceptos más avanzados. Como en la Prueba de lenguaje simbólico, las propiedades y proposiciones con las que se trabajaron, correspondían a contenidos de la escuela del nivel medio, con el objetivo de que resultaran conocidas por el alumno y que su contenido semántico no complejizara la situación de aprendizaje del lenguaje simbólico.

La ejercitación correspondiente a los contenidos desarrollados en el material didáctico se elaboró con actividades que tienen dificultad creciente, de manera que los alumnos fueran adquiriendo de forma gradual las habilidades de lectura y escritura con símbolos.

Las tareas propuestas fueron de diversos tipos, a los efectos de no sistematizar la ejercitación, de favorecer la búsqueda de resoluciones, de convertir en dinámica la actividad y de variar el nivel de dificultad. En tal sentido, se elaboraron ejercicios de respuesta cerrada, de respuesta abierta, de completamiento, de doble alternativa y de apareamiento o correspondencia. En el Apéndice se muestran algunos ejemplos de esta ejercitación.

Durante el trabajo para efectuar conversiones del lenguaje coloquial al simbólico, el objetivo fue que los alumnos observaran que la expresión resultante no fuera ambigua sino que, por el contrario, contuviera todos los datos de manera precisa y completa. Cuando se abordaron las conversiones en el sentido inverso, se puso el énfasis en que la traducción no fuera símbolo a símbolo (que es lo que los alumnos tienden a hacer, como si se tratara de una conversión congruente), sino en el sentido general de la afirmación, es decir que se atendiera al contenido semántico de la propiedad a expresar.

Debe tenerse en cuenta que el trabajo implementado en esta experiencia no corresponde a un curso de lógica, si bien se utilizan conceptos provenientes de ella. La lógica maneja símbolos y estructuras, independientemente del contenido. En este caso se focalizó también en el aspecto semántico, como un modo de establecer el nexo entre la expresión coloquial y la simbólica.

También se ejercitó la negación de expresiones, como una herramienta preparatoria para el aprendizaje de los métodos de demostración, ya que tanto los razonamientos por el contrarrecíproco como por el absurdo requieren la negación de enunciados.

4. Resultados

El análisis descriptivo de los resultados de la administración del pre-test para establecer los conocimientos previos de cada sujeto sobre el lenguaje de símbolos y del DAT para evaluar la capacidad de Razonamiento Abstracto, se presentan en la Tabla I.

Grupo	Pre-test Dominio del lenguaje				Razonamiento Abstracto			
	Media	**Máximo**	**Mínimo**	**DS**	**Media**	**Máximo**	**Mínimo**	**DS**
Sin intervención	**3.15**	**7.00**	**0.50**	**1.66**	**66.00**	**99**	**15**	**26.18**
Con intervención	**2.94**	**4.50**	**0.50**	**1.11**	**66.53**	**99**	**30**	**25.83**

Tabla I. Estadísticos descriptivos del Pre-test y de la capacidad de Razonamiento Abstracto en cada grupo

El análisis de comparación de medias para dos muestras independientes confirmó la ausencia de diferencias estadísticamente significativas entre los grupos al inicio de la experiencia, tanto en el dominio del lenguaje simbólico ($t=0.425$; $p=0.674 > 0.05$) como en la capacidad de razonamiento abstracto ($t=-0.059$; $p=0.953 > 0.05$). Estos resultados permiten inferir la homogeneidad de los grupos al comienzo de la experiencia.

Luego de la intervención educativa, se procedió a determinar nuevamente el nivel de dominio del lenguaje simbólico de todos los sujetos de la investigación (post-test). Los resultados se presentan en la Tabla II.

Grupo	Media	Máximo	Mínimo	DS
Sin intervención	**4.12**	**7.00**	**1.50**	**1.68**
Con intervención	**7.68**	**9.50**	**5.50**	**1.21**

Tabla II. Estadísticos descriptivos del dominio del Lenguaje Simbólico en el Post-test para cada grupo

El análisis de las diferencias de medias para dos muestras independientes, mostró una diferencia significativa entre ambos grupos ($t=-7.079$; $p=0.0 < 0.05$), confirmando los efectos positivos de la intervención.

Con el objeto de analizar detalladamente los resultados de la intervención pedagógica se calculó para cada alumno un diferencial de aprendizaje, consistente en la resta entre la puntuación obtenida en el post-test y la puntuación obtenida en el pre-test, a fin de conocer la diferencia de conocimientos específicos obtenidos durante el desarrollo de la intervención. De esta manera se obtuvo información sobre el nivel de evolución o progreso en el dominio de una habilidad y no en los valores absolutos obtenidos en un determinado momento. En la tabla III se presentan los valores de los estadísticos descriptivos del diferencial de aprendizaje en cada grupo.

Grupo	Media	Máximo	Mínimo	DS
Sin intervención	**0.97**	**3.50**	**-2.00**	**1.51**
Con intervención	**4.73**	**7.50**	**2.00**	**1.54**

Tabla III. Estadísticos descriptivos del diferencial de aprendizaje del dominio del lenguaje simbólico para cada grupo

Se realizó una prueba t de diferencias de medias para muestras independientes, confirmando la existencia de diferencias estadísticamente significativas en las puntuaciones medias de los diferenciales de aprendizaje de cada grupo ($t=-7.179$; $p= 0.0 < 0.05$).

Como el puntaje obtenido por cada alumno en el post-test podía ser mayor, igual o menor que el puntaje alcanzado en el pre-test, la resta entre ambos podía tomar valor positivo, cero o negativo. De esta manera, los valores que tomó dicho diferencial se agruparon en tres subconjuntos para su análisis: diferenciales positivos, diferenciales nulos y diferenciales negativos Así, un diferencial positivo evidenció aprendizaje del tema, el diferencial nulo indicó que no hubo modificaciones en relación con los saberes con que el alumno contaba al inicio de la experiencia y un diferencial negativo podría suponer que, al resolver las actividades del pre-test, no se aplicaron conocimientos sino que la resolución pudo haber sido realizada de manera arbitraria o azarosa. Resulta entonces de interés analizar el modo en que los diferenciales se distribuyeron en cada grupo respecto de las categorías mencionadas.

De acuerdo con Duval (1998, 2001, 2004, 2006), la coordinación entre los distintos registros semióticos es de capital importancia para el aprendizaje de la Matemática, razón por la cual esta investigación puso especial énfasis en la adquisición de la habilidad para realizar dichas conversiones representadas por las traducciones en ambos sentidos. Por lo tanto, se exploraron por separado las respectivas distribuciones concernientes a las traducciones del lenguaje simbólico al coloquial y del coloquial al simbólico calculándose en cada caso un diferencial (diferencial parcial). Este análisis fue considerado de interés particular debido a que estas dos tareas de traducción están asociadas a las conversiones entre representaciones en distintos registros semióticos. Los porcentajes de los diferenciales parciales se calcularon como el promedio entre los porcentajes de los diferenciales de cada uno de los tres ítems de ambos tipos de traducciones. Los resultados del diferencial total y de los diferenciales parciales se presentan en la Tabla IV.

Grupo	Aprendizaje del lenguaje simbólico			Traducción del lenguaje simbólico al coloquial			Traducción del lenguaje coloquial al simbólico		
	Positivo	Negativo	Nulo	Positivo	Negativo	Nulo	Positivo	Negativo	Nulo
Sin intervención	64.7 %	17.6 %	17.6 %	17.6 %	5.9 %	76.5 %	19.6 %	11.8 %	68.6 %
Con intervención	100 %	0%	0 %	68.6%	3.9 %	27.5 %	51%	5.9 %	43.1 %

Tabla IV: Distribución, en cada grupo, del diferencial de aprendizaje total y los diferenciales parciales en las categorías establecidas.

A los efectos de analizar si las proporciones en las que se distribuyen los porcentajes son significativas, se efectuó un test chi-cuadrado para proporciones en cada caso. Para el Aprendizaje del lenguajes simbólico (diferencial total) se obtuvo que existen diferencias significativas ($p=0.026 < 0.05$).

5. Discusión de los resultados

Los resultados evidenciarían mejoras significativas en el dominio del lenguaje simbólico luego de una intervención educativa. Las pruebas efectuadas sobre las puntuaciones correspondientes al post-test de domino del lenguaje simbólico y sobre el diferencial de aprendizaje, permiten aportar evidencias empíricas de las diferencias entre los grupos en ambos casos. La media de las puntuaciones en el post-test de los sujetos que participaron de la intervención fue significativamente mayor que la media de las puntuaciones de los sujetos que no estuvieron expuestos a ninguna intervención específica sobre el lenguaje simbólico. Esto confirmaría que la participación en una experiencia educativa orientada específicamente a la enseñanza del lenguaje simbólico produce una mejora significativa en el dominio del mismo. Debe destacarse la magnitud de esta mejora, ya que mientras que los sujetos que no participaron de la experiencia incrementaron su dominio del lenguaje simbólico menos de un punto en una escala de diez, los sujetos que recibieron formación sistemática, mejoraron su desempeño en casi cinco puntos en la misma escala. Los valores máximo y mínimo obtenidos en el grupo sin intervención no se modificaron, o variaron levemente, mientras que en el grupo con intervención aumentaron en cinco puntos.

El análisis de los diferenciales de aprendizaje permite una evaluación más detallada de los efectos de la intervención educativa. El diferencial de aprendizaje promedio del grupo con intervención supera al del grupo sin intervención en casi cuatro puntos con una desviación estándar semejante. La ausencia de diferenciales negativos indica que ningún estudiante de los que participaron de la experiencia tuvo un desempeño inferior en el post-test, mientras que en el grupo sin intervención sí los hubo en estas condiciones. La diferencia entre el pre-test y el post- test indica que, en términos de la evolución en el dominio del lenguaje simbólico, el grupo con intervención superó en cuatro puntos al grupo sin intervención.

Resulta importante destacar que durante el período de tiempo transcurrido entre la administración del pre-test y del post-test, todos los sujetos asistieron a las clases regulares de las asignaturas programáticas, familiarizándose con el lenguaje simbólico, lo que permitiría explicar los avances en el dominio del lenguaje simbólico de los alumnos que no participaron de la intervención educativa. Sin embargo, si bien este valor de los diferenciales positivos en el grupo sin intervención puede resultar elevado a primera vista (64.7%), no debe dejar de considerarse que la media de dicho grupo fue $\bar{x}_{si}$=0.97, mientras que la del grupo con intervención fue $\bar{x}_{ci}$=4.73, y esta diferencia resultó estadísticamente significativa. Esto permite concluir que si bien el grupo sin intervención ha mostrado en más de la mitad de los casos progresos en el aprendizaje y dominio del lenguaje simbólico, en términos cuantitativos ese aprendizaje es significativamente menor que el del grupo con intervención.

Analizando las distribuciones para los dos tipos de traducción, puede decirse que, en ambos casos, la intervención educativa permitió a más de la mitad de los alumnos mejorar la habilidad de la traducción del lenguaje simbólico al lenguaje coloquial y viceversa.

Respecto de la distribución de los diferenciales de aprendizaje positivos, nulos y negativos en las traducciones de lenguaje simbólico a coloquial, es destacable el hecho de que la mayoría de los sujetos del grupo sin intervención (76,5%), obtuvo en estas traducciones un diferencial nulo, lo cual indica que no hubo aprendizaje, mientras que en el grupo con intervención este porcentaje se limitó tan sólo a un 27.3%. El diferencial positivo muestra una relación inversa a la anterior en esta tarea, puesto el 17.6% del grupo sin intervención mejoró, en tanto que en el grupo con intervención el beneficio se observó en el 68.6%. Esto muestra una evolución notable en el grupo con intervención, evidenciando las mejoras en el dominio de la lectura y traducción de expresiones simbólicas.

En este tipo de traducción, el error observado con mayor frecuencia fue la transcripción símbolo a símbolo, en lugar de tener en cuenta el contenido semántico de las expresiones presentadas en lenguaje coloquial. En términos de la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval (1998, 2006), realizaron conversiones pretendidamente congruentes entre representaciones de distintos registros semióticos, cuando en verdad éstas eran no-congruentes. Los alumnos buscaron mantener la correspondencia semántica entre las unidades significantes y la igualdad de orden entre dichas unidades, evidenciando el fenómeno de no-congruencia que, según D'Amore (2005), resulta uno de los obstáculos más estables en el aprendizaje de la Matemática.

Es preciso destacar que la Prueba de lenguaje simbólico incluía una lista con todos los símbolos necesarios para su resolución acompañados de su significado. A pesar de ello, los resultados permitirían sustentar la idea de que conocer el significado de un símbolo no es suficiente para comprender su uso ni para leer correctamente una expresión simbólica. Esta observación es acorde con la afirmación de D'Amore (2005) en la que expresa que la coordinación entre los registros para efectuar conversiones no-congruentes no es de construcción espontánea, puesto que la sola descripción de los significados de los símbolos no bastó para que las conversiones requeridas en la prueba fueran correctamente resueltas.

En el caso de las traducciones del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico, se mantiene la misma relación. El porcentaje de diferenciales nulos en el grupo sin intervención es elevado (68.6%), mientras que en el grupo con intervención se limita al 43.1%. El porcentaje de diferenciales positivos, es menor en el grupo sin intervención (19.6%) que en el grupo con intervención (51%), poniendo de manifiesto la mejoría que en la escritura de expresiones simbólicas. La diferencia del desempeño de ambos grupos disminuyó en este caso. Este hecho podría explicarse porque el uno de los incisos del ejercicio presentaba un problema cuya traducción simbólica daba lugar a una ecuación y la habilidad de traducir problemas a ecuaciones es una de las actividades más ejercitadas en la educación preuniversitaria, lo que implicaría que una importante cantidad de alumnos la resolviera correctamente.

6. Conclusiones

Este estudio tuvo como objetivo principal el diseño, la implementación y la evaluación de una intervención educativa para enseñar de manera sistemática el uso del lenguaje simbólico. Los primeros análisis permiten afirmar que los alumnos que ingresan a las carreras de Matemática lo hacen con escaso conocimiento y habilidad en el uso y manejo del lenguaje simbólico. Se comprobó que el sólo hecho de conocer el significado literal de un símbolo no es suficiente para utilizarlo correctamente, ni para la lectura ni para la escritura de expresiones simbólicas de manera apropiada.

Los resultados de las pruebas efectuadas confirmaron las diferencias de la evolución en el dominio del lenguaje simbólico en los alumnos que participaron de dicha intervención, demostrando un desempeño superior en la lectura, la escritura y la aplicación del lenguaje simbólico. Por lo tanto, este estudio provee evidencias empíricas de que es posible enseñar de manera sistemática, en un tiempo relativamente breve, mejorando significativamente el dominio del lenguaje simbólico, herramienta propia y fundamental del quehacer matemático.

Bibliografía

Bennett, G.; Seashore, H.; Wesman, A. (1992). *Tests de aptitudes diferenciales. Forma T*. Paidós, Buenos Aires.

D'Amore, B. (2003). *La complejidad de la noética en matemática como causa de la falta de devolución*. Conferencia dictada en el V Simposio de Educación Matemática, 6 de mayo de 2003, Chivilcoy, Bs. As., Argentina. Emat Editora, Chivilcoy.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* Reverté, México.

De Vega, M. (1998). *Introducción a la psicología cognitiva*. Alianza, Madrid.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.) Investigaciones en Matemática Educativa II. (173-201). Grupo Editorial Iberoamericano, México.

Duval, R. (2001). *The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of Mathematics*. Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Uthecht, Netherlands.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía, Colombia.

Duval, R. (2006). "A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics". *Educational Studies in Mathematics,* 61: 1, 103-131.

Gianella, A. (1996). Lógica simbólica y elementos de metodología de la ciencia. El ateneo, Buenos Aires.

Guzmán, M. de (1997). "Del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático". *Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES"* , 38, 19-36

Malisani, E. (1999) "Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento Algebraico. Visión histórica". *Revista IRICE*, 13, 105-134

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Morata, Madrid.
Sternberg, R (1986). *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información*. Labor, Barcelona.

Apéndice

A continuación se presenta, a modo de ejemplo, parte de la ejercitación incluida en el material utilizado durante la intervención educativa.

- Ejemplo 1:

Completar cada expresión para que resulten equivalentes:

En palabras	**En símbolos**
a) Todos los números ....son .... que 1	..... $\in \mathbb{N}$ $n \geq 1$
b) .... son mayores que 0 y menores que 1	$\exists$ $x \in \mathbb{R}$ ....
c) Cada número entero es .... que su	.... $x < x + 1$
d) Existe un único número real que	.... $x^2 = 0$
e) Algunos números naturales son	.... $x = 2.k$, $k \in \mathbb{N}$
f) Si se multiplica un número real positivo por uno negativo se obtiene	.........si $x > 0$ $\wedge$ .... $\Rightarrow$ $x . y < 0$

- Ejemplo 2:

Unir cada expresión de la columna izquierda con alguna que sea equivalente en la columna derecha.

I- $\forall$ $a \in \mathbb{R}$ $\forall$ $b \in \mathbb{R}$ $a + b = b + a$

II- $\forall$ $x \in \mathbb{N}$ $x > 0$

III- $\forall$ $n \in \mathbb{Z}$ $\exists$ $p \in \mathbb{Z}$ $p = 3. n$

IV- Existe un número real *a* tal que su producto por cualquier otro número real da *a*.

V- Para todo número real, existe un número entero mayor que él.

a) $\exists$ $p \in \mathbb{Z}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $p = 3. n$

b) $\forall$ $x \in \mathbb{R}$ $\exists$ $p \in \mathbb{Z}$ $x < p$

c) $\exists$ $a \in \mathbb{R}$: $a . b = a$ $\forall$ $b \in \mathbb{R}$

d) $\forall$ $a \in \mathbb{Z}$ $\forall$ $b \in \mathbb{Z}$ $a + b = b + a$

e) $\nexists$ $x \in \mathbb{N}$ $x \leq 0$

f) $\exists$ $p \in \mathbb{Z}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $x < p$

g) $\exists$ $x \in \mathbb{N}$ $x > 0$

h) $\exists$ $a \in \mathbb{R}$: $a . b = a$

i) $\forall$ $a, b \in \mathbb{R}$ $a + b = b + a$

j) $\forall$ $m \in \mathbb{Z}$ $\exists$ $q \in \mathbb{Z}$ $q = 3. m$

- Ejemplo 3:

Escribir simbólicamente las siguientes expresiones:

a) Todo número entero sumado a su opuesto da cero.

b) Cualquier número real sumado a cero da el mismo

c) No todos los números enteros son positivos.

d) Existe un único número entero mayor que 2 y menor que 4.

e) Ningún número real es mayor que sí mismo.

f) No existe ningún número entero mayor que 2 y menor que 3.

- Ejemplo 4:

Escribir en lenguaje coloquial las propiedades expresadas en forma simbólica:

a) $\forall\ x \in \mathbb{Z}\quad x - 1 < x$

b) $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \ \forall\ b \in \mathbb{R}\ \ a + b = b + a$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x \neq 0\quad x : x = 1$

d) $\exists\ x \in \mathbb{Z}\quad x < 0$

e) $\nexists\ n \in \mathbb{N}\quad n < 1$

f) $\forall\ x \in \mathbb{N}\quad x = 2.k\ \vee\ x = 2.k + 1\ ,\ \ k \in \mathbb{N}$

- Ejemplo 5:

Determinar la verdad o falsedad de las expresiones dadas. Para las que resulten ser verdaderas, mostrar un ejemplo y para las falsas, dar un contraejemplo.

a) $\forall\ x, y \in \mathbb{R}, x.y \geq 0 \Leftrightarrow\ x \geq 0\ \wedge\ y \geq 0$

b) $\forall\ x, y \in \mathbb{R}\ \ \exists\ z \in \mathbb{R}\quad z = (x + y) / 2$

c) $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \ \exists\ b \in \mathbb{N}\quad a \leq b$

d) Sea $x \in \mathbb{R}$, si $x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

María Laura Distéfano. Profesora en Matemática. Ms. en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Docente e investigadora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata. mldistefano@fi.mdp.edu.ar

Sebastián Urquijo. Licenciado en Psicología. Ms. en Psicología Educacional. Dr. en Psicología Educacional. Docente e investigador del Centro de Investigación en Procesos Básicos, Metodología y Educación, Facultad de Psicología, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. CONICET. urquijo@mdp.edu.ar

Susana González de Galindo. Licenciada en Matemática. Ms. en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Docente e investigadora de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia, Universidad Nacional de Tucumán. Argentina. sgalindo@fbqf.unt.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 71-91
ISSN: 1815-0640

Homotecias y su aplicación en la extensión del Teorema de Pitágoras en Didáctica del Análisis Matemático

Julio César Barreto García

Resumen

En este artículo mostraremos unas extensiones del Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica, tomando en consideración el área de las figuras geométricas que están sobre los lados de un triángulo rectángulo y de esta manera ver que se cumple la relación Pitagórica para cualquier tipo de figuras que cumplan cierta condición. En particular, esta extensión la vamos a realizar usando aplicaciones de homotecias a las funciones que se generen de las figuras geométricas, para lo cual cuadratura es lo mismo que decir área.

Abstract

In this article we consider an extension of the classical geometric Pythagoras theorem, taking into consideration the areas of the geometric figures which by on the side of rectangular triangle. In this way we see that the Pythagoras relationship holds for every kind of figures which satisfy certain conditions. In particular, this extension we will make use of dilation applications to the functions that are generated from the geometric figures, for which squaring is the same as saying the area.

Resumo

Neste artigo mostraremos umas extensões do Teorema de Pitágoras em seu acepción geométrica, tomando em consideração o área das figuras geométricas que estão sobre os lados de um triángulo rectángulo e desta maneira ver que se cumpre a relação Pitagórica para qualquer tipo de figuras que cumpram certa condição. Em particular, esta extensão vamos realizá-la usando aplicações de homotecias às funções que se gerem das figuras geométricas, para o qual cuadratura é o mesmo que dizer área.

1. Introducción

El campo de la Didáctica de la Matemática, durante la década de los noventa, considero la problemática del aprendizaje de las matemáticas en términos de procesos cognitivos y ya no como una simple adquisición de competencias y de habilidades según Carmen G. y Matías C. en la primera referencia. Además, en esa misma época, se amplia el campo de los problemas investigados, hasta entonces muy centrado en los conceptos básicos de las Matemáticas de la enseñanza primaria (que corresponde al “pensamiento matemático elemental” entre los cuales cabe destacar la Didáctica de la Geometría, por ejemplo), a cuestiones relacionadas con el pensamiento matemático propio de los currículos de los últimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios.

Este desarrollo de la investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el Análisis Matemático, considerando además los procesos asociados de definición, prueba y demostración, ha venido enriqueciendo los modelos que sirven para describir los procesos cognitivos de aprendizaje de los estudiantes en este nivel donde el pensamiento no solo debe ser más abstracto sino que además debe ser mas formal a la hora de definir los entes involucrados en la teoría y de demostrar los que sean necesarios al momento de desarrollar un tema especifico según Carmen G. y Matías C.

2. Relevancia Del Trabajo Para La Educación Matemática

Cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que destaca el proceso de abstracción la cual consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente. Según Carmen G. y Matías C. de las cuales tomaremos parcialmente en cuenta sus reflexiones, no se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: La progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente mas psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar.

Además comentan Carmen G. y Matías C. que una de las formas de establecer la diferencia entre las matemáticas elementales y las avanzadas es considerar que, en las primeras, los objetos se describen como es el caso de homotecias en bachillerato, mientras en las segundas a nivel universitario, se definen y se le pueden dar características superiores como transformaciones. Si nos referimos al lenguaje, en ambos casos se utiliza el lenguaje natural para relacionar las actividades matemáticas con el contexto, sea matemático sea del mundo externo, y para describir o enunciar las propiedades de los objetos. Sin embargo, en las matemáticas elementales las descripciones se construyen sobre la experiencia (percepción visuo-espacial, interacción con proceptos[1] operacionales), mientras que en el más alto nivel de las matemáticas avanzadas (conocimiento formal), las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones.

Carmen G. y Matías C. dicen que al adquirir un concepto matemático se puede describir como construir un esquema conceptual del mismo. Saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado; en realidad, comprender quiere decir tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: Imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias, sensaciones.

3. Marco Teórico y Calidad Bibliográfica

En los Modelos Cognitivos se considera de acuerdo a Carmen G. y Matías C, por un lado, la definición de un concepto matemático como una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. Se podrá distinguir entre las definiciones formales, convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado (que se suelen

[1] Procepto es una traducción que usa Carmen G. y Matías C. de la expresión original inglesa procept, que proviene de proceso (process) y de concepto (concept).

encontrar escritas en los libros y más aun en manuscritos antiguos), y las definiciones personales que utilizan las personas (estudiantes, profesores, matemáticos) como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal. Desde otra perspectiva, una de las razones de la complejidad del conocimiento matemático superior es que, en su mayoría, los conceptos del pensamiento matemático avanzado pueden jugar el papel de procesos y de objetos, según la situación planteada o el nivel de conceptualización del estudiante.

> *Sfard (1991) habla de dos tipos de concepciones de un mismo concepto matemático: Las concepciones que llama operacionales cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos dinámicos, algoritmos y acciones, y las concepciones estructurales cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos estáticos. Si bien afirma que los dos tipos de concepciones son complementarias ("la habilidad para ver una función o un número, a la vez como un proceso y como un objeto es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas, cualquiera que sea la definición de 'comprender'"), ella considera que las concepciones operacionales preceden a las estructurales (On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, Vol. 22, pp. 1-36).*

La acción sobre objetos matemáticos nos lleva a considerar un tipo de desarrollo cognitivo distinto, relacionado con el problema de la dualidad proceso-objeto y la noción de lo que llama precepto. El estudio de un gran número de casos, en todos los niveles de las matemáticas pero especialmente en niveles superiores, en que un proceso y su producto se representan mediante el mismo símbolo, indujo a Tall (1995) a definir el término procepto: "Definimos un procepto como un objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que se puede usar para significar cualquiera de los dos o los dos." (Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary lecture, Proceedings of PME 19, Recife (Brasil)). Por ejemplo:

- La expresión $f(x) = x^2 - 9$ representa simultáneamente el proceso de cómo calcular el valor de la función $f(x)$ para un valor particular de x y el objeto, es decir el concepto de función para un valor general de x. Se habla de un procepto "molde".
- En cuanto a las expresiones: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 9}{x - 1}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{senx}{x}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

  representan el proceso de tender a un límite y el objeto valor del límite, pero sin incluir el procedimiento de calculo especifico para obtener ese valor. En este caso se trata de un procepto "estructural".

Según Carmen G. y Matías C. de aquí surge la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: Representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría.

4. Metodología y Resultados

Duval (1996, 1999)[2], considera dos características esenciales de la actividad matemática:

> *El cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica. Por ejemplo, si se consideran los registros de representación: lingüísticos (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) u otros registros (figuras geométricas, gráficos cartesianos, tablas, etc.), se entiende por cambio de registro de representación "a la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico". Por ejemplo, realizamos un cambio cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función. Por otro lado, como en el dominio del conocimiento matemático se movilizan diferentes registros de representación, también es necesario coordinarlos.*

Se trata de un estudio del Teorema de Pitágoras visto desde una acepción geométrica realizado en diversos eventos de *Educación Matemática* tanto nacionales como internacionales, donde participaron diferentes estudiantes y profesores en esta área. Se diagnostico mediante una serie de actividades en torno a la *deducción* que se ha realizado alrededor de este teorema tan importante para la matemática en general; la extensión la haremos usando propiedades de homotecias, desde un punto de vista geométrico y grafico de funciones polinómicas (lineales como las constantes o las identidad, de valor absoluto, cuadráticas bien sean implícitas o despejadas explícitamente, etc.) hasta ahora definidas previamente.

5. Transformaciones Geométricas

"Comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante" y es el resultado de "una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales". Dreyfus (1991).

Transformación geométrica es la operación que permite deducir una nueva figura de otra dada. Por tanto, existirán elementos origen y elementos transformados. El interés del estudio de las transformaciones radica en la posibilidad de facilitar la resolución de problemas gráficos de difícil resolución. En estos casos, se aplica una transformación a los datos, convirtiéndolos en otros de disposición más sencilla, con los que se resuelve el problema. Después basta aplicar a esta solución la transformación inversa para obtener el resultado buscado.

Clasificación de transformaciones:

a) Transformaciones **isométricas:** son aquellas que conservan las dimensiones y los ángulos entre la figura original y su transformada. También se llaman movimientos. Ejemplos: simetrías, traslación, giro.

b) Transformaciones **isomórficas** o **conformes:** son aquellas que sólo conservan la forma; es decir, en ellas los ángulos de la figura original y de la transformada son iguales y las longitudes proporcionales. Por ejemplo, la homotecia.

---

[2] *(1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 6, 3, pp. 349-382. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. Actas del PME 23, pp. 3-26.*

c) Transformaciones **anamórficas:** son aquellas que cambian la forma entre la figura original y la transformada. Por ejemplo, la inversión y la homología.

Homografía

Se denomina homografía a cualquier transformación proyectiva que establece una correspondencia entre dos formas geométricas, de modo que a un elemento, punto o recta, de una de ellas le corresponde otro elemento de la misma especie, punto o recta de la otra.

Homología

Es una transformación homográfica resultante de efectuar una proyección desde un punto, en la que a cada uno de los puntos y de las rectas de una figura plana le corresponden, respectivamente, un punto y una recta de su figura homológica, de modo que se cumplan unas determinadas condiciones.

Cuando tenemos el centro $O,$ dos puntos homólogos y el eje. Sirve para obtener dos figuras homólogas. El sistema se usa para hallar secciones en diédrica, veamos la siguiente figura:

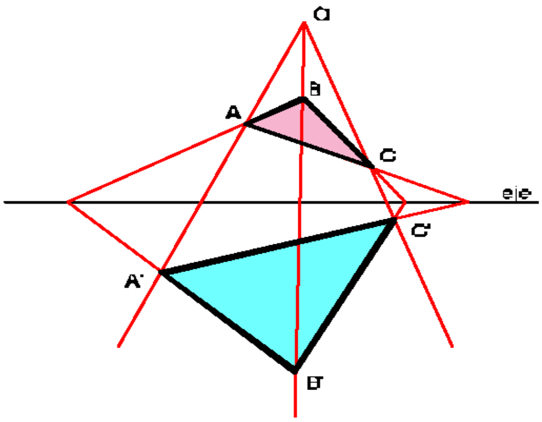


Figura 1: Homología

Afinidad

Es un caso particular de homología. Se dice que tenemos una afinidad homológica o simplemente afinidad cuando se conocen dos puntos homólogos y el eje, encontrándose el centro de homología en el infinito, veamos la siguiente figura:

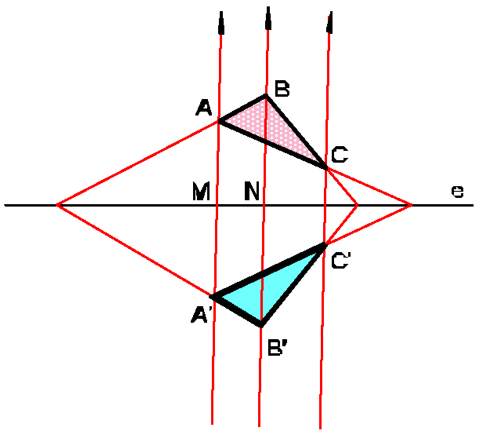


Figura 2: Afinidad

Homotecia

En una homotecia se dan el centro, el eje que se encuentra en el infinito y dos puntos homólogos, veamos la siguiente figura:

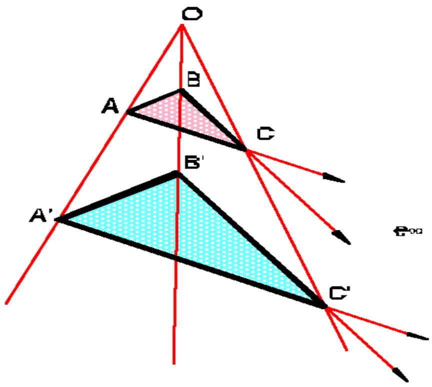


Figura 3: Homotecia

En la figura vemos que si dos triángulos que no son iguales, tiene sus lados respectivamente paralelos son homotéticos. Además, se puede probar que dos figuras homotéticas son semejantes, como un caso ilustrativo veremos, más adelante, las graficas de la Figura 9 colocadas en un mismo eje de coordenadas. Profundicemos en este último concepto:

<u>Definición 1:</u> Se llama homotecia de centro O y razón k (distinto de cero) a la transformación que hace corresponder a un punto A otro A', alineado con A y O, tal que: $OA' = k \cdot OA$. Si $k > 0$ se llama homotecia directa y si $k < 0$ se llama homotecia inversa.

Homotecias de centro en el origen de coordenadas

En una homotecia de origen el centro de coordenadas se puede ver con facilidad la relación que existe entre las coordenadas de puntos homotéticos. Si se considera $A(x; y)$ y su homotético $A'(x'; y')$ la relación que hay entre ellos es la siguiente: $x' = k.x; y' = k.y$.

La homotecia es una transformación geométrica que no tiene una imagen congruente, ya que a partir de una figura dada se obtienen una o varias figuras en tamaño mayor (agrandada) o menor (reducida) de la figura dada, pero conservando sus proporciones. La homotecia conserva también ángulos y la alineación. Las dimensiones de dos figuras por homotecia son directamente proporcionales; esta proporción es fijada por la constante de homotecia la cual multiplica las longitudes por la relación de homotecia k, las áreas se multiplican por k^2, etc.

Teorema de Thales. Semejanza de polígonos.

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra.

El Teorema de Thales es una aplicación directa de las propiedades de la homotecia.

Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales; es decir, si los triángulos ABC y $A´B´C´$ son semejantes se verifica:

$$A = A´ \quad B = B´ \quad C = C´ \qquad AB / A´B´ = BC / B´C´ = CA / C´A´ = \text{razón de semejanza}$$

Escalas

La representación de objetos a su tamaño natural no es posible cuando éstos son muy grandes o cuando son muy pequeños. En el primer caso, porque requerirían formatos de dimensiones poco manejables y en el segundo, porque faltaría claridad en la definición de los mismos. Esta problemática la resuelve la escala, aplicando la ampliación o reducción necesarias en cada caso para que los objetos queden claramente representados en el plano del dibujo. Se define la escala como la **relación entre la dimensión dibujada respecto de su dimensión real**, esto es:

$$E = \frac{dibujo}{realidad}$$

Si el numerador de esta fracción es mayor que el denominador, se trata de una escala de ampliación, y será de reducción en caso contrario. Basado en el Teorema de Thales se utiliza un sencillo método gráfico para aplicar una escala. Véase, por ejemplo, el caso para E 3:5 en la siguiente figura:

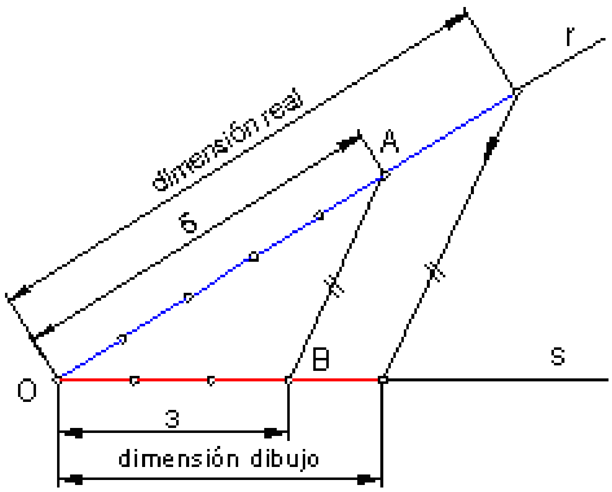


Figura 4: Modelos a escala.

1º) Con origen en un punto O arbitrario se trazan dos rectas r y s formando un ángulo cualquiera.

2º) Sobre la recta r se sitúa el denominador de la escala (5 en este caso) y sobre la recta s el numerador (3 en este caso). Los extremos de dichos segmentos son A y B.

3º) Cualquier dimensión real situada sobre r será convertida en la del dibujo mediante una simple paralela a AB.

Efecto del dibujo a escala sobre las magnitudes lineales, el área y volumen para conocer el efecto que produce el dibujo a escala sobre las magnitudes lineales, se analizará lo que ocurre cuando se amplía un rectángulo de dimensiones a y b hasta obtener un rectángulo de dimensiones $k.a$ y $k.b$, véase la siguiente figura:

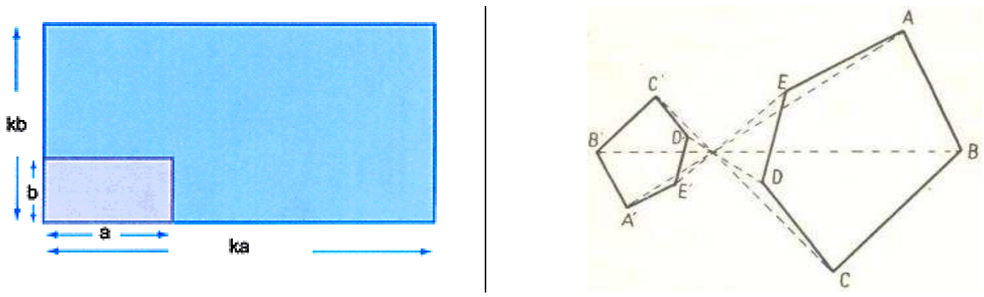


Figura 5: A la izquierda vemos la homotecia de rectángulos. Mientras que a la derecha se generaliza lo ocurrido en la Figura 3, pues cualquier polígono se puede descomponer en triángulos que cumplen esta relación, como estos pentágonos.

Obsérvese la relación que se establece entre el perímetro P del rectángulo original y el perímetro $P´$ del rectángulo ampliado:

$$P = 2a + 2b \text{ y que } P' = 2(ka) + 2(kb).$$

Factorizando k, se obtiene que $P' = k(2a + 2b)$. Sustituyendo $P´ = 2a + 2b$ se llega a que $P´ = k.P$. El perímetro P se transformó, igual que la base y la altura del rectángulo, a continuación se verá si ocurre lo mismo con las áreas.

$$A = ab \text{ y } A' = (ka)(kb) = k^2 ab = k^2 A.$$

Si las longitudes se transforman con una escala k, entonces el área se transforma con una escala k^2. Muestre además que la transformada de un polígono como el de la Figura 5 en una semejanza es otro polígono cuyos ángulos son respectivamente iguales a los de aquel y sus lados son respectivamente proporcionales a los del primero.

Véase lo que ocurre con la longitud de una circunferencia y con el área de un círculo, dado en la siguiente figura:

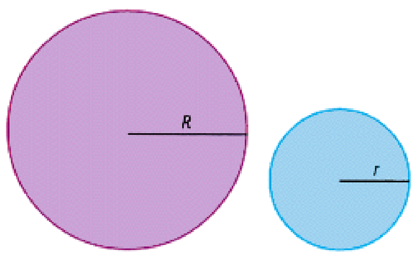


Figura 6: Sabemos que a distancias iguales en una figura corresponden distancias iguales en su transformada, resulta que la figura homotética de una circunferencia es otra circunferencia: Pues, a puntos que equidistan de uno corresponden puntos que equidistan de su homólogo, se muestra la homotecia entre circunferencias y círculos.

Supóngase que el radio del círculo se transformó con una escala de $k<1$, $r=k.R$, o también $k=\dfrac{r}{R}$, comparando las dos medidas de las circunferencias, se tiene que:

$$\frac{L'}{L}=\frac{2\pi r}{2\pi R}=\frac{r}{R}=k.$$

La longitud de la circunferencia se transformó con una escala igual que la de la modificación del radio. Para las áreas se tiene $A=\pi.R^2; A'=\pi.r^2$, luego

$$\frac{A'}{A}=\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=\left(\frac{r}{R}\right)^2=k^2.$$

Nuevamente, se observa que la razón o escala de las áreas es el cuadrado de la escala con la que se transforman las longitudes.

Resumen:

Efecto de las medidas angulares. Siempre que dos figuras o dos sólidos estén a escala, existe semejanza entre ellos; debiendo cumplirse la condición de tener sus ángulos homólogos iguales, pues la medida de un ángulo no la determina la longitud de los lados que lo forman, sino la abertura que hay entre dichos lados; además, sus lados homólogos son proporcionales.

Efecto en las medidas lineales y perímetros. Dos polígonos a escala son semejantes y cumplen, necesariamente, con dos condiciones: Tener sus ángulos homólogos iguales y sus lados homólogos proporcionales.

Efecto de las áreas. La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la escala dada.

Efecto en los volúmenes. La razón de los volúmenes de dos sólidos semejantes es igual al cubo de la escala dada.

Media Proporcional

Media geométrica es cada uno de los términos medios de una proporción geométrica continua, o sea, cada uno de los términos medios de una proporción geométrica, cuando son iguales,, en la proporción 8:4::4:2 la media proporcional es 4.

Teorema

La media proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos. Sea la proporción continua $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$, se demuestra que $b=\sqrt{a.c}$.

En efecto, ya sabemos por la propiedad fundamental que $a.c=b.b$ o sea, $a.c=b^2$. Extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros, tenemos: $\sqrt{a.c}=\sqrt{b^2}$. simplificando: $b=\sqrt{a.c}$ que es lo que queríamos demostrar.

Extensión del Teorema de Pitágoras por medio de homotecias

- **Para figuras poligonales**

Motivación: El Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica dice que las áreas A, B y C de los cuadrados que se forman sobre las longitudes de los catetos y de la hipotenusa respectivamente de un triángulo rectángulo cualquiera cumple la relación $A+B=C$.

Esto puede verse como el área debajo de las funciones constantes dadas por: $f(x)=c$, $g(x)=b$ y $h(x)=a$, (a, b, c números reales), las graficas de estas funciones son líneas horizontales. Llamando $A_c = A_b = A_a$ las áreas bajo las curvas[3] de las funciones f, g y h respectivamente, en la siguiente figura:

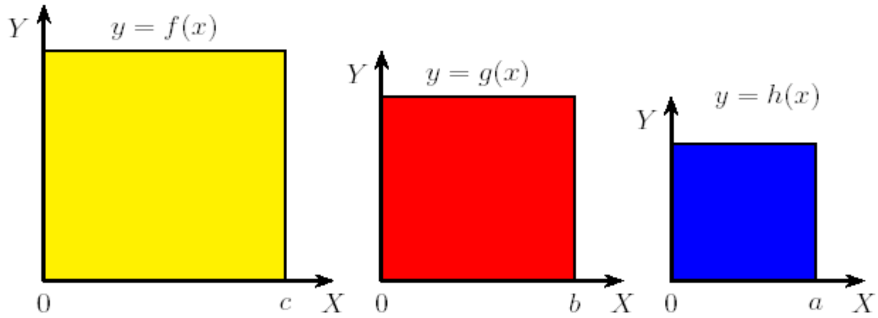


Figura 7: Representación grafica de los cuadrados, a través de una funciones lineales constantes en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor constante en cuestión. Además mostramos el área de cada una de ellas de diferentes colores.

Pero siendo estas funciones Riemann integrables (continuas), tiene sentido:

$A_c = \int_0^c cdx$, donde $f(x)=c$ $\quad = c.\int dx = c\left(x\Big|_0^c\right) = c.(c-0) = c^2$

Análogamente, podemos obtener: $\begin{cases} A_b = b^2, \\ A_a = a^2. \end{cases}$ Y se tiene la relación: $A_a + A_b = A_c$.

Es decir, $a^2 + b^2 = c^2$.

Ahora, tomemos sobre los lados del triángulo rectángulo, triángulos isorrectángulos, cuyos lados iguales son precisamente los lados del triángulo rectángulo, veamos la siguiente figura:

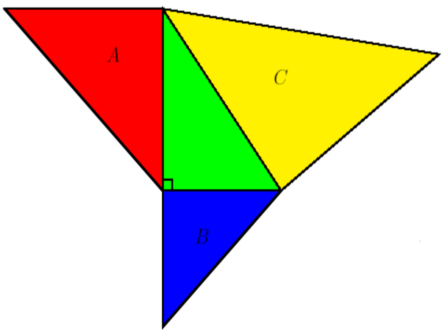


Figura 8: Geométricamente se satisface que $A+B=C$. Y en este caso se cumple el Teorema de Pitágoras al igual que en la Figura 7, lo cual evidentemente se cumple ya que la única diferencia es que estas áreas son la mitad de las otras.

[3] Toda recta es curva (con curvatura nula), pero no toda curva es recta.

Usando la formula para calcular el área de un triángulo, $Área=\frac{Base\times Altura}{2}.$, obtenemos que: $C=\frac{c^2}{2}$; $B=\frac{b^2}{2}$; $A=\frac{a^2}{2}$, los cuales son la mitad del área de los cuadrados dados al comienzo. Satisfaciendo, $A+B=C$. Reduciendo, tenemos:

$$a^2+b^2=c^2.$$

Luego podemos formar las siguientes funciones identidades, las cuales son muy importantes para hacer muchas pruebas en diversas áreas de la matemática y nos van a servir para inducir nuestra demostración al momento de hallar las funciones homotéticas entre las funciones implicadas en la demostración general. Las graficas de estas funciones son rectas que pasan por el origen con pendiente unidad, lo veremos en la siguiente figura:

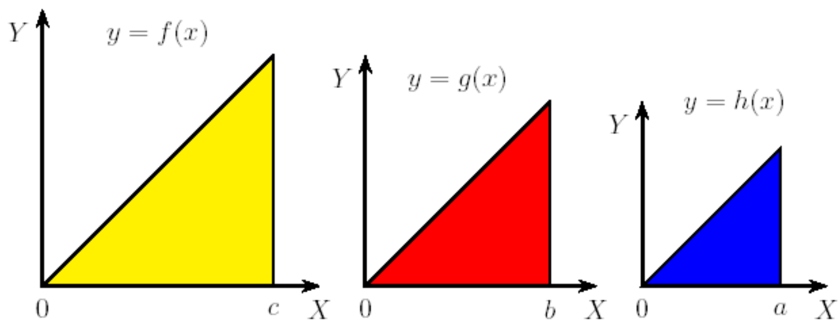


Figura 9: Gráfica de las funciones identidades $f(x)=x,$ entre 0 y $c,$ $g(x)=x,$ entre 0 y b y $h(x)=x,$ entre 0 y $a.$ Además tenemos las correspondientes áreas.

Llamando $A_c=A_b=A_a$ las áreas bajo las curvas[4] de las funciones f,g y h respectivamente y siendo estas funciones Riemann integrables (al ser continúas), tiene sentido:

$$A_c=\int_0^c xdx, \text{ donde } f(x)=x.$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^c\right)=\left(\frac{c^2}{2}-0\right)=\frac{c^2}{2}.$$

Análogamente, podemos obtener: $A_b=\frac{b^2}{2},\ A_a=\frac{a^2}{2}.$

Y se tiene la relación: $A_a+A_b=\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)=\frac{1}{2}\left(c^2\right)=Ac.$

Luego, notemos que si $0\le x\le a$, entonces $0\le\frac{c}{a}x\le c.$ Análogamente ocurre que si $0\le x\le b,$ entonces $0\le\frac{c}{b}x\le c.$ Dada la ampliación a escala de $h,$ tenemos:

[4] Toda recta es curva (con curvatura nula), pero no toda curva es recta.

$$\frac{c}{a}h(x) = \frac{c}{a}x, \text{ pues } h(x) = x.$$

$$= f\left(\frac{c}{a}x\right), \text{ pues } f(x) = x.$$

Así, $h(x) = \frac{a}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right)$., análogamente, $g(x) = \frac{b}{c} f\left(\frac{c}{b}x\right)$.

Donde estas funciones g y h se dicen homotéticas con respecto a f.

Ejemplo: En un triángulo rectángulo, el área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos, esto es:

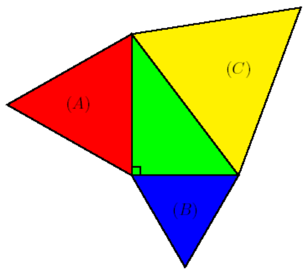


Figura 10: En la figura vemos geométricamente una extensión del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que $(C) = (A) + (B)$.

Una ilustración de la proposición a demostrar es la siguiente:

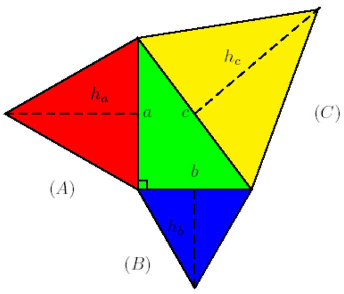


Figura 11: ABC es un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a y b. Aplicamos una *aprehensión operativa de cambio figural* a cada triángulo equilátero.

Si (A), (B) y (C) representan las áreas de los triángulos construidos sobre los lados del triángulo rectángulo ABC, tenemos entonces que (aplicando la versión usual del Teorema de Pitágoras) tenemos que:

$$(B) = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}b\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}b^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}b^2.$$

Análogamente, $$(A) = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2.$$

Así, $$(A) + (B) = \frac{1}{4}\sqrt{3}b^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2 = \frac{1}{4}\sqrt{3}\left(a^2 + b^2\right) = \frac{1}{4}\sqrt{3}c^2 = (C).$$

Luego, Área de (A)+Área de (B)=Área de (C).

Ahora, podemos colocar las funciones siguientes en un eje de coordenadas, donde el triángulo amarillo va a ser nuestra función f, el triángulo rojo va a ser nuestra función g, y el triángulo azul va a ser nuestra función , veámoslo en los siguientes gráficos de la siguiente figura:

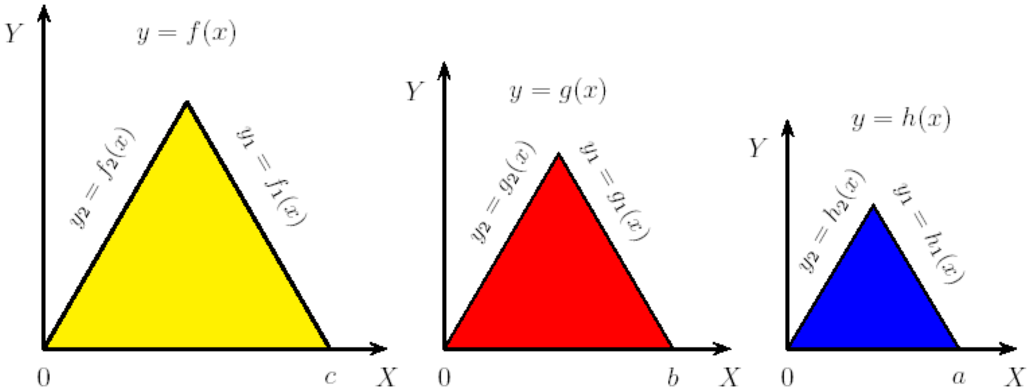


Figura 12: Representación grafica de los triángulos equiláteros, a través de funciones de valor absoluto en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor de longitud en los lados del triángulo. Además mostramos el área de cada una de ellas de diferentes colores.

Luego, la función $y=f(x)$ la obtenemos de la siguiente forma:

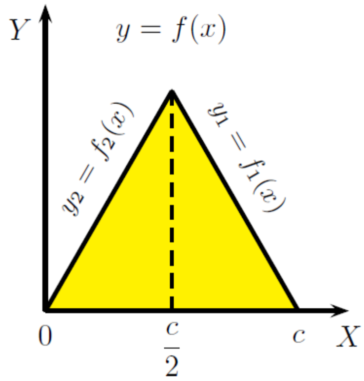


Figura 13: Representación grafica de la función $y=f(x)$.

Ahora sacando algunos cálculos, teniendo en consideración la definición de recta y de valor absoluto, obtenemos:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \text{si } \frac{c}{2}\le x\le c, \\ f_2(x), & \text{si } 0\le x\le \frac{c}{2}. \end{cases} = \begin{cases} -\sqrt{3}x+\sqrt{3c}, & \text{si } \frac{c}{2}\le x\le c, \\ \sqrt{3}c, & \text{si } 0\le x\le \frac{c}{2}. \end{cases}$$

$$=-\left|\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}c, \text{ si } 0\le x\le c.$$

Denotando por A_c el área entre 0 y c de $y=f(x)$. y siendo esta función Riemann integrable, tiene sentido:

$$A_c=\int_0^c f(x)dx=\int_0^{\frac{c}{2}}\sqrt{3}xdx-\int_{\frac{c}{2}}^{c}\sqrt{3}xdx+\frac{\sqrt{3}c^2}{2}. \qquad (*)$$

Ejercicio: Verificar que la función $y = f(x)$. tiene en realidad esta forma y luego realizar los cálculos de A_c para ver que efectivamente da la parte de arriba. Esta función es Riemann integrable pues tiene un solo punto de discontinuidad en $\frac{c}{2}$.

Análogamente, de acuerdo a la función $y = g(x)$ y $y = h(x)$, obtenemos:

$$g(x) = -\left|\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}b}{2}\right| + \frac{\sqrt{3}b}{2}, \text{ si } 0 \leq x \leq b.; \quad h(x) = -\left|\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}a}{2}\right| + \frac{\sqrt{3}a}{2}, \text{ si } 0 \leq x \leq a.$$

Y denotemos también el área debajo de $y = g(x)$ y de $y = h(x)$ por $A_b = \int_0^b g(x)dx$ y $A_a = \int_0^a h(x)dx$, respectivamente. Luego, de acuerdo a la ampliación de escala, tenemos que:

$$\frac{c}{b}g(x) = \begin{cases} \frac{c}{b}g_1(x), & \text{si } \frac{\text{c}}{\text{b}}\left(\frac{b}{2}\right) \leq \frac{c}{b}x \leq \frac{c}{b}(b), \\ \frac{c}{b}g_2(x), & \text{si } \frac{\text{c}}{\text{b}}(0) \leq \frac{c}{b}x \leq \frac{c}{b}\left(\frac{b}{2}\right). \end{cases} = \begin{cases} \frac{c}{b}\left(-\sqrt{3}x + \sqrt{3}b\right), & \text{si } \frac{\text{c}}{2} \leq \frac{c}{b}x \leq c, \\ \frac{c}{b}\left(\sqrt{3}x\right), & \text{si } 0 \leq \frac{c}{b}x \leq \frac{c}{2}. \end{cases}$$

$$= -\left|\sqrt{3}\frac{c}{b}x - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}c, \quad \text{si } 0 \leq \frac{c}{b}x \leq c.$$

$$= f\left(\frac{c}{b}x\right).$$

Es decir, $$g(x) = \frac{b}{c}f\left(\frac{c}{b}x\right), \text{ con } f\left(\frac{c}{b}x\right) = -\left|\sqrt{3}\frac{c}{b}x - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Análogamente, $$h(x) = \frac{a}{c}f\left(\frac{c}{a}x\right), \text{ con } f\left(\frac{c}{a}x\right) = -\left|\sqrt{3}\frac{c}{a}x - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Ahora, integrando según Riemann tenemos que:

$$\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \frac{a}{c}I_1 + \frac{b}{c}I_2. \qquad (1)$$

Donde calculando I_1 obtenemos: $I_1 = \sqrt{3}\frac{a}{c}\int_0^{\frac{c}{2}} udu - \sqrt{3}\frac{a}{c}\int_{\frac{c}{2}}^{c} udu + \sqrt{3}\frac{ca}{2}$.

Es decir, $$\frac{a}{c}I_1 = \sqrt{3}\frac{a^2}{c^2}\int_0^{\frac{c}{2}} udu - \sqrt{3}\frac{a^2}{c^2}\int_{\frac{c}{2}}^{c} udu + \frac{\sqrt{3}a^2}{2}.$$

Análogamente, $$\frac{b}{c}I_1 = \sqrt{3}\frac{b^2}{c^2}\int_0^{\frac{c}{2}} udu - \sqrt{3}\frac{b^2}{c^2}\int_{\frac{c}{2}}^{c} udu + \frac{\sqrt{3}b^2}{2}.$$

Por tanto, de (1) tenemos:

$$\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \int_0^{\frac{c}{2}} \sqrt{3}udu - \int_{\frac{c}{2}}^{c} \sqrt{3}udu + \frac{\sqrt{3}c^2}{2} = A_c \quad \text{(de acuerdo a (*), pues la variable se dice que es muda).}$$

Así, $A_a + A_b = A_c$. O bien, $\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \int_0^c f(x)dx.$

Ejercicio: Realizar los cálculos anteriores para verificar los resultados.

- **Para figuras curvilíneas**

Cuando son semicírculos los que están en los lados del triángulo rectángulo, veamos el siguiente ejemplo inductivo:

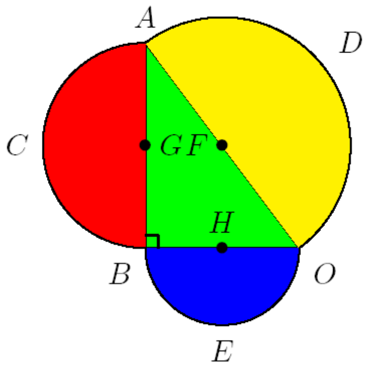


Figura 14: En la figura vemos geométricamente una extensión del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que el área del semicírculo amarillo es igual a la suma de las áreas de los semicírculos rojo y azul.

Calculando:

- Área del semicírculo de diámetro $\overline{OB}$: $A_{BEOH} = \dfrac{\pi.\overline{OB}^2}{8}$.
- Área del semicírculo de diámetro $\overline{AB}$: $A_{BCAG} = \dfrac{\pi.\overline{AB}^2}{8}$
- Área del semicírculo de diámetro $\overline{OA}$: $A_{ADOF} = \dfrac{\pi.\overline{OA}^2}{8}$

Así, comparando las sumas de las áreas obtenidas en (1), (2) y (3) tenemos que:

$$\frac{\pi\overline{OB}^2}{8} + \frac{\pi\overline{AB}^2}{8} = \frac{\pi}{8}(\overline{OB}^2 + \overline{AB}^2) = \frac{\pi}{8}\overline{OA}^2.$$

O lo que es equivalente: $A_{BEOH} + A_{BCAG} = A_{ADOF}$.

Ejercicio: Ahora bien, lo que queremos ver es que se cumple:

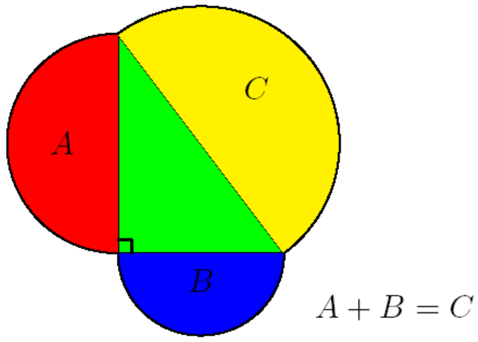


Figura 15: En la figura vemos geométricamente una extensión del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que $C = A + B$.

Deduzca las funciones siguientes:

$$f(x) = \sqrt{\frac{c^2}{4} - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2}. \qquad g(x) = \sqrt{\frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}. \qquad h(x) = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}.$$

Donde las funciones las colocamos en un eje de coordenadas, en el cual el semicírculo amarillo va a ser nuestra función f, el semicírculo rojo va a ser nuestra función g y el semicírculo azul va a ser nuestra h, podemos verlo en los siguientes gráficos:

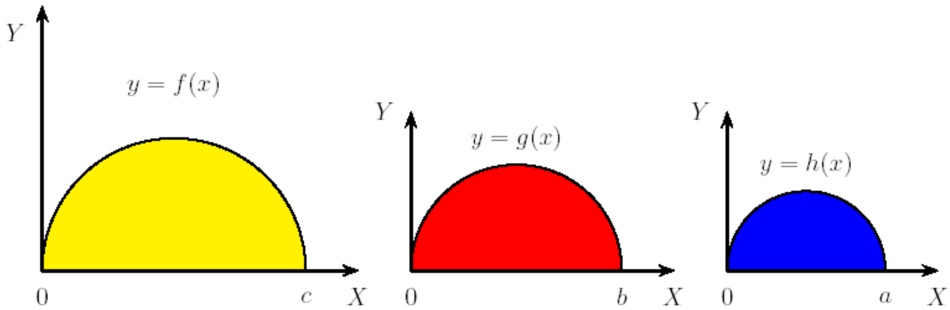


Figura 16: Representación grafica de los semicírculos, a través de una funciones cuadráticas (o inversa de estas como lo son las raíces cuadradas) en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor de longitud en los lados del triángulo rectángulo dado. Además mostramos el área de cada una de ellas de diferentes colores.

Además tenemos:

$$g(x) = \frac{b}{c} f\left(\frac{c}{b}x\right), \text{ con } f\left(\frac{c}{b}x\right) = \sqrt{\frac{c^2}{4} - \left(\frac{c}{b}x - \frac{c}{2}\right)^2}.$$

$$h(x) = \frac{a}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right), \text{ con } f\left(\frac{c}{a}x\right) = \sqrt{\frac{c^2}{4} - \left(\frac{c}{a}x - \frac{c}{2}\right)^2}.$$

Denotando por A_c el área entre 0 y c de $y = f(x).$, esto es $A_c = \int_0^c f(x).dx$ y para calcular también el área debajo de $y = g(x)$ y $y = h(x)$ denotemos por $A_b = \int_0^b g(x).dx$

y $A_a = \int_0^a h(x).dx$, respectivamente. Integrando según Riemann, llegue a la conclusión que se cumple: $\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \int_0^c f(x)dx.$

En el caso que sean lúnulas las que están sobre los lados del triángulo rectángulo.

<u>Ejercicio</u>: En este caso veamos que se verifique:

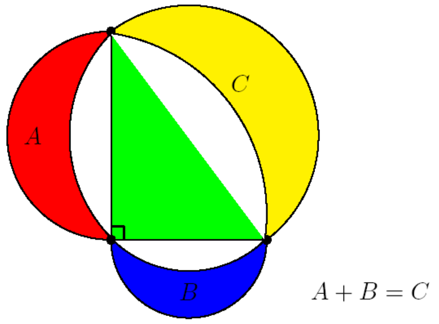


Figura 17: En la figura vemos geométricamente una extensión del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que $C = A + B$.

Deduzca las funciones siguientes:

- $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, donde $f_1(x) = \sqrt{\frac{c^2}{4} - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2}$ y $f_2(x) = \sqrt{\frac{c^2}{4} - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2} - \frac{c}{2}.$
- $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$, donde $g_1(x) = \sqrt{\frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}$ y $g_2(x) = \sqrt{\frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}.$
- $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$, donde $h_1(x) = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$ y $h_2(x) = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}.$

Donde las funciones las colocamos en un eje de coordenadas, en el cuál las lúnulas amarilla, roja y azul van a ser nuestras funciones *f*, *g* y *h* respectivamente, veámoslo en los siguientes gráficos:

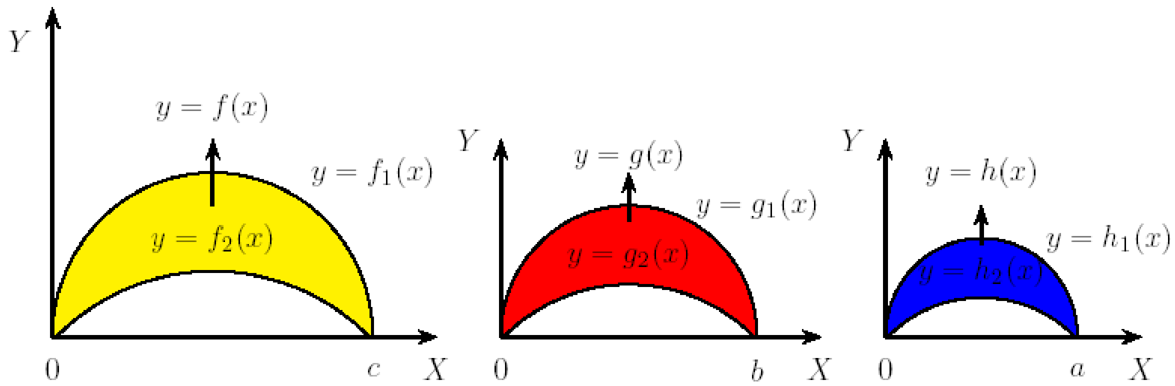


Figura 18: Representación grafica de las funciones cuadráticas como las anteriores o más bien sus inversas, a través de diferencias de funciones cuadráticas en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor de longitud en los lados del triángulo rectángulo dado. Además mostramos el área de cada una de ellas de diferentes colores.

Además tenemos:

$$g(x)=\frac{b}{c}f\left(\frac{c}{b}x\right), \text{ con } f\left(\frac{c}{b}x\right)=f_1\left(\frac{c}{b}x\right)-f_2\left(\frac{c}{b}x\right).$$

$$h(x)=\frac{a}{c}f\left(\frac{c}{a}x\right), \text{ con } f\left(\frac{c}{a}x\right)=f_1\left(\frac{c}{a}x\right)-f_2\left(\frac{c}{a}x\right).$$

Deduzca adecuadamente, las funciones:

$$f\left(\frac{c}{b}x\right)=f_1\left(\frac{c}{b}x\right)-f_2\left(\frac{c}{b}x\right) \text{ y } f\left(\frac{c}{a}x\right)=f_1\left(\frac{c}{a}x\right)-f_2\left(\frac{c}{a}x\right)$$

Denotando por A_c el área entre 0 y c de $y=f(x).$, esto es $A_c=\int_0^c f(x).dx$ y para calcular también el área debajo de $y=g(x)$ y $y=h(x)$ denotemos por $A_b=\int_0^b g(x).dx$ y $A_a=\int_0^a h(x).dx$, respectivamente. Integrando según Riemann, llegue a la conclusión que se cumple:

$$\int_0^a h(x)dx+\int_0^b g(x)dx=\int_0^c f(x)dx.$$

> *"La estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto; se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo y va cambiando según el individuo madura y halla nuevos estímulos..." Donde se entiende imagen mental como el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en su mente, incluyendo cualquier representación del concepto (gráfica, numérica, simbólica,...)*Tall y Vinner, 1981.

❖ **Demostración general**

Dado el siguiente problema:

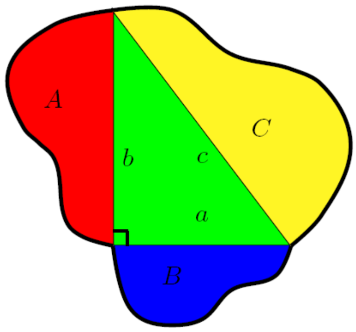


Figura 19: En la figura vemos geométricamente una extensión del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que $C=A+B$.

Deduzca las transformaciones: $g(x)=\frac{b}{c}f\left(\frac{c}{b}x\right)$ y $h(x)=\frac{a}{c}f\left(\frac{c}{a}x\right)$.

Donde las funciones homotéticas son:

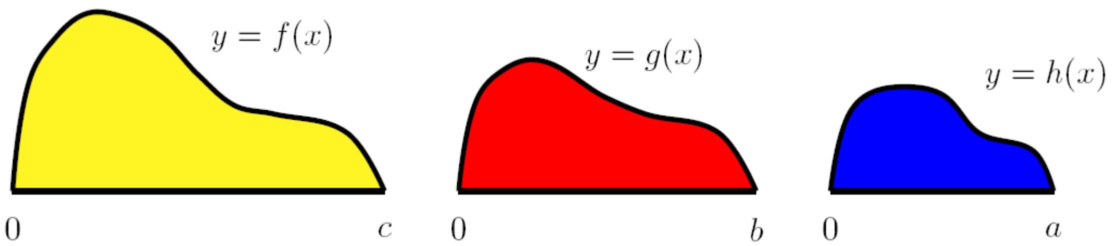


Figura 20: Representación grafica de las generales en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor de longitud en los lados del triángulo rectángulo dado. Además mostramos el área de cada una de ellas de diferentes colores.

Y pruebe que se cumple lo siguiente: $\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \int_0^c f(x)dx.$

<u>Ejercicio</u>: Hallemos las transformaciones de semejanzas que tienen g y h con f. Primero veamos la transformación de g con respecto a f. Sean las siguientes gráficas de f y g:

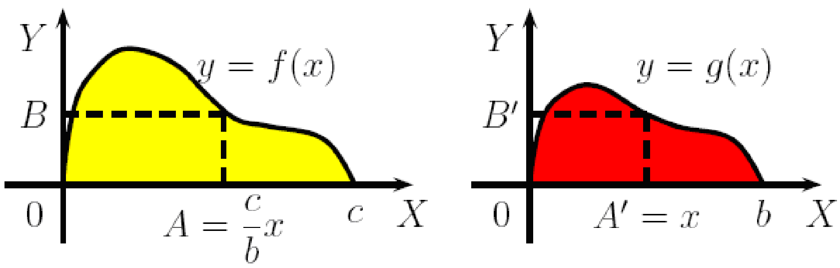


Figura 21: Representación de las funciones f y g, para hallar las correspondientes transformaciones entre ellas.

Definamos por homotecia las transformaciones:

$$g:[0,c] \to [0,b] \qquad x \to g(x) = \frac{b}{c} f\left(\frac{c}{b}x\right)$$

Y además, $$h:[0,c] \to [0,a] \qquad x \to h(x) = \frac{a}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right)$$

Ahora, hallemos el área de g y h, y verifique que es igual a $A_b = \frac{b^2}{c^2}A_c$.

Análogamente, podemos obtener que $A_a = \frac{a^2}{c^2}A_c$.

Así, $A_a + A_b = \frac{a^2}{c^2}A_c + \frac{b^2}{c^2}A_c = A_c$ (pues el triángulo es rectángulo)

Por tanto, $\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \int_0^c f(x)dx$.

❖ Para Regiones en General

En la siguiente figura:

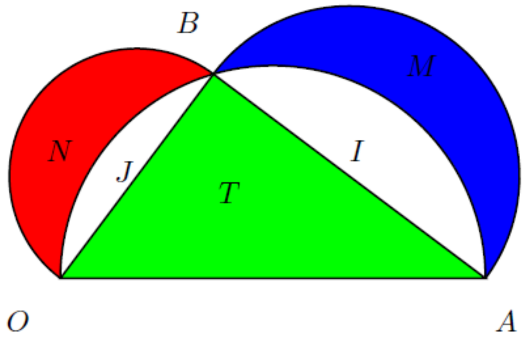


Figura 22: Representación de un triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia y las lúnulas construidas sobre sus catetos.

Demostrar en este ejercicio muy particular que:

$$\text{Área } T = \text{Área } M + \text{Área } N.$$

Ejercicio: Deduzca para estas regiones bajo estas curvas y esta recta funciones e intégrelas según Riemann para ver que en realidad se cumple algo parecido a lo anteriormente expuesto. Aplique relación del triángulo rectángulo y haga diferencias entre ellas para llegar al cálculo del área deseada.

Interpretaciones y conclusiones

En el estudio de estas extensiones del Teorema de Pitágoras, nuestros estudiantes aprenderán a expresar las áreas de unas figuras geométricas en función de sus homotéticas, como es el caso del área del cuadrado. Y además aprenderán lo que realmente significa la palabra extensión o generalización en matemática, partiendo de la *deducción* del Teorema de Pitágoras en una acepción geométrica donde son cuadrados los que están sobre los lados de un triángulo rectángulo.

En otro orden de ideas, así como podemos transformar un rectángulo como vimos en la nota histórica, también podemos tener un triángulo equilátero que tenga la misma área que la suma de otros dos triángulos equiláteros de base dada usando este teorema tan importante. Así mismo, podemos hacer con dos semicírculos (o círculos) con diámetros dados, formar un semicírculo (o círculo) de área igual a la suma de estas dos, con las lúnulas, etc. Por lo que puedo decir que si de Leonardo da Vinci tenemos forma de perfecta en la cuadratura humana del hombre de Vitruvio donde en el pensamiento renacentista: *El hombre medida de todas las cosas, la belleza ajustada a cánones, equilibrio, proporción…* En los Pitagóricos tenemos: *La belleza de las cuadraturas y de las homotecias en las formas geométricas y sobre la hipotenusa la razón áurea de la perfección geométrica en donde descansa la perfección del mundo en general, de acuerdo a sus diferentes formas, patrones y dimensiones…*

Bibliografía

Azcárate, C.; Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Venezuela: *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. 10(2), pp. 135-149.

Barreto J,. (2007). Otras deducciones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia de la matemática, como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Memorias del VI Congreso Venezolano de Matemática. (pp. 537-546). Maracay: UPEL.

Barreto J,. (2008). Deducciones de las formulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. Números (69). Recuperado 17/03/2008, en:http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02-php

Barreto J,. (2008). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. [Versión electrónica], *Números* (69). Recuperado el 17 de Marzo de 2008.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical thinking processes. En Tall, D(Ed) Advanced Mathematical thinking. Dordrecht. Kluwer, A.P. p. 25-41.

González, F. (2005). Resolución de Problemas. *Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática*. IX Escuela. Mérida, Venezuela, Agosto de 2005.

Mora, D.. (2002). *Didáctica de las matemáticas en la educación venezolana*. Ediciones Biblioteca-EBUC. Caracas, Venezuela.

Torregrosa, G.; Quesada, H. (2007). Coordinación de los proceso cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 10(2), pp. 275-300. México.

Julio César Barreto García, Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado” en Barquisimeto y estudiante de Educación Mención Matemática en la Universidad Nacional Abierta Centro Local Yaracuy, Venezuela. Este artículo es el fruto de: Ponencias presentada con Publicación Arbitrada en la Memorias del evento y Taller dictado en Maracay (VI Congreso Venezolano de Educación Matemática) y Comunicación Científica con Publicación no Arbitrada, Póster, Mini Curso y Relato de Experiencia efectuados en Brasil (IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática). Y últimamente presentada como Ponencia en las XXI Escuela Venezolana de Matemática y como Workshops y Poster Exhibition en México (11th INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION); y una Conferencia en Mérida (XII Escuela Venezolana para la enseñanza de la Matemática).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 93-106
ISSN: 1815-0640

A função logarítmica obtida por simetria da função exponencial: explorando visualização

José Carlos Leivas; Maria Tereza Carneiro Soares

Resumo

Este artigo apresenta uma forma de construir o conceito da função logarítmica a partir da modelagem de um problema que conduza à função exponencial. Distingue e utiliza representação de gráficos de funções definidas em conjuntos discretos e contínuos para, a partir de simetrias de funções inversas e respectivas representações, obter a representação da função inversa da exponencial, chamada logarítmica.

Abstract

This article presents a way to build the concept of the logarithmic function from the modeling of a problem that leads to the exponential function. Distinguishes and uses graphical representation of functions defined on sets discrete and continuos, obtaining the representation of the inverse function of the exponential, that is logarithmic function, from the symmetries of inverse functions and their representations.

Resumen

Este artículo presenta una forma de construir el concepto de la función logarítmica a partir de la modelización de un problema que conduzca a la función exponencial. Distingue y utiliza representación de gráficos de funciones definidas en conjuntos discretos y continuos para, a partir de simetrías de funciones inversas y respectivas representaciones, obtener la representación de la función inversa de la exponencial, llamada logarítmica.

1. Introducción

Considerações iniciais

A partir da elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), os quais constituem um referencial que favorece e orienta construções de práticas que promovam a construção de conhecimentos, não somente matemáticos, mas que insiram os estudantes no meio social e do trabalho, algumas inovações na apresentação de conteúdos matemáticos tradicionais urgem por serem implantadas a fim de "superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula." (ibid, p. 59).

Os PCN apontam, ainda, que a organização dos conteúdos, muitas e na maioria das vezes, são apresentados no ambiente escolar de forma demasiadamente hierarquizada, bem como são tratados isoladamente. Entende-se que a conexão entre conteúdos, tradicionalmente abordados em momentos distintos na escola, pode vir a ser um elemento motivador tanto para o professor ao desenvolvê-lo, quanto ao aluno ao construir seu conhecimento. Dessa forma, entende-se que o conhecimento matemático deva ser desenvolvido a partir da escola básica por meio de metodologias que enfatizem novas estratégias, como a que se sugere neste trabalho, rompendo um ciclo tradicional, em que primeiro se faz o estudo e, posteriormente, abordam-se as diversas funções, dentre as quais, a exponencial e a logarítmica, nessa sequência.

No que diz respeito aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 1998b, p. 9) "A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações", sendo esse o caso da função logarítmica que permite compreender problemas relacionados a crescimento populacional, aplicações financeiras e movimentação de placas tectônicas, por exemplo.

O *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM (2008) ao elaborar e divulgar Princípios e Normas para a Matemática escolar indica que "os processos de raciocínio, demonstração, resolução de problemas e representação são utilizados em todas as áreas do conteúdo." (p. 33). Nesse mesmo documento, a Matemática Discreta está incluída, não como uma norma específica a exemplo do que foi introduzido pelo *Curriculum and Evaluation Standards for School Matehematics* de 1989, sendo tratada em todos os anos desde o pré-escolar. Cita, por exemplo, o caso da álgebra na compreensão de padrões, relações e funções, os quais se revelam naturais e interessantes para as crianças em experiências bem precoces. "Do 3º ao 5º ano, poderão começar a usar variáveis e expressões algébricas para descrever e ampliar padrões. No final do secundário, deverão já possuir um à-vontade na utilização da notação das funções para descrever relações." (ibid, p. 40)

Para Vinner e Dreyfus (1989, apud NCTM, 2008) muitos alunos universitários entendem o conceito de função apenas como uma regra ou fórmula, tal como "dado n, determine 2^n para n = 0, 1, 2 e 3".

Assim, na Licenciatura em Matemática, é importante que sejam trabalhados os números e suas dependências, como no caso de funções, em diversas formas de representação, uma vez que "uma das mais poderosas utilizações da matemática é a modelação matemática de fenômenos" (NCTM, 2008, p. 42), e a compreensão de variação é essencial a fim de que possa ser compreendido o conceito de função, uma vez que a variável pode estar num conjunto contínuo ou num conjunto discreto, o que, para muitos, não fica explícito, considerando-se apenas a lei que caracteriza a função, o que leva à representações errôneas do fenômeno, como é o caso apresentado neste artigo.

Frota (2009) afirma que um dos temas importantes da pesquisa em Educação Matemática consiste em investigações sobre estratégias que sejam eficazes para o ensino e para a aprendizagem de funções. A autora investiga e apresenta resultados de pesquisa que buscam verificar as potencialidades da utilização de processos visuais por meio de pensamento visual. Assim, visualização é um processo que, além de interpretação, também envolve representação.

Para Presmeg (1986), existem alunos visualizadores, aqueles que resolvem problemas utilizando métodos visuais e alunos não visualizadores, aqueles que não utilizam tais métodos. A autora afirma que, embora mais difíceis, os métodos visuais apresentam melhores resultados na formação de conceitos e, provavelmente, pela maior dificuldade de utilização desses métodos, estudantes o abandonam e partem para resolução de problema por métodos analíticos.

Existe uma íntima relação entre imaginação, habilidade espacial, diagramas e representação para o desenvolvimento espacial, o que é tratado por diversos autores, tais como Gutierrez e Boero (1993, 2006), Bishop (1989), Dieudonné (1986), Presmeg (1986, 2006), Duval (1998), Hilbert (1932, 2003), Leivas (2009), sendo necessário compreender e investigar tão complexo tema, bem como seus efeitos no currículo, tanto na escola básica quanto no ensino superior.

Segundo Oliveira, Fernandes e Fermé (2007), o conceito de função evoluiu, estando diretamente relacionado aos modos de representação, os quais podem ser numéricos, gráficos ou algébricos, sendo fundamental que se inicie tal estudo utilizando-se das três formas de representação o que, de acordo com a experiência, não é feito, tendo a forma algébrica uma prioridade, especialmente na escola básica. Isso é corroborado por Ponte (1992, apud OLIVEIRA, FERNANDES E FERMÉ, 2007, p. 87) da seguinte forma:

> *Seria má interpretação da importância histórica das representações analíticas e geométricas de função permitir subestimar o papel dos aspectos numéricos na sua aprendizagem, pois nas situações do mundo real, valores numéricos concretos estão subjacentes às expressões analíticas e às curvas geométricas. A este facto acresce as dificuldades que os alunos demonstram em trabalhar com gráficos cartesianos e expressões algébricas, corroboradas por estudos que confirmam que os alunos, perante a necessidade de interpretar relações funcionais representadas graficamente, habitualmente recorrem a estratégias e processos de raciocínio numéricos.*

Dessa forma é que este artigo apresenta diversas maneiras de representação de uma mesma expressão analítica, definida em diversos campos numéricos, para representar funções com gráficos cartesianos.

Algumas pesquisas têm mostrado que o estudo de Geometria na escola básica ainda é centrado em utilização de fórmulas, não dando prioridade a outras dimensões para o seu ensino. Assim, uma das indicações que se faz, para o desenvolvimento de um pensamento geométrico, é apoiar o ensino de Geometria, dentre outros processos, na imaginação. A esse respeito, Hilbert (1932, p. iii), no prefácio de seu livro *Geometry and the Imagination*, indica:

> *Neste livro, é nosso objetivo dar uma apresentação da Geometria, tal como está hoje, em seus aspectos visual e intuitivo. Com a ajuda da imaginação visual, podemos iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração, sem necessariamente entrar em pormenores relacionados com a estrita definição de conceitos e com cálculos reais*.

Já Skemp (1993, p. 100), se reporta a essas características fazendo a seguinte consideração:

> *Nos anos 1880, Galton afirmou que as pessoas se diferenciavam por sua imaginação mental. Algumas, como ele mesmo, possuíam uma forte imaginação visual; outras, nada em absoluto, pensavam principalmente com*

> *palavras. Isto hoje é tão certo como fora então. Há também pessoas que dispõem das duas modalidades, porquanto, talvez, com uma preferência mais para uma do que para outra.*

Para o autor, os símbolos desempenham um papel fundamental na formação de esquemas como estruturas conceituais e um conceito de alguma coisa é puramente mental, e não pode ser audível ou visível.

Além disso, para Skemp (1993), é interessante observar as diferenças individuais de imaginação apontadas por Galton.

> *Se é correto que pensemos que imaginação visual é a mais favorável à integração de ideias; e se não é acidental que quando nos tornamos conscientes de como as ideias se relacionam umas a outras, nos referimos à experiência como insight, não como um ouvir interior; então podemos racionalmente estabelecer a hipótese de que as pessoas que têm sobressaído por sua contribuição matemática e científica usaram mais da imaginação visual do que a auditiva. (SKEMP, 1993, p. 118)*

Para Leivas (2009, p. 20):

> *Imaginação é uma forma de concepção mental de um conceito matemático, o qual pode vir a ser representado por um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação dos mesmos, com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito*.

A partir da imaginação pode-se verificar como um conceito poderá ser comunicado, particularmente, o conceito de função logarítmica e para tal, Leivas (2009, p. 22) define "visualização como sendo um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos".

O objetivo deste trabalho é apresentar uma sugestão para o ensino e construção do conceito de **função logarítmica** a partir da íntima relação entre imaginação, habilidade espacial, diagramas e representação gráfica da função exponencial.

A seguir, retoma-se o conceito de função, especialmente ao considerá-lo como uma tríade e não apenas a partir da lei que a caracteriza, bem como o conceito de gráfico de função, o que não é muito explorado na literatura, especialmente nos manuais didáticos existentes.

Funções e gráficos de funções

Chama-se função ou aplicação à terna constituída de:

- um conjunto A denominado de conjunto de partida ou domínio;
- um conjunto B denominado de conjunto de chegada ou contradomínio;
- uma lei f que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.

Usa-se a simbologia $y = f(x)$ para a função ou aplicação e $f(A)= \{y \in B \mid y = f(x)$ com $x \in A\}$ para o conjunto imagem dela. Quando o conjunto A é o conjunto dos números reais ou um subconjunto dele, deixa-se a denominação de aplicação e usa-se o termo função f, a qual é dita de variável real e, quando o conjunto B é o conjunto dos números reais ou um subconjunto dele, a função é dita função real.

Dessa forma, quando A e B forem o conjunto dos reais ou subconjunto dele, tem-se função real de variável real e, nesse caso, faz sentido falar em valores da função para os respectivos f(x).

O gráfico cartesiano de uma função é um conjunto de pontos (x, f(x)) do plano cartesiano, correspondentes aos pares ordenados em que a primeira componente, corresponde os valores que x assume no campo de definição da função, ou seja, seu domínio, e as segundas componentes são os respectivos valores das imagens desses. As figuras abaixo mostram gráficos de três funções diferentes, expressas pela mesma lei f, porém com conjuntos domínios diferentes. Esse tipo de consideração, muitas vezes, não é feito, nem na escola básica e nem no ensino superior, em disciplinas ditas de fundamentos matemáticos.

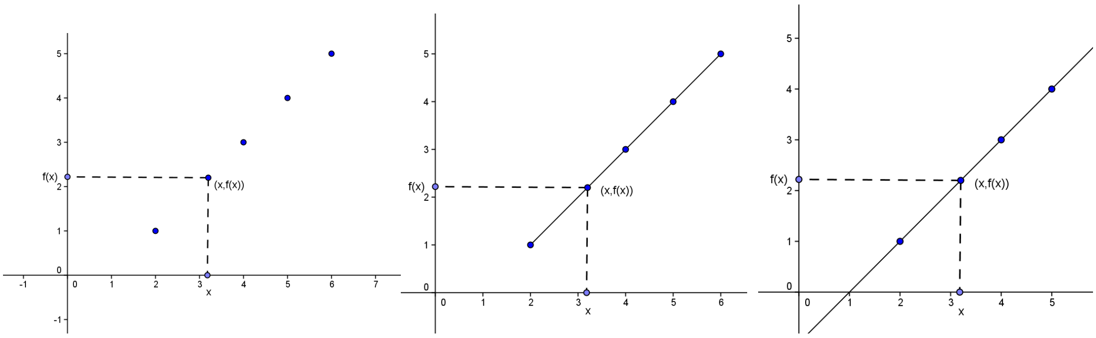


Figura 1. Gráficos de funções expressas por uma mesma lei em domínios distintos.

O primeiro dos gráficos corresponde a uma função cujo domínio é o conjunto discreto {2,3,4,5,6}. No segundo, o domínio é dado pelo intervalo de números reais [2,6], enquanto que no terceiro, o domínio é o conjunto dos números reais. Assim, para a mesma lei y = f(x) = x - 1, há três representações gráficas distintas. Não é raro, ao perguntar a professores e estudantes de graduação, "qual é o gráfico de uma função do primeiro grau, tal como y = x – 1?", e se obter a resposta – é uma linha reta, o que não é uma verdade, como pode ser percebido por meio da figura 1, podendo ser: pontos isolados, segmentos de retas ou retas, além de outros. Esses exemplos parecem esclarecer indicações feitas no NCTM (2008), corroborando os indicativos ali apontados por Viner e Dreyfus (1989), Oliveira, Fernandes e Fermé (2007) e Ponte (1992) bem como por Frota (2009), além de outros.

Considera-se ser relevante para a aprendizagem matemática que os aspectos visuais sejam levados em consideração no estudo e análise de funções como, por exemplo, no estudo da função quadrática f: $R \to R$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e b, c reais quaisquer, cujo gráfico é denominado parábola. Algumas propriedades geométricas são importantes de serem destacadas, como é o caso de verificar que a parábola separa o plano em duas regiões, sendo uma convexa e outra não convexa (côncava). Uma região do plano é dita convexa se, unindo dois quaisquer de seus pontos, o segmento de reta os unindo está totalmente contido nessa região. Dessa forma, a primeira das figuras abaixo (Figura 2) apresenta uma região com a concavidade voltada para baixo, enquanto que a segunda apresenta uma região com a concavidade voltada para cima.

Outra característica que é fundamental de ser analisada nos gráficos de funções é a existência de simetrias, ou seja, diz-se que o gráfico de uma função y = f(x), no sistema cartesiano plano, apresenta uma simetria em relação a um eixo paralelo ao eixo vertical, por exemplo, como nas figuras abaixo (Figura 2), se os valores da função são iguais, em pontos simétricos, a um dado ponto do domínio dessa função.

No caso da função quadrática, estudar as simetrias do gráfico da função pode levar a uma compreensão do que seja um ponto de máximo ou de mínimo da função, ou um vértice da parábola e, isso permite que as coordenadas do vértice possam ser determinadas de forma elementar, sem recursos das ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral tais como o operador derivação, explorando os aspectos visuais. Entretanto, uma conexão dessa forma, feita nos cursos de formação de professores, pode ser um dos indicativos de melhoria do ensino básico. Atrelando-se um comparativo com os coeficientes da lei que define a função quadrática, o auxilio visual pode permitir uma conceituação adequada pelos estudantes, de vértice e obtenção de suas coordenadas.

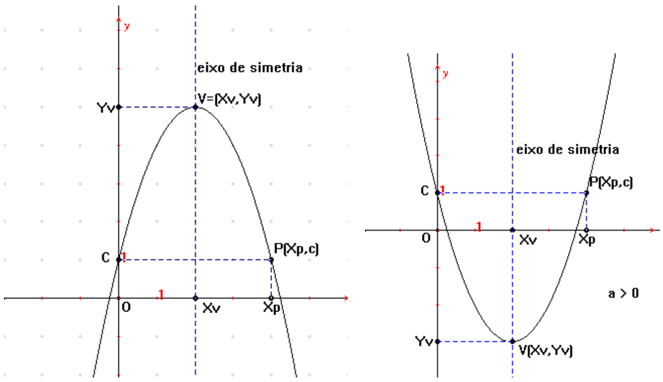


Figura 2. Gráficos de funções quadráticas e relação com um eixo de simetria.

a < 0 (concavidade para baixo – vértice é ponto de máximo) Figura 2 – esquerda.

a > 0 (concavidade para cima – vértice é ponto de mínimo) Figura 2 – direita.

Em geral, não é analisado no estudo da função quadrática o significado geométrico que possui a constante real c, na lei que define a função quadrática, pelo fato de que esse estudo, usualmente, se limita a processo algorítmico e não ao que se denomina uma geometrização do currículo matemático. Assim, c denota a ordenada do ponto em que o gráfico da função corta o eixo vertical (variável dependente), e corresponde no gráfico da função a um ponto P = (x_p, c), o que facilita a visualização e consequente representação gráfica. Calculando-se abscissa do ponto que corresponde à ordenada c, isto é:

f(x) = ax^2 + bx + c = c $\Leftrightarrow$ ax^2 + bx = 0 $\Leftrightarrow$ x(ax + b)= 0 $\Leftrightarrow$ x = 0 ou $\Leftrightarrow$ ax + b= 0 e como a $\neq$ 0 vem que $x_p = -\frac{b}{a}$. Mas a parábola é simétrica em relação a um eixo que passa pelo vértice. Assim, a abscissa do vértice corresponde ao ponto médio entre (0 , c) e P = (x_p, c), ou seja:

$$x_V = \frac{-b}{2a}.$$

Busca-se, a partir disso, a ordenada desse vértice, isto é, o valor da função f correspondente ao valor x_V. Calculando-se:

$$f(x_V) = f(\frac{-b}{2a}) = a.(\frac{-b}{2a})^2 + b.(\frac{-b}{2a}) + c = \frac{b^2}{4a} + \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = y_V$$

As coordenadas do vértice são dadas por: V = $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right)$

Uma conexão entre aspectos algébricos e geométricos pode ser feita por meio dos zeros da função quadrática, os quais são, exatamente, os valores das abscissas dos pontos em que o gráfico da função corta o eixo horizontal (variável independente), ou seja, são os pontos (x, 0). Logo, para obtê-los, basta igualar f(x) = 0 e resolver a equação.

A função exponencial a partir de uma modelagem

Supondo que o crescimento de um cachorro esteja sendo analisado por um pesquisador. No início da pesquisa, o cão pesa 30 kg. No mês seguinte o peso aumentou em 10%. Na terceira medição aumentou novamente 10% e assim sucessivamente por um período de um ano de observação.

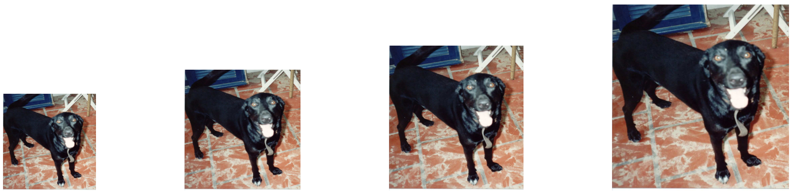


Figura 3. Crescimento de um cão.

Na resolução de tal situação-problema, uma tabela pode ser montada, em que a cada mês o acréscimo de peso, considerado em 10% ao mês, é acrescido ao peso do mês anterior. Os dados podem ser escritos em uma forma de produto. Assim, o terceiro termo pode ser escrito a partir do segundo e conseqüentemente a partir do termo inicial, gerando o que se denomina uma sequência. Assim, se pode escrever a sequência (1º , 2º , 3º , ..., 10º , ..., x-ésimo termo):

Quadro 1 – Dados do crescimento mensal de um cão.

Período (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Peso (kg)	30	33											

Pode-se pensar, assim, que existe uma função f: {0,1,2,3,....} $\rightarrow$ **R** que é denominada sequência de números reais.

Portanto, $f(0) = 30$

$$f(1) = 30 + 0{,}1x30 = 30(1 + \frac{10}{100})$$

$$f(2) = 30(1 + \frac{10}{100}) + 0{,}1[30(1 + \frac{10}{100})] = 30(1 + \frac{10}{100})(1 + \frac{10}{100}) = 30(1 + \frac{10}{100})^2,$$

e, assim sucessivamente.

Generalizando tem-se a seguinte lei: $f(x) = x_0(1 + \frac{p}{100})^x$, em que x denota a variação em meses, x_0 denota o peso inicial e p a taxa de crescimento. A partir disso, é possível esboçar o gráfico dessa função, isto é, representar os pontos (x, f(x)) do gráfico dessa função da seguinte forma:

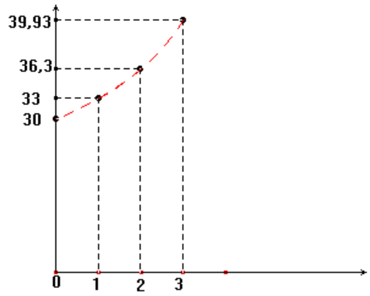


Figura 4. Gráfico do crescimento exponencial.

Como o animal não cresce por etapas em tempos isolados depois de cada mês, é preciso generalizar o que foi feito anteriormente, com sequências, para a função obtida. Assim, o domínio de tal função pode ser modificado, reduzido ou ampliado. Observando que não faria sentido um problema de crescimento a uma taxa nula, a função f dada acima pode ser definida por:

$$f : R \to R \quad por \quad f(x) = m.a^x,$$

em que m e a são números reais fixos e a > 0. Note que se fosse a = 0 ou a = -1 teríamos

$$0^{-1} = \frac{1}{0} \textit{ que não é uma operação definida nos reais.}$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1} \textit{ que também não é operação definida nos reais.}$$

A função, assim definida, é denominada função exponencial.

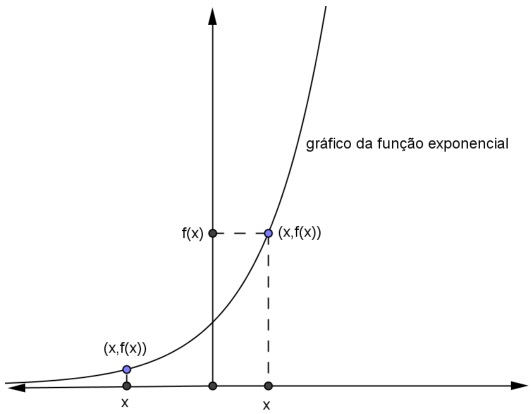


Figura 5 – Gráfico da função exponencial definida em R.

O gráfico acima representa a função exponencial no seu domínio **R**, podendo-se observar sua aproximação, assintoticamente, ao eixo horizontal, quando x é infinitamente pequeno e crescendo também ao infinito, quando x é infinitamente grande.

Uma função f: A $\to$ B dada por y = f(x) é dita bijetora quando:

(i) a todo elemento x $\in$ A corresponde um e somente um elemento y $\in$ B tal que f(x) = y;

(ii) de modo recíproco, todo elemento $y \in B$ é imagem de pelo menos um $x \in A$ pela lei f.

A parte (i) diz que a função é injetora e a (ii), que é sobrejetora. Assim, a cada elemento de A corresponde um único elemento de B (definição de função de A em B) e vice-versa, isto é, a cada elemento de B corresponde um único elemento de A (definição de função de B em A). A função $f^{-1}: B \rightarrow A$, dada por $f^{-1}(y) = x$ tal que $f(x) = y$, é denominada função inversa de f.

Exemplificando:

f: R → R dada por f(x) = 2x tem por inversa $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

g: R → R dada por $g(x) = x^3$ tem por inversa $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Para obter a lei que define a função inversa de uma determinada função, em geral, o livro didático do Ensino Médio segue a seguinte sequência de raciocínio:

- troque x (variável independente do domínio) por y (variável dependente do contradomínio), pois a nova função tem por domínio o conjunto imagem da primeira e por conjunto imagem o domínio da primeira;
- Isole a nova variável dependente (novo y) para poder expressar uma lei y = g(x). Com isto você estará mostrando que a função inicial é injetiva e que está bem definida.

Um detalhe importante de salientar é que se a função inicial não for sobrejetiva, basta redefini-la, colocando no lugar do contradomínio de f o conjunto imagem f(A), que passará a ser o domínio da nova função. Portanto, o essencial para uma função admitir uma função inversa é que ela seja injetiva. Muitas vezes, o significado geométrico nessa situação não é levado em consideração, ficando, como em tantas outras situações, unicamente, a exploração algorítmica.

Considerando-se os dois exemplos acima, temos:

- f: **R** → **R** dada por f(x) = 2x. Nota-se que f(**R**) = **R** e, portanto, a função é sobrejetora, seu contradomínio coincide com seu conjunto imagem.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2\,x_1 = 2\,x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow f \text{ é injetiva.}$$

Para a verificação de que a função é sobrejetora, é necessário considerar um valor qualquer $y \in$ **R**, do conjunto de chegada e determinar se existe um valor $x \in$ **R,** do domínio, que tenha y por imagem. Então, toma-se y = f(x) = 2x e determina-se $\frac{y}{2} = x$. Na determinação da inversa, o x da primeira função corresponde ao y da segunda função e vice versa. Assim, $g(x) = \frac{x}{2}$ é a função inversa de f(x) = 2x.

Em geral, nos livros didáticos, isso aparece da seguinte forma: dada uma função y = f(x), para determinar sua inversa se substitui y por x e vice versa. Isola-se a nova variável y, obtendo-se a lei da inversa, não sendo atribuído significado ao algoritmo.

- g: **R** → **R** dada por $g(x) = x^3$. Nota-se novamente que g(**R**) = **R** e, portanto, a função é sobrejetora, seu contradomínio coincide com seu conjunto imagem.

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow (x_1)^3 = (x_2)^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow$ f é injetiva.

Novamente, nesse segundo exemplo, o que se procura é a verificação de que a função g é sobrejetora. Para tal, dado um y qualquer do conjunto de chegada, busca-se a existência de algum x do conjunto de partida que tenha por imagem esse y considerado. Assim, na lei $y = g(x) = x^3$, tem-se y dado e deve-se encontrar o x correspondente. Então, isola-se x, e segue que $\sqrt[3]{y} = x$. Então, para qualquer $y \in$ **R,** a operação está bem definida, isto é, existe um $x \in$ **R**, tal que f(x) = y. Portanto, tendo em vista que a variável independente é denotada, usualmente por x e a dependente por y, vem que $y = \sqrt[3]{x}$ é a lei da função inversa de $g(x) = x^3$.

Um exemplo em que a função h: **R** $\rightarrow$ **R** não é sobrejetora e, consequentemente, não admite inversa é $y = x^2$, definida para todo $x \in$ **R**. Para verificar isso, considere qualquer y pertencente o conjunto de chegada da função, **R**. Então, deve-se procurar um x de modo que sua imagem pela lei h corresponda a esse y considerado, suponhamos um número real negativo. Assim, de $y = x^2$ vem que $x = \sqrt{y}$ não está definido em **R**. Estes aspectos podem ser facilmente visualizados nas representações feitas nas figuras 2, anteriormente citadas, sendo que na primeira delas, basta tomar um $y>y_v$ e, na segunda, um $y<y_v$. Portanto, h não é sobrejetora e não existe a lei que define sua inversa. Veja que, sem uma análise como a que está sendo proposta, a lei seria determinada, embora a função inversa não exista nesse domínio.

Observando-se a representação dos gráficos de duas funções inversas, percebe-se, intuitivamente, a existência de um eixo de simetria, uma vez que o par (x, y) estando no gráfico de uma função f, o par (y, x) estará no gráfico de sua inversa e esses pares são simétricos em relação a um eixo que corresponde à bissetriz do primeiro quadrante.

Exemplo, para as funções f: **R** $\rightarrow$ **R** dada por f(x) = 2x e sua inversa g: **R** $\rightarrow$ **R** dada por $g(x) = \frac{x}{2}$, tem-se os pares A = (1, f(1) = 2) e A´ = (2, g(2) = 1) ou ainda B=$(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}) = 1)$ e B´ = (1, g(1) =, $\frac{1}{2}$), C = (-1, f(-1) = -2) e C´= (-2, g(-2) = -1) como se pode ver pelas suas representações a seguir, em que os pontos em azul correspondem ao gráfico da função f e os em vermelho ao gráfico de sua inversa.

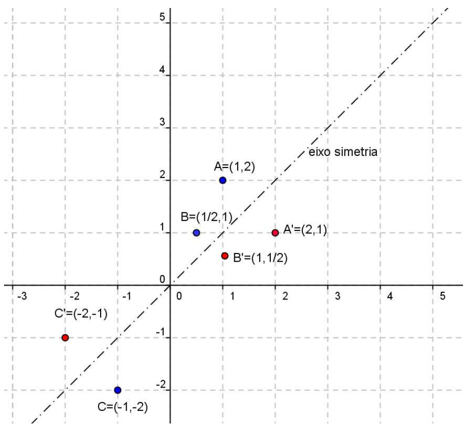


Figura 6. Pontos simétricos de duas funções inversas.

Desejando-se o esboço do gráfico das duas funções, obtém-se o gráfico da f em azul e o de sua inversa, a g, em vermelho, como na figura 7:

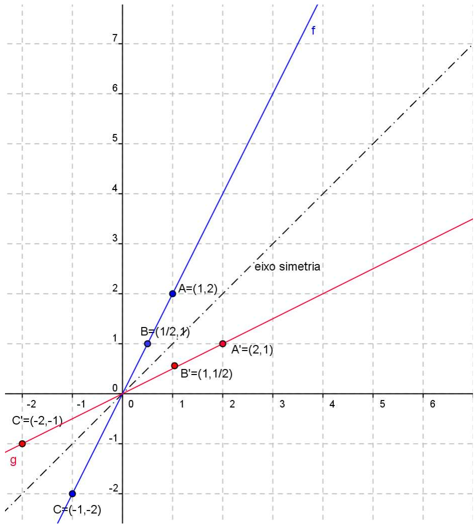


Figura 7. Simetria dos gráficos das duas funções inversas.

No que diz respeito ao segundo exemplo dado acima, ou seja, sendo $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a lei da função inversa de g(x) = x^3, temos os seguintes pontos e os respectivos simétricos:

A = (-1, g(-1) = -1) e A' = (-1, f(-1) = -1); B = (1, g(1) = 1) e B' = (1, f(1) = 1);

C = (2, g(2) = 8) e C' = (8, f(8) = 2), D = (1/8, ½) e D'= (½, 1/8)

e, (por exemplo, os quais podem ser representados na Figura 8, a seguir, em que os pontos assinalados em azul no formato em × pertencem ao gráfico da função g , enquanto os assinalados em vermelho no formato • pertencem ao gráfico da função f e, por fim, os representados no último formato, porém em preto, são comuns.

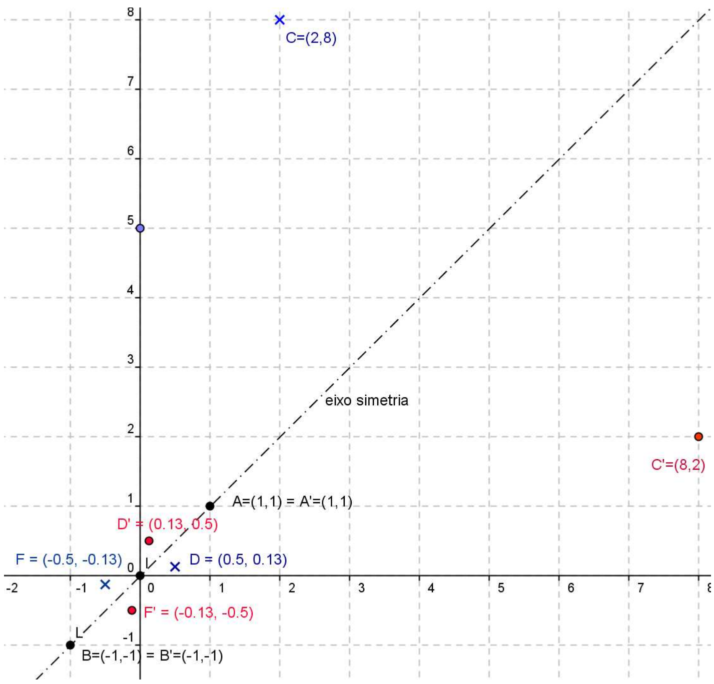


Figura 8. Pontos simétricos de duas funções inversas.

As duas funções definidas em seus domínios reais, têm por gráfico as seguintes representações cartesianas.

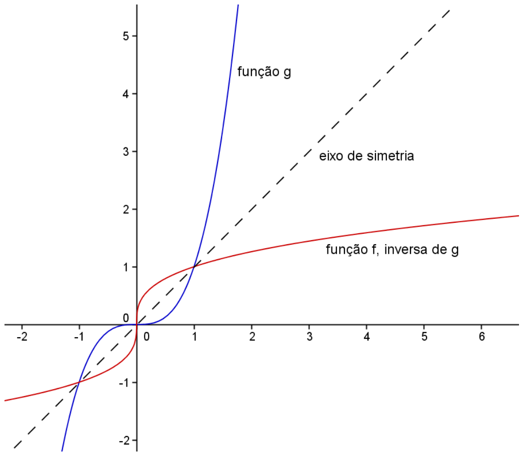


Figura 9. Representação de g(x)=x^3 e de sua inversa f(x)=$\sqrt[3]{x}$

A existência da inversa da função exponencial

A análise do gráfico da função exponencial (Figura 5) permite concluir que ela é estritamente crescente, tem domínio **R** e contra-domínio **R,** no qual não é sobrejetora – não há pontos no gráfico abaixo do eixo horizontal. Pode-se redefinir a função no seu conjunto imagem, f(**R**) = $\mathbf{R}^+$-{0}, no qual passa a ser tanto sobrejetora quanto injetora, logo admitindo inversa. A partir da representação (Figura 5) do gráfico da função exponencial, f:**R**→ $\mathbf{R}^+$-{0}, dada por f(x) = a^x (a > 0 e a≠ 1), pode-se considerar, pela bijeção e a consequente existência de uma inversa, um gráfico que represente essa inversa. Pela plotagem de pontos simétricos da primeira função, obtém-se a sequência dos pontos que constituem o gráfico da segunda função, como pode ser observado na construção dada pela figura 9, a seguir. Note que na medida em que os pontos do gráfico da primeira função se aproximam assintoticamente do eixo horizontal, os seus simétricos vão se aproximando assintoticamente do eixo vertical. De forma similar, quando os pontos do gráfico da primeira vão se afastando ao infinito, no sentido positivo, os seus simétricos vão se afastando também no sentido positivo.

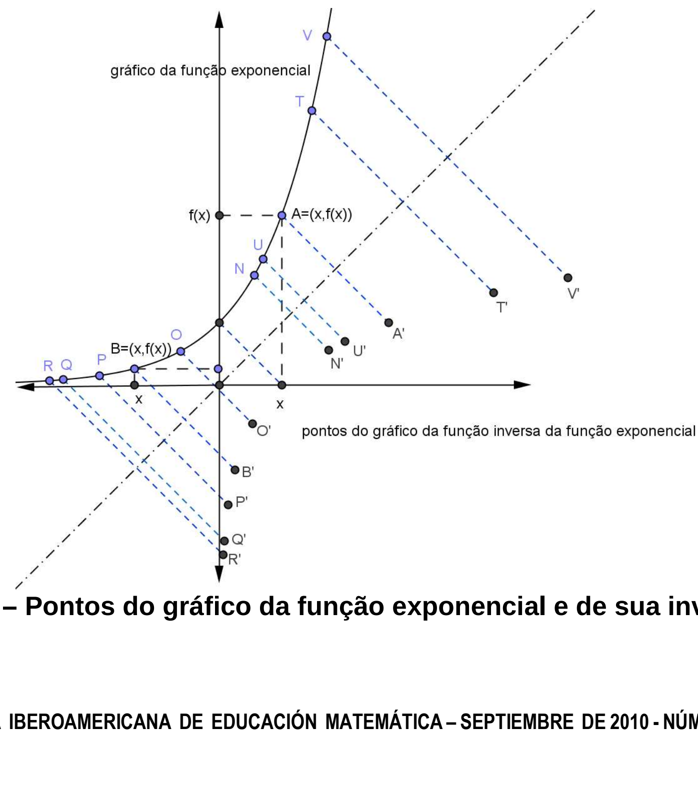


Figura 10 – Pontos do gráfico da função exponencial e de sua inversa

A união desses pontos obtidos permite a construção do gráfico da função f^{-1}: $\mathbf{R}^{+}-\{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, inversa da função exponencial, sendo dada por $f^{-1}(y) = x$ de tal forma que $y = f(x) = a^x$, cuja notação é: $y = \log_a (x) \Leftrightarrow a^y = x$.

Essa função se chama **função logarítmica** e seu gráfico está representado na figura 11, a seguir.

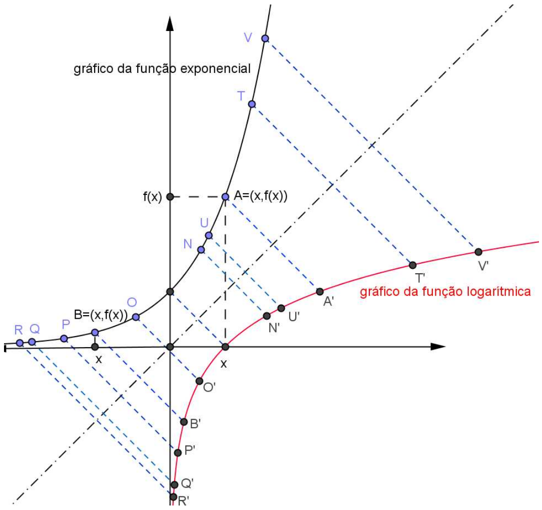


Figura 11 – Gráfico das funções exponencial e logarítmica.

Dessa forma, procurei exemplificar como é possível obter a função logarítmica a partir da função exponencial, utilizando a imaginação, a visualização e a simetria de pontos no sistema cartesiano, como uma forma de produzir conhecimento matemático, corroborando o apontado por Skemp (1993) ao afirmar de que imaginação visual é mais favorável à integração de ideias. Entendo assim que uma forma de inovar em Educação Matemática, em diversos níveis de escolaridade, é utilizar abordagens geométricas como método para compreender e representar visualmente conceitos de diversas áreas do conhecimento matemático e de outras ciências, como uma forma de atender ao preconizado nos PCN, de modo a que tais abordagens favoreçam e orientem a construção de conhecimentos. Portanto, Geometria pode ser vista como um método para representação visual de conceitos e processos de outras áreas da Matemática e de outras ciências, bem como uma forma de pensar e compreender o mundo matemático formal, não necessitando ser desenvolvida unicamente em disciplinas específicas dessa área do conhecimento matemático, de forma estritamente hierarquizada, como é usualmente apresentada, tratando os conteúdos isoladamente.

Bibliografía

Brasil (1998): *Parâmetros curriculares nacionais: matemática.* Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

(1998b): *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências Humanas e suas Tecnologias* Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, Parte III.

Bishop A. J. (1989): Review of research on visualization in mathematics education**.** Focus on Learning Problems in Mathematics*,* v. 11, n. 1-2, 7-16.

Dieudonné J., (1986): Debemos enseñar las *matematicas modernas*? In: Piaget, J.; Choquet, G.; Dieudonné, J.; Thom, R. e outros. *La enseñanza de las matemáticas modernas*. (p. 130-139). Madrid: Alianza Editorial.

Duval, R.(1998). Geometry from a cognitive point of view. In: Mammana, C.; Villani, V. (Eds). *Perpectives on the Teaching of Geometry for the 21st century*: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer.

Frota, M. (2009). Estratégias para o ensino-aprendizagem de funções com um foco no pensamento visual". In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - IV SIPEM. Anais. Brasília, (CD-ROM).

Gutiérrez, A.; Boero, P**.** (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future.* Rotterdam: Sense Publishers.

______ (1993): "Enseñanza de la matematica". In: G. Pérez, M. G Ozámiz. *Enseñanza de las ciencias y la matemática: tendencias e innovaciones*. (Biblioteca Virtual OEI. p. 62-89, http://www.oei.org.co/oeivirt/ciencias.pdf). Acesso em 03 de novembro, 2007.

Hilbert, D.; Cohn-Vossen, S. (1932). Geometry and the imagination. New York: Chelsea Publishing Company.

Hilbert, D. (2003). Fundamentos da geometria. Lisboa: Gradiva.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. Princípios e Normas para a Matemática Escolar. 2. ed. Lisboa: APM, 2008.

Olivera, R.; Fernandes, E.; Fermé, E. Proporcionalidade directa como função: da perfeição à realidade a bordo de um *robot*. Quadrante, vol. XVI, n. 1, p. 81-109, 2007.

Presmeg, N. (1986).Visualization and mathematical giftedness. Educational Studies in Mathematics**.** (V. 17, n. 3, p. 297-311).

______. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In: Gutierrez, A.; Boero, P. (Ed.). Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future. (p. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.

Skemp, R. (1993). Psicología del aprendizaje de las matemáticas. 2ª ed. Madrid: Edições Morata.

José Carlos Leivas. Doutor em Educação (Matemática) pela Universidade Federal do Paraná, mestre em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catariana, Especialista em Análise pela Universidade Federal de Pelotas e Licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas. Professor titular aposentado pela Universidade Federal de Rio Grande e professor adjunto da Universidade Luterana do Brasil. leivasjc@yahoo.com.br.

Maria Tereza Carneiro Soares. Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo, professora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná – PPGE-UFPR. marite@brturbo.com.br.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 107- 116
ISSN: 1815-0640

Actitudes iniciales hacia las matemáticas de los alumnos de grado de magisterio de Educación Primaria: Estudio de una situación en el EEES.

Raquel Fernández Cézar, Constancio Aguirre Pérez

Resumen

Se presenta un estudio inicial de las *actitudes hacia las matemáticas* de estudiantes de primer curso de grado de educación primaria en la E.U. de Magisterio "Fray Luis de León" de Cuenca, Universidad de Castilla-La Mancha. Se ha empleado la Escala de Actitudes hacia las Matemáticas de Elena Auzmendi con una muestra de 146 estudiantes. Se ha comparado la media total de la muestra con la obtenida por la autora a un nivel de significación del 99.89 %, y se ha encontrado una correlación positiva entre los afectos considerados favorecedores de la actitud hacia las matemáticas (agrado, motivación, utilidad, confianza), y una correlación negativa entre confianza y ansiedad.

Abstract

This report shows a first stage analysis of the Attitudes towards Mathematics of first year students of Primary Education Degree in the School of Magisterio of Cuenca, at Castilla-La Mancha University. The Scale of Attitudes towards Mathematics of Elena Auzmendi has been used with a sample of 146 students. Our sample mean has been compared with the tabulated one by means of a Z-hypothesis test and the conclusion is got at a significance level of 99.89%. A direct correlation between positive affective factors towards mathematics (pleasure, motivation, usefulness and confidence) has been observed, while a negative trend is shown for confidence and anxiety, as expected.

Resumo

Apresenta-se um estudo inicial das atitudes para as matemáticas de estudantes de primeiro curso de grau de educação primaria na E.Ou. de Magisterio "Fray Luis de León" de Cuenca, Universidade de Castilla-A Mancha. Empregou-se escala-a de Atitudes para as Matemáticas de Elena Auzmendi com uma mostra de 146 estudiantes. Comparou-se a média total da mostra com a obtida pela autora a um nível de significação do 99.89 %, e encontrou-se uma correlación positiva entre os afectos considerados favorecedores da atitude para as matemáticas (agrado, motivação, utilidade, confiança), e uma correlación negativa entre confiança e ansiedade.

1. Introducción

Las actitudes en educación se han definido ya a lo largo del siglo pasado de diversas formas. A lo largo del siglo XX (Aiken, 1935; Hart, 1989) todas las definiciones de actitud incluyen una componente comportamental, es decir, que las actitudes actúan como una fuerza motivacional del comportamiento humano. Pero en lo relativo al concepto de actitud en educación matemática, los educadores han usado el término con una definición menos clara que los psicólogos, como algo observable a través de instrumentos de medida, diseñados para medir las componentes específicas de la actitud (MacLeod, 1989).

En este trabajo retomamos la definición genérica de actitud que Inés González (2000) recoge en su libro "Matemática emocional" (pag.23), como una "predisposición evaluativa de conducta que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento", y que consta de una componente cognitiva, una componente afectiva, y una componente intencional. Cuando se trata de actitudes matemáticas, se pueden distinguir dos grandes categorías reconocidas también por el National Council of Teachers Mathematics (NCTM, 1989): actitudes hacia las matemáticas, y actitudes matemáticas. Las primeras se ven más afectadas por la componente afectiva, y las segundas, por la cognitiva. Es el aspecto afectivo es el que más nos interesa en este trabajo.

El estudio de las actitudes hacia las matemáticas en alumnado universitario viene realizándose en España desde hace algunas décadas (Carmona Márquez, 2004), pero no son numerosos los estudios realizados con estudiantes de magisterio (Estrada Roca, A. 2007; Nortes Checa et al, 1992). Se considera importante el estudio con este alumnado no sólo por los alumnos en sí y lo que supone para determinar su grado de interés y valoración de las matemáticas como asignatura, sino también por lo que serán en un futuro: graduados en educación primaria, y muchos ejercerán de maestros que a su vez enseñarán matemáticas.

Es ampliamente conocido que el proceso de enseñanza en el ejercicio de la docencia de matemáticas estará influido por aspectos psicológicos de la percepción de las matemáticas que tenga el maestro. Particularmente, muchos investigadores han encontrado una relación importante entre las "actitudes hacia las matemáticas" del maestro, y la efectividad y calidad de su enseñanza de las mismas (Bishop et al, 1983) (Aiken, 1970; Larson, 1983; Ernest, 1988). También se sabe que influye en el proceso de enseñanza de la parte cognitiva, llamada "actitudes matemáticas", como recogen Godino et al (2004) en su libro Didáctica de las Matemáticas para Maestros (pág. 19), ya que se transmite el conocimiento con el enfoque de la idea de la materia que tiene el profesor.

En este trabajo nos centramos en el estudio de la actitud hacia las matemáticas del alumnado de grado de magisterio en educación primaria en la Escuela de Magisterio de Cuenca, universidad de Castilla-La Mancha. Nuestro argumento-hipótesis es que las actitudes hacia las matemáticas de los alumnos influirán su práctica docente, así como en las suyas influye la práctica de sus profesores actuales. Por ello, nuestro estudio constituye una fase inicial del seguimiento que pretendemos hacer de las actitudes hacia las matemáticas en este grupo de estudiantes hasta finalizar su segundo año de estudios de grado, y la realización de su prácticum en el tercer y/o cuarto año de la carrera. Así podremos observar la evolución de las actitudes de ese grupo en nuestra escuela, que puede verse afectada por los docentes de la materia, positiva o negativamente, así como por su relación con la efectividad de su docencia posterior en el prácticum.

2. Estudio realizado

Entre todos los instrumentos de medida evaluados, se ha elegido la encuesta de Elena Auzmendi (1992), que se muestra en la tabla 1. La razón es su proximidad a nuestra situación de partida: alumnos inmersos en el sistema de educación español, de primer curso del grado de magisterio de educación primaria en la Escuela Universitaria de Magisterio “Fray Luis de León” de Cuenca, Universidad de Castilla-La Mancha.

Los estudios anteriores que se han presentado en España (Estrada Roca, A. 2007; Nortes Checa et al, 1992) sobre estas actitudes hacia las matemáticas, buscan su relación con el rendimiento académico, es decir, con los resultados y notas del mismo período académico. No sólo estos estudios, sino también otros anteriores (Begle, 1979; Bell et al 1983), demuestran una débil correlación entre ambas cosas. La novedad que supone nuestro trabajo es que queremos prestar más atención a los distintos bloques afectivos y a sus interrelaciones, a la posible influencia de sexo y bachillerato elegido previamente, así como a su evolución posterior a lo largo de los estudios de grado de los alumnos, y sus primeras prácticas como docentes. Seguiremos, pues, su evolución hasta el final del segundo curso, que es lo que constituye su formación básica en matemáticas, y posteriormente asistiremos a su prácticum para analizar la implementación de sus clases.

La encuesta está constituida por un total de 25 preguntas divididas en varios bloques, cuyas preguntas aparecen mezcladas. Los bloques estudian aspectos variados de los afectos hacia las matemáticas:

- **agrado** (preguntas 4, 9, 14, y 24),
- **utilidad** (preguntas 1, 6, 15, 16, 19 y 21),
- **ansiedad** (preguntas 2, 3, 7, 8, 12, 13, 17, 18 y 22),
- **motivación** (preguntas 5, 10 y 25) y
- **confianza** (preguntas 11, 20 y 23).

En todas las preguntas las respuestas posibles son números del 1 al 5, tipo escala Likert, desde totalmente en desacuerdo, hasta totalmente de acuerdo. Las preguntas no se contabilizan con el número que constituye su respuesta, sino que para algunas totalmente en desacuerdo se mide con un 5, y para otras con un 1 (Auzmendi, 1992, pág. 88).

A continuación se presentan las 25 preguntas de la encuesta en la:

Tabla 1: Escala de actitudes hacia las matemáticas de Elena Auzmendi.

1. Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios.
2. La asignatura de matemáticas se me da bastante mal.
3. Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto.
4. Utilizar las matemáticas es una diversión para mí.
5. Las matemáticas son demasiado teóricas para que puedan servirme de algo.
6. Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas..
7. Las matemáticas son una de las asignaturas que más temo.
8. Tengo confianza en mí cuando me enfrento a un problema de matemáticas.
9. Me divierte el hablar con otros de matemáticas.

10. Las matemáticas pueden ser útiles para el que decida realizar una carrera de "ciencias", pero no para el resto de los estudiantes.
11. Tener buenos conocimientos de matemáticas incrementará mis posibilidades de trabajo.
12. Cuando me enfrento a un problema de matemáticas me siendo incapaz de pensar con claridad.
13. Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas.
14. Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí.
15. Espero tener que utilizar poco las matemáticas en mi vida profesional.
16. Considero que existen otras asignaturas más importantes que las matemáticas para mi futura profesión.
17. Trabaja con las matemáticas hace que me sienta muy nervioso/a.
18. No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de matemáticas.
19. Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las matemáticas.
20. Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de matemáticas.
21. Para mi futuro las matemáticas son una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar.
22. Las matemáticas hacen que me sienta incómodo/a y nervioso/a.
23. Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas.
24. Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios.
25. La materia que se imparte en las clases de matemáticas es muy poco interesante.

La muestra está compuesta por 146 estudiantes que proceden principalmente de la provincia de Cuenca, y también, aunque en menor medida, del resto de Castilla-La Mancha, Valencia, Madrid y Cataluña. El 68% son mujeres y el 32% son hombres, de entre 18 y 20 años. El 30.95% vienen del bachillerato de Humanidades, sin matemáticas como asignatura obligatoria; el 25.00% de los bachilleratos de Ciencias de la Salud o Tecnológico, ambos con matemáticas como asignatura obligatoria; y el 44.05% vienen de Ciencias Sociales, también con matemáticas como asignatura obligatoria.

Como sugiere Carmona Márquez (2004), lo habitual es pasar las encuestas sólo una vez, o con un período de tiempo demasiado extenso entre las veces, lo cual no permite averiguar la fiabilidad del instrumento de medida. Nosotros lo hemos hecho con una diferencia de 3 semanas y media, la primera vez en el mes de noviembre, y la segunda en el de diciembre de 2009. De los 146 alumnos que hay en listas, la primera vez que pasamos la encuesta obtuvimos un total de 117 respuestas válidas, y la segunda vez, 116. Se muestra a continuación el promedio obtenido para cada respuesta en los dos casos.

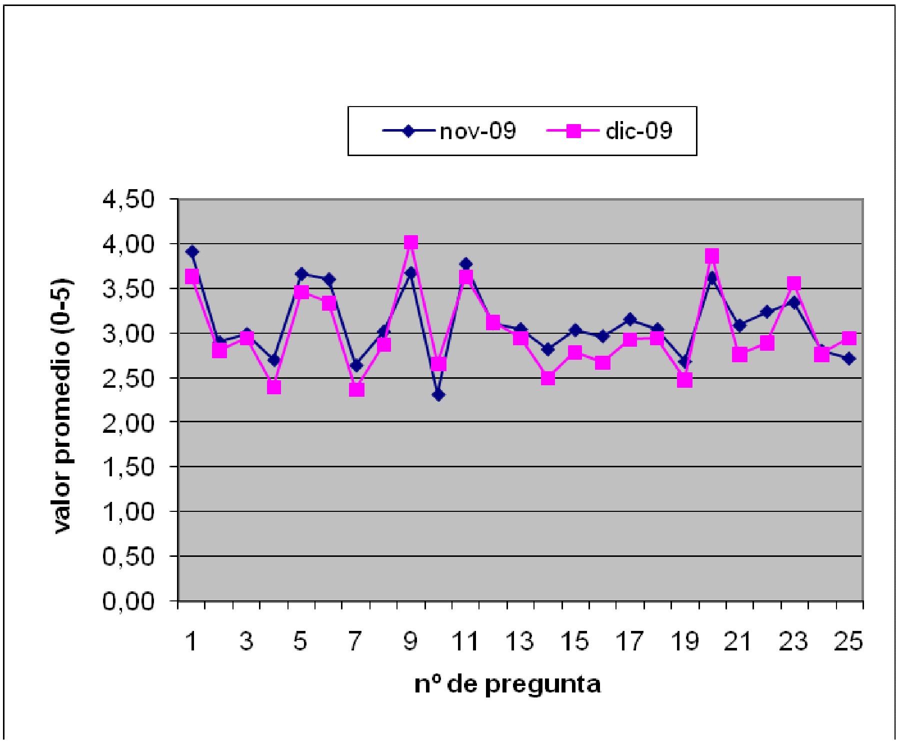


Figura 1. Promedio por pregunta

Como se ve, siguen la misma tendencia, y no se espera que la escasa diferencia observada entre los resultados correspondientes a ambas tomas de datos pueda deberse a ninguna influencia por parte del profesorado de la asignatura, ya que el período de tiempo ha sido breve.

Se ha calculado también el coeficiente de correlación de Pearson para las dos colecciones de datos, obteniéndose r = 0.88, y 0.89 para el coeficiente de correlación. Estos valores demuestran la fiabilidad de la encuesta, ya que no muestra resultados apreciablemente diferentes en dos tomas de datos sucesivas, desarrolladas con la misma muestra y en las mismas condiciones.

3. Resultados e interpretación de los mismos

Los resultados obtenidos sobre la población de la media total y la correspondiente a cada grupo de afectos se incluyen en la tabla 2, que se muestra a continuación:

Escala	Valor medio	σ	Nº items
Total	75.36	11.41	25
Ansiedad	25.70	9.30	9
Agrado	11.59	3.76	4
Utilidad	17.71	5.30	6
Motivación	9.51	2.65	3
Confianza	10.86	2.99	3

Tabla 2: Medias por grupo de afectos

3.1. Media total

Dado que contamos con resultados de dos poblaciones con media y varianza conocida, y con un número superior a 30 de componentes, aplicamos un test Z para comparar ambas medias (Berenson, M.L. et al, 2006). El parámetro a calcular es:

$$Z = \frac{(\mu_1 - \mu_2) - 0}{\sqrt[2]{(\sigma_1^2/n_1) + (\sigma_2^2/n_2)}}$$

Nuestra hipótesis de comparación es que ambas medias son iguales, y la hipótesis nula es que nuestra media es superior a la de la encuesta de baremación:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad H_1: \mu_1 > \mu_2$$

El parámetro Z que obtenemos es 8.86, muy superior al mayor valor de Z que aparece en las tablas, 6.00, así que concluimos que estamos totalmente fuera de la zona de validación, por lo cual podemos afirmar, con un nivel de significación muy alto, del 99.89%, que las dos medias son diferentes.

Pasamos a comparar nuestra media con los datos proporcionados en la tabla de percentiles, que nos dirá la situación de nuestra clase, y así encontramos que estamos entre el 25 y el 30, lo que sitúa nuestra muestra ligeramente por debajo en el cómputo global de los factores que constituyen las actitudes hacia las matemáticas.

3.2. Medias por factores

En cuanto a las medias por factores de afectos, nos encontramos en todos los grupos con valores inferiores a los tabulados, excepto en **agrado**: nos situamos entre el percentil 25 y el 30 en el factor **utilidad**; entre el 10 y el 20 en el factor **motivación**; entre el 10 y el 20 en el factor **confianza**. Sin embargo, nos situamos en el factor **agrado** entre el percentil 60 y el 70. El otro factor que está por debajo es la **ansiedad**, en la que nos situamos entre el percentil 20 y el 25. Pero esta no es una información negativa, ya que tenemos una muestra con una ansiedad inferior a la media.

Nuestra muestra tiene, por tanto, un **agrado** superior a la media y una **ansiedad** inferior a la media.

3.3. Correlaciones entre factores

Como estos dos factores son los que muestran una tendencia diferente al resto, analizamos la correlación existente entre **agrado** y **ansiedad**, y entre **confianza** y **agrado**, y entre **ansiedad** y **confianza**.

En la figura 2 se muestra la primera pareja de factores cuya correlación se analiza. Se emplea la última versión del programa Microsoft Excel tanto para la obtención de los gráficos como para la del ajuste a la función que muestra una correlación más alta entre ambos factores. Cabría esperar una dependencia negativa que mostrara a más agrado menos ansiedad, pero no es eso lo que obtenemos.

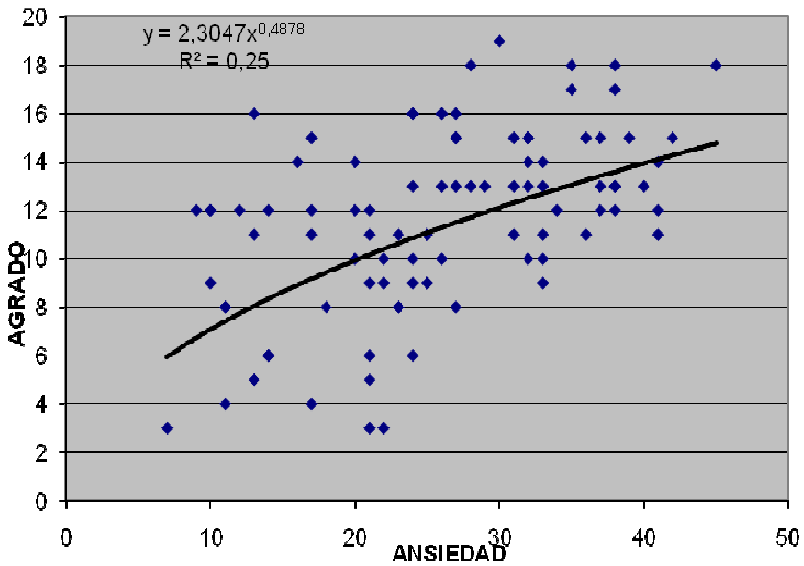


Figura 2: agrado versus ansiedad

La función analítica que proporciona un mayor coeficiente de correlación entre **agrado** y **ansiedad** es casi una raíz cuadrada del primero respecto de la segunda. Pero dado que el coeficiente de correlación es 0.25, no podemos concluir más que a valores pequeños de **agrado** le corresponden pequeños valores de **ansiedad**, y que a valores mayores de la primera, le corresponden valores mayores de la segunda. Hemos analizado también el coeficiente de correlación de Pearson, r, que es 0.52, en la línea de lo mostrado por R^2: sólo podemos concluir una correlación positiva. Por lo tanto, la **ansiedad** crece con el **agrado**, lo cual dice algo positivo sobre los estudiantes, y es que ven con agrado situaciones matemáticas que les producen ansiedad, quizá porque las consideren un desafío intelectual. En segundo lugar, la relación entre **confianza** y **agrado** se muestra en la figura 3.

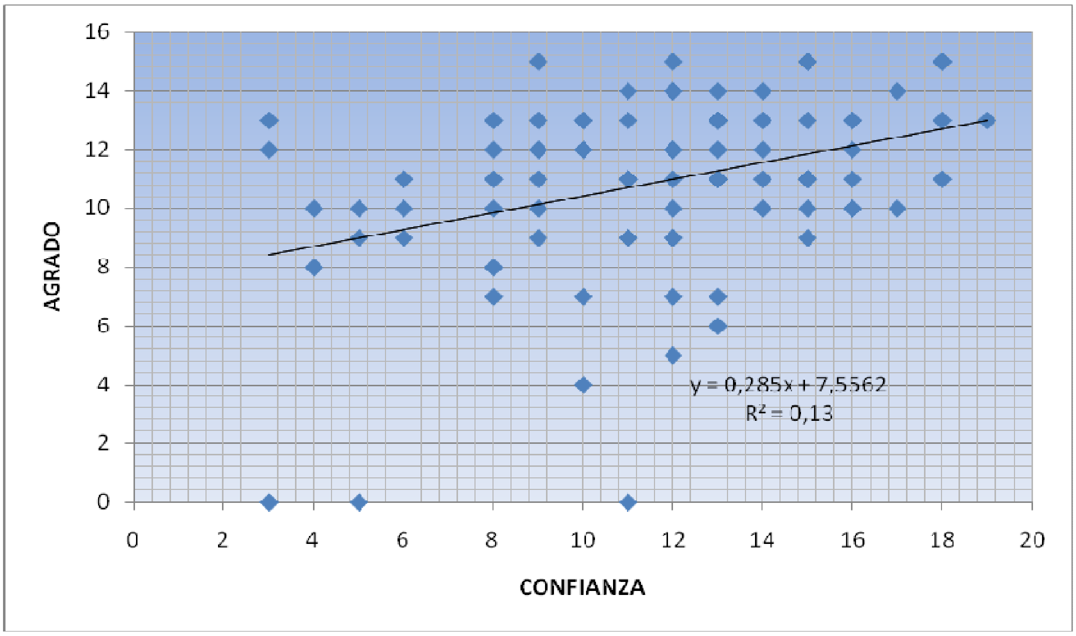


Figura 3: agrado versus confianza

El mejor ajuste es el lineal con pendiente inferior a la unidad, como se ve en la función insertada en el gráfico, obtenida con Microsoft Excel. Esto quiere decir que al crecer el **agrado**, crece la **confianza**, ya que están relacionados de forma directamente proporcional y muestran un coeficiente de correlación positivo, aunque bastante pequeño.

El coeficiente de correlación de Pearson en este caso es 0.36, en la misma línea, pues apoya la correlación positiva entre las variables. En tercer lugar, analizamos el par de factores **ansiedad** y **confianza**, cuya gráfica obtenida con el mismo programa informático se muestra en la figura 4. Vemos también una dependencia lineal y un coeficiente de correlación positivo entre ellas.

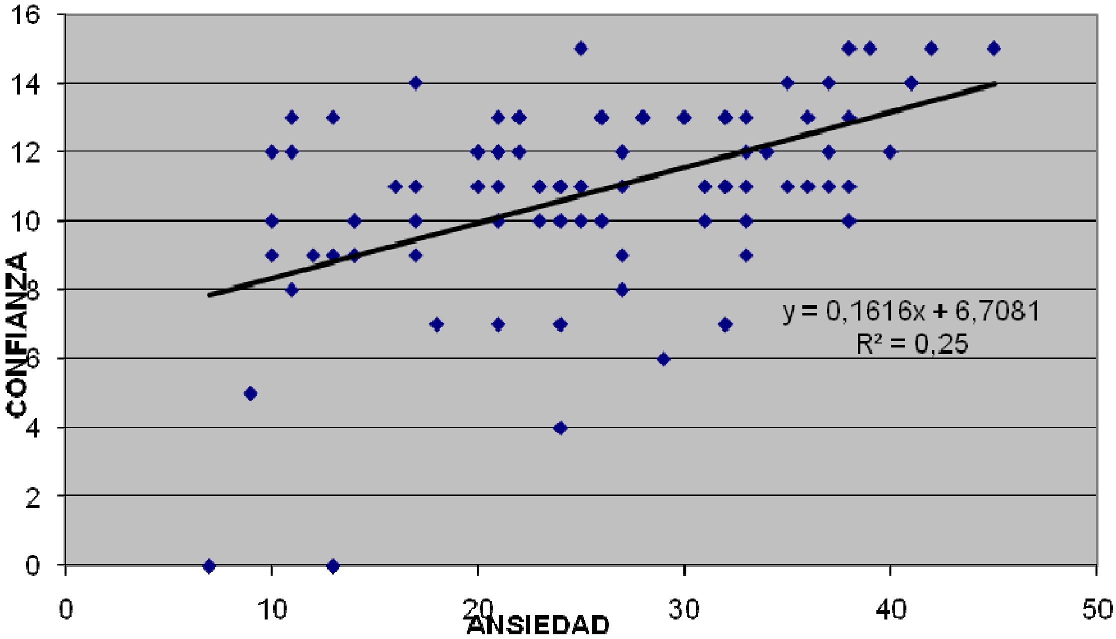


Figura 4: confianza versus ansiedad

El coeficiente de correlación de Pearson es 0.51 para estos dos factores, lo que sigue apoyando la correlación positiva: cuando una crece, la otra también lo hace. De las otras parejas de factores estudiadas no se muestran las gráficas porque los resultados que se obtienen son similares. Sólo cabe destacar la pareja que muestra una correlación positiva más fuerte, que es la compuesta por MOTIVACIÓN y UTILIDAD, para la cual el coeficiente de correlación es $R^2 = 0,50$.

3.4. Dependencia del tipo de bachillerato cursado o del sexo

No hemos detectado ninguna influencia significativa de estas variables, sexo y bachillerato, sobre las actitudes hacia las matemáticas del alumnado, a pesar de que es mayoritariamente femenino (un 68% son mujeres), y de que el 69.05% proviene de un bachillerato con matemáticas con asignatura obligatoria.

En los próximos estadios del estudio trataremos de encontrar la manera de obtener una información más detallada sobre la posible influencia de estas variables en la actitud hacia las matemáticas.

4. Conclusiones

Se incluyen como conclusiones sobre el estudio de las actitudes hacia las matemáticas con alumnos de 1º del grado de magisterio en educación primaria de la Escuela de Magisterio de Cuenca, en la Universidad de Castilla-La Mancha las siguientes:

1. Probamos la fiabilidad de la encuesta empleada, encuesta de actitudes hacia las matemáticas de Elena Auzmendi.
2. Nuestra muestra se encuentra entre el percentil 25 y el 30 al situarla en la tabla de baremación de la encuesta empleada, lo cual nos permite fijar el punto de partida en nuestro estudio.
3. Respecto a las medias por factores de afectos, nuestra muestra tiene, una media de **agrado** superior a la tabulada y una **ansiedad** inferior a la media, lo que son resultados positivos para nuestro alumnado.
4. En cuanto a las correlaciones entre factores, cabe destacar la correlación positiva entre **agrado** y **ansiedad**, en contra de lo que cabría esperar, y la fuerte correlación entre **utilidad** y **motivación**, con un valor del coeficiente, R^2, de 0.50.
5. No se ha encontrado evidencia de la correlación entre el bachillerato cursado previamente por nuestro alumnado y su actitud hacia las matemáticas, ni tampoco del sexo de los estudiantes sobre esta actitud.

Se pretende completar el estudio de la evolución de los resultados de esta escala de actitudes hacia las matemáticas a lo largo de este año académico y del próximo, así como de la efectividad de la metodología de enseñanza de matemáticas empleada por nuestros alumnos cuando lleguen a su prácticum.

Bibliografía:

Aiken L.R. Jr. (1970): Attitudes towards Mathematics. *Review of Educational Research*, 40, 551-596.

Allport G.W. (1935): Attitudes. En: Murchinson C. (Ed), *A Handbook of Social Psychology*. Worcester, Clark University Press.

Auzmendi Escribano E. (1992*): Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitaria. Características y medición*, Bilbao. España, Ediciones Mensajero.

Begle E.G. (1979): *Critical Variables in Mathematics Education*, MAA-NCTM, Washington DC.

Bell A.W., Costello J.y Kuchemann D., (1983): *A Review of Research in Mathematical Education*, Part A, NFER-Nelson, Windsor.

Berenson M.L., Levine D.M., Krehbiel T.C. (2006): *Basic Business Statistics: Concepts and Applications*, 10th Ed, en Pearson Education Inc, New Jersey, Estados Unidos de América.

Bishop A.J., Nickson M. (1983): *A Review of Research in Mathematical Education*, Part B, NFER-Nelson, Windsor.

Carmona Márquez J. (2004):*Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística*, *Statistics Education Research Journal* 3(1), 5-28. http://www.stat.auckland.ac.nz/serj

Ernest P. (1988): *Proceedings of the 12th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, en A. Borbas Ed. Veszprem, Hungría, Vol. 1, 288-295.

Estrada Roca A. (2007).*Actitudes hacia la Estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio*, en M. Camacho, -P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Actas del XI Simposio de la SEIEM*, Santa Cruz de Tenerife, España (pp. 121-140).

Godino J.D., Batanero C.,.Font V, Cid E., Ruiz F.y Roa R., (2004): *Didáctica de las matemáticas para maestros*, Proyecto *Edumat-Maestros* Director: Juan D. Godino en internet en http://www.ugr.es/local/jgodino/fprofesores.htm/

Gómez Chacón I.M. (2000): *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid. Narcea S.A. de ediciones, España.

Hart L.E. (1989): *Describing the affective domain: saying what we mean*. En *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. D.B. McLeod y V.M. Adams Ediciones. New York: Springler-Verlag, pag. 37- 48.

Larson C.N (1983): Arithmetic Teacher, 8-9.

MacLeod D.B. (1989).*The role of affect in mathematical problem solving.* En *Affect and mathematical problem solving: A new perspective.* D.B. McLeod y V.M. Adams Ediciones. New York: Springler-Verlag, pag. 20-36.

Nortes Checa A., Martínez Artero R. (1992).*Actitud, Aptitud y Rendimiento en matemáticas: un estudio en primero de magisterio*, *Suma*, 10, 36-40.

Raquel Fernández Cézar: Licenciada en CC Físicas (1992) y Dra en Ciencias (Químicas) (1997) por la Universidad Autónoma de Madrid. Profesora de Física, Química y Matemáticas en universidades americanas establecidas en España (Saint Louis Universiy, Suffolk University), en la Universidad Autónoma de Madrid (prof. Asociada), y en la Universidad de Castilla-La Mancha. Línea de trabajo: Didáctica de la Física y las Matemáticas y enseñanza bilingüe a: raquel.fcezar@uclm.es

Constancio Aguirre Pérez: Prof. De Didáctica de las Ciencias Experimentales. Línea de trabajo: Didáctica de las Ciencias Experimentales. constancio.aguirre@uclm.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 117-127
ISSN: 1815-0640

O ideário de Anísio Texeira e a origem, no Brasil, da educa-ao a través da pesquisa

Lênio Fernandes Levy

Resumo

Neste artigo, põem-se à mostra as idéias de Anísio Teixeira, que foi um dos maiores educadores brasileiros do século XX e um dos precursores, no Brasil, do "processo de ensino-aprendizagem pautado pela pesquisa", processo esse que guarda correspondência com o recurso pedagógico da modelagem matemática. Na parte inicial do artigo, apresenta-se o trajeto histórico-epistemológico que redundou na elaboração do ideário de Anísio Teixeira. Em seguida, comenta-se o texto "Valores Proclamados e Reais nas Instituições Escolares Brasileiras", de sua autoria, no qual Anísio traça um panorama histórico da educação brasileira, sugerindo mudanças identificadas com a "aprendizagem através da pesquisa".

Abstract

In this article, they put to the sample on Anísio Teixeira's ideas, which he was one of the major Brazilian educators of the 20th century and one of the predecessors, in Brazil, of the " process of education - learning ruled by the investigation ", I sue this that guards correspondence with the pedagogic resource of the mathematical modelagem. In the initial part of the article there appears the historical distance - epistemológico that turns in the production of Anísio Teixeira's ideology. Immediately, the text is commented " Proclaimed and Royal Values in the School Brazilian Institutions ", of his authorship, in which Anísio plans a historical panorama of the Brazilian education, suggesting cambiosrelacionados with the learning across investigations.

Resumen

En este artículo, se ponen a la muestra las ideas de Anísio Teixeira, que fue uno de los mayores educadores brasileños del siglo XX y uno de los precursores, en Brasil, del "proceso de enseñanza-aprendizaje pautado por la investigación", proceso ese que guarda correspondencia con el recurso pedagógico de la modelagem matemática. En la parte inicial del artículo se presenta el trayecto histórico-epistemológico que versa en la elaboración del ideario de Anísio Teixeira. Enseguida, se comenta el texto "Valores Proclamados y Reales en las Instituciones Escolares Brasileñas", de su autoría, en el cual Anísio traza un panorama histórico de la educación brasileña, sugiriendo cambiosrelacionados con el aprendizaje a través de investigaciones.

Antecedentes históricos e filosóficos

As duas principais tentativas de explicação do ato de conhecer, a "racionalista" e a "empirista", remontam aos tempos da Grécia Clássica, destacando-se filósofos como Platão (427–347 a.C.) e Aristóteles (384–322 a.C.), quanto à defesa e disseminação da primeira, e, na condição de prosélitos e propagadores da segunda, os sofistas e os estóicos (Pino, 2001).

As supostas "formas ou idéias universais", tais como "a beleza, o bem e a justiça", eram reveladoras, segundo Platão, da verdadeira natureza do mundo e das coisas (ibidem). Os sofistas, por sua vez, produziram uma série de idéias outras. Acreditavam que os estudos científicos eram particularmente importantes não por seu valor estritamente teórico, mas pela sua aplicação prática, aspecto dissonante do pensamento platônico. Além do mais, prontificando-se, mediante contrapartida pecuniária, a formar futuros homens políticos, com atenção especial à arte da oratória, os sofistas preencheram uma lacuna que fragilizava o sistema educacional da época (Miorim, 1998).

Convém acrescentar que:

> *Apesar do seu caráter francamente racionalista, as obras de Platão e de Aristóteles oferecem também uma base teórica para o empirismo. Ambos enfatizam, de diferentes maneiras, a importância da percepção sensível para o conhecimento, mesmo admitindo sua insuficiência para chegar ao conhecimento seguro e certo. Mas foram os estóicos os que, de forma explícita, enfatizaram a origem sensível do conhecimento. Segundo eles, os sentidos provêem a alma dos primeiros materiais para o pensamento. Antes disso, como repetirá mais tarde Locke, ela é como uma folha em branco (Pino, 2001, p.25).*

A propósito, os estóicos, seguidores da doutrina filosófica fundada por Zenão de Cício (340–264 a.C.), pregavam a ética imperturbável, livre das paixões, e a aceitação resignada do destino como condições para o alcance da sabedoria, que seria o único caminho para a felicidade. Acreditavam que o mundo era um todo orgânico dotado de uma alma (*pneuma*), constituída de um princípio vital, o *logos spermatikós*, o qual, no ser humano, manifestar-se-ia de forma depurada, sendo, nesse caso, chamado de "princípio racional" ou *logos* (Japiassú & Marcondes, 1996).

No transcurso histórico ulterior, houve maior ou menor inclinação das comunidades filosóficas e científicas por um dos dois pólos, o racionalista e o empirista (Pino, 2001). Fiorentini (1995), inclusive, ressalta o quanto a educação matemática brasileira foi influenciada, até o final da década de 1950, pela tendência que denomina de "formalista clássica", de cunho eminentemente racionalista ou inatista, em que eram exaltados o modelo euclidiano de sistematização lógica do conhecimento matemático a partir de princípios/axiomas, bem como a concepção platônica, segundo a qual as idéias matemáticas não seriam inventadas ou construídas pelo homem, posto que preexistiriam em um mundo ideal e estariam adormecidas em sua mente. O processo de ensino-aprendizagem era predominantemente livresco e centralizado na figura do professor. Passividade, repetição e memorização constituíam-se em alguns dos preceitos do cotidiano pedagógico, não causando estranheza que fosse inconcebível o incentivo à reflexão e à pesquisa em ambiente submetido a citadas regras.

Referindo-se à Idade Média Européia, Miorim (1998) afirma que o ensino da época, inicialmente de bases clássicas, aos poucos foi cedendo lugar a uma educação de caráter religioso, tendo havido nesse sentido a adoção da Bíblia como "fonte necessária e segura de toda a sabedoria". Na seqüência de seu raciocínio, a autora declara que a partir de certo momento do período medieval, graças às demandas das emergentes atividades comerciais e industriais, o ensino e o estudo das matemáticas (re) floresceram na Europa, fatos devidos em grande escala aos contatos travados com a cultura islâmica, mantenedora, reprodutora e potencializadora de conhecimentos clássicos, muitos dos quais censurados e/ou distorcidos até então pelas autoridades eclesiásticas européias. Esse processo de efervescência e de intercâmbio cultural prenunciou, no continente europeu, uma época que foi comparada à Idade de Ouro da Grécia Antiga.

O antropocentrismo pós-medieval veio acompanhado do ardor quanto à tentativa de separar sujeitos, conhecimentos e objetos. Visava-se à inibição de uma marcante característica do milênio que antecedeu à manifestação do chamado "renascimento" da cultura européia, isto é, clamava-se, nos meios filosóficos e científicos, pela extinção do predomínio eclesiástico sobre a produção e a expressão cognitivas. A Igreja Medieval, de um lado, sempre fez imposições: "Não vá pesquisar nessa direção, pois isso já está escrito em Aristóteles e a teologia integrou Aristóteles. Nós já temos a visão do mundo" (Morin, 2001, p.27). O pensamento então emergente, de outro lado, amparava-se na alegação de que a referida tentativa de interferência era prejudicial às possibilidades de expansão do cabedal de conhecimentos do homem. Segundo esse novo paradigma, dito moderno, que foi robustecido tanto por racionalistas quanto por empiristas, o cientista não possuiria ingerência sobre o objeto ou sobre o conhecimento do objeto. A "fragmentação" e o "determinismo", pilares da modernidade, subjazeriam aos estudos e às pesquisas do indivíduo, fossem tais perquirições efetuadas mediante crença na eficácia da dedução, da análise-síntese, da indução ou do método experimental.

No que diz respeito ao racionalismo cartesiano, Pino assevera que:

> *Uma das idéias básicas de Descartes (Regulae, 1701) é que o conhecimento é um só, embora sua aquisição dependa inteiramente do uso da mente humana. Todos os seres humanos têm a habilidade natural de discernir o verdadeiro e o falso. O "poder de conhecer" é o mesmo, independentemente dos objetos a que ele é aplicado. Se bem aplicado, leva à verdade e à certeza; se mal aplicado, leva ao erro e à dúvida. Mas ele faz da dúvida o princípio metodológico para chegar às idéias claras e distintas. Para duvidar, tem que se pensar, e o ato de pensar conduz à certeza da própria existência (Pino, 2001, p.26).*

Por sua vez, a antiga concepção empirista grega foi resgatada e aperfeiçoada na Idade Moderna, enfatizando-se, nesse sentido, o trabalho do filósofo inglês John Locke (1632–1704), para quem a mente era uma tábula rasa, uma espécie de folha de papel em branco na qual, progressivamente, seriam registradas as experiências vividas pelo sujeito. Locke distinguia duas categorias de idéias: a daquelas provenientes das sensações externas, chamadas por ele de "idéias simples", e a categoria das "idéias complexas", que resultavam da associação das idéias simples, associação realizada através da reflexão. O "associacionismo" tornou-se um dos aspectos fundamentais do empirismo (Pino, 2001). Outrossim, o escocês David Hume (1711-1776), tendo haurido parte de sua inspiração em Locke, apregoava que "(...) o homem não pode criar idéias, pois está inteiramente submetido aos sentidos; todos os nossos conhecimentos vêm dos sentidos" (Japiassu & Marcondes, 1996, p.132).

Sendo o "trato da realidade", de acordo com as correntes racionalista e empirista ou, de modo mais amplo, conforme o espírito moderno, algo inerente a descobertas, e não a construções, então inexistiria, no ambiente escolar, espaço para a adoção de uma postura transformadora ou criativa. Essa educação, impregnada de passividade, de repetição e de memorização, predominou por séculos e desembocou nos dias atuais. A ela ora se contrapõe a concepção emergente (complexa) de homem e de mundo.

Não obstante a popularidade e a difusão dos ideários modernos, com o decurso do tempo, e mais acentuadamente a partir do século XIX, a crença na conjunção de razão com sensibilidade para a construção do conhecimento começou a ganhar fôlego. No âmbito filosófico, destacaram-se em defesa desse princípio figuras como a de John Dewey[1] (1859–1952), filósofo, psicólogo e pedagogo norte-americano.

Contemporâneo, em certa medida, de Dewey e inaugurador da corrente epistemológica construtivista, o filósofo e ensaísta francês Gaston Bachelard (1884–1962), mesmo havendo sido a favor da idéia de que o movimento científico dirige-se do racional para o real[2], preconizava que "(...) A atividade científica, seja qual for seu ponto de partida, teria que levar em conta razão e experiência: se experimenta, tem que raciocinar; se raciocina, tem que experimentar" (1934, apud Pino, 2001, p.28). A razão e o real estariam dialeticamente relacionados, não sendo suficiente a consideração de apenas um deles para a constituição da prova científica (Pino, 2001).

Quando se acreditava na fragmentação, acreditava-se também, forçosamente, no determinismo das leis naturais. Nesses termos, não haveria interações que viessem a desviar as rotas pré-estabelecidas. Da feita que se passou a admitir a união ou ligação de elementos distintos, entrou em cena o fator "incerteza", compondo a trilogia complexa "distinção-união-incerteza", apregoada por Edgar Morin. A propósito, Petraglia (2002) assevera que a diversidade e a unidade do todo não são expressas pelos limites e insuficiências de um pensamento simplificador. Afirma também que o pensamento moriniano, pautado na epistemologia da complexidade, compreende unidades, interações diversas e adversas, incertezas, indeterminações e fenômenos aleatórios.

O sujeito age sobre o mundo exterior, e vice-versa, sendo que a singularidade de tais momentos demanda que o referido sujeito/perscrutador mantenha-se em permanente estado de vigília reflexiva e investigativa. A sala de aula, nesse sentido, torna-se um ambiente repleto de experiências únicas, fonte inestimável de material de pesquisa. Morin, Ciurana & Motta afirmam que:

> *(...) Em situações complexas, nas quais, num mesmo espaço e tempo, não há apenas ordem, mas também desordem; não há apenas determinismos, mas também acasos; em situações nas quais emerge a incerteza, é preciso a atitude estratégica do sujeito ante a ignorância, a desarmonia, a perplexidade e a lucidez (Morin, Ciurana & Motta, 2003, p.18).*

John Dewey apregoava, e foi um dos pioneiros nesse sentido, que a interação homem-mundo está na origem de qualquer produção cognitiva. "(...) O pensamento e a ação devem formar um todo indivisível, o que implica tratar qualquer formulação teórica como hipótese ativa que carece de demonstração em situação prática de vida (...)" (Cunha, 2002, p.19-20).

---

[1] John Dewey influenciou de maneira indelével a pedagogia contemporânea, sendo considerado um dos últimos grandes pensadores. Sua filosofia apresenta diversas denominações: naturalismo empírico, empirismo naturalista, humanismo naturalista ou pragmatismo. Dewey chefiou o Departamento de Filosofia, Psicologia e Pedagogia da Universidade de Chicago. Entre suas inúmeras contribuições, citam-se as escolas-laboratório (CUNHA, 2002).

[2] "Na concepção bachelardiana, não se trata de uma relação determinada pela razão. A sua visão é a de uma interação, ou seja, de uma dialética entre razão e experiência, de coisas opostas que se integram no todo" (Barbosa & Bulcão, 2004, p.30).

> *A experiência concreta da vida, para Dewey, surge sempre ao nos depararmos com problemas, e a educação deve tomar para si essa condição, enfrentando-a com uma atitude ponderada, cuidadosa, persistente e ativa para garantir o melhor desenvolvimento do educando. (...).*
>
> *Dewey argumenta que o processo de reflexão de professoras e professores se inicia no enfrentamento de dificuldades que, normalmente, o comportamento rotineiro da aula não dá para superar* (Campos & Pessoa, 1998, p.190)

Para a reflexão proposta por Dewey, são necessárias a intuição, a emoção e a paixão, elementos que a distinguem da ação rotineira em que predominam o impulso, a tradição e a autoridade, sendo que as professoras e os professores cuja prática não é perpassada por um pensamento reflexivo mais rigoroso normalmente cedem ao comodismo, trabalhando as dificuldades inusitadas do dia-a-dia com ações rotineiras, de abrangência insuficiente, dada a incerteza trazida por esses novos problemas (Campos & Pessoa, 1998). O pensar reflexivo proposto por Dewey é imprescindível diante da complexidade da natureza, onde as miríades de relações diversas e adversas acarretam e/ou correspondem a fenômenos únicos, incertos (vide a tríade complexa moriniana “distinção-união-incerteza”). Fórmulas supostamente prontas e imutáveis denotam modelos questionáveis, porque seus idealizadores partem da crença na hegemonia da repetição ou reversibilidade dos acontecimentos, o que não condiz com a realidade, o que não condiz, por exemplo, com as experiências singulares protagonizadas em sala de aula.

Certos aspectos do pragmatismo incorporados por John Dewey à pedagogia, a exemplo do incentivo à “pesquisa discente” (o que nos reporta, de uma forma ou de outra, à modelagem matemática no processo de ensino-aprendizagem), exerceram notória influência sobre intelectuais brasileiros de renome. Referindo-se à assunção, por Anísio Teixeira, do ponto de vista segundo o qual a aprendizagem depende de “situações reais de experiência”, Mendonça declara:

> *Anísio incorporava assim a concepção de Dewey, para quem o fenômeno educativo se constitui em processo de reconstrução da experiência. Com base nesse princípio, Anísio propunha trazer a vida para a escola, o que implicaria reconstruir todo o programa escolar em torno das experiências e atividades que a criança iria desenvolver dentro da escola (Mendonça, 2002, p.54).*

A história da educação brasileira conforme Anísio Teixeira. A propositura de uma “Escola Nova[3]”

Anísio Teixeira, após viagem aos Estados Unidos para conhecer o sistema educacional daquele país, relatou suas impressões respectivas no texto “(...) Aspectos americanos da educação, publicado pela imprensa oficial e apresentado ao governo da Bahia em 1928” (Pagni, 2008, p.21). A propósito:

> *Mais do que seu deslumbramento pelo ideal da democracia americana, ele revelou em tal relatório o seu fascínio pelo pragmatismo e pelo filósofo que presumia melhor representar essa corrente filosófica: John Dewey. Particularmente, começava a se aproximar de uma concepção de educação democrática pressuposta pela filosofia deweyana, procurando insistir no fato de que o desenvolvimento social e educacional brasileiro deveria perspectivá-la. Assim pensando a democracia, Anísio Teixeira (1928) acreditava estar protestando contra um tipo de sociedade como a nossa, marcada pela divisão dos interesses, pelo isolamento e pela desigualdade de*

[3] Em referência ao *Manifesto da Escola Nova* (1932), do qual Anísio Teixeira foi um dos signatários.

oportunidades entre os indivíduos – na sua percepção, uma sociedade oligárquica (...) (Pagni, 2008, p.21-22).

Em sua obra "Valores Proclamados e Reais nas Instituições Escolares Brasileiras" (1976), Teixeira afirma que a colonização da América pelos europeus foi marcada pela duplicidade entre o proclamado e o real: afirmavam os conquistadores terem vindo para cá objetivando a implantação do Cristianismo, porém o seu verdadeiro interesse era a exploração e a fortuna. À duplicidade dos conquistadores, seguiu-se a duplicidade da própria sociedade colonial, dividida entre senhores e escravos.

Os descendentes dos conquistadores europeus, no Brasil chamados de "mazombos", insistiam em manter cultura e valores idênticos aos da metrópole. Não se tratava de portugueses, pois aqui haviam nascido, e, mesmo inexistindo, quanto a esse grupo social, o reconhecimento de um *status* "europeu" por parte da metrópole, os mazombos não demonstravam respeito e assunção em relação às manifestações culturais surgidas entre os povos locais. Como não conseguiam atingir um sistema de valores europeus, declaravam, "(...) por ato oficial ou legal, a situação efetivamente existente como idêntica à ambicionada" (Teixeira, 1976, p.10). Mesmo após a independência, continuamos a ser uma nação dominada pela dupla face do real e do oficial/proclamado.

Segundo Teixeira (1976), em consonância, assim pensamos, com as idéias de John Dewey, a escola é uma instituição que não pode ser transplantada de um contexto estrangeiro haja vista o seu caráter de preparação para a vida social requerer sensibilidade no que diz respeito aos valores nativos, aos valores do local onde ela está inserida. Ressalta que atingimos a independência, contudo, sem escolas superiores e que os membros da elite brasileira formavam-se nos colégios da Companhia de Jesus, indo cursar, em seguida, a Universidade de Coimbra.

Durante o período colonial, Teixeira (1976) destaca que a elite nacional, identificada com os padrões culturais europeus, com vistas à conservação de sua situação de domínio manteve-se cautelosa no que tange à facilidade de ingresso no e à ampliação do sistema de ensino, principalmente o de nível superior. As mudanças sociais conseqüentes da abolição e da proclamação da república acarretaram, entretanto, a expansão do sistema escolar.

Teixeira (1976) assevera que foi apenas no século dezenove que o poder público passou a influir maciçamente no sistema escolar, na medida em que o processo de industrialização da sociedade brasileira demandava um ensino primário voltado para a formação de trabalhadores, o qual logo se tornou compulsório. O autor frisa também que o ensino tradicional, sem relação com a profissionalização, por sua vez sempre existiu, mesmo antes de o estado passar a interferir na educação, e destinava-se exclusivamente ao atendimento dos interesses da elite nacional. O critério de ingresso em ambos os sistemas não era de mérito ou demérito individual, mas de ordem social e/ou econômica (Ibidem).

A distinção sócio-econômica que se verificava nos dois tipos de escola era acompanhada da respectiva valorização a modalidades de estudos diferentes, destinando-se aos integrantes do "escol social" uma educação que desprezava a "eficácia", uma educação sem fins práticos, cujo intuito era o "exercício da mente" de pessoas a quem iria caber, no futuro, a manutenção da estrutura social e econômica vigente no país, ao contrário da preparação utilitária, com vistas ao trabalho, que aguardava os alunos oriundos dos grupos populares, preparação essa que era vista pelos integrantes da elite como pouco educativa (Teixeira, 1976).

No contexto europeu, a escola tradicional havia se tornado ultrapassada nesse meio tempo. As forças sociais e o progresso científico, que possibilitaram outrora o ensino compulsório, e a escola pós-primária profissionalizante agora demandavam uma formação unificada, uma formação especializada para ocupações específicas na sociedade industrial, científica e cada vez mais complexa (Teixeira, 1976). Deixou-se de lado o ensino exclusivamente destinado ao preparo mental e passou-se a enfatizar uma escola que formava os homens de acordo com as suas aptidões – inclusas as formações do professor, do estudioso ou do cientista –, que seriam redistribuídas pelas diversas ocupações da nova sociedade que então emergia (Ibidem). A situação brasileira de duplicidade histórico-pedagógica exposta por Teixeira em seu texto, duplicidade essa que dizia/diz respeito à formação profissional e ao ensino teórico tratados de forma isolada, cada qual em um tipo diferente de escola, compunha conjuntura dissonante daquela que começava a vigorar nas nações mais avançadas.

O autor (Ibidem) salienta que, nos países desenvolvidos, além da extinção – ainda não atingida por completo, segundo ele – do dualismo do sistema que era imposto pela origem sócio-econômica dos estudantes ingressos nas escolas, houve uma revisão dos métodos e programas, de tal sorte que as instituições de ensino ditas utilitárias passaram, progressivamente, a valorizar a cultura geral, sem perda de seu cunho profissionalizante, e as instituições ditas clássicas ou acadêmicas, por sua vez, passaram a se preocupar cada vez mais com os problemas do seu tempo, sem perda de seu cunho acadêmico (Ibidem).

Os novos sistemas educacionais implantados nos países democráticos, afirma Teixeira (1976), caracterizam-se pela redistribuição ocupacional dos alunos egressos de acordo com os resultados que efetivamente obtiveram ao longo de sua formação, não mais havendo uma redistribuição dependente das condições sociais e econômicas anteriores dessas pessoas. Detectamos, nesse sentido, dissonâncias em relação a Saviani (1983), para quem a prática pedagógica em termos históricos, mesmo nos países mais avançados, não redundou e não tem redundado em uma expansão democrática, crítica e/ou revolucionária. No que pertine ao escolanovismo – e aqui estamos nos referindo a um escolanovismo ingênuo ou sem criticidade, uma vez que, em contrapartida, é possível que se o tenha subsidiado pela reflexão e pelo espírito de transformação política –, Saviani (1983) destaca aí mais uma tentativa de as elites sócio-econômicas interferirem, via instituição educacional, com o objetivo de perpetuarem o seu estado de domínio.

Para Teixeira (1976), no Brasil a expansão escolar não acenou com ulteriores transformações sociais na medida em que a duplicidade pedagógica, ou seja, os dois sistemas aqui implantados permaneceram vigorando, cada qual voltado para o seu público de outrora. De um lado, manteve-se a educação primária, seguida das escolas normais e profissionais, destinadas ao povo na amplitude que fosse possível. De outro lado, continuou-se a acolher no sistema acadêmico de ensino basicamente as classes dominantes, sendo que o dispositivo de garantia dessa ordem consistia ou deveria consistir na transferência à órbita privada do ensino acadêmico e da sua escola secundária, sem a qual não se poderia galgar as instituições superiores de graduação (ibidem).

Segundo Teixeira (Ibidem), pode-se dizer que as pessoas menos favorecidas social e economicamente viram-se alijadas dos dois sistemas de ensino. Isso porque, na prática, quem ocupava os bancos das escolas populares eram estudantes provenientes da classe média. Nessas escolas exigia-se, para a respectiva permanência, um nível de educação coletiva e doméstica relativamente alto para os padrões brasileiros. De seu lado, as instituições educacionais ditas acadêmicas continuavam com seu acesso restrito a membros da elite nacional, dada a exigência do citado nível de educação, e, além disso, dada a necessidade de recursos financeiros para o custeamento dos estudos, que, como vimos, eram particulares na escola secundária. O autor afirma que "(...) abaixo dessas classes, média e superior, dormitava, esquecido, o povo" (Teixeira, 1976, p. 16).

Conforme Teixeira (Ibidem), a nascente classe média da década de 1920 – uma vez que antes só havia os grupos abastados e as camadas pobres da população – passou a exigir para si justamente aquele tipo de estudo, "desinteressante" e "inútil", que era disponibilizado à classe superior. O autor afirma que, se um determinado grupo não tivesse criado para si privilégios baseados em títulos formais de educação, jamais os integrantes da classe média ascendente iriam desejar para si essa educação tão pouco útil e eficiente. Tratava-se, mesmo nesse momento, da manutenção dos princípios da sociedade de outrora, impregnada de duplicidade.

Tem-se então que grupos sociais ascendentes exigiram, no Brasil, acesso aos níveis de ensino antes destinados apenas às elites, um tipo de ensino alienado da cultura local ou da cultura de seu tempo. Somente após a segunda guerra mundial essa pseudo-cultura cedeu lugar a indícios de uma cultura nativa (Teixeira, 1976). Buscando-se atender as exigências da classe em ascensão, ampliou-se o acesso ao ensino, mas a proclamada qualidade correspondente, na prática, foi deixada de lado, o que reforçou a questão histórica da duplicidade envolvendo o proclamado e o real. Através de atos legais, considerava-se uma situação precária como idêntica aos padrões almejados ou propalados (Ibidem).

O Estado condicionou o ensino secundário, que era particular, como a forma de acesso aos estudos superiores, pensando-se com isso em impedir o ingresso correlato das classes sociais menos favorecidas, que não disporiam, em tese, de recursos financeiros para custear a educação de seus filhos nas escolas secundárias e superiores (Ibidem). Não se imaginava, *a priori*, que as famílias da nascente classe média, ascendentes social e economicamente, aos poucos iam adquirir condições financeiras propiciadoras do acesso de seus filhos às escolas secundárias, que prescindiam de processos seletivos para ingresso – vigorava apenas a seleção de ordem financeira –, ao contrário do que acontecia nas instituições mantidas pelo poder público.

Atribuindo legalmente a responsabilidade pelas escolas secundárias à iniciativa privada, o próprio Estado, por esse motivo, não deixou de ser partícipe na ampliação desregrada e/ou sem qualidade desse sistema de ensino, ampliação devida ao crescimento do número de crianças oriundas da classe média que então acorriam a uma quantidade também cada vez maior de escolas, cuja mensalidade não chegava, de modo geral, a ser vultosa, haja vista se tratar de uma modalidade de educação que objetivava o “exercício da mente”, sem, pois, a necessidade de laboratórios, máquinas e equipamentos, que encareciam os serviços prestados pela escola (Teixeira, 1976).

Teixeira (Ibidem) informa que, ao invés da eliminação da duplicidade educacional, fato que vinha ocorrendo em todos os países desenvolvidos em prol da criação de sistemas unificados de estudos acadêmicos, científicos e tecnológicos, houve, no Brasil, uma anacrônica valorização do ensino de tipo predominantemente acadêmico ou assim considerado. Segundo o autor, a mais difícil das educações tornou-se aqui mais fácil e mais barata.

Anísio Teixeira (1976) afirma que, apesar da citada conjuntura educacional, temos hoje as mesmas necessidades educacionais dos países desenvolvidos, haja vista a premência de uma formação voltada para as novas formas de trabalho. Nesse sentido, o autor assevera que a educação escolar deve estar a serviço das necessidades individuais dos estudantes em face das oportunidades de trabalho na sociedade. E arremata:

> *É felizmente para isso que marchamos, à medida que a mentalidade da nação, sob o impacto das mudanças sociais e da extrema difusão de conhecimentos da vida moderna, vem, gradualmente, substituindo seus conceitos educacionais, ainda difusos, pelos novos conceitos técnicos e científicos, e apoiando uma reconstrução escolar, por meio da qual se estabeleça para os brasileiros a oportunidade de uma educação contínua e flexível, visando prepará-los para a participação na democracia e para a participação nas formas novas de trabalho de uma sociedade economicamente estruturada, industrializada e progressiva (Teixeira, 1976, p. 26).*

Algumas considerações

Anísio Teixeira estudou na Universidade de Colúmbia (E.U.A.), onde teve aulas com William H. Kilpatrick (1871-1965) e com John Dewey[4]. É possível, ao se fazer a leitura de seus textos, a percepção de influências da filosofia pragmatista. O ideário deweyano fundamenta-se no princípio de que “pensamento e ação devem formar um todo indivisível (...)” (CUNHA, 2002, p.19-20). A idéia de “interação” homem-mundo teve em John Dewey um de seus primeiros e mais ardorosos defensores. Trata-se de um mérito que não lhe pode, cremos nós, ser negado, mesmo por conta do ponto de vista segundo o qual a filosofia deweyana é de cunho predominantemente liberal. Ao longo de todo o seu texto, deparamo-nos com Teixeira (1976) buscando demonstrar o quanto os pensamentos proclamados não condisseram com os pensamentos que estavam por trás das ações, detendo-se o autor particularmente no registro de acontecimentos históricos do contexto educacional brasileiro.

Pensamento e ação são/estão integrados. Diz-se então que sujeito e objeto, ou razão e experiência, são inseparáveis. O homem age sobre o mundo que, por sua vez, reage sobre o homem. John Dewey enfatiza a utilização, em sala de aula, do método científico experimental a fim de que o aluno, orientado pelo professor, construa o conhecimento ou, melhor dizendo, aprenda a aprender mediante a sua

[4] “Embora não se possa precisar com certeza, é provável que Anísio Teixeira tenha assistido apenas a conferências e seminários com John Dewey, pois à época não oferecia cursos regulares, como os ministrados por Kilpatrick, um de seus principais colaboradores, no *Teachers College* da *Columbia University*” (PAGNI, 2008, p.22).

relação com uma situação ou problema, para cuja solução utilizará hipóteses baseadas em dados cognitivos por ele já assimilados, hipóteses essas que serão devidamente testadas, à moda de efetiva investigação experimental. A Escola Nova de Anísio Teixeira, movimento brasileiro que teve no pragmatismo deweyano um de seus pilares, almeja(va) tirar o máximo proveito durante o ato pedagógico, mediante experimentações discentes, da relação entre sujeito e mundo, entre a criança e o seu entorno social, fato que nos remete ao recurso pedagógico da modelagem matemática.

A qualidade do engajamento do cidadão de amanhã à sociedade, na perspectiva escolanovista, depende das interações do estudante de hoje com aquilo que o cerca, ou seja, com a própria sociedade, a qual deve ser vivenciada no ambiente pedagógico, não se prescindindo para tanto da figura do professor-orientador.

A duplicidade enfatizada por Teixeira na obra "Valores Proclamados e Reais nas Instituições Escolares Brasileiras" diz respeito, entendemos nós, a um distanciamento ou a uma fragmentação entre o que a escola (preparadora do estudante, segundo os escolanovistas, para o seu ajustamento social) proporcionava, ao longo dos períodos históricos brasileiros que esse ator aborda, e o que de fato acontecia do lado de fora de seus muros. Tratava-se, e disso não estamos isentos mesmo nos dias de hoje, de declarar formalmente algo e, ao mesmo tempo, de confirmar que, na prática, a coisa é/era bem diferente do que se declarava. É como se a relação homem-mundo tivesse certas características que, por não serem interessantes, fossem declaradas como inexistentes ou fossem substituídas artificialmente por outras que, a seu turno, eram concordantes com interesses dominantes quanto aos aspectos social, econômico e político. É sob essa ótica que analisamos o pensamento de Anísio Teixeira.

As interações sociais construídas geralmente tendem a implicar dominação unilateral em função do desequilíbrio das forças envolvidas. Mas como elas sempre serão "interações", a possibilidade de mudanças bilaterais nunca pode ser desconsiderada. Entendemos que mundo e indivíduo interagem e transformam-se reciprocamente no sentido mesmo da possível mudança, em termos sociais, de baixo para cima, ou seja, acreditamos que as pressões sejam ou possam vir a ser exercidas em via de mão dupla. Certo recurso pedagógico, a exemplo daquele que conjuga "ensino e pesquisa", ao ser conduzido competentemente por uma consciência crítica e destinado ao maior número possível de alunos – vide a Escola Nova Popular de Paulo Freire, segundo Saviani (1983) –, no mínimo fará com que a complexidade da realidade sócio-econômica vigente passe a ser vista pelos aprendizes sob um novo prisma, o que, por si só, já denota alguma mudança. Em suma, acreditamos que haja ou que tenha havido escolanovistas acríticos e escolanovistas engajados. Isto é, acreditamos que, entre os prosélitos da Escola Nova, existam/existiram aqueles que, de fato, sejam/foram meros reprodutores do que interessa aos que detêm o poder econômico em nossa sociedade, mas também que existam/existiram os que procuram ou procuraram exercitar um pensamento crítico, a ponto de expor, por exemplo, algumas "contradições e duplicidades históricas da educação brasileira".

Bibliografía

Barbosa E., Bulcão M. (2004): *Bachelard: Pedagogia da razão, pedagogia da imaginação*. Rio de Janeiro, Brasil, Editora Vozes.

Campos S., Pessoa V. I. F. (1998): *Discutindo a formação de professoras e professores com Donald Schön*. In: C. M. G. Geraldi, D. Fiorentini, E. M. de A. Pereira (Orgs.). *Cartografias do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a)*. Campinas, São Paulo, Brasil, Editora Mercado de Letras: Associação de Leitur a do Brasil – ALB, p. 183-206.

da Cunha M. V. (2002): *John Dewey: uma filosofia para educadores em sala de aula*. 4.ª edição. Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil, Editora Vozes.

Fiorentini D. (1995): *Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil*. Revista ZETETIKÉ, Campinas, São Paulo, Brasil, n.º 4, ano 3, p.1-37.

Japiassu H., Marcondes D. (1996): *Dicionário básico de filosofia*. 3.ª edição. Rio de Janeiro, Brasil, Editora Jorge Zahar.

Mendonça A. W. (2002): *Anísio Teixeira e a universidade de educação*. Rio de Janeiro, Brasil, Editora EdUERJ.

Miorim, M. (1998): *Introdução à história da educação matemática*. São Paulo, Brasil, Editora Atual.

Morin, E. (2001): *Ciência e consciência da complexidade*. In: E. Morin, J. L. Le Moigne. *A inteligência da complexidade*. 2.ª edição. São Paulo, Brasil, Editora Fundação Peirópolis, p. 25-41.

Morin E., Ciurana E-R,. Motta R. D (2003): *Educar na era planetária: o pensamento complexo como método de aprendizagem pelo erro e incerteza humana*. São Paulo, Brasil, Editora Cortez; Brasília, Distrito Federal, Brasil: Editora da UNESCO.

Pagni P. A. (2008): *Anísio Teixeira: Experiência reflexiva e projeto democrático: a atualidade de uma filosofia da educação*. Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil, Editora Vozes.

Petraglia I. C. (2002): *Edgar Morin: a educação e a complexidade do ser e do saber*. 7.ª edição. Rio de Janeiro, Brasil, Editora Vozes.

Pino A. (2001): *O biológico e o cultural nos processos cognitivos*. In: E. F. Mortimer, Smolka A. L. B. (Orgs.). *Linguagem, cultura e cognição: reflexões para o ensino e a sala de aula*. Belo Horizonte, Brasil, Editora Autêntica, p. 21-50.

Saviani D. (1983): *Escola e democracia*. São Paulo, Brasil, Editora Autores Associados.

Teixeira A. (1976): *Valores proclamados e reais nas instituições escolares brasileiras*. In: *Educação no Brasil: textos selecionados*. MEC Ministério da Educação e Cultura.

Lênio Fernandes Levy: Licenciado pleno em Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Especialização em Educação Matemática (Universidade do Estado do Pará – UEPA) e Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas (UFPA). Professor de Matemática na Secretaria Municipal de Educação de Belém (SEMEC-BE) e na Secretaria Executiva de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA). Professor de Educação Matemática na UFPA. leniolevy@ig.com.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 129-143
SSN: 1815-0640

De la tortura mental a los fractales

Antonio Rosales Góngora

Resumen

Desde la tortura mental que suponía para Cardano los números negativos, hasta las imágenes obtenidas mediante programación en el ordenador para los fractales, hay una distancia de cuatro siglos. La aceptación de la representación geométrica de los imaginarios ilustra la historia de múltiples progresos en matemáticas. Las dificultades de interpretación y utilización necesitaban un tiempo de maduración, hasta obtener una respuesta.

Abstract

Since the mental torture it was for negative numbers Cardano, to the images obtained by programming the computer to the fractal, is a distance of four centuries. The acceptance of the geometric representation of imaginaries multiple story illustrates progress in math. The difficulties of interpretation and use needed a period of maturation, to get an answer.

Resumo

Desde a tortura mental que supunha para Cardano os números negativos, até as imagens obtidas mediante programación no computador para os fractales, há uma distância de quatro séculos. A aceitação da representação geométrica dos imaginarios ilustra a história de múltiplos progressos em matemáticas. As dificuldades de interpretação e utilização precisavam um tempo de maduración, até obter uma resposta.

1. Introducción

Para comprender los progresos intelectuales que llevaron a las herramientas matemáticas que manejamos hoy, es fundamental situar los documentos históricos en el contexto de conocimientos de su época.

Euclides	Al Khawarizmi	Fibonacci	Cardano	Bombelli	Descartes
-300	830	1202	1545	1572	1673
Wallis	Foncenex	Khun	Euler	D'Alambert	Wessel
1673	1747	1759	1747	1774	1797
Carnot	Argand	Buee	Playfair	Servois	Francais
1803	1805	1805	1808	1813	1813
Gergonne	Warren	Mourey	Gauss	Faure	Cauchy
1813	1825	1828	1831	1845	1847
Poncelet	Lill	Transon	Bellavitis		
1864	1867	1868	1854		

Es necesario, para entender las necesidades que hubo para progresar, tener muy en cuenta la situación matemática durante el siglo XV. En Europa, tras siglos de baja actividad científica, el regreso de las ciencias se realiza por el canal de escritos científicos de lengua árabe. Esto se hace a través de España con la traducción del árabe al latín de textos de fuentes griegas y de producciones de lengua árabe o por Italia con la obra de Fibonacci, Liber Abacci.

Se produce un lento redescubrimiento de textos olvidados pero también el descubrimiento de la contribución vital de la ciencia en lengua árabe en contacto con la ciencia de Asia. La geometría euclidea es la referencia que se impone y quien valida las demostraciones.

Los irracionales llegan pronto a perturbar la geometría. Estos números, llamados inconmensurables, que no pueden asociarse a la multiplicación o a la subdivisión de una unidad tienen una existencia reconocida porque responden a una construcción geométrica simple, la geometría dice que $\sqrt{2}$ existe porque es la medida de la diagonal del cuadrado de lado unidad pero los racionales dicen que tal número es extraño.

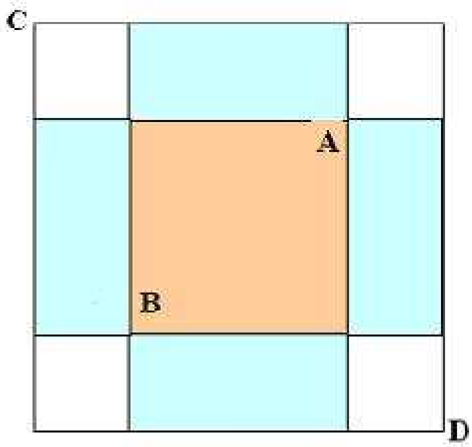
Con la llegada del álgebra nace una nueva perturbación. Esta herramienta, desarrollada inicialmente para responder a los problemas de sucesiones en el marco del derecho árabe, responde también a problemas geométricos. Una gran referencia es Al Khawarizmi cuyo tratado "*Compendio del cálculo por el álgebra y la muq$\bar{a}$bala*" contiene por ejemplo la resolución del siguiente problema " *Un cuadrado y diez veces su raíz tienen una suma de 39 dirhams*" . Se trata de la ecuación $x^2 + 10x = 39$ y razona de la siguiente forma:

> "*Divide el número de raíces por dos, lo que da 5 en nuestro caso. Este número, multiplícalo por el mismo, lo que da 25. Añádeselo a 39, lo que da 64. Ahora tola la raíz de ese número. Que es 8, y réstale la mitad del número de raíces,5. La resta da 3. es la raíz del cuadrado buscado, el cuadrado del mismo es 9*"

En notación actual la ecuación sería: $x^2+10x=39$ y la solución:

$$(x+5)^2 = 39 + 25 = 64 \Rightarrow x + 5 = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow x = 8 - 5 = 3$$

La solución geométrica es: Supongamos que el cuadrado AB tiene por lado la raíz buscada



Sobre los cuatro lados del cuadrado, se construye un rectángulo de anchura ¼ de las raíces, es decir 2'5

La superficie del cuadrado y de los 4 rectángulos es 39

Para completar la figura y obtener el cuadrado CD debemos añadir 4 veces el cuadrado de lado 2’5. Como el área del cuadrado es 64, su raíz es 8, de donde el lado del cuadrado buscado será 8-2x2’5=3

El razonamiento algebraico está ligado a una representación geométrica y así será durante mucho tiempo. Pero el álgebra, al emanciparse de la geometría va a producir resultados “parásitos”: Los números negativos y los complejos. Hay que hacer notar que estos dos conjuntos de números tienen historias paralelas.

Aceptados por unos, ignorados o rechazados por otros, deberán pasar varios siglos para ser reconocidos, el tiempo que se les da un estatus geométrico. Aún más, todos los que se embarcaron para la representación geométrica de los imaginarios comenzaron hablando de los números negativos. El reconocimiento de la existencia de estos últimos es imprescindible para la aceptación de los primeros.

2. Cardano: El iniciador

Cardano (1501 – 1576) fue un sabio italiano del siglo XVI de vida mas bien tumultuosa y con múltiples competencias, aunque es de las matemáticas y de la medicina de las que vive.

Fue el primero en escribir en una obra impresa la raíz cuadrada de un número negativo:

,

es decir, 0 5p:R m : 15 , en su obra Artis Magnae de Regulis Algebraicis publicada en 1545, luego en 1570 y 1663. Esta obra es un compendio de los conocimientos matemáticos de la época incluyendo los algebraicos. Doscientos cincuenta años separan a Cardano de Leonardo de Pisa que a principios del siglo XIII es el trasmisor, a través de Italia, de las matemáticas en lengua árabe y en particular del álgebra.

En esta obra Cardano, apoyándose en sus predecesores, trata las ecuaciones algebraicas en la tradición euclidiana, pues él se formó en esta geometría. Así en su obra “*De propria vita*“ , publicada a titulo póstumo en 1643, declara:

> “*Desde mi primera infancia, hacia los nueve años, mi padre me enseña los elementos de la aritmética así como tipos de arcanos. No se donde había adquirido esos conocimientos. Un poco más tarde, él me enseña la astrología de los árabes y se esfuerza en inculcarme la memoria artificial para la cual me faltaba habilidad. Al pasar los doce años, me hizo saber los seis primeros libros de Euclides pero sin tomarse la molestia de preguntas que yo podía entender por mí mismo*”.

En cuanto al álgebra declara en el primer capítulo de Artis Magnae “*este arte se originó con Mahomet el hijo de Moisés al árabe (Mohammed Ibn Moussa Al*

Khwarizmi), Leonardo de Pisa es una fuente digna de confianza para esta declaración"

En la obra de Cardano aparece una iniciativa que sobrepasa las practicas usuales, partiendo de un problema de formulación análoga a los resueltos, Cardano empieza la resolución a la manera clásica pero los datos que pone no le permiten la resolución. Cambia de registro y continua de una forma teórica que le conduce a nuevos números "**sofisticos**" dice él, raíces cuadradas de números negativos. Es en este pasaje donde aparece su " dimissis incruciationibus "que algunos traducen como tortura mental.

m:R m:15, duc 5 p:R m:15 in 5 m:R m: 15, dimissis incruciationi-
bus, fit 25 m:m:15, quod est p:15, igitur hoc productum est 40, natu

En otra obra menos conocida pero posterior a Ars Magnae, Ars Magna Aritmética " las califica de " oscuro tercer tipo de cosa".

Este texto da la resolución de la ecuación de segundo grado definida por la suma dada de sus raíces 10 (divide 10 en dos partes) y por su producto (cuyo producto es 30 o 40), en notación actual $x^2-10x+40=0$. En la resolución Cardano utiliza la raíz de un número negativo:

Capítulo XXXVI regla II:

Doy un ejemplo: si se nos dice dividir 10 en dos partes cuyo producto es 30 o 40, es evidente que este caso es imposible. Salvo que lo resolvamos de esta manera: Dividimos 10 en dos partes iguales haciendo cada una 5, multiplicando por ese mismo da 25. De 25 sustraemos el producto. 40. Eso como ya he mostrado en el capítulo sobre las operaciones en el libro VI, deja un resto m:15. La raíz de esta añadida y luego sustraída de 5 da las partes que multiplicadas entre ellas dan 40. Por consiguiente estas son:

$$5p:\mathfrak{R}_x m : 15 \qquad y \qquad 5m:\mathfrak{R}_x m : 15.$$

Para la prueba de lo anterior escribe:

El verdadero significado de esta ley puede darse claramente. Sea el segmento AB, que diremos que es 10, que debe ser dividido en dos partes cuyo rectángulo debe ser 40.

Ahora, como 40 es el cuádruplo de 10, queremos obtener 4 veces AB entero. Por consiguiente construimos el cuadrado AB sobre AC la mitad de AB. De AD quitamos cuatro veces AB, sin prestar atención particular a este número. Si hay un remanente, su raíz debe ser añadida y restada de AC, la mitad de AB, te muestra entonces las partes (en las cuales AB debe ser dividida).

Incluso cuando tal resta es negativa , se debe no obstante imaginar

$$\mathfrak{R}_x m : 15$$

como *la diferencia entre AD y el cuádruplo de AB, la cual debe ser añadida y restada de AC para encontrar lo que buscamos, eso hace:*

$$5p:\mathfrak{R}_x v : 25m : 40 \qquad y \qquad 5m :\mathfrak{R}_x v : 25 m 40$$

Y es decir:

$$5p:\mathcal{R}_{x}m : 15 \qquad \text{y} \qquad 5m:\mathcal{R}_{x}m : 15.$$

Esta tortura mental acabará multiplicando:

$$5p:\mathcal{R}_{x}m : 15 \qquad \text{por} \qquad 5m:\mathcal{R}_{x}m : 15.$$

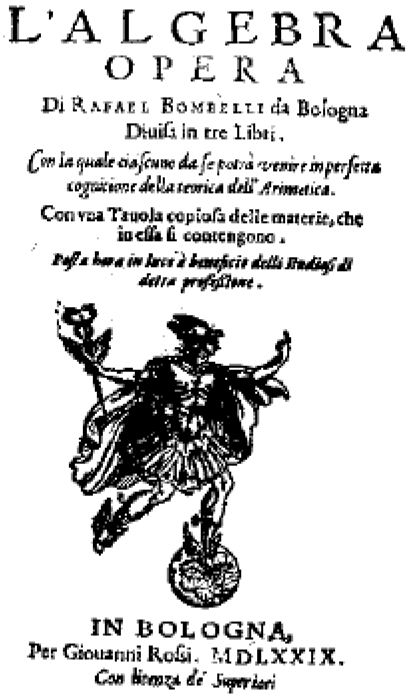
Lo que da 25m : m : 15 que es 40, por consiguiente el producto es 40.

Además la naturaleza de AD no es la misma que la de 40 o la de AB porque una superficie esta alejada de la naturaleza de un número o de la de la línea aunque muy próximo a esta última. Esto en verdad es sofistica, esta cantidad es verdaderamente imaginaria porque las operaciones no pueden ser realizadas con ellas como con un puro número negativo, ni como con los otros números.

Como vemos Cardano nos deja dos herencias, los cálculos con la raíz cuadrada de números negativos $Rm:-15(\sqrt{-15})$ y una construcción geométrica inacabada.

Se abren dos vías para los imaginarios, la del cálculo y la de la representación geométrica. Para los que van a calcular el camino se recorrerá rápidamente. Los imaginarios permiten responder a la afirmación, aunque aún no es más que un sentimiento, que una ecuación algebraica tiene tantas raíces como su grado y, sobre todo, los imaginarios demuestran su eficacia para efectuar cálculos que llevan a soluciones no controvertidas. Para los que participan en la representación geométrica, el camino va a ser mucho más largo porque las controversias serán numerosas y sobretodo porque las primeras proposiciones no esclarecerán los cálculos y dependerán de una voluntad de ilustración sin gran alcance.

3. Bombelli, el primer cálculo



En el último cuarto del siglo XV Rafael Bombelli demuestra poseer herramientas de cálculo de probada utilidad para resolver ecuaciones de tercer grado.

En su famoso manuscrito **El Álgebra** se lee la resolución de la ecuación:

$$2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4,$$

igualar $\overset{3}{1}$ a $\overset{1}{15}+1$,se toma el tercio de la cosa (coeficiente de la incógnita 15 dividido entre3) y se eleva al cubo (5^3=125) y eso se quita del cuadrado de la mitad (2) del número (la constante 4) que es 4, dará 0m.121 y de eso se toma la raíz cuadrada

$$R\!\!\!/\ 0\ m.\ 121$$

que dará: $\mathfrak{R}_{\chi}\llcorner \underline{0 \text{ m. } 121}\lrcorner$ que añadida a la mitad del número da $2.\text{ p } \mathfrak{R}_{\chi}\llcorner \underline{0 \text{ m. }} \; \underline{121}\lrcorner$

es decir $2+\sqrt{-121}$, luego se toma la raíz cúbica y añadida a su conjugado dará

$$\mathfrak{R}_{\chi}{}^{3}\llcorner 2.\text{p. } \mathfrak{R}_{\chi}\llcorner \underline{0 \text{ m. } 121}\lrcorner\lrcorner \text{ p. } \quad \mathfrak{R}_{\chi}{}^{3} \;\llcorner 2 \text{ m } \mathfrak{R}_{\chi}\llcorner \underline{0 \text{ m. } 121}\lrcorner\lrcorner$$

es decir $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$,

lo que da en nuestra notación $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$.

En otro pasaje describe su método para encontrar las raíces cúbicas:

Para $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ encuentra $2+\sqrt{-1}$ Así obtiene $2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$.

Con este ejemplo simple, escribió muchos otros, demuestra la realidad del cálculo con imaginarios que son útiles para la resolución de algunas ecuaciones de tercer grado. Los irracionales habían causado confusión en la geometría euclidea, aquí no se cita la geometría.

Bombelli no sabe prácticamente nada de esos "números", ¿cómo podemos, por otra parte, hablar de números?. Y sin embargo los utilizó en los cálculos tomando a contrapié a Stevin que había dicho: H*ay tantas cosas seguras sobre las que trabajar que no hay ninguna necesidad de cansarse con las cosas inciertas.*

Como en otras situaciones, un rigor extremo habría bloqueado todo avance, hacer caso omiso se revela productivo.

4. D´Alambert, intento de validación

Más de un siglo y medio después, mientras que aún se discutía sobre la interpretación geométrica de los imaginarios, estos intervienen en los cálculos más elaborados. Así en *Reflexión sobre la causa general de las ventas*, D'Alambert los utiliza y da una demostración justificando que todo número complejo elevado a una potencia compleja es un número complejo:

$$\left[a+b\sqrt{-1}\right]^{g+h\sqrt{-1}}=A+B\sqrt{-1}\;\left[a+b\sqrt{-1}\right]^{g+h\sqrt{-1}}=A+B\sqrt{-1}.$$

Como vemos, pese a no ser el objetivo de su obra, D'Alambert siente la necesidad de validar las herramientas matemáticas que utiliza.

5. De la indiferencia al rechazo

5.1. René Descartes, la indiferencia

Los imaginarios no parecen haber suscitado el interés de René Descartes. La lectura de *La Geometrie* da la impresión que se trata de falta de consideración. Aunque utiliza el término álgebra, contrariamente a sus contemporáneos y predecesores, no habla de los fundadores árabes del álgebra y, salvo de Cardano y Scipion del Ferro, de sus sucesores italianos. Habla de los antiguos y cita solo a Euclides, Apolonio y Pappus. Es sorprendente que más de 100 años después de su publicación, no evoque en ninguna parte el álgebra de Bombelli mientras que trata ecuaciones de tercer grado.

Wallis, contemporáneo suyo, que escribió distintos ensayos sobre la interpretación geométrica de los imaginarios, evoca la obra de Bombelli en una carta a Roger Cotes. Descartes no puede enmarcarse en la línea de los opositores sino en la de los ignorantes porque parece no haber tenido conocimiento de los trabajos de sus contemporáneos o no haberlos tenido en cuenta.

Si conoce el trabajo de Cardano aunque no se pronuncia sobre las interrogantes dejadas por este. En la *Geometrie*, Descartes describe inicialmente la construcción geométrica de las operaciones de la aritmética que " no está compuesta más que por cuatro o cinco operaciones, que son, adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces". Afirma querer desmarcarse de los antiguos " yo quiero hacer notar que los escrúpulos que tenían los antiguos de usar los términos *de la aritmética en geometría, no pueden proceder más que de que ellos no veían con claridad su razón, usando mucha oscuridad y confusión en la manera en que se expresaban*".

La geometría euclídea es la base de sus razonamientos lo que naturalmente excluye toda interrogación sobre una representación geométrica de los imaginarios. De ahí que no aparezca en la *Geometrie* la escritura del símbolo $\sqrt{\ }$ asociado a una cantidad negativa por mas que se trate sólo de una escritura simbólica de números negativos, sin embargo plantean menos problemas porque exponiendo su habilidad a manipular las ecuaciones, muestra que se puede transformar las soluciones falsas (negativas) en soluciones verdaderas (positivas) *" y es necesario notar que aumentando las verdaderas raíces de una ecuación se disminuye las falsas de la misma cantidad"*. Las soluciones falsas, debido a esta posibilidad de transformarlas adquieren una forma de existencia. Resuelve geométricamente las ecuaciones de la forma $z^2=az+b^2$; $y^2=-ay+b^2$; $z^2=az-b^2$ y confirma su pensamiento cuando declara *" no hay raíz alguna en la ecuación, de manera que se puede asegurar que la construcción del problema propuesto es imposible".* Aún va más lejos, en su método de resolución de ecuaciones, admite las raíces "falsas" (negativas) y las designa sin su signo, con lo que evita escribir algo imposible.

Así, la ecuación $x^2+4x+2=0$ tiene por soluciones las raíces falsas $r = e^{\sqrt{-1}\alpha}$ que en realidad son $-\left(2+\sqrt{2}\right),-\left(2-\sqrt{2}\right)$ números negativos, para la ecuación $x^2+4x+7=0$ declara que las soluciones son imaginarias sin escribir nada.

Lo paradójico es que Descartes al ampliar la geometría euclídea apoyándose en la creación de un punto de referencia se aproxima a lo que hoy llamamos referencia cartesiana que era una puerta para la representación geométrica de los complejos.

5.2. Jean Victor Poncelet, el rechazo

Se trata de un personaje de la geometría del primer cuarto del siglo XIX que, como dice CHASLES en su "Rapport sur les progrès de la geometrie..." *sus buenas dotes para las investigaciones en geometría pura le han conducido a brillantes descubrimientos... en 1822 pone al día el TRATADO DE LAS PROPIEDADES PROYECTIVAS DE LAS FIGURAS, que supone un paso considerable para la ciencia".*

Su trayectoria no deja de ser original. Salido del politécnico en 1810, participa en las guerras imperiales como teniente de ingeniería. Dado por muerto en el campo de batalla de Krasnoï, cerca de Smolensk, después de la derrota de las tropas del mariscal Ney, es hecho prisionero en Saratoff, en el Volga, entre 1813 y 1814. Tenía 24 años y durante sus dos años de prisionero escribe, sin fuente documental alguna y sólo a partir de lo que recordaba de matemáticas, siete cuadernos que servirán de fundamento a su tratado. A continuación deja el estudio de la geometría y se consagra a la la enseñanza de las ciencias mecánicas e industriales, no teniendo "*otro principio que ser útil a la clase obrera y a los jóvenes de nuestras escuelas, quería inspirarles su amor a las verdades eternas de la ciencia, el odio de la trama y de las sofisticas sutilezas de unos charlatanes codiciosos..."*. Lo esencial de su trabajo fueron las propiedades proyectivas de las figuras.

Los trabajos de Poncelet en geometría son importantes pero se podría pensar que cuarenta años después de escribirlos, aceptaría poner en cuestión algunas de sus afirmaciones. El hecho es que hasta 1864 parece haber sido impermeable a trabajar en la representación geométrica de los complejos. Es contemporáneo de Cauchy y de sus escritos se deduce un buen conocimiento de la evolución de las matemáticas. Así conoce los trabajos contemporáneos de Cauchy, Coriolis, Plucker y otros, pero mantiene su posición.

La asociación de $\sqrt{-1}$ a una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$, la perpendicularidad es el resultado de analogías engañosas aunque atractivas, lo que no le impidió la práctica de la misma analogía. Afirma que si la curva en polares $\rho = ae^{\theta}$ es una espiral logarítmica entonces la curva $r = e^{\sqrt{-1}\alpha}$ es una espiral logarítmica... imaginaria.

Quizás sea su hostilidad hacia Cauchy, que en esta época ya había hecho su " *Síntesis algebraica*", lo que le lleva a mantener esta posición; aunque hay que reconocer que Cauchy había dejado de considerar numerosos trabajos en su justo valor. Así guarda los trabajos de los jóvenes Galois y Abel que se revelarían como fundamentales.

Poncelet utiliza el término imaginario en geometría. Así si una recta corta a una cónica en dos puntos él le llama cuerda o secante real y los puntos, puntos de intersección reales.

Cuando la recta no es secante, los puntos de intersección se vuelven imaginarios. Una recta así, no construible, se llama recta imaginaria. Este principio de continuidad que permite pasar de una figura a otra con continuidad en los cálculos es lo que le ha llevado a persistir. Él aplica este principio para pasar de la espiral logarítmica a la espiral logarítmica imaginaria, que solo existe en la imaginación.

6. Los que construyen

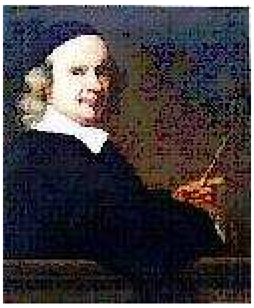
Los que se ocuparon de construir una interpretación geométrica de los imaginarios podemos clasificarlos en tres grupos no excluyentes. El primero se ocupa de la interpretación por áreas negativas; los otros dos corresponden a las interpretaciones comúnmente admitidas. La ortogonalidad y las transformaciones del plano.

Entre los autores implicados hay unos sobradamente conocidos como Wallis, Euler, Gauss y Cauchy, mientras que otros son casi desconocidos y algunos no eran ni matemáticos “profesionales”. BUEE, abad organista de Saint Martín de Tours, emigra a Inglaterra el 10 de agosto de 1793 y no tiene más que una sola comunicación matemática publicada en las Actas de la Royal Society de Londres. ARGAND era contable en Paris y WESSEL era agrimensor – cartógrafo del rey de Dinamarca. Para lo que se ha publicado bajo el nombre de Mourey no se sabe quien pueda ser, ¿ un matemático conocido con seudónimo? , ¿ Un grupo de alumnos de la Politécnica?. En su obra “*verdadera teoría de las cantidades negativas y de las cantidades pretendidas imaginarias”* publicada en 1828 y reeditada en 1861, muy citada por los matemáticos de la época, dice en el prólogo: “ *para desarrollar completamente esta teoría, habría que rehacer todas las ramas de las matemáticas. Yo no puedo ocuparme, como se puede comprender, mas que de los principios fundamentales, y sin embargo, he compuesto un manuscrito bastante considerable. Pero las circunstancias no me permiten imprimir una obra tan voluminosa, he decidido publicar primero este opúsculo, que es sólo un breve compendio”.* De hecho el opúsculo introduce un vocabulario nuevo y nuevas notaciones que quedaron sin continuidad.

¿ Que impacto real han tenido todos estos escritos en la finalización de una representación geométrica de los complejos?. La de Wessel pese a su gran calidad, no ha tenido influencia pues estaba escrita en danés y pasó desapercibida en su época.. Las otras si han sido citadas y conocidas. Contrariamente a la época de Descartes, la cuestión está suficientemente madura como para resolverla.

7. John Wallis, tentativas por todas partes

Wallis, contemporáneo de Newton, profesor de Geometría en Oxford desde 1649 a 1703, es uno de los fundadores de la Royal Society, equivalente a la Academia de Ciencias de Paris. En 1685 publicó *Traitise of Álgebra, Both historical and practical*. Comienza por justificar la existencia de números negativos examinando los desplazamientos de un hombre sobre una recta hacia delante y atrás de un punto A. Explica que cuando se trata de una aplicación física, una cantidad menor que nada no indica mas que una cantidad real, como con signo más pero en sentido contrario. Esta relación entre el más y el menos le lleva a querer interpretar los cuadrados negativos buscando definir las áreas negativas. Como para los retrocesos esto no es más que una cuestión de lenguaje, las áreas negativas se vuelven superficies perdidas, superficies cuadradas cuyo lado es imaginario. La inducción no parece muy adecuada porque es una manera muy complicada de decir las cosas y sobre todo porque no se ve la utilidad operatoria.



Wallis explica en **De las cantidades negativas y sus raíces imaginarias en álgebra:**

“Por ejemplo, supongamos que en un lugar, se gana al mar 30 Acres, pero que en otro lugar se pierden 20 Acres. Si preguntamos ¿cuántos acres se han ganado en total? La respuesta es 10 Acres o +10 lo que hace 1600 varas cuadradas (pues el Acre inglés es una superficie de 40 varas de longitud y 4 de largo, cuya área es 160, 10 Acres son 1600 varas).

Representadas como un cuadrado, nos da un lado de 40 varas o (admitiendo la raíz negativa) –40.

Pero si nosotros perdemos 20 Acres más y planteamos la misma cuestión ¿cuánto hemos ganado en total?. La respuesta debe ser – 10 Acres (30-20-20=-10), lo que quiere decir, la ganancia es 10 Acres menos que nada que es lo mismo que decir: hay una perdida de 10 Acres o 1600 varas cuadradas.

Hasta aquí no aparece ninguna nueva dificultad ni otra imposibilidad que las ya encontradas. Excepto que $\sqrt{1600}$ *es ambiguo, y puede ser +40 o –40 y que tal ambigüedad resulta que las ecuaciones cuadráticas admiten dos raíces.*

Pero ahora, suponiendo que esta superficie negativa, -1600 varas, tenga la forma de un cuadrado ¿cuál es su lado?.

Nosotros no podemos decir que es 40 ni –40 porque cada uno de ellos multiplicado por el mismo dará +1600 y no –1600, sino que es $\sqrt{-1600}$ *o lo que es equivalente* $10\sqrt{-16}$ *o* $40\sqrt{-1}$ $20\sqrt{-4}$ *o* $40\sqrt{-1}$ *”*

Esta interpretación es un poco forzada y además no tiene utilidad operativa. Su segunda aproximación es la de las medias proporcionales:

“$\sqrt{\ }$ *implica una media proporcional entre una cantidad positiva y una cantidad negativa. Así, de la misma manera que* $\sqrt{bc}$ *significa una media proporcional entre +b y +c o entre –b y –c,* $\sqrt{-bc}$ *significa una media proporcional entre +b y –c o entre –b y +c. Y esto considerado algebraicamente es la verdadera naturaleza de las raíces imaginarias”*

Las medias proporcionales que tienen una interpretación geométrica cuando se trata de longitudes va a ser extendida a los números negativos.

Todas estas tentativas, pese a la falta de rigor, tienen el merito de tratar de encontrar una salida por una interpretación geométrica que por ahora no conducen a una buena respuesta de las raíces cuadradas dadas.

8. Buee, operación aritmético – geométrica y rotación

El abad Buee envió su “*Memoria sobre las cantidades imaginarias*” en 1805 a la Royal Society de Londres. Su memoria comienza por dar una interpretación de + y – sobre la que no hay nada que decir. Enseguida se percibe que los números indican en geometría más de lo que aparece allí, que pueden ser considerados como una asociación longitud – dirección.

> “*Considerados como signos de operaciones aritméticas + y – son los signos, uno de adición y el otro de sustracción.*
>
> *Considerados como signos de operaciones geométricas, indican direcciones opuestas. ... Cuándo se describe una línea de una longitud determinada en una dirección determinada, se hacen dos cosas 1º se da a esta línea su longitud; 2º se le da su dirección. La primera de estas operaciones es puramente aritmética. La segunda es puramente geométrica. En la 1ª se hace abstracción de la dirección. En la 2ª se hace abstracción de la longitud. Cuando se reúnen estas dos operaciones, se hace realmente una operación aritmético – geométrica”.*

Ilustra estas nociones con la ayuda de tiempos pasados y futuros y también con propiedades y deudas. Luego viene el tema principal de su memoria, $\sqrt{-1}$.

Al igual que Wallis, da una interpretación de áreas negativas un poco más elaborada. Introduce la noción de rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$, lo que es una buena intuición pues efectivamente se puede asociar a $\sqrt{-1}$ una rotación de este ángulo, sin embargo el uso que hace de ella no va más allá que el de Wallis.

La preocupación de Buee como de sus predecesores es llevar a la convicción de la eficiencia de sus interpretaciones sobre la geometría y el cálculo.

Comienza con sumas debidas y no debidas, cuadrados con espesor y problemas de marmolistas que se plantean cuestiones de cubos llenos y cubos vacíos y los resuelven de manera muy complicada. Todo esto es muy poco convincente. Va más lejos y vuelve sobre su cuadrado que gira y llega a una conclusión mucho más interesante.

John Warren, pastor de Gravelay que no era científico de profesión, publica en 1829 una memoria "*consideración sobre las objeciones elevadas contra la representación geométrica de las raíces cuadradas de los números negativos",* en la cual justifica la realidad de los imaginarios por una aproximación en el dominio de la física por la composición de movimientos en dinámica. Atrae negativamente la atención sobre esta parte de la memoria de Buee diciendo que no puede comprender la prueba $\overline{KP}\left(\sqrt{-1}\right)^n = n\sqrt{-1}$ que asocia imaginarios y rotación en el plano. La confusión proviene de una mala extensión de una notación inadecuada, la primera parte $\left(\sqrt{-1}\right)^n = nT\left(\frac{\pi}{2}\right)$es suficientemente explicita para indicar que la multiplicación de $\sqrt{-1}$ n veces por el mismo corresponde a una sucesión de n rotaciones de ángulo $\frac{\pi}{2}$.

9. Robert Argand, una definición y un modo de operar claro

Fue después de un artículo de J.F. Francais, profesor de la Escuela Imperial de Artillería e Ingeniería aparecido en 1813 en los Annales de Mathematiques pures et apliquées dites aussi Annales de Gergonne, que Robert Argand declara ser el autor del "*Essai sur une maniere de representer les quantités imaginaires dans la constructions geometriques "* publicada anónimamente en 1806.

Argand nació en Genova en 1768 y murió en Paris en 1822 donde era " tenedor de libros". Es muy poco lo que se sabe de él, no hay datos sobre sus posibles estudios. Argand empieza con los números negativos y da unas ilustraciones con pesos sobre las bandejas de una balanza y fortunas activas y pasivas expresadas en francos. Muy hábilmente separa magnitud y dirección: "*La segunda es que, dos cantidades de una especie susceptible de proporcionar valores negativos comparadas entre ellas, la idea de su razón es compleja. Ella comprende: 1º la idea de razón numérica dependiendo de sus magnitudes respectivas consideradas absolutamente; 2º la idea de la razón de sus direcciones o sentidos a los que pertenecen, la misma u opuesta".*

La proeza, como podríamos decir, es que Argand llega a presentar su interpretación geométrica sin recurrir a una indicación del plano pero con la ayuda de un círculo trigonométrico. Hasta va un poco más lejos en su interpretación aproximándose a la noción de vector: *" Observemos ahora que, por la existencia de las relaciones que acaban de ser establecidas entre las cantidades $\overline{KA}, \cdots \overline{KB}, \cdots \overline{KC} \cdots$, no es necesario que la salida de la dirección, que constituye una parte de la esencia de estas cantidades, este fija en un punto único K; estas relaciones también se dan si se supone que cada expresión, como $\overline{KA}$, designa en general una magnitud igual a KA y tomada en la misma dirección..."*

Presenta también la diferencia de naturaleza de las operaciones introduciendo una nueva notación:

" Cantidades imaginarias, escribiendo, por ejemplo, $\sqcup$ a y $\Downarrow$ a en lugar de $+a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$, los signos $\sqcup$ y $\Downarrow$ son positivos y negativos recíprocos "

Esta propuesta no tendrá éxito. Pero, lo más importante, define la suma y multiplicación de lo que llama líneas dirigidas. Para la suma se trata, casi, de una suma vectorial:

" *Aplicando este mismo principio a las líneas de otros ordenes, se concluirá que, los puntos K, P, R cualesquiera, se tiene siempre* $\overline{KP} + \overline{PR} = \overline{KR}$ "

Y para la multiplicación:

" Para construir el producto de dos rayos dirigidos, hay que tomar, a partir del origen de los arcos, la suma de los dos arcos que pertenecen a esos rayos, y el extremo del arco suma determinará la posición del rayo producto. Es una multiplicación logarítmica. No es necesario mostrar que esta regla es válida para un número cualquiera de factores.

Si los factores no son unidades, se podrá poner bajo la forma $m\overline{KP}$*,..., m, n coeficientes o líneas primas positivas, y el producto será* $(mn...).(\overline{KB}.\overline{KC}...) = (M.N...)\overline{KP}$ *donde el producto de la línea positiva m.n por el rayo* $\overline{KP}$ *no es otra cosa que esta misma línea tirada en la dirección del rayo.*

La división se operará por un camino inverso que sería superfluo detallar"

Con este escrito se puede considerar que una representación geométrica de los complejos empieza a emerger. Quedará precisar su utilización en otros dominios como las transformaciones del plano que Buee había entreabierto. La iniciación del desarrollo de las teorías vectoriales con Bellavitis (primeros trabajos publicados en 1835) completará la utilización general que puede hacerse de los imaginarios en geometría. La unificación final se hará con el desarrollo de la noción de estructura ampliamente iniciada por Galois en un texto de 1830.

Será Hamilton quien, en 1837, fundamente el estatus aritmético de los complejos al considerarlos como pares ordenados de números reales. Por ello hay que admitir que dichos pares ordenados, con su adición y multiplicación, nada natural por cierto, puedan considerarse como números en sí, que satisfacen las mismas propiedades que los racionales, constituyen un cuerpo, aunque no puedan ordenarse como aquellos.

Tanto con fundamentación aritmética como algebraica, dada por Cauchy en 1847 apoyándose en las clases de restos en el anillo de polinomios en una indeterminada módulo x^2+1, los complejos quedan incorporados en el hacer matemático (aunque Borel en 1953 aún los denominaba ficticios).

Resulta interesante observar que los complejos se definen usando como base los reales que aún están indefinidos. Incluso Cauchy ha de suprimir, en aras del rigor, el que un limite caracterice un irracional para no incurrir en circulo vicioso.

10. Nuevas tecnologías y renacimiento de la representación

El estudio del estado de los sistemas dinámicos relanza la representación geométrica de los complejos. El origen de la teoría de sistemas dinámicos complejos data de comienzos del siglo XX con los trabajos de Gaston Julia y Pierre Fatou.

Louis Pierre Fatou nació en Lorient el 28 de Febrero de 1878 en el seno de una familia de marinos. Tras estudiar en le liceo de Lorient, comienza sus estudios matemáticos en la Ecole Normale Superieure de Paris en 1898. Tras los estudios, se presenta a un puesto en el observatorio de la ciudad pues pensaba que era imposible obtener uno como matemático. Obtiene el puesto, en 1901, pero siguió con su tesis de doctorado sobre integración y funciones complejas. La termina en 1906 y en 1907 obtiene el grado de doctor con “ Series trigonométricas y series de Taylor ” donde se muestra como uno de los mejores conocedores de la integral de Lebesque, una novedad en la época. La cuestión por la que se interesa es natural y antigua: estudiar una serie entera en su entorno de convergencia, el método es nuevo: la integral de Lebesque. El ha dejado su nombre a un lema cuya conclusión es $\int \liminf f_n d\mu \le \liminf \int f_n d\mu$ siendo f_n una sucesión de funciones medibles.

Fatou había empezado a estudiar la iteración en 1906, por una u otra razón (la tesis, problemas de salud, trabajo, su enorme afición a la música, la fotografía ...), a pesar de la originalidad de su aportación y de los sorprendentes resultados obtenidos, no había publicado nada sobre el tema. En 1915 la Academia de Ciencias publicaba el tema para el “ Grand Prix des sciences mathematiques ” de 1918, un estudio sobre iteraciones. Fatou comenzó a estudiar la cuestión y en 1917 comienza a publicar sus resultados en forma de notas en Comptes Rendus. En junio de este año, Montel publicaba también una artículo en Comptes Rendus sobre otro tema pero que contenía una idea que tomó Fatou, lo que se llamaría, sesenta años más tarde, el conjunto de Julia. Mientras tanto, Gaston Julia había leído también el artículo de Montel y tenía ideas parecidas. Montó en cólera, reclamó la prioridad y la Academia se la otorga. Fatou continua trabajando tranquilamente en su rincón, Julia envía un dossier para la candidatura del Grand Prix y vence.

Resulta interesante preguntarse por qué la Academia escoge este tema para el premio. La respuesta, posiblemente, se encuentre en el concurso propuesto por Oscar II, rey de Noruega y Suecia, en el cual retaba a mostrar rigurosamente que el sistema solar modelado por las ecuaciones de Newton era dinámicamente estable. El concurso fue ganado por Poincaré quien, pese a no dar la solución completa, usó la iteración en sus estudios de mecánica celeste, creando un nuevo método analítico y vislumbrando lo que con el tiempo sería la teoría del caos.

Tampoco debemos olvidar, como respuesta, el interés por estudiar la iteración de Köening en 1880 y por el matemático alemán Ernst Schröder.

Parece ser que a Fatou, un hombre meditativo, reflexivo, reservado, silencioso y discreto, a veces taciturno, no le interesaban demasiado los fractales, pero preparó el camino para los futuros trabajos de Julia y Mandelbrot, quizás por eso se conoce, en su honor, a las figuras de Julia provenientes del exterior del conjunto de Mandelbrot, “Polvos de Fatou”.

Gaston Maurice Julia nació el 3 de Febrero de 1863 en Siddi Abbes, Argelia. Fue llamado al ejercito el 4 de Agosto de 1914, ascendió a Teniente y mandó su destacamento el 25 de Enero de 1915 en un combate de extrema violencia en el que una bala destrozó su cara y le arrancó la nariz.

Para distraerse del dolor que le producían las heridas, se sumergió en un problema matemático: El comportamiento de la fórmula que se encuentra tras los fractales de Julia.

Tras la salida del hospital militar y con la guerra terminada, publica, en 1918, un libro de unas 200 paginas titulado “*Memoria sobre la iteración de las funciones racionales*”. Gracias a él gana el Grand Prix de las Academia de Ciencias y adquiere una gran reputación en los círculos matemáticos.

En 1925 se dan seminarios en Berlín para estudiar sus trabajos a fondo pero, como no se conocían los ordenadores para trabajarlos, sus trabajos caen en el olvido.

Será Benoit Mandelbrot quien redescubre los trabajos de Julia justo antes de su muerte en 1978.

Benoit Mandelbrot nació el 20 de Noviembre de 1924 en Polonia. En 1936 sus padres emigran a Francia donde su tío, Szolem Mandelbrot, se encarga de su formación. Esta influencia fue positiva pero también negativa pues su tío admiraba a Hardy y su filosofía en matemáticas, lo que provocó la aversión de Mandelbrot por las matemáticas teóricas.

La guerra le impidió una asistencia regular al Liceo pero aprendió como autodidacta. En 1944 empieza sus estudios en la Politécnica donde tenia como profesores, entre otros, a Julia y Paul Levy, este último de gran influencia para él.

En 1945 su tío le enseña la memoria de Julia (1918) como una buena fuente de problemas interesantes, pero en ese momento no le interesó.

En 1970 cambiaría su interés. En esta época trabajando en IBM obtiene por primera vez una representación del conjunto de Julia.

Julia y Fatou se plantearon el problema de determinar que sucede con un punto z del plano complejo cuando se le aplica iteradamente la transformación $f_c(z)=z^2+c$, es decir, en lenguaje actual, estudiar la orbita de los puntos z de $\mathbb{C}$ en el sistema dinámico $\left(\mathbb{C}, f_c(z)=z^2+c\right)$.

Observaron que, para ciertos valores de c, la orbita de los puntos de un entorno del origen convergía a un determinado punto del plano complejo, que resultaba ser un punto fijo de la aplicación $f_c(z)=z^2+c$, mientras que la orbita de los puntos más alejados del origen se dispersaba hacía infinito. Cada uno de estos tipos de puntos constituye una región, y en medio queda una frontera infinitamente delgada que se conoce con el nombre de conjunto de Julia.

La orbita de los puntos de ambas regiones se va alejando del conjunto de Julia, hacia dentro o hacia fuera, respectivamente.

A la vista de los diferentes conjunto de Julia que se van obteniendo, asociados al sistema dinámico cuadrático, al elegir distintos valores del parámetro $c \in \mathbb{C}$, nos podemos preguntar si existe alguna posibilidad de clasificarlos y ordenarlos según su forma y estructura. Esta idea se basa en un hecho ya conocido por Julia y Fatou, que nos dice que para cualquier valor del parámetro $c \in \mathbb{C}$ el conjunto Julia asociado resulta ser de uno de los dos tipos siguientes: a) Conexo, es decir formado por una sola pieza b) Completamente disconexo, es decir formado por una nube de puntos dispersos con la misma estructura que los conjuntos de Cantor.

Pues bien, el conjunto de Mandelbrot es el conjunto de puntos $c \in \mathbb{C}$ para los que el conjunto de Julia asociado al sistema dinámico $\left(\mathbb{C}, f_c(z) = z^2 + c\right)$ resulta ser conexo.

Bibliografia

Boyer, C.B. (1986). *Historia de la matemática*, A.U./94,Madrid
Bourbaki, N. N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*, AE
Collete, J. (1985). *Historia de las matemáticas*, siglo XXI, Madrid
Crowe, M.J. (1985). *A History of Vector Analysis*(.Univ. Notre Dame Press,Notre Dame1967 y Dover ,1985)
Garcia Doncell, M. (1984). Orígens Físics de l'analisi vectorial en *El desenvolupament de les matemátiques al segle XIX,* Institut d'estudis catalans, Barcelona.
De Guzman, M.; Martín, M.; Morán, M.; Reyes, M. (1993). *Estructuras fractales y sus aplicaciones* , Labor, Barcelona
De Lorenzo, J. (1977). *La matemática y el problema de su historia*, Tecnos, Madrid
Gibbs; J. (1891). On the Role of Quaternions in the Algebra of Vector, Nature, 43,511
Hestenes, D. (1986). *New Foundations for Classical Mechanics*, Kluwer, Dordrecht
Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (II),AU/724, Madrid
Mandelbrot, B. (1993). *Los objetos fractales*, Tusquet Editores, S.A. Barcelona
Parra Serra (1997). *L'Algebra vectorial* (IEC)
Taton, R. (1988). *Historía general de la ciencia*,(VIII),Orbis, Barcelona

Antonio Rosales Góngora Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada, ejerzo la docencia en el IES Bahía de Almería. He publicado artículos relacionados con la Historia de las Matemáticas en la revista Epsilon, en el Boletín matemático de la UAL, revista Unión, revista Virtual Matemáticas, Educación e Internet. anrogo58@yahoo.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 145-165
ISSN: 1815-0640

O ensino da matemática no estado novo – segundo ciclo lineal. Incursões pela imprensa da época (1947-1968)

Manuel Tavares, Maria Clara Correia Ferreira

Resumo

Neste artigo pretendemos apresentar as diversas visões surgidas na imprensa do Estado Novo, no período compreendido entre 1947 e 1968, sobre o ensino da Matemática no 2º ciclo do ensino liceal. Os percursos hermenêuticos foram efectuados por diversos jornais da época e por revistas pedagógicas, algumas delas já desaparecidas, tais como a *Labor e Palestra.* A *Gazeta de Matemática* permanece ainda em circulação. Ao longo da pesquisa, fomos descobrindo que os argumentos actualmente utilizados no que se refere a críticas ao ensino da Matemática, e ao facto de os alunos não obterem boas notas nos exames, nem "saberem Matemática", não são muito diferentes dos que eram usados há quarenta e cinquenta anos.

Abstract

In this article we present different opinions taken from the press of « Estado Novo», in the period between 1947 and 1968 on teaching Mathematics in the 2nd cycle of secondary education. The hermeneutical journeys were made by several newspapers of the time and pedagogical journals, some of them have nowadays disappeared, such as *Labor* and *Palestra*. The *Gazeta de Matemática* is still published. Throughout this study, we have found that the arguments currently used in which concerns criticism on teaching of Mathematics, and the fact that students do not get good grades in exams, or "cannot learn Mathematics" are not very different from those that were used forty and fifty years ago.

Resumen

A lo largo de este artículo pretendemos presentar las diversas visiones que han surgido en la prensa del Estado Novo en el periodo que se sitúa entre 1947 y 1968 sobre la enseñanza de la Matemática en el 2º ciclo del ensino liceal. Los percursos hermenéuticos han sido efectuados por los diversos jornales de la época y por revistas de pedagogía, algunas de entre ellas ya desaparecidas, tales como *Labor* y *Palestra.* La *Gazeta de Matemática*, está aún en circulación. A lo largo de este estudio, hemos encontrado que los argumentos que se utilizan actualmente en lo que respecta a la crítica de la enseñanza de las matemáticas, bien como al hecho de que los estudiantes no obtienen buenas calificaciones en los exámenes, ni tampoco "saberen matemáticas" no son muy diferentes de las que se utilizaron en los años cuarenta y cincuenta.

1. Introducción

Na actualidade, emergem inúmeras mudanças no que concerne ao ensino da Matemática e no que é exigido aos professores no âmbito de competências e práticas escolares; também os alunos, que são chamados a desenvolver as suas competências sobretudo ao nível do raciocínio e não, como no passado, apelando, apenas, à memorização. Consideramos que aquilo que se passa presentemente e que tem vindo a emergir no centro dos debates na comunicação social, principalmente em épocas de exames nacionais, onde está patente o confronto entre opiniões diversas, decorre de um passado que remonta ao Estado Novo.

Assim, e entendendo que a visão sobre o ensino da Matemática não é uniforme, mas que se define em cada momento, em função dos seus fins sociais, da sua aplicabilidade e das concepções sobre a Matemática, pareceu-nos importante analisar o ensino da Matemática, no 2º ciclo liceal, em Portugal, no período do Estado Novo compreendido entre 1947 e 1968. As idades dos alunos variavam entre os 13 e os 15 anos. Este ciclo, o 2º de entre três ciclos do ensino liceal, era constituído por três anos - 3º, 4º e 5º- e os temas a leccionar obedeciam à seguinte distribuição: 3º ano – Álgebra e Geometria Plana; 4º ano - Álgebra e Geometria Plana; 5º ano - Álgebra e Geometria no Espaço.

Nesta óptica, abordaremos algumas perspectivas respeitantes ao papel da Matemática no ensino liceal naquela época, com base em artigos de opinião incluídos na imprensa periódica (jornais e revistas).

Principiaremos por fazer referência ao Estado Novo e à Educação no Estado Novo, assim como à imprensa de Educação e Ensino e, consequentemente, à censura existente no regime ditatorial que iremos estudar. Investigaremos, posteriormente, a opinião pública patente em jornais e revistas da época.

1.1. Estado novo

Estado Novo designa, em Portugal, o sistema político consagrado pela Constituição de 1933. Representa o período da História da República Portuguesa em que predominou o sistema presidencialista ligado a um sistema económico e social corporativo. Baseava-se no condicionamento das liberdades individuais em nome do interesse geral, sem prejuízo da paz social.

No rescaldo da Primeira Grande Guerra, muitos são os factores que concorrem para a sensação de crise que domina os meios políticos portugueses na última fase da primeira República. A crise interna do Estado conduz a uma ditadura militar, que depressa ganha o apoio dos sectores conservadores. Em 1933, um novo texto constitucional procura dotar a Nação de um estatuto fundamental nacionalista, corporativo, autoritário. A estabilidade política tem por suporte a personalidade do chefe do Governo, Oliveira Salazar, que, até 1968, é o verdadeiro condutor da política portuguesa nos planos interno e externo.

De acordo com a perspectiva de alguns historiadores (Rosas, 1992; Barreto & Mónica, 1999), o Estado Novo não se pode incluir no naipe dos fascismos existentes na Europa, mas somente como sendo um regime reaccionário, retrógrado e autoritário. Com efeito, uma consistência de estrutura essencial para a percepção da absoluta afirmação dos movimentos e regimes fascistas na Europa, diz respeito à grave e intensa crise das classes intermédias no período imediato após a Primeira Guerra Mundial - "(…) suporte tradicionalmente viabilizador dos sistemas políticos «demo-liberais» -, sobretudo por efeito da Grande Depressão de 1929" (Rosas, 1992, p.12).

Com a chegada ao poder de Salazar, exactamente na etapa de transição da Ditadura Nacional (1926-1932), vai-se adquirir e constituir "(…) uma plataforma política e ideológica capaz de forjar um compromisso de unidade indispensável não só à conservação do poder, mas sobretudo à instauração de um regime autoritário, estável e duradouro" (Teodoro, 2001, p.176).

1.2. A educação no estado novo. Imprensa e censura

De entre os vários campos da actividade do Estado em Portugal, a educação é, sem qualquer sombra de dúvida, um daqueles em que mais propósitos de reforma acontecem no tempo, de forma alucinante, sem muitas vezes haver uma relativa realização na prática (Almeida & Vieira, 2006).

Na perspectiva de António Candeias (2001), a implementação do sistema educativo em Portugal foi excessivamente lenta e só em meados da década de 50 do século XX é que "(…) a esmagadora maioria das crianças com idades compreendidas nos parâmetros da lei se encontravam efectivamente matriculadas na escola" (Candeias, 2001, p.41).

A escolarização da população desde há muito que se vinha revelando um propósito repetidamente proclamado pelos sucessivos governantes políticos e reclamado pela maioria dos pedagogos, repercutindo os ímpetos de reforma e de actualização que desde o século XIX se faziam sentir por quase toda a Europa (Almeida & Vieira, 2006).

Segundo Madeira, Pimentel & Farinha, (2007), ao arvorar, a partir de 1933, o Estado Novo solidário, absolutista e patriótico, Salazar afirmou que estava feita a "(…) «revolução legal», mas que faltava realizar a «revolução mental»" (Madeira, Pimentel & Farinha, 2007, p.33). Para a executar, foi lançada a chamada "Política do Espírito" (Madeira, Pimentel & Farinha, 2007, p.33), com um mesmo intuito e um duplo propósito: a publicidade do regime, a cargo do Secretariado de Propaganda Nacional (SPN), e a Censura.

A través do SPN, o regime totalitário aspirava, "(…) por um lado, dar aos portugueses uma única e determinada imagem de um país e de um regime, pretensamente sem conflitos, problemas, miséria e dificuldades, segundo a norma de «o que parece é», tão do agrado de Salazar" (Madeira, Pimentel & Farinha, 2007, p.33). Por sua vez, a máquina da censura fornecia, por outro lado, um desígnio de "(…) despolitização e desmobilização cívica dos portugueses, ao tentar impedir a tomada de conhecimentos de alternativas sociais, culturais, políticas e ideológicas ao Estado Novo" (Madeira, Pimentel & Farinha, 2007, p.33).

Na perspectiva de Barreto & Mónica (1999), a imprensa dedicada às questões da educação e do ensino compreende um estádio de grande veemência durante o Estado Novo, consequência assinaladamente do esforço doutrinal do salazarismo em espaços que, por tradição, não eram abarcados pelo discurso pedagógico.

São do conhecimento público as limitações à liberdade de imprensa, que abarcaram grandes obstáculos às publicações de iniciativa privada. Todavia, este facto não impede a subsistência de uma importante dinâmica ideológica que vai honrosamente resistindo. Contudo, a prepotência do Estado Novo explica a queda da secção mais proveitosa da imprensa da educação e ensino, ligada aos professores e às suas variadas exteriorizações associativas em defesa da classe ou da melhoria da situação escolar; o surgimento de revistas nos anos vinte não tem continuidade quando, nas décadas posteriores, emergem outras correntes e orientações pedagógicas. A este propósito, Barreto & Mónica (1999) afirmam:

> *"A importância que o Estado Novo atribui à vertente ideológica justifica o alargamento dos espaços editoriais para difundir os valores da tríade atemporal Deus-Pátria-Família, que lhe permitem reforçar uma socialização nos antípodas do anterior paradigma demo-liberal." (p.254).*

A dimensão ideológica vai fazer-se sentir ao nível dos liceus, em espaços que cruzam uma certa herança associativa com práticas de reflexão pedagógica e de desenvolvimento institucional. Bons exemplos deste facto são as revistas *Labor* (revista de Ensino Liceal fundada em 1926/40 e 1951/73); *Palestra* (revista de pedagogia e cultura, do Liceu Normal de Pedro Nunes, organizada em 1958/73) e também a revista *Gazeta de Matemática* (jornal dos concorrentes ao exame de aptidão e dos estudantes de Matemática das Escolas Superiores. Nesta revista, que continha uma secção de Pedagogia, eram muitas vezes comentados e debatidos assuntos relativos ao Ensino Liceal. Foi fundada em 1940, por Bento de Jesus Caraça e outros, e após uma pausa entre 1975/76 e 1990, continua a ser editada na actualidade).

1.2. O ensino da matemática no estado novo.

O ensino da Matemática no Estado Novo é marcado pela memorização e mecanização. É preciso saber de cor demonstrações de teoremas geométricos e praticar listas infindáveis de exercícios. No entanto, os resultados deste ensino não eram propriamente brilhantes.

Maria Teodora Alves, publicou na *Gazeta da Matemática* (revista da Sociedade Portuguesa da Matemática – SPM), nº32, em Maio de 1947, um estudo sobre a competência em cálculo numérico de alunos do 2º ano liceal. A autora conclui que "As percentagens de respostas erradas (…) mostram as graves deficiências reveladas pelos alunos na técnica do cálculo aritmético" (Alves, 1947, p.16).

Bento de Jesus Caraça num artigo publicado na *Gazeta da Matemática*, nº17, em Novembro de 1943, analisa o desempenho dos candidatos às provas de admissão à universidade. Afirma o autor que muitos alunos manifestam "certos hábitos e vícios de raciocínio (…) altamente perniciosos" (Caraça, 1943, p.7) destacando erros persistentes em questões de Matemática elementar como operações aritméticas e cálculo de áreas e volumes.

Caraça revelou-se, desde sempre, como sendo um dos intelectuais que viu muito para além da sua época, identificando os grandes problemas e apontando os caminhos do futuro. Um aspecto onde isto se expressa claramente diz respeito ao uso das tecnologias no ensino da Matemática. Contrastando com as posições avoengas que continuam a ouvir-se ainda hoje, em pleno século XXI, caracterizando as novas tecnologias como fomentadoras da preguiça mental, é com uma visão positiva que este matemático perspectiva o seu uso na escola no quadro de um ensino para todos:

> *"Duvidamos que as tábuas de logaritmos, como instrumento de trabalho, conservem por muito tempo a soberania que tiveram. Em certos ramos de aplicação da Matemática à vida corrente, a tábua de logaritmos está hoje de largo ultrapassada pela máquina de calcular (…).*

> *Cada época cria e usa os seus instrumentos de trabalho conforme o que a técnica lhe permite; a técnica do século XX é muito diferente da do século XVI, quando os logaritmos apareceram como necessários para efectuar certos cálculos.*
> *O ensino do liceu que é, ou deve ser, para todos, deve ser orientado no sentido de proporcionar a todos o manejo do instrumento que a técnica nova permite" (Caraça, 1942, p.12).*

Na perspectiva de Ponte (2002), foi em condições extraordinariamente delicadas, que Bento Caraça, pretendeu contestar o método tradicional da memorização e mecanização. Eram cáusticos os seus comentários em relação aos professores que trabalhavam como "sacerdotes do manipanso" (Ponte, 2002, p.4) assim como a sua desaprovação de um ensino inábil para impulsionar o espírito crítico dos alunos. Este matemático deixou-nos relevantes considerações sobre os problemas do ensino da Matemática, as aprendizagens, os métodos e as finalidades do ensino, muitas das quais mantêm absoluta actualidade ainda hoje.

Também nesta época, outros autores declararam, de modo muito crítico, a sua opinião em relação ao ensino da Matemática. José Sebastião e Silva é um exemplo deste facto:

> *"Uma última conclusão nos parece lícito tirar daqui: a necessidade premente de arejar os nossos métodos e programas de ensino, tornando-os adequados ao espírito da época. Entrámos numa nova era, que é, feliz ou infelizmente, a era atómica. E devemos abrir os olhos, fazer um esforço sério de adaptação, se não quisermos ficar para sempre agarrados a sombras, no mundo do passado" (Silva, 1947, p.3)*

2. Opinião pública

Na óptica de Adão (2006), "A imprensa periódica constitui uma importante fonte para o estudo da história contemporânea nos mais variados domínios, nomeadamente, a Educação. Nela se exprime, directa ou indirectamente, a opinião pública (no sentido de opinião publicada)" (Sampaio, 2006, p.9).

Como já referimos, na vigência do regime do Estado Novo, os jornais e revistas constituíam um instrumento favorecido de comunicação da opinião pública, quer pelas autoridades e poderes públicos, quer pela Oposição ao regime. Todavia, todos os escritos respeitantes à oposição, ou a ela muito contíguos, estavam sujeitos, "(…) aos condicionalismos políticos daquele regime autoritário e conservador, especialmente, através da sua censura prévia." (Sampaio, 2006, p.9).

2.1. Exames

Nas próximas linhas, iremos dedicar-nos ao tema dos exames, que tanta polémica suscitou na imprensa periódica e nas revistas dedicadas ao ensino.

A 29 de Junho de 1947, no jornal *Novidades*, figura um artigo da autoria de Serras e Silva, denominado *Instrução e Educação – É preciso começar*. O autor refere a aflição das crianças com as matemáticas e os intrincados problemas dos exames. Na sua perspectiva, seria verdadeira tortura aquela de atormentar os espíritos juvenis com as charadas com que, pessoas sem consciência do mal que estariam a fazer, trabalhavam para deformar a mocidade.

> *"Com que direito se avolumam as tais matemáticas numa idade que lhes é contrária? Ignorância? Antes fosse, se por ventura é outra coisa. Não se improvisam competências, nem no terreno do corpo nem do espírito.*
> *Ontem, em que houve lágrimas nos exames, houve a promessa de reformas: o sr. Ministro disse que tinha preparado o projecto do futuro Estatuto do Ensino Liceal, onde certamente estão contidas as modificações (e elas são muitas) que a situação exige e que pelo meu lado irei apontando, nestes artigos, ao longo destes meses caniculares, sem canseira e sem fastio.*
> *O Estado Novo tem feito, no domínio material, muito, e tem muito ainda a fazer, no domínio espiritual. Tenhamos fé e tenhamos esperança, e para sermos completos em catecismo, que não nos falte a caridade. É de caridade que os pequenos precisam" (Nov., 1947, p.1)*

No jornal *Novidades*, do dia 18 de Julho de 1950, nas páginas 1 e 2 do suplemento, deparamo-nos com um artigo, sem autor e cujo título é: *Matemáticas e Exames*. Quem escreveu estas linhas não ficou com boas recordações dos matemáticos dos seus tempos de estudante. Menciona, no entanto, que ficaram algumas, mas só as estritamente necessárias à profissão que abraçou e que excluíam intimidades. Refere, então, que a razão desse estado de coisas, que tanta vez havia lamentado a sós consigo próprio, lhe pareceu residir mais na forma como havia sido ensinado, do que na chamada falta de aptidão para tal disciplina. Mais à frente, no seu artigo, alude ao facto de que, na sua opinião, tanto as raparigas como os rapazes, aprendem Matemática com a mesma dificuldade com que aprendem as outras disciplinas, ressalvando-se apenas as excepções relativas ao psiquismo individual. Tanto elas, como eles, precisariam, porém, de um ensino bem feito, logo de começo, na escola primária, e depois continuado nos primeiros anos das escolas secundárias. Não faltando esse ensino, tudo se facilitaria. Quando isto se não der, as dificuldades surgem a todo o momento, para raparigas e rapazes e a sua acumulação chega, por vezes, a inutilizar carreiras. O autor refere que estando no período de exames, em que é costume as dificuldades matemáticas prenderem as atenções dos estudantes, dos pais e dos professores, lhe pareceu oportuno recordar estes ensinamentos, de entre os muitos que a vida nos vai dando sobre tal assunto, uma vez que poderiam, eventualmente, ajudar a compreender algumas das realidades da época.

Citamos, de seguida as suas palavras:

> *"Temos como certo, há já muito, que a primeira condição para se assegurarem exames sérios, isto é, capazes de revelarem toda a habilitação dos examinandos, está na boa, na inteligente ordenação dos respectivos interrogatórios, quer orais quer escritos.*
> *Por bons interrogatórios orais ou escritos, repetimos, não devem entender-se os que são feitos sem consideração pelo que a técnica pedagógica aconselha em tal matéria. A sua seriedade não é incompatível com a axd celealdade das perguntas, sem alçapões por onde necessariamente cairão os menos prevenidos, mas com as dificuldades dos caminhos planos e bem iluminados, onde as perdas ou desvios se não justifiquem. Também a extensão desses caminhos, mesmo quando planos, bem iluminados e sem deslealdades, não pode ser tanta que esgote a força dos caminheiros-estudantes antes de lhe atingirem o termo ou cujo percurso seja incompatível com o tempo fixado para a sua realização" (Nov, 1950, p.1/S).*

No dia 2 de Julho de 1958, no jornal *Diário de Lisboa*, deparamo-nos com um artigo de Ruy Folha, intitulado *Os pontos de Matemática nos exames liceais.* A notícia é iniciada com uma nota da redacção do jornal, que iremos reproduzir:

> *"O ponto de Matemática do 2º ciclo dos liceus (1ª chamada) deu origem a algumas cartas e telefonemas exprimindo um misto de alarme e de angústia pela magreza dos resultados obtidos por grande número de examinandos. O facto levou-nos a pedir a um professor daquela especialidade, o sr, dr. Ruy Folha, um comentário sobre o conjunto dos questionários propostos nos exames dos três ciclos. É esse trabalho que publicamos a seguir" (DL, 1958, p.8)*

O autor do artigo, começa por dizer que os pontos de Matemática da 1ª chamada (e em qualquer dos ciclos) eram equilibrados e «leais». "É bom precisar esta palavra resvaladiça – leais pelo excelente senso crítico que os enforma, pelo rigor com que as questões se apresentam, inteiramente «dentro dos programas», leais, por fim, pela clareza objectiva das perguntas" (*DL*, 1958, p.central). Ruy Folha entende que os exames possuindo, até, um certo cunho de originalidade, revelaram um critério são e lógico, servido por uma redacção cuidada, sem duplos sentidos nem armadilhas. O autor pensa ser patente o equilíbrio manifestado em qualquer dos pontos, pela variedade de «tipos e problemas» apresentados. Algumas perguntas apresentavam-se simples, outras exigiam um certo desenvolvimento de cálculo, outras ainda eram baseadas, pura e simplesmente, naquele mínimo de conhecimentos teóricos que um ponto de exame poderia e deveria exigir. Tudo isto somado, segundo o autor, conduziu a um resultado evidente – o da verdadeira estrutura de um ponto de Matemática (na actualidade, ponto é denominado teste).

Referindo-se em especial ao ponto do 2º ciclo, aquele directamente visado nas queixas dos leitores, Ruy Folha pronuncia-se concordando que de entre os três ciclos de ensino, este é o que aparenta ser, pela sua estrutura e «maneira», aquele que daria, possivelmente, piores resultados. Todavia, se se tivesse dado uma outra ordem às perguntas - nomeadamente, as duas primeiras de Álgebra (V e VI), pareceriam ideais para iniciar a prova – ter-se-ia ganho maior ousadia da parte do aluno em o resolver. O autor entende, ainda, poder eventualmente censurar-se na pergunta I (Geometria) a interdependência das suas duas alíneas. Ruy Folha conclui a sua análise a este exame do 2º ciclo, dizendo que, de um modo geral, poder-se-ia concluir que, ao longo das suas oito questões, só um bom aluno sobressairia. Contudo, considera estar-se "(…) em face de uma prova que - não sendo fácil - está perfeitamente adaptada aos programas, aos compêndios, aos próprios métodos de ensino." (*DL*, 1958, p.14).

Por se nos afigurar do maior interesse para o nosso estudo, nomeadamente no que respeita aos exames do 2º ciclo, resolvemos apresentar uma resposta/reparo às considerações efectuadas por Ruy Folha e às quais acabámos de nos referir. Com efeito, no mesmo jornal *Diário de Lisboa*, dois dias depois, ou seja, a 4 de Julho de 1958, figura um artigo denominado *Os pontos de Matemática nos exames liceais continuam a gerar controvérsia*. A notícia é, mais uma vez, iniciada por uma nota da redacção do jornal:

> *"O assunto dos exames dá, todos os anos, naturalmente, origem a muitas discussões. Relativamente, aos exames deste ano nos liceus, parece que é em torno das Matemáticas que se suscita mais animada controvérsia. Publicámos há dias sobre elas um comentário do sr. Dr. Ruy Folha. Escreve-nos hoje o sr. Tenente-coronel Joaquim Adrião de Sequeira, também professor de ensino liceal,*

> *uma carta que não é, evidentemente, a de um simples curioso, mas a de quem tem, para tratar do assunto, a autoridade profissional. São as seguintes as suas observações:" (DL, 1958, p. central)*

Joaquim Sequeira, inicia o seu discurso, dizendo que, como professor de vários alunos que se encontravam na altura a fazer exames nos liceus, se interessou bastante pela notícia publicada dois dias antes naquele jornal.

Prossegue dizendo que o ponto de Matemática do 2º ciclo, se apresentava, a seu ver, o mais merecedor de ser debatido e de se prestar a algumas severas críticas. Mostra o autor deste artigo ter o maior respeito pela opinião do Sr. Dr. Ruy Folha, mas discordar dela em absoluto. Uma vez que não considerou o ponto do 5º ano do liceu, nem rigoroso, nem justo, nem leal. Justificando a sua concepção, diz não o considerar "(…) *justo*, porque pode conduzir a conclusões falsas, tanto quanto é possível prever, no que respeita à preparação dos alunos que se submeteram a exame (…)" (*DL,* 1958, p.14). Continua, descrevendo exemplos ilustrativos desta sua opinião, dos exercícios do ponto. Alude, mais à frente, que não o considera "(…) *rigoroso*, pois na questão VIII o termo *razão* se emprega três vezes e com dois significados diferentes (…)"(*DL,* 1958, p.14). Prossegue expondo mais exemplos esclarecedores desta sua posição. Refere, posteriormente, não o considerar "(…) muito *leal*, pois a questão I é apresentada sob um aspecto que embaraça grandemente os examinandos (…)"(*DL,* 1958, p.14). Apresenta, então, mais exemplos elucidativos desta sua ideia. Termina o seu artigo, dizendo que:

> *"Acresce ainda que me parece não ter o ponto sido posto pela ordem mais racional, como o sr. Dr. Ruy Folha já aponta na sua carta. Normalmente, as questões deveriam seguir uma ordem crescente de dificuldade e, quando assim não acontece, cria-se no aluno uma psicose de medo que lhe coarcta grande parte das suas faculdades de raciocínio.*
> *Não admira, pois, que uma maioria de alunos tenha falhado na resolução deste ponto, não me parecendo, portanto, razoável a apresentação de pontos desta natureza no exame do 2º ciclo, onde tantos alunos concorrem, e onde muitos só precisam do exame para fins de empregos públicos. (…)"(DL, 1958, p.14).*

No jornal *Página Agora,* no dia 7 de Agosto de 1965, encontramos um artigo da autoria do Dr. Rodrigues Alves, intitulado *Os Exames do 2º ciclo no Liceu D.Manuel II do Porto*. Deixa-nos, o seu autor, um excerto da prova oral de Matemática, que aqui reproduzimos, e tece algumas considerações finais, as quais, pela sua pertinência, também aqui deixaremos expressas:

"Era necessário achar o comprimento de um segmento e o professor pergunta:

- Como determina você esse comprimento?
- Pelo teorema de Pitágoras.

Depois de o aluno enunciar o teorema de Pitágoras, o que fez correctamente, o professor sorri e diz:

- Não aceito esse teorema.

Provavelmente não aceitou o teorema de Pitágoras para impor algum que ele pense ser o mais aconselhado.

Depois destas e outras perguntas e respostas tão disparatadas, qual o candidato que conseguirá conservar-se normal para responder a outras dos mesmos examinadores?

Não, assim não. O ensino em Portugal não pode estar à mercê de indivíduos que apenas pretendem aniquilar o aluno que não saiba cantar o livro que esses próprios examinadores escreveram. (…) Esquecem até que, nestes momentos, o aluno sabe, mas falta-lhe a memória. O estado psíquico naquele momento está descontrolado pela presença de indivíduos que nunca viu e que o atacam com perguntas a esmo e sem nexo na presença do auditório que é numeroso (…). Por um Portugal maior e sem mácula." (*PA*, 1965,p.5)

Prosseguindo com o tema dos Exames, iremos mencionar seguidamente, alguns aspectos contidos em revistas pedagógicas da época.

Na revista *Gazeta de Matemática*, nº 18, de Janeiro de 1944, também na secção de Pedagogia, aparece um artigo de título *Acerca do ensino da Matemática nos liceus*, da autoria de José Cardoso Guerra. Refere este autor, existir qualquer coisa de muito grave no ensino da matemática elementar, uma vez serem, os resultados dos exames, desastrosos. No ano anterior, conta o autor, na época de Julho, num liceu em que prestavam provas cerca de 241 examinandos, só 41 conseguiram aprovação o que correspondeu a uma percentagem de reprovações de 83%. Num outro ano, a percentagem de reprovações havia sido de 79%. Em muitos outros anos os resultados haviam sido semelhantes. Esta estatística diz respeito, segundo Cardoso Guerra, ao 2º ciclo e aos exames de Matemática, apenas. "Os examinadores tiveram ocasião de observar o elevado grau de ignorância que os alunos revelam através dos pontos. Os disparates são tantos e tão variados que nem vale a pena exemplificá-los." (*GM*, 1944, p.8). Uma causa que o autor revela entender que poderia influir no grande número de reprovações, seria a maneira como eram elaborados os exames. Diz ele, a esse respeito:

> *"(…) não nos parece bem a extensão dos pontos que continua a ser demasiada e a preocupação de muitas perguntas relativamente miúdas, que por vezes não chegam a dar a ideia das verdadeiras possibilidades matemáticas, digamos assim do examinando. Em matemática liceal, desde que a prova escrita seja bem feita, não se justificam duas provas independentes sobre o mesmo assunto e muito menos uma prova oral" (GM, 1944, p.8).*

Na revista *Gazeta de Matemática*, nº49, de Outubro de 1951, na secção de *Pedagogia*, descobrimos um artigo de título *O programa de Matemática da actual reforma do ensino liceal*, da autoria de Maria Teodora Alves. Nesse artigo, a autora faz uma breve referência aos exames, a qual nos parece oportuno e pertinente aqui citar:

> *"(…) organização da escola, programas, didáctica, tudo isto se subordina, infelizmente, ao exame. O exame que devia ser, na vida escolar, apenas um incidente está transformado num objectivo, numa forçada finalidade.*
> *Os pontos de exame têm de facto, maior influência do que quaisquer outros factores.*
> *Basta que num ponto de exame seja feita uma pergunta que se desvie da clara interpretação dos programas e das regras de uma dada didáctica, para que no ano lectivo seguinte os programas se alarguem, os exercícios se multipliquem e a didáctica se distorça no sentido revelado pela pergunta inesperada e outras possíveis.*
> *Ser-me-ia muito fácil ilustrar copiosamente esta afirmação, mas ela está tão escorada pelos pontos de exame saídos em anos anteriores e é tão corriqueira, que não merece ocupar espaço na «gazeta de Matemática»" (GM, 1951b, p.11).*

2.2. Manuais

Vamos prosseguir o nosso estudo, abordando o tema dos manuais, os quais, na época, eram denominados compêndios, ou simplesmente, livros.

Na revista *Gazeta de Matemática*, números 37-38, de Agosto/Dezembro de 1948, na secção de *Pedagogia*, vêm discriminados os programas da disciplina de Matemática do ensino liceal, conforme o Decreto nº 37 112 de 22 de Outubro de 1948. Na parte relativa aos *livros para o ensino*, do 2º ciclo, pode ler-se:

> *"Compêndio de álgebra, em um volume, para os 3º, 4º e 5º anos; Compêndio de geometria, em um volume, para os 3º, 4º e 5º anos.*
> *Em cada capítulo os compêndios deverão apresentar exercícios de aplicação, dispostos segundo ordem crescente de dificuldade, com as respectivas respostas.*
> *No compêndio de geometria, e sempre que tal seja possível, os teoremas deverão ser imediatamente seguidos de questões propostas aos alunos, quer sob a forma de pequenos problemas, de natureza gráfica ou numérica, quer sob a forma de questões teóricas de fácil dedução.*
> *O aspecto gráfico dos compêndios, principalmente de geometria, deve merecer especial atenção." (GM, 1948, p.26).*

Nesta época, vigorava o sistema do livro único. Todavia, este assunto nunca foi tranquilo, encontrando algumas vozes divergentes relativamente a acatar esta deliberação política. Na *Gazeta da Matemática*, nº 46, de Dezembro de 1950, num artigo intitulado *Crítica de Livros*, Laureano Barros mostra-se em desacordo com o sistema criado, uma vez que o manual adoptado, iria ocupar um lugar central no processo de ensino e a sua vigência seria de cinco anos.

2.3. Programas

Na revista *Gazeta de Matemática*, nº39, de Março de 1949, deparamo-nos, na secção de *Pedagogia*, com um artigo intitulado *Algumas considerações acerca dos novos programas de Matemática para ensino liceal*, da autoria de Laureano Barros e F. Soares David.

Estes autores propõem-se fazer, perante os leitores daquela revista, algumas observações aos programas de Matemática, emanados do Ministério de Educação Nacional. Neste sentido, entendem que entre os predicados primordiais a que deveria obedecer a composição de um programa, deveriam ocupar espaço de evidência, a exactidão do enunciado dos seus tópicos e um criterioso encadeamento dos vários assuntos.

Os autores prosseguem, aludindo ao facto de, para além das imprecisões e incorrecções da natureza das por eles citadas, que se revestiam de um carácter grosseiro, seriam frequentes os enunciados vagos ou ambíguos. Exemplificam, escrevendo:

> *"Por exemplo, ainda gostaríamos de saber o que pretendem os autores dos programas significar por «representação gráfica» de números fraccionários; o que se deve entender por um «pequeno problema» quando se referem à concretização das propriedades das operações; a que «propriedades angulares» se refere a rubrica com este título, no estudo de rectas feito no 3º ano; qual é o «quarto caso» de igualdade dos triângulos (e, a propósito, quais são o primeiro, o segundo e o terceiro casos…); quantos «modos de definir o plano» (o grifado é*

> *nosso) conhecem os autores dos programas; como poderão os logaritmos ser «considerados como expoentes» se não foram definidas potências de expoente irracional; (…)" (GM, 1949, p.12).*

Prosseguindo nas suas críticas, os autores apontam o aspecto da falta de critério no encadeamento dos vários assuntos nos programas e depois de darem exemplos do 3º ciclo, referem-se ao 2º ciclo, dizendo:

> *"Um exemplo da mesma natureza, nos programas do 2º ciclo, é a inclusão do estudo de progressões apenas no fim do programa de Álgebra do 5º ano, quando estava naturalmente indicado apresentá-las como casos particulares de sucessões. O capítulo relativo a sucessões (incluindo o estudo das progressões) poderia ser tratado no 4º ano ou, o que nos parece preferível, no 5º. Neste caso impunha-se o deslocamento do capítulo sobre equações do 2º grau para o 4º ano. De qualquer modo, parece-nos que o estudo das progressões deveria preceder o dos logaritmos." (GM, 1949, p.13).*

Na *Gazeta de Matemática*, nº 49, de Outubro de 1951, Maria Teodora Alves, apresenta um artigo de título *O programa de Matemática da actual reforma do ensino liceal*. A autora menciona, ir neste documento, abordar o 2º ciclo liceal e, em especial, o programa de Matemática; refere-se ao facto da idade dos alunos, no 2º ciclo da escola secundária, representar o período mais delicado das respectivas vidas. Citamos as suas seguintes declarações:

> *"O aluno neste período da sua vida, é um misto constantemente variável das qualidades da criança e do adulto. A evolução da sua mentalidade e do seu carácter não é gradual. Pelo contrário, é caracterizadamente oscilante. O aluno, que hoje se mostra atento e disciplinado, amanhã será desatento e insubmisso. Se hoje revela vivacidade de espírito e interesse, amanhã estará bronco e desinteressado.*
>
> *Neste período da sua vida, o aluno é o joguete de uma emotividade que ainda não se disciplinou.*
>
> *Não é necessário que o professor tenha grandes qualidades de observação ou longa experiência profissional – é o meu caso – para que possa produzir estas afirmações.*
>
> *E não é somente o professor que tem de atender a este período crítico da vida dos alunos e no qual cada aluno pode dizer-se que é um caso particular. A escola, se quiser evitar a falência da sua missão, não pode organizar-se, ignorando este período crítico da vida dos alunos." (GM, 1951b, p.8).*

A autora prossegue descrevendo o seu entender em relação aos principais objectivos da escola secundária, no que respeita à formação do carácter e mentalidade do aluno, dizendo, a dada altura, julgar que a escola exigia demais do aluno e não se deveria nunca esquecer que "(…) as 24 horas do dia têm que ser distribuídas pela escola, pela vida familiar, pelas distracções e repouso do aluno. (…) Estou a lembrar-me que o genial Cervantes apresenta, aos seus leitores, D. Quixote a ler muito e a dormir pouco, antes de o apresentar enlouquecido." (*GM*, 1951b, p.8).

No que concerne ao programa de Matemática, a autora considera que o mesmo, para qualquer um dos três anos do 2º ciclo, se apresentava incomportável com as 3 horas semanais atribuídas a esta disciplina, e que, sendo assim, e na inviabilidade de poder ser aumentado esse número de horas, dado o quadro de disciplinas, impor-se-ia uma redução nos programas. Pondera, então, propor a extinção das seguintes rubricas do programa do 5º ano:

"Logaritmos; teoremas relativos ao cálculo logarítmico, logaritmos decimais; uso de tábuas (de cinco decimais)».
Nesta altura devo interromper o fio das minhas ideias para escutar os clamores que esta minha proposta deverá provocar.
Suprimir o estudo dos logaritmos no curso geral dos liceus! Suprimir esse maravilhoso e importantíssimo instrumento de cálculo! Desde 1895 que o estudo dos logaritmos atravessa incólume todas as nossas reformas do ensino secundário.
Em todos os programas de Matemática do ensino secundário dos países civilizados figura o estudo dos logaritmos.
Que despautério!" (GM, 1951b, p.11).

Maria Teodora alude, em seguida, ao facto de não negar, em todo o extenso campo da Matemática, que a função logarítmica teria ampla e proveitosa aplicação, assim como não negar que os logaritmos seriam um primoroso utensílio de cálculo, apesar de as máquinas de calcular e as réguas de cálculo, que estavam já nesta época bastante vulgarizadas, tivessem reduzido o seu uso. Neste sentido, a autora afirma que:

"(…) o estudo dos logaritmos, no curso geral dos liceus, como tema para exercícios formais é inferior a outros temas, como aqueles que a geometria pode fornecer, ou, como por exemplo o equacionar de problemas, e dos quais não é possível extrair as vantagens que podem proporcionar, dada a pressa com que são estudados.
O que afirmo é que o estudo dos logaritmos, no curso geral, como técnica de cálculo, é uma inutilidade." (GM, 1951b, p.11).

A autora prossegue as suas considerações invocando a circunstância de que, uma vez feita a eliminação do estudo dos logaritmos no curso geral, o que, a seu ver, em nada abrandaria o valor educativo da Matemática, nem tão pouco os seus benefícios práticos, no 2º ciclo, poder-se-ia repartir a matéria do então existente programa pelos três anos do ciclo de maneira a torná-lo mais bem contrabalançado e organizado e até mais ajustado à mentalidade dos alunos. Maria Teodora, continua o seu artigo, referindo algumas rubricas que deveriam ser deslocadas entre os três anos do ciclo e termina mencionando que, apesar da eliminação que havia acabado de apontar e da resultante disposição das matérias do programa dos três anos do 2º ciclo, ainda considerava estarem os programas sobrecarregados.

2.4. Didactica da matemática

No dia 11 de Julho de 1947, deparamo-nos com um artigo, no jornal *Novidades*, intitulado *Para que serve a Matemática?* da autoria de Serras e Silva. O articulista começa por referir:

"Não se pode caminhar às cegas ou por caminhos de acaso: para termos vida racional, devemos determinar o fim com precisão, escolher cuidadosamente os meios de o atingir e empregá-los com arte. Os problemas da instrução têm, como ponto de partida, o exame destes três elementos – 1º. o fim que nos propomos atingir, como o estudo de uma matéria na escola; 2º. A escolha dos meios ou materiais que empregaremos para lá chegar; 3º. A maneira de os empregar. Estes três pontos são essenciais." (Nov, 1947, p.1)

Mais à frente, inquire-se sobre qual seria o fim que a Matemática teria em vista, e entende que, na escola, esta disciplina permite "a formação da inteligência, a sua disciplina, uma disciplina complexa, de sagacidade, rigor lógico, de lógica dedutiva, de engenho e subtileza. As demonstrações requerem engenho para inventar os truques ou expedientes necessários à mecanização do cálculo (…)” (*Nov*, 1947, p.1). Serras e Silva prossegue, aludindo ao facto de que, inicialmente, deveria ser feita uma partilha entre formação matemática e utilidade da Matemática, para então se poder entrar e caminhar à vontade no estudo da situação que esta disciplina apresentaria nos liceus, uma vez que se poderia incorrer em grandes males, resultantes de uma má pedagogia.

No dia 20 de Abril de 1948, encontramos um escrito, no jornal *O Século*, do qual não é indicado o autor, mas cujo título é *No colégio Ulissiponense fez uma conferência o Sr. Dr. Amílcar da Silva Lobo.* O autor menciona alguns aspectos das palavras do conferencista, que lhe pareceram importantes, como, por exemplo, o facto de este ter abordado algumas considerações acerca da importância da Matemática como sendo a disciplina do raciocínio e ter procurado mostrar como a Matemática permitiria fazer a disciplina lógica do indivíduo, pelo hábito da dedução. Posteriormente, segundo o articulista, Amílcar Lobo ponderou o facto de a “(…) falta de conhecimento que o estudante tem da técnica adquirindo, a mecanização do cálculo por carência do hábito de concretizar as ideias (…)” (*O Século*, 1948, p.2). A conferência terminou com algumas considerações afirmativas de que o estudo deveria ser sempre vivo e activo.

Em Julho de 1942, na revista *Gazeta de Matemática*, nº 11, temos um artigo da autoria de José Sebastião e Silva, inserido na secção de Pedagogia, intitulado *Porquê?...* O autor inicia as suas considerações, mencionando que existiam certos factos, relacionados com o ensino das matemáticas, para os quais ele havia procurado, sem, contudo, ter encontrado, uma explicação plausível. Diz este professor:

> *“Porque é que, em compêndios de filosofia, se continua a dizer que a Matemática é a ciência da «quantidade» e da «extensão», quando a verdade é que o objecto da Matemática se estende hoje para além das entidades estritamente numéricas e geométricas? O cálculo proposicional, a álgebra dos conjuntos, a teoria geral das estruturas, a teoria dos grupos abstractos, e tantos outros ramos da Matemática moderna, estariam então condenados a ser excluídos do seio da Matemática?” (GM, 1942, p.15)*

Mais à frente, Sebastião e Silva, de forma interrogativa, pondera:

> *“Porque não é ensinado nos liceus um processo elementar de construção duma tábua de logaritmos? Pois não é verdade que, só deste modo, o aluno pode adquirir uma noção exacta de logaritmo dum número, no caso (e este é o que mais interessa) em que o logaritmo não é inteiro? E não é também verdade que se desfaz assim aquele mistério, tão nocivo à formação mental do aluno, duma tábua cuja utilidade se conhece, mas que não se sabe como pode ser construída?” (GM, 1942, p.15)*

Interessantíssimo, é o facto de, na mesma revista, *Gazeta de Matemática*, nº 11, de Julho de 1942, nos termos deparado com uma *Nota*, de Bento Caraça, tecendo algumas considerações às interrogações do seu colega Sebastião e Silva. Começando por manifestar estar em desacordo com as ideias do seu confrade, Bento de Jesus Caraça, escreve:

> *“(…) Está porventura ao alcance dos alunos do Liceu o processo pelo qual efectivamente se constroem as tábuas de logaritmos? Ainda que estivesse, que*

> *vantagem haveria em mostrar como se pode construir um instrumento que encontramos já construído no mercado? Quantos são os alunos do liceu que mais tarde se ocuparão da construção de tábuas de logaritmos?*
> *Não seria isso apenas perder um tempo que é precioso para ensinar coisas necessárias, como seja o manejo da régua de cálculo, e a que a técnica moderna dará dentro em pouco papel predominante na vida de todos os dias?*
> *Vamos mais longe – duvidamos de que as tábuas de logaritmos, como instrumento de trabalho, conservem por muito tempo a soberania que tiveram. Em certos ramos de aplicação da Matemática à vida corrente, a tábua de logaritmos está hoje de largo ultrapassada pela máquina de calcular (nos cálculos actuariais, por exemplo).*
> *Cada época cria e usa os seus instrumentos de trabalho conforme o que a técnica lhe permite; a técnica do século XX é muito diferente da do século XVI, quando os logaritmos apareceram como necessários para efectuar certos cálculos.*
> *O ensino do Liceu que é, ou deve ser, para todos, deve ser orientado no sentido de proporcionar a todos o manejo do instrumento que a técnica nova permite." (GM, 1942, p.16).*

Na *Gazeta de Matemática*, nº 32, de Maio de 1947, referir-nos-emos a um artigo de Maria Teodora Alves, intitulado *Algumas deficiências em Matemática de alunos dos liceus.* A autora entende que o desalento e horror de certos alunos à Matemática, os impediria de prosseguir os estudos nesta área, por muitos esforços que fizessem e entende que a instrução da disciplina de Matemática não poderia ser centralizada em si própria e desunida das suas afinidades com a vida. Refere, então, que os professores deviam trabalhar em conjunto, no sentido de proporcionar um ensino em que se proporcionasse aos alunos uma visão da relação da Matemática com a realidade e lança um desafio à revista para a qual está a escrever: "(…) Se a Gazeta de Matemática patrocinasse, junto dos professores, um movimento no sentido de serem iniciados estudos dessa natureza, prestaria à cultura da Matemática em Portugal, um serviço inestimável" (*GM*, 1947, p.15).

Também da mesma autora, surge, na mesma revista, *Gazeta de Matemática*, nº 49, de Outubro de 1951, um artigo de título: *O programa de Matemática da actual reforma do ensino liceal*. Obviamente, não iremos aqui referir-nos aos programas, uma vez que já o fizemos anteriormente, mas sim ao que nos interessa neste artigo, respeitante à didáctica da Matemática. A autora deixa-nos as seguintes palavras:

> *"Em vez do professor se preocupar em ensinar aos alunos os conhecimentos e os factos da matemática, deverá ensinar-lhes os métodos pelos quais os alunos possam construir as ideias em matemática, estimulando-os no uso desses métodos.*
> *A Matemática, quanto à sua função na escola secundária, deverá ser considerada como um sistema de ideias, uma sequência de relações destinada a ser entendida pelo aluno, de preferência a uma técnica. O único caminho para obter esse objectivo consiste em usar os métodos de pensamento que lenta e gradualmente provoquem essas ideias de relação.*
> *A técnica de cálculo no 2º ciclo da escola secundária deverá ser apenas a suficiente para a compreensão dos métodos e claro entendimento da sequência das ideias de relação, postas em jogo por esses métodos.*

> *A sobreposição da técnica de cálculo à correlação das ideias e dos métodos de pensamento, provoca a inversão do objectivo do ensino da Matemática, neste ciclo da escola secundária." (GM, 1951, p.10).*

Adiante, a autora diz, a propósito de entender os programas de Matemática sobrecarregados, julgar ser possível pedir à didáctica a necessária facilitação, que, a seu ver, muito simplesmente consistiria em duas regras muito simples. "a) Não transformar o aluno numa máquina de resolver exercícios. b) Não transformar o aluno num formulário de teoremas" (*GM*, 1951, p.11).

Na revista *Palestra*, nº 2, de Abril de 1958, temos um resumo de uma conferência da professora estagiária do 8º grupo (Ciências e Matemática), Maria Cândida Reis, subordinada ao título: *O ensino da matemática elementar considerado do ponto de vista da sua finalidade, do seu conteúdo e da sua didáctica.* A conferente, entende que, "*Como ensinar* depende de *o que ensinar* que por sua vez depende de *para que ensinar."* (*Palestra*, 1958, p.127). Salienta, então, que a Matemática no ensino secundário, deveria ter um papel de carácter formativo e informativo. Sendo assim, na sua óptica, nos diversos ciclos, a conexão entre a formação e a informação, deveria variar, acompanhando o desenvolvimento mental dos próprios alunos e também segundo o objectivo do ensino. A autora realça, ainda, que deveria existir cuidado em estabelecer uma maior aproximação entre a teoria e a prática.

Relativamente aos métodos de ensino, diz-nos:

> *"(…) Eles devem sofrer uma natural evolução: «nos primeiros anos têm um carácter acentuadamente intuitivo com apelo constante ao concreto». Interessa estudar como a criança reage perante o modelo, para se concluir como ele deve ser usado de modo a trazer um real contributo à assimilação dos conhecimentos matemáticos. Foi feita uma alusão especial a um modelo geométrico denominado geoplano, que se apresenta como o mais eficiente dispositivo no sentido de criar situações geométricas (…) fazendo um ensino médio marcadamente intuitivo. Em seguida foi estabelecido um rápido contraste entre os métodos clássicos e os métodos modernos, sendo apontados* os *inconvenientes duns e as vantagens dos outros. Foram postas em evidência algumas características comuns aos métodos modernos, mas com especial referência ao método intuitivo e à heurística." (Palestra, 1958, pp. 127-128).*

Em Julho de 1958, no nº 3, da revista *Palestra*, deparamo-nos com um artigo de Iolanda Lima: *O ensino da Matemática elementar: finalidade, conteúdo e didáctica*. Considerando que desde há muito tempo que a Matemática teria vindo a ser encarada como potência indispensável no desenvolvimento mental da criança e do adolescente, a autora, diz-nos:

> *"De facto a Matemática é a primeira disciplina em que o aluno se vê obrigado a fazer as suas próprias descobertas ou a desembaraçar-se de situações totalmente novas; portanto não lhe basta receber e conhecer a informação correspondente, como sucede em outros domínios. Esta circunstância e o próprio estilo de pensamento peculiar à Matemática tornam justamente ambiciosos os objectivos do ensino desta ciência, que procuraremos apontar.*
> *Creio que podemos destacar três aspectos ao falar da finalidade do ensino da Matemática no Liceu:*
> *I – Atingir o mais possível os fins formativos no respeitante às funções intelectuais e à formação do carácter.*

II – Fornecer um instrumento para aquisição de cultura geral, indispensável ao Homem moderno, mesmo que este não desempenhe uma actividade científica ou técnica.
III – Preparar para os estudos superiores, científicos ou técnicos, cuja exigência de Matemática aumenta dia a dia." (Palestra, 1958, p.58)

Na revista *Labor*, nº 182, de Fevereiro de 1959, encontramos um artigo da autoria de Manuel Ventura, cujo título é: *Didáctica da Matemática*. Este professor sublinha o facto de ser aceite, por tradição, na cultura portuguesa, o facto de haver uma dada preponderância e um certo apreço pela disciplina de Matemática. Todavia, o fraco proveito escolar parece contrastar e contradizer o carinho e o respeito que lhe é dedicado. Esta divergência, é ainda mais sublinhada, na sua perspectiva, quando lê a imensa bibliografia dos processos e normas de ensino. Citamos, a este propósito, as suas palavras:

"Tantos métodos meu Deus!
Agora expositivo, depois heurístico, logo socrático ou genético, depois analítico, sintético,…!
Faltará ainda descobrir o verdadeiro método?
(…) Não está em foco, neste momento, o acto da formação da personalidade do indivíduo. Está, sim, em foco, a relação entre o que aprende e o que ensina, uma relação binomial em que existe uma arte de sugestão, uma arte de transmitir conhecimentos – a Didáctica – a qual, no fundo, não é senão um meio para atingir um fim mais alto: a formação duma personalidade." (Palestra, 1959, p.305).

Segundo Manuel Ventura, o objectivo primário do 2º ciclo liceal, apontaria o desenvolvimento das aptidões congénitas de cada aluno, das suas capacidades e propensões científicas espontâneas, exigidas pelos múltiplos ramos da técnica contemporânea, nesta época.

De António Augusto Lopes, vem um artigo na revista *Labor*, nº 195, de Junho de 1960, intitulado: *Reflexões sobre o ensino da Matemática.* Este autor refere:

"As condições de estudo que se oferecem aos nossos alunos são muito diferentes das de há trinta ou quarenta anos, por serem também diferentes as condições da vida social. No entanto, ensina-se como há mais de cinquenta anos – o que, parece-me, é completamente errado.
A ninguém acuso – já que todos somos obreiros de uma mesma e nobre tarefa – nem, tão pouco, penso ser melhor que qualquer outro professor. Não enjeito a minha quota de responsabilidade e, por isso mesmo, afirmo:
- a didáctica de ontem (e em muitos aspectos deu resultados positivos) não pode, nem deve, ser a de hoje;
- é urgente uma evolução nos nossos métodos, e indispensável que nos aprestemos para ela" (Labor, 1960, p.633).

Na revista *Labor*, nº 202, de Abril de 1961, temos um artigo de Francisco Maria Gonçalves, intitulado: *O ensino da Matemática no momento presente.* Este professor refere que, nesta altura, se teria verificado, uma vez mais, perante os resultados dos últimos exames, que o ensino da Matemática não estaria a fornecer o produto essencial. Na sua óptica, a causa estaria na palpitação da vida moderna, na falta de aplicação dos alunos, na falta de atenção por parte dos pais e também nas medidas aplicadas pelas autoridades escolares, nomeadamente no que dizia respeito ao número de alunos por turma. Alude ainda, este autor, ao facto de, nas reprovações, a Matemática apresentar grande responsabilidade. Mais adiante, no seu artigo, este professor menciona que, ao ver em artigos de revista ou ao ouvir em conferências, ser defendido a melhoria do ensino da disciplina de Matemática, com a conjuntura preliminar de diminuir o número de alunos por turma ou de aumentar o número de horas semanais destinadas à disciplina, entende servirem estas medidas apenas para aumentar a desordem em que se vivia nesta época. Na sua perspectiva, haveria que ser tomada a iniciativa de mudar os métodos de ensino. Assim, diz-nos Francisco Gonçalves:

> *"Fala-se hoje muito em método genético, histórico, heurístico, de laboratório, etc., mas nenhum destes métodos se pode realmente utilizar. A verdade é que, a braços com programas inexequíveis ou que assim se tornaram, nós não temos tempo para apuros de didáctica e vamos ensinando como podemos, mas quase nunca satisfatoriamente.*
> *Embora não me pareça possível negar o valor dos estudos já feitos sobre didáctica da Matemática, entendo que nos podíamos sentir satisfeitos se pudéssemos cumprir os quatro preceitos seguintes:*
> *1º- Ilustrar e exemplificar o mais possível toda a doutrina.*
> *2º - Estimular o interesse dos alunos, obrigando-os, por meio de perguntas constantes, a acompanhar e a colaborar na exposição.*
> *3º - Dar em cada lição o número estrito de noções que seja possível esclarecer devidamente.*
> *4º - Reservar para casa apenas a fixação da matéria aprendida na aula." (Labor, 1961, p.553).*

Na revista *Labor,* nº 199, de Janeiro de 1961, encontramos um artigo muitíssimo extenso, da autoria de Manuel Ventura. O título é: *O ensino das Matemáticas nas escolas secundárias*, e logo na introdução o autor indica que: "Sem riscos de exageros, poderíamos dizer que o ensino das Matemáticas constitui hoje o problema «número I» das escolas de todos os países, desde os mais ricos aos mais pobres, dos mais aos menos desenvolvidos." (*Labor*, 1961, p.263). Um pouco mais à frente, este professor anuncia que: "O mundo actual debruça-se sobre o problema procurando dar-lhe uma solução mais ou menos racional, mais ou menos eficiente: umas vezes fá-lo ousadamente; outras vezes timidamente. É um facto irrefutável: as matemáticas estão na berlinda." (*Labor*, 1961, p.264). O próprio autor ao colocar a questão "E porquê?" (*Labor*, 1961, p.264), dá a seguinte resposta: "É que a civilização moderna põe e impõe problemas e situações difíceis para cuja solução não se pode passar sem o auxílio da Ciência Matemática, sem o seu instrumental, sem as suas sugestões e previsões, sem o seu subsídio. Nós caminhamos a passos largos para o começo do ano 2000!" (*Labor*, 1961, p.264). Adiante, este autor referindo-se à didáctica, diz-nos:

> *"A Didáctica, tendo diante de si a relação binomial entre o que aprende e o que ensina, é, num conjunto, uma técnica e uma arte – a arte de sugestão que nem sempre existe na transmissão dos conhecimentos. É técnica – porque transmite conhecimentos feitos, realizados e consciencializados ao longo dos tempos; porque busca referências e recursos práticos noutros sectores do saber humano, tais como a Logística, a lógica Combinatória, a Teoria dos Fundamentos, e, em particular, radica as suas estruturas e os seus métodos na Psicologia. A Didáctica é arte – porque a sugestão, a motivação, a simples palavra ou gesto, a expressão do olhar e os jogos-de-faces do professor, o clima da ambiência escolar, etc., etc., não podem obedecer a normas rígidas ou a métodos científicos: são obra da*

> *ocasião não preparada, são reflexo das circunstâncias do momento. As circunstâncias que envolvem a pessoa do professor são rios fluentes. E essa constante fluência, se encontra ressonância, sugere renovação no espírito e na alma do professor, e tanto mais intensa e mais profunda ela é quanto mais rica for a juventude espiritual da sua pessoa." (Labor, 1961, p.303).*

Na revista *Palestra*, nº 12, de Julho de 1961, somos confrontados com um artigo de Maria Dulce Bettencourt de Sá Nogueira, intitulado: *Algumas reflexões sobre o ensino e a apresentação das matemáticas elementares*. Deste artigo, gostaríamos de deixar aqui registadas, algumas das conclusões a que a sua autora chega, em relação à didáctica da Matemática:

> *"– o ensino das matemáticas elementares radica-se na intuição, embora preparando gradualmente para a conquista do abstracto;*
> *- assenta numa exigência de rigor no estabelecimento das definições, no desenvolvimento das demonstrações;*
> *- procura dar a conhecer o método axiomático por meio da organização dedutiva de algumas das suas disciplinas, em particular da Geometria e da Aritmética;*
> *- tenta introduzir o espírito da Álgebra moderna, embora de maneira muito prudente;*
> *- faz as suas primeiras tentativas de introdução da Lógica simbólica;*
> *- e é ainda finalidade do ensino, certamente, desenvolver na juventude as suas capacidades de crítica." (Palestra, 1961, p.39).*

Na revista *Palestra*, nº 15, de Julho de 1962, num artigo de Maria Fernanda Martins, intitulado: *Linha de rumo do aprendizado da Matemática elementar: o modelo; os princípios da lógica matemática e da álgebra dos conjuntos*, a autora considera que a aprendizagem de qualquer informação matemática e logo de qualquer concepção de construção matemática, deveria ser dividida em três fases: "Primeiramente uma fase de experimentação que conduza à *abstracção*, depois uma fase de dedução ou *raciocínio lógico* e finalmente uma fase de *aplicação* ou de passagem do abstracto ao concreto que alguns autores chamam fase de *concretização*." (*Palestra*, 1962, p.49). Na óptica desta autora, o professor deve ser vigilante com todas estas fases, pois a carência de alguma delas desacreditaria todo o processamento educativo da Escola. Com base no seu conceito de que o ensino clássico se teria apoiado na predominância de umas fases sobre as outras, Maria Fernanda entende que o ensino do 2º ciclo, particularmente o ensino da geometria, se teria norteado quase unicamente pelo raciocínio lógico, abstraindo-se de cultivar as outras fases. Segundo as suas próprias palavras "Esquecia-se aquilo a que alguns pedagogos chamam «realismo intelectual da criança», quer dizer, a sua incapacidade para a compreensão prematura das relações lógicas formais ou abstractas." (*Palestra*, 1962, p.49).

Terminamos estas nossas referências à opinião pública, no que respeita à didáctica da Matemática, por mencionar um artigo da revista *Palestra*, nº32, de Abril de 1968, da autoria de Maria Alzira Rosa e cujo título é: *A actualização do ensino da Matemática no 2º ciclo liceal.* A autora, depois de algumas considerações sobre preparação de professores (quem ensina), psicologia dos alunos (a quem se ensina), programas (o que se ensina) e métodos (como se ensina), aborda o tema, *Os objectivos dum sistema de ensino no 2º ciclo*, tecendo algumas apreciações sobre os programas, e cita várias sequências de Estatuto do Ensino Liceal. Posteriormente, refere *As finalidades do aprendizado da matemática no 2º ciclo liceal e sua* *aproximação com as outras disciplinas*, mencionando aqui, o facto de que deveríamos ter presente que a matemática no 2º ciclo, seria sobretudo um factor de formação, tendendo especialmente a criar e desenvolver «actividade matemática» e não apenas a adquirir «conhecimentos matemáticos». Diz a autora: "Entende-se como «actividade matemática» a atitude de espírito que, em face de determinada situação, permite tomar consciência de certas relações e sente a necessidade de as exprimir e comunicar. É uma atitude de espírito que torna o aluno capaz de descobrir, de deduzir, de relacionar, de ordenar logicamente" (*Palestra*, 1968, pp.97-98). Mais adiante, Maria Alzira, menciona o caso de dever ser o professor, o indispensável dirigente numa sala de aula:

> *"O professor é o principal responsável por este ambiente criador. A sua atitude na aula não pode ser a de alguém que, sabendo muito mais do que os alunos, se limita a transmitir-lhes conhecimentos em maior ou menor dose, mas sim a de quem, em face de um objectivo a atingir, cria situações que nele convirjam, deixando os alunos interrogarem-se, sugerindo pistas de trabalho, levantando hipóteses, ajudando a tirar conclusões. O seu papel no decorrer da aula é importantíssimo, de muito mais relevo do que numa lição expositiva e, no entanto, aparentemente fica em segundo plano.*
> *Dentro deste espírito, pareceu-nos que, no decorrer do 2º ciclo, se deve procurar:*
> *- Que o aluno aprenda a matematizar situações, traduzindo em esquemas matemáticos problemas reais.*
> *- Que vá adquirindo progressivamente esses esquemas matemáticos (tais como: números relativos, equações, aplicações, ou então esquemas matemáticos mais gerais e abstractos como grupóides, grupos, tipos de relações, isomorfismos) e dominando simultaneamente a respectiva técnica operatória.*
> *- Que seja capaz, uma vez traduzida a realidade para esquema matemático e tratado este com o rigor e a técnica convenientes, de passar, novamente, dos resultados matemáticos para a realidade objectiva. É o que habitualmente designamos por «crítica dos resultados».*
> *- Que adquira linguagem matemática, expressa em termos de lógica simbólica, como auxiliar indispensável na simplificação dos esquemas matemáticos, e também como meio de clarificação do pensamento e de rigor lógico.*
> *- Que se habitue a uma visão una da matemática, sem a dividir em compartimentos estanques de geometria e álgebra." (Palestra, 1968, p.98).*

3. Considerações finais

Queremos deixar aqui expresso, que, na nossa perspectiva, o que ocorre na actualidade, e que tem vindo, cada vez mais, a emergir no centro dos debates na comunicação social, essencialmente em épocas de exames nacionais, onde aparecem manifestos conflitos entre opiniões distintas, advém de um passado que remonta à Educação e ao Ensino da Matemática no Estado Novo.

Curiosamente, ao longo da nossa pesquisa, fomos descobrindo que os argumentos utilizados presentemente, no que se refere a críticas ao ensino da Matemática, e ao facto de os alunos não obterem boas notas nos exames, nem "saberem Matemática", não são muito diferentes dos que eram usados há quarenta e cinquenta anos.

Paradoxalmente, na actualidade, depois de sucessivas reformas e de investimentos múltiplos na Educação, os problemas são similares. O que habitualmente se diz dos alunos é que não revelam sentido crítico em relação ao resultado a que chegam, por exemplo, na resolução de um exercício de Matemática. Aceitam-no por mais absurdo que ele se revele.

Continuando a nossa prédica no que concerne aos programas, interessa-nos narrar dois aspectos: A Geometria era focada com bastante ênfase nesta época. Num passado recente, fora já do nosso estudo, subestimou-se este grande tema da Matemática. Porém, na actualidade, a Geometria voltou a fazer parte integrante e relevante no ensino desta disciplina; o outro aspecto relaciona-se com o ensino dos logaritmos no 2º ciclo liceal, no Estado Novo. A polémica que este facto gerou, foi tão grande, e de tal maneira provocou acesas e acaloradas discussões no seio dos professores de Matemática, que, nas alterações aos programas de 1948, efectuadas em 1954, este conteúdo foi abolido daquele ciclo.

Finalizamos estas considerações, referindo que estamos convictos de que nos dias de hoje, como naquela época, a polémica é desejável para que a sociedade não se alheie das questões da Educação e da sua relação com a vida activa, sendo particularmente importante desmitificar a Matemática como a disciplina "tabu", "a mais difícil", uma responsabilidade que passa por todos os professores desta disciplina, para que se consiga uma mudança na mentalidade de docentes, alunos e encarregados de educação.

Bibliografía

Adão, A. (2006) Apresentação in Sampaio, J. S. (2006), *Temas de Educação*, Lisboa: Edições Universitárias Lusófonas.

Almeida, A. N. & Vieira, M.M. (2006). *A escola em Portugal.* Lisboa: Imprensa das Ciências Sociais.

Barreto, A. & Mónica, M. F. (1999). *Dicionário de História de Portugal.* Porto: Figueirinhas.

Candeias, A. (2001). Processos de construção da alfabetização e da escolaridade: o caso português, in Stoer, S. R., Cortesão, L. & Correia, J.A. 2001).*Transnacionalização da educação: da crise da educação à «educação» da crise.* Porto: Afrontamento, pp. 23-85.

Madeira, J., Pimentel, I. F. & Farinha, L. (2007). *Vítimas de Salazar – Estado Novo e Violência Política*. Lisboa: A Esfera dos Livros.

Ponte, J. P., (2002) Investigar a nossa própria prática, in G.T.I. – Grupo de Trabalho de Investigação (2002). *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional.* Lisboa: APM, pp. 5-28.

Rosas, F. (1992). *Portugal e o Estado Novo (1930-1960), Nova História de Portugal, vol.XII.* Lisboa: Presença.

Sampaio, J. S. (2006). *Temas de Educação.* Lisboa: Edições Universitárias Lusófonas.

Silva, S. (1947). Instrução e Educação – É preciso começar, in *Novidades*, 29 de Junho de 1947, p.1

Teodoro, A. (2001). *O Portugal Pós-Colonial: Políticas e Estratégia Educativa.* Lisboa: Cadernos de Educação – Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias.

Imprensa periódica

Diário de Lisboa, 2 de Julho de 1958

Diário de Lisboa, 4 de Julho de 1958
Novidades, 29 de Junho de 1947
Novidades, 11 de Julho de 1947
Novidades, 18 de Julho de 1950
O Século, 20 de Abril de 1948
Página Agora, 7 de Agosto de 1965

Revistas

Gazeta de Matemática, nº 11, de Julho de 1942
Gazeta de Matemática, nº17, em Novembro de 1943
Gazeta de Matemática, nº 18, de Janeiro de 1944
Gazeta de Matemática, nº 30, de Novembro de 1946
Gazeta de Matemática, nº32, Maio de 1947
Gazeta de Matemática, nº 37-38, de Agosto/Dezembro de 1948
Gazeta de Matemática, nº39, de Março de 1949
Gazeta de Matemática, nº 46, de Dezembro de 1950
Gazeta de Matemática, nº 48, de Junho de 1951
Gazeta de Matemática, nº 49, de Outubro de 1951
Labor, nº 182, de Fevereiro de 1959
Labor, nº 195, de Junho de 1960
Labor, nº 199, de Janeiro de 1961
Labor, nº 202, de Abril de 1961
Palestra, nº 2, de Abril de 1958
Palestra, nº 3, Julho de 1958
Palestra, nº 12, de Julho de 1961
Palestra, nº 15, de Julho de 1962
Palestra, nº 32, de Abril de 1968

Maria Clara Correia Ferreira. Docente de Matemática.Mestre em Ciências da Educação.Doutoranda no curso de Ciências da Educação – Instituto de Ciências da Educação – Universidade Lusófona de Humanidade e Tecnologias – Lisboa – Portugal.Membro da Unidade de Investigação – Centro de Estudos e Intervenção em Educação e Formação (CeiEF) mclaramis@gmail.com

Manuel Tavares. Doutorado em Filosofia pela Universidade de Sevilha.Professor Associado da Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias.Membro da Unidade de Investigação – Centro de Estudos e Intervenção em Educação e Formação (CeiEF).tavares.lusofona@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 167-181
ISSN: 1815-0640

Uma experiencia a respeito de trajétorias hipotéticas de aprendizagem em geometría espacial envolvendo alunos e profesores do ensino médio

Armando Traldi Júnior, Maria de Fátima Aleixo de Luna

Resumo

Esta investigação faz parte de um projeto mais amplo sobre Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA). A fundamentação teórica apoiou-se nas obras de Simon (1995). Verificou-se que, embora as THAs sejam potencialmente ricas, no sentido de produzir situações em que o professor cogite e participe constantemente da (re) organização do planejamento escolar, considera-se que a atuação do professor, continua sendo um caminho desafiador, pois é necessário apoiar-se em diferentes metodologias e procedimentos didáticos, além da formação continuada

Abstract

This research is part of a wider project on hypothetical paths of learning (THA). The theoretical foundation was based on the works of Simon (1995). It was found that although the MASD are potentially rich in order to produce situations in which the teacher participates cogito is constantly (re) organization of school planning, it is considered that the performance of teachers remains a challenging way, as must rely on different teaching methodologies and procedures, as well as continuing education

Resumen

Esta investigación forma parte de un proyecto más amplio sobre Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA). La fundamentación teórica se apoyó en las obras de Simon (1995). Se verificó que, aunque las THAs sean potencialmente ricas, en el sentido de producir situaciones en que el profesor medite y participe constantemente de la (re) organización de la planificación escolar, se considera que la actuación del profesor, continúa siendo un camino desafiador, pues es necesario apoyarse en diferentes metodologías y procedimientos

1. Introducción

Este trabalho faz parte de um projeto de pesquisa mais amplo sobre Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA). Especificamente, este artigo, retrata as THAs sobre Geometria Espacial.

Pires (2009) cita que é bastante frequente certo desconforto no se tratar da discussão sobre “currículo” - entendido como planificação de uma trajetória a ser realizada por alunos, seja ao longo da educação básica ou do ensino superior. Esse desconforto é causado por uma ideia bastante comum de que, em uma perspectiva construtivista, esse percurso deve ser ditado pelos interesses dos alunos e sem definições prévias de conteúdos.

Nesse contexto, consideramos que as questões curriculares podem ser influenciadas pelo processo de ensino e aprendizagem, pois envolve a postura do professor, sua prática na sala de aula e seu diálogo com os alunos. Assim, compreender a importância do debate sobre as questões curriculares e metodológicas, especificamente, as ações dos professores na sala de aula, verificar como as dificuldades sentidas por professores e como as THAs podem colaborar no processo metodológico, consideramos que o desenho dessa trajetória, as ações didáticas podem contribuir para verificar a atuação e o olhar dele para a mudança do quadro do conhecimento da Geometria Espacial.

Desse modo, o objetivo da pesquisa foi verificar a possibilidade de compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação[1] do ensino, em colaboração entre pesquisador e professor; verificar a atuação do professor de Matemática quanto às atividades de planejamento de ensino, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem.

A fundamentação teórica apoiou-se nas obras de Simon (1995) a respeito de THA. A partir do ciclo de aprendizagem de Matemática desenvolvido pelo teórico, elaboramos cinco atividades, baseadas em objetivos de aprendizagem para os alunos. O estudo realizado envolveu três professores de Matemática da rede pública de São Paulo e suas atuações com alunos da segunda série do Ensino Médio. Coletamos dados por meio de entrevistas semiestruturadas, questionário e observações em dois diferentes momentos: antes e durante o desenvolvimento das THAs.

Após listar unidades de observações em relação à atuação do professor na sala de aula e diálogos com os alunos, descrevemos nossas considerações e algumas reflexões a respeito da construção do currículo de Matemática frente às situações ocorridas no desenvolvimento das THAs em sala de aula.

Para Simon (1995), a geração de uma THA prima por buscar as formas pelas quais o professor desenvolve seu planejamento para atividades de sala de aula, identificando como o professor interage com as observações dos estudantes, coletivamente, constituindo uma experiência e construindo novos conhecimentos.

2. Considerações sobre perspectivas construtivistas

Simon (1995) considera que embora o construtivismo tenha potencialidade para sustentar mudanças no ensino da Matemática, é necessário formular modelos de ensino baseados no construtivismo[2].

Pires (2009) relata que o autor discute "a tensão criativa entre a meta dos professores para o ensino e o compromisso de ser sensível ao pensamento matemático dos seus alunos".

Na opinião de Simon, o construtivismo pode contribuir com importantes caminhos para o ensino da Matemática em sala de aula, embora não estipule um modelo particular. O autor inclui não apenas um trabalho multifacetado do professor,

[1]Salientamos que, em nossa pesquisa e nas considerações de Simon (1995), o termo planificação de ensino tem um sentido amplo e, relaciona-se á ação de desenvolver (desenhar) um plano de ensino que, em colaboração, professor e pesquisador verifiquem a possibilidade de desenvolver, na perspectiva construtivista, o ensino da Geometria Espacial. Nesse sentido, planificar o ensino potencializa desenhar um contexto vivo e atual do movimento da sala de aula, mostrar possibilidades de trabalhos, envolvendo os principais agentes do processo de ensino e aprendizagem: estudantes e professores.

[2]Os dados apresentados no artigo de Simon foram coletados dentro de uma sala de aula experimental, de 25 alunos, em que pesquisador acompanhou um professor de Matemática em tarefas sobre a construção do conceito de área; a partir da análise dos dados coletados, trabalhou em uma fundamentação teórica, visando à formulação de uma Pedagogia da Matemática.

mas também o currículo a ser construído e o desenvolvimento de materiais de ensino. Desse modo, o foco específico de seu trabalho está na tomada de decisão a respeito dos conteúdos matemáticos e nas tarefas de ensino da Matemática que o professor propõe-se a organizar, como as interações com os alunos e as modificações de suas estratégias e metodologias de atuação em sala de aula.

Em suas reflexões, Simon ressalta que o desenvolvimento do conhecimento está presente no professor ou no ensino realizado. Não existe uma simples função que mapeie a metodologia de ensino dentro de princípios construtivistas. *Ou seja: o construtivismo epistemológico não determina a apropriação ou inapropriação de estratégias de ensino.*

Em sua experiência com alunos, Simon relata que se perguntava: “Como poderia entender o pensamento daqueles estudantes e como poderia trabalhar com eles para verificar se seriam capazes de desenvolver raciocínios mais poderosos? Em suas considerações, o autor conclui que, “nessas experiências com alunos, ficou bem nítida a relação entre o projeto de atividades do professor e a consideração do pensamento que os alunos podem trazer em sua participação nessas atividades” – que conduzem à formulação da ideia das trajetórias hipotéticas de aprendizagem.

Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem

Para Simon (1995) uma trajetória hipotética de aprendizagem é estabelecida a partir de objetivo da aprendizagem, as atividades de aprendizagem e o pensamento e conhecimento dos estudantes. A composição dos três elementos constitui parte chave do que ele denomina Ciclo de Ensino de Matemática.

Assim, o processo do desenvolvimento das THAs em sala de aula e toda sua dinâmica possibilitam referir-se ao conhecimento dos professores de Matemática, além das hipóteses sobre o conhecimento dos alunos, outros diferentes saberes profissionais podem intervir, como por exemplo, teorias de ensino sobre Matemática; representações matemáticas; materiais didáticos e atividades e teorias sobre como os alunos constroem conhecimentos a respeito de um dado assunto – saberes estes derivados da pesquisa em literatura e/ou da própria experiência docente.

Nesse contexto, quando uma THA é apresentada e desenvolvida pelos alunos sob as orientações do professor, com um objetivo inicial planejado, geralmente, este deveria ser modificado muitas vezes (talvez continuamente), durante o estudo de um conceito matemático particular. Quando os alunos começam a comprometer-se com as atividades planejadas, os professores deveriam “comunicar-se” com as observações dos alunos nas quais eles formatam novas ideias sobre esse conceito. Assim, o ambiente de aprendizagem envolveria resultados da interação entre o professor e os alunos e o modo como eles se engajam em um conteúdo matemático.

A esse respeito, Simon (1995) faz a seguinte reflexão:

> *Façamos uma analogia: considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na seqüência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições que irá encontrar. Você continua a*

> *adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da seqüência do seu destino. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona os destinos à sua viagem e que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para viajar é sua "trajetória". O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua "trajetória hipotética".* (Simon, 1995, p.35)

Concordamos com Simon, quando relata que a modificação da trajetória hipotética de aprendizagem não é algo que somente ocorre durante o planejamento entre aulas. Mas, especialmente, no transcorrer do desenvolvimento das atividades, observações sobre os pensamentos dos alunos, suas comunicações entre seus pares e o professor, porque, nessa interação e experiências, o professor constantemente poderá exercitar possíveis ajustes na THA hipotetizada por ele.

O autor afirma que este processo, baseado na visão do construtivismo, é um grande desafio para a Educação Matemática e adverte também que este campo de atuação não produzirá métodos com ideias fixas ou plataformas para as ações docentes, e as estruturas metodológicas deverão sempre suportar transformações experimentais. Assim, o Ciclo de Ensino Matemático estabelecido por Simon retrata uma visão das resoluções construídas pelo professor, a respeito do conteúdo e das tarefas, modeladas pelo encontro de uma perspectiva do construtivismo social com o desafio das aulas de Matemática.

En fim, consideramos os aportes do Ciclo de Ensino de Matemática construído por Simon, apoiamo-nos em pesquisas sobre Educação Matemática a respeito do ensino, particularmente, sobre a Geometria Espacial e, em nossas experiências como professor para verificar a possibilidade de compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação do ensino, em colaboração pesquisador e professor e verificar a atuação do professor de Matemática no que se refere às atividades de planejamento de ensino, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem.

3. Síntese sobre as revisões bibliográficas a respeito de investigações sobre o ensino e aprendizagem da geometria espacial

Buscamos algumas pesquisas na área do ensino e aprendizagem de Geometria. Assim, podemos destacar algumas referências sobre os problemas de ensino e aprendizagem de Geometria, como por exemplo, Cavalca (1998), Kaleff (2003) e Montenegro (2005), também, incluímos pesquisas dos Programas de Pós - graduados de duas Universidades de São Paulo. Em nossas considerações, observamos entre outros fatores, que a singularidade entre essas pesquisas é a "negligência" no ensino de Geometria. Por exemplo:

1) Abordagem dos conteúdos de maneira estagnada, com fórmulas prontas, não desenvolvendo a capacidade de pensamento geométrico dos estudantes;
2) Formação precária docente em assuntos envolvendo Geometria, provocando práxis inadequadas à aprendizagem do aluno ou ao desenvolvimento do pensar geométrico; e
3) Assuntos envolvendo Geometria restrita aos capítulos finais dos livros didáticos, provocando uma aparente justificativa para impossibilitar sua planificação de ensino.

Embora as pesquisas listadas destaquem a importância de se ensinar Geometria, pouco ou nada se ensina sobre esse tema. No entanto, estes estudos contribuem para compreender o modo como o ensino e a aprendizagem da Geometria são diagnosticados por esses pesquisadores. Para isso, os estudiosos citados contribuem, especialmente, no que se refere à preocupação em desenvolver habilidades básicas, como a intuição e a visualização dos objetos geométricos, indicações da utilização de materiais concretos, reflexão sobre a elaboração de material didático de modo a permitir aos alunos o desenvolvimento do raciocínio espacial, bem como a desenvoltura da criatividade e a autonomia no processo da aprendizagem, além de incentivar a exploração de softwares nas aulas de Matemática.

Consideramos proveitosas as contribuições e sugestões dos pesquisadores mencionados, compartilhamos da ideia de Simon quando se refere que "a aprendizagem é como um processo de construção individual e social, mediado por professores com a concepção de um trabalho estruturado na qual se entende a aprendizagem dos alunos", ponderando "o construtivismo como uma teoria epistemológica que não define uma orientação particular de ensino".

Assim, o desenvolvimento do conhecimento está presente no professor ou no ensino realizado, apreciamos o desenvolvimento das THAs como uma possibilidade de permitir ao professor a construção de uma prática pedagógica que capacite seus alunos a percorrerem o caminho da aprendizagem em Geometria Espacial.

Desse modo, uma THA possibilita organizar não apenas o plano de ensino do professor, mais alia também fatores importantes, como: objetivos e as atividades das aprendizagens, o pensamento e o conhecimento do estudante, como fatores essenciais em seu Ciclo de Conhecimento Matemático apresentado por Simon que iremos descrever mais adiante.

Com os aspectos de organização do ensino, está o trabalho do professor em relação ao desenvolvimento do conhecimento de assuntos relacionados à Geometria Espacial nos alunos, possibilitando verificar em que medida esses alunos comprometem-se nas atividades planejadas e, ao mesmo tempo, buscando observar como os professores comunicam-se com a maneira de pensar dos alunos, que ideias os alunos têm sobre assuntos geométricos de forma que o professor sistematize os conhecimentos de fato.

Simon (1995) relata que o ciclo de aprendizagem da Matemática consiste em uma dinâmica do envolvimento entre professor e aluno que pode potencializar a construção do conhecimento.

Por compreender que ensinar e aprender são atos complexos por uma série de interferências, sociais, culturais e do próprio currículo da Matemática, consideramos que as THAs podem fornecem ao professor um papel desafiador pelo próprio contexto da interação entre o pensamento dos alunos e suas interferências.

4. A construção das THAs

Para a construção das trajetórias hipotéticas de aprendizagem sobre Geometria Espacial, baseamo-nos nas discussões do grupo de pesquisa e em estudos preliminares, como as revisões bibliográficas a respeito do ensino da Geometria, documentos oficiais e artigos.

Agregados a essas leituras e discussões, temos os conhecimentos da própria docência que nos permitiram elaborar uma primeira versão da trajetória hipotética de aprendizagem, considerando o estudante como agente principal de sua aprendizagem, levando em consideração as interações entre professores e estudantes no processo de ensino e aprendizagem em uma perspectiva construtivista.

Para delimitar nosso trabalho, definimos algumas expectativas de aprendizagem aos estudantes que podem ser importantes para desenvolver o raciocínio do pensamento geométrico, que são identificadas a seguir:

- ✓ Usar formas geométricas tridimensionais para representar ou visualizar partes do "mundo real";
- ✓ Associar objetos sólidos às suas diferentes representações bidimensionais;
- ✓ Reconhecer elementos e características de prismas, estabelecendo relações entre vértices, faces e arestas e elaborando conjecturas sobre tais relações;
- ✓ Explorar os Poliedros Regulares, seu papel na arte e na explicação sobre o universo; e
- ✓ Explorar secções cônicas, identificando suas curvas em objetos tridimensionais.

Ao elaborarmos as THAs, buscamos diversificar as estratégias de trabalho em diferentes atividades, entre elas, o recurso tecnológico como um dos meios alternativos de incentivar os alunos no processo de ensino e aprendizagem. Assim, optamos por proporcionar aos alunos o programa Poly[3] por dois motivos: (1) ser um programa livre (versão avaliação) e de manipulação; (2) a investigação da própria tarefa em explorar poliedros convexos, permitindo aos estudantes realizarem conjecturas por meio da visualização e rotação das imagens.

5. O desenvolvimento das trajetórias hipotéticas de aprendizagem em sala de aula e a atuação dos professores e estudantes

Apresentamos alguns dados listados com base no relatório de observações do desenvolvimento de duas atividades do projeto. A finalidade da observação direta teve o propósito de compreender melhor a atuação dos professores em atividades que se apoiam em uma perspectiva construtivista de ensino em relação às atividades organizadas e definições de objetivos de aprendizagem.

Destacamos sete categorias que emergiram da leitura desses relatórios em relação aos acontecimentos das três turmas. São elas:

- ✓ Organização da classe e "clima" dominante;
- ✓ Consignas do professor sobre tarefas e explicitação dos objetivos de aprendizagem;
- ✓ Atitudes dos estudantes no desenvolvimento das tarefas e as implicações deles na busca de soluções;
- ✓ Dificuldades observadas e possíveis causas;
- ✓ Interesse dos estudantes por tarefas contextualizadas ou interdisciplinares e recursos tecnológicos;

[3] www.peda.com/poly/welcome.html

- ✓ Adequação do tempo previsto para as tarefas; e
- ✓ Intervenções do professor durante a realização das atividades, socialização e sistematização das conclusões;

Atividades desenvolvidas em sala de aula

Para trabalhar com assuntos relacionados à Geometria Espacial foram elaboradas e desenvolvidas diferentes atividades, entre elas destacamos a segunda e quarta atividade do projeto de pesquisa, como seguem:

Segunda atividade – composta de cinco tarefas

- **Objetivo Geral:**
  Reconhecer objetos sólidos e suas diferentes representações bidimensionais.
- **Objetivos específicos:**
  Perceber as diferentes planificações do tetraedro;
  Desenhar as diferentes planificações do cubo;
  Investigar as planificações do cone e do cilindro;
  Identificar a representação bidimensional de uma embalagem; e
  Identificar a planificação de objetos tridimensionais;

A segunda atividade visou a favorecer o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes em relação às diferentes planificações de um mesmo sólido geométrico, bem como reconhecer as planificações de algumas figuras tridimensionais, facilitando o trabalho com as áreas das superfícies de sólidos em estudos futuros.

Elaboração

A preocupação para elaborar a segunda atividade, cujo objetivo geral foi reconhecer os objetos sólidos e suas diferentes representações bidimensionais que surgiram dos resultados insatisfatórios de algumas atividades fornecidas durante minhas experiências em sala de aula.

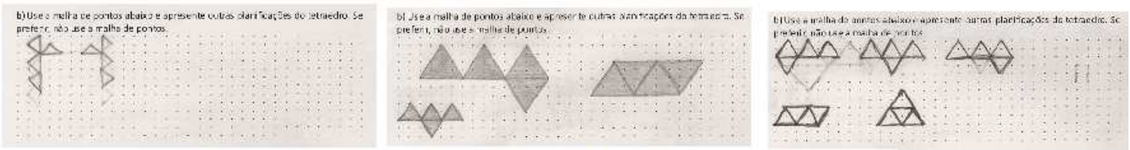
Quando do desenvolvimento de algumas tarefas relacionadas a encontrar a área de superfícies sólidas, os estudantes enfrentavam dificuldades para visualizar suas faces. E, também, pelo fato de alguns livros didáticos apenas apresentarem a planificação dos sólidos de maneira pronta e em uma única representação bidimensional, não estimulando outras maneiras de planificar um mesmo sólido.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM: ”... as expressões que permitem determinar a medida da área das superfícies dos sólidos podem ser estabelecidas facilmente a partir de suas planificações”. (OCEM, BRASIL, 2006, p. 76).

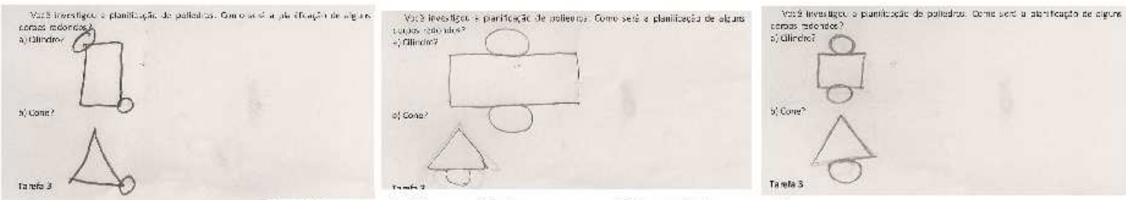
Nesse sentido, a segunda atividade compõe-se de cinco tarefas: as duas primeiras exploraram as diferentes planificações que podem ser feitas ao tetraedro e ao cubo, possibilitando aos estudantes identificar estratégias para encontrar essas planificações. Na sequência, investigou-se como podem ser representadas as planificações do cilindro e do cone. Já as tarefas 3 e 4 contemplaram os objetivos específicos para identificar a representação bidimensional de uma embalagem e Identificar a planificação de objetos tridimensionais, respectivamente. O último item da tarefa 4 exigiu dos estudantes a justificativa para cada erro cometido ao tentar planificar um tetraedro, uma vez que a primeira tarefa buscava explorar as diferentes planificações desse sólido geométrico.

A seguir, alguns protocolos a respeito do desenvolvimento das atividades pelos alunos, referente às turmas dos professores P1, P2 e P3:

Primeiras tentativas de planificar um tetraedro - alunos do 2ºB - período vespertino

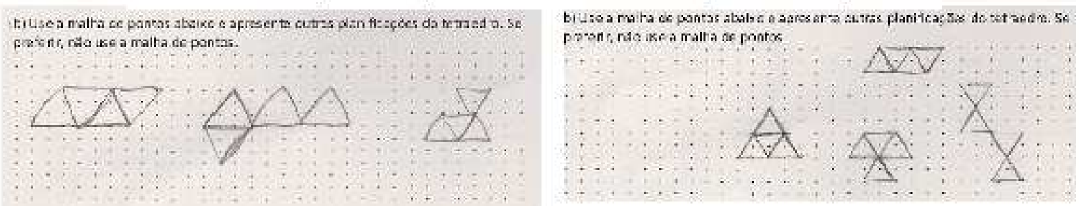


Planificações de um tetraedro, utilizando material concreto - 2º B - período vespertino

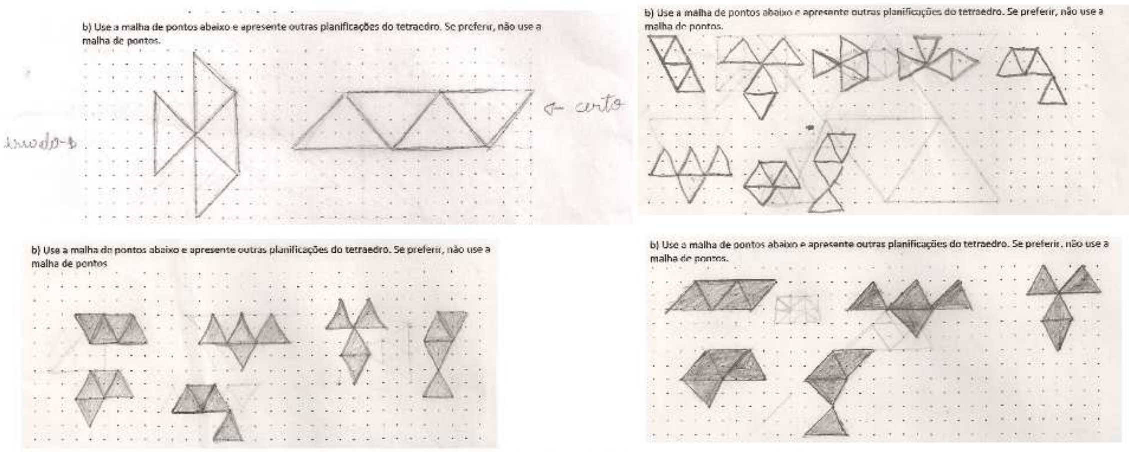


Tentativas de planificar o cilindro e o cone - 2ºB - período vespertino

Tentativas de planificação do tetraedro - 2ºA - período vespertino



Tentativas de planificar o tetraedro - 2º C - período noturno



Algumas representações de planificações do tetraedro - 2ºC - período noturno

Análise do desenvolvimento da segunda atividade

Observou-se que, as maiores dificuldades dos estudantes estavam no fato deles não terem contato anterior com planificações de sólidos geométricos. Notou-se, também, que a estratégia de utilizar o molde, especialmente, para o tetraedro regular favoreceu aos estudantes realizarem conjecturas sobre outras possibilidades de planificação do mesmo sólido.

Nenhum aluno concluiu que havia 11 planificações diferentes para representar o hexaedro (cubo). Esta foi uma atividade em que todos se envolveram bastante, ficaram ansiosos para ver quem construía uma planificação considerada correta. Este foi um momento de troca de informações interessante entre eles. Tanto a observadora como os professores colaboradores ouviam as seguintes falas: “Não pode ser assim, porque se você tentar fechar a pirâmide, não vai conseguir... um lado (se referindo à face) vai ficar em cima da outra”; “Desse jeito, tá errado... olha só... tem um ponto (referindo-se ao vértice) que une quatro pontas dos triângulos..., na hora de montar vai precisar de uma figura quadrada pra fechar o negócio”.

Relatos como estes mostram indícios de que os estudantes apresentam potencialidades de aprendizagem. Neste caso, as estratégias de apoio do material concreto são necessárias para melhorar a compreensão do estudante, estimulando-os a levantarem hipóteses, verificando seus próprios erros e corrigindo-os entre seus pares.

Quarta atividade – composta de cinco tarefas

- **Objetivo Geral:**
  Explorar os “Poliedros Regulares”, seu papel na arte e nas explicações sobre o Universo.
- **Objetivos específicos**
  Explorar os poliedros regulares por meio do software Poly e investigar suas propriedades;
  Verificar a existência de apenas cinco poliedros regulares por meio da construção de polígonos regulares;
  Explorar a história dos “Poliedros de Platão” na literatura e provar a existência de apenas cinco poliedros regulares com base nas informações do texto;

Identificar a relação de Euler nos sólidos considerados poliedros regulares e, com auxílio dessa relação demonstrar a existência desses poliedros regulares;
Pesquisar sobre os poliedros regulares, seu papel na arte e nas explicações sobre o Universo.

Elaboração

O objetivo geral da quarta atividade foi explorar os poliedros regulares, seu papel na arte e nas explicações sobre o Universo. Este é um momento rico e oportuno para investigar os diferentes aspectos de interesses desses poliedros e especial atenção do por que da existência de apenas cinco poliedros regulares.

Para isto, a quarta atividade foi composta por cinco tarefas. Sendo reservada para a tarefa 1, uma exploração desses poliedros no ambiente informatizado., com o propósito de investigarem virtualmente aspectos de suas propriedades. Consideramos que, embora as escolas públicas estejam estruturadas com sala de informática, pouquíssimos alunos e professores têm acesso às novas tecnologias de comunicação em relação a softwares matemáticos para complementar seus estudos e aprendizagens no espaço escolar.

Ressaltamos que os recursos tecnológicos fazem parte do contexto da sociedade contemporânea, embora não seja a única possibilidade para aprendizagem, o mesmo é um meio de colaborar de modo investigativo nas aulas de Matemática.

Em relação à tarefa 2, procuramos explorar a construção desses sólidos para perceber suas propriedades por meio de situações empíricas. Lauro (2007) ressalta a importância entre a articulação dos quatro processos necessários à construção dos conhecimentos geométricos: Percepção – Construção – Representação – Concepção.

Escolhemos algumas atividades diversificadas para a quarta atividade, porque, quando os Poliedros Regulares são apresentados aos estudantes, geralmente, aparecem de forma direta, como os livros didáticos apresentam, destacando seus elementos e disponibilizando suas propriedades de modo linear.

Desse modo, não propicia aos estudantes conjecturarem a respeito de suas características, prejudicando o processo de ensino e aprendizagem desse assunto.

A seguir, alguns protocolos sobre o desenvolvimento das atividades pelos alunos, referente às turmas dos professores P1, P2 e P3:





Imagens de alguns alunos desenvolvendo a 4ª atividade - 2º B - período vespertino

Imagens de alguns alunos desenvolvendo a 4ª atividade - 2º A - período vespertino

Análise do desenvolvimento da quarta atividade

Esta atividade foi bastante representativa para os alunos, considerando que eles envolveram-se mais nas tarefas, este entusiasmo deu-se pelo fato do apoio do programa Poly e as próprias construções dos poliedros.Em relação às dificuldades que os alunos apresentaram, foram marcadas por não se comprometerem com materiais de apoio à construção de figuras geométricas: como régua, compasso, transferidor, por exemplo.

No segundo momento, as três turmas sentiram dificuldade para construir os polígonos regulares: pentágono e hexágono consideramos que esses alunos não tenham tido oportunidade anteriormente com essas construções.Em relação aos conhecimentos dos professores colaboradores, consideramos que não houve problemas, exceto a respeito da ansiedade do fechamento da atividade devido ao tempo programado para a realização das tarefas, pois, demandou um maior número de aulas para desenvolvimento.

Outro aspecto foi em relação aos textos: os alunos não têm o hábito de leitura, especialmente, assuntos matemáticos, assim, muitos dos alunos pontuavam que os textos eram longos. No final, da quarta atividade, os alunos deveriam pesquisar os poliedros regulares, seu papel na arte e nas explicações sobre o Universo. As três turmas realizaram a pesquisa, e os alunos de P1 e P3, apenas entregaram a pesquisa aos professores; alguns comentavam com os professores a respeito de suas pesquisas e que tinham descobertos outras informações do assunto, pela internet. Já a turma de alunos de P2, apresentar a pesquisa na forma escrita, na forma de seminário para os grupos de colegas apreciarem as pesquisas. Ainda em relação à turma do professor P2, um dos grupos de alunos, elaborou uma espécie de livreto, como segue o protocolo:







Autores da obra:

Estilosos da Grafia

Período vespertino - (P2)

6. Considerações

Impulsionados pelo desafio de elaborar Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagens organizadas com base nos objetivos, hipóteses de aprendizagens dos alunos, expectativas de alterações das tarefas a partir da interação aluno-professor, concordamos com Simon, quando afirma ser um "desafio" e consideramos que a sua valorização e a incorporação dependem da atuação do professor de Matemática, pois é quem vivencia a dinâmica da sala de aula.

Quanto a compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação do ensino, em colaboração pesquisador e professor, no caso da Geometria Espacial, percebemos que a teoria construtivista não estipula um caminho definitivo para a aprendizagem dos alunos, verificamos que suas contribuições podem ser significativas no processo de ensino e aprendizagem. Desde que o professor garanta não apenas uma organização e decisão dos conteúdos matemáticos e das tarefas que serão desenvolvidas pelos alunos, porém investigue o pensamento do aluno na realização das atividades em sala de aula, para enriquecer e reformular as expectativas estabelecidas anteriormente, redirecionando o planejamento de aulas.

Embora os professores não tenham alterado significativamente as THAs, notamos que o desenvolvimento do projeto e o compartilhar das discussões, baseadas na dinâmica da sala de aula proporcionaram aos professores reflexões sobre suas práticas pedagógicas e sobre as hipóteses de aprendizagem dos alunos.

As THAs são potencialmente ricas, para produzir situações em que o professor cogite e participe constantemente da (re) organização do planejamento escolar. Mas compreendemos que as THAs, por si só, não garantem uma aprendizagem com perspectivas construtivistas.

Concordamos com Simon, quando alerta que a “Educação Matemática não produzirá métodos com ideias fixas ou plataformas às ações docentes, e as estruturas metodológicas deverão sempre suportar transformações experimentais”.

Nesse contexto, as THAs oferecem um panorama de inter-relações cíclicas dos aspectos do conhecimento do docente, pensamento, tomada de decisões, bem como a interação dos alunos. Portanto, uma oportunidade do professor gerenciar não só os conteúdos, mas as tarefas matemáticas e modelá-las pelo encontro de uma perspectiva construtivista de ensino, à medida que ocorre a influência mútua entre professor e aluno.

O Ciclo do Ensino de Matemática elaborado por Simon, além de fundamental, é desafiador no processo para compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação do ensino, pois o professor precisa envolver-se com o pensamento/entendimento dos alunos, para buscar compreender seus pensamentos na resolução matemática, gerando a transformação constante do conhecimento do professor, bem como sua (re) organização na elaboração das atividades.

Conforme mencionado por diferentes autores, o professor exerce papel fundamental na mediação da construção do conhecimento de seus alunos. Muito embora entendamos que a perspectiva construtivista congregada à planificação do ensino não garanta sucesso nas práticas pedagógicas. Observamos que, no mínimo, podem garantir um caminho para a reflexão da atuação do professor, tanto no aspecto profissional como no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes.

Quanto à atuação do professor de Matemática, no que se refere às atividades de planejamento de ensino, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem**,** consideramos que a dinâmica oferecida pelas tarefas das THAs em Geometria Espacial proporcionou aos docentes outro olhar na possibilidade de atuar em sala de aula, como na diversidade de recursos didáticos e inclusão de textos, favorecendo a aprendizagem dos alunos.

Os professores em suas metodologias de trabalho não tinham o hábito de utilizar a manipulação de matérias nem usam recursos tecnológicos para enriquecer suas aulas de Geometria Espacial. Observamos que esses recursos podem ser instrumentos valiosos para a efetivação das tarefas solicitadas. A esse respeito Simon (apud PIRES, 2009), comenta que “indicações sobre a importância da interação de pequenos grupos e a manipulação de materiais, por exemplo, podem ser instrumentos valiosos nas mãos dos professores de Matemática”.

No entanto, Pires (2009) afirma que estes “instrumentos não são suficientes para permitir que professores sejam arquitetos da produção de situações de aprendizagens que resultariam em crescimento conceitual de seus alunos”.

Faz se necessário que o professor tenha uma atuação frente às novas possibilidades de metodologias, enfrentando o desafio de estar atualizado com pesquisas em sua área de atuação e cursos de formação continuada. Apenas a seleção e a organização dos conteúdos não podem ser os únicos critérios de atuação do professor. As atividades de planejamento de ensino, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem, levam em consideração aspectos relacionados ao uso de recursos diversificados, bem como as interações que ocorrem no desenvolvimento de tarefas.

Portanto, valorizar e melhorar o desempenho dos alunos depende muito da atuação do professor. Ele decide sobre a disposição de mergulhar no universo das diferentes possibilidades de metodologias e procedimentos didáticos. O caminho continua sendo desafiador, pois é preciso estar engajado no processo permanente de construção do saber, ou seja, no mínimo estar a par das pesquisas relacionadas à sua área de atuação.

Nossas discussões decididamente são cada vez mais pautadas no sentido de que o professor de Matemática deve buscar a reflexão em todas as suas ações que, a partir delas, deve compreender e readaptar suas ações, no constante desafio de rever suas práticas pedagógicas. A apropriação efetiva de resultados de pesquisas relevantes sobre o conhecimento matemático de alunos, inovações curriculares, planejamento, construções de atividade são fundamentais para melhorar a qualidade de ensino dos estudantes.

Esta investigação sobre THAs é apenas um desafio inicial para futuros trabalhos que pretendem objetivar contribuições para a Educação Matemática e suas ações na dinâmica da sala de aula.

Este artigo é resultados do projeto de pesquisa: “Construção de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem e implementação de Inovações Curriculares em Matemática no Ensino Médio”, inserido em uma das linhas de pesquisa: “Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores” do Programa de pós-graduados em Educação Matemática da Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP

Referências

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio (PCNEM), Matemática, Brasília, 1999.

_____. Ministério da Educação. PCN+ Ensino Médio (PCNEM+): Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002.

_____. Ministério da Educação. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Básica, Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM); v. 2. Brasília, 2006.

Camilo, C. (2007). Geometria nos Currículos dos anos finais do Ensino Fundamental: Uma análise à Luz dos Modelos teóricos de Josep Gascón. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC.

Carvalho, L. (2008). Análise da organização didática da geometria espacial métrica nos livros didáticos. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC.

Cavalca, A. (1998). Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação. São Paulo: EDUC.

Kaleff, A. (2003). Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao caçulo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. Niterói: EdUFF.

Lauro, M. (2007). Percepção – Construção – Representação – Concepção Os quatro processos do ensino da Geometria: uma proposta de articulação. Dissertação de Mestrado em Educação. São Paulo: USP.

Mariano, Vanderlei. (2004). Estudo de fatores para um bom desempenho dos alunos concluintes do Ensino Médio nos exames do ENEM, em Geometria. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC.

Montenegro, G. (2005). Inteligência visual e 3D: Compreendendo Conceitos Básicos de Geometria Espacial. São Paulo: Edgard Blucher.

Pires, C. (2009). Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. Revista Educação Matemática. São Paulo, v. 11, nº 1, pp. 70-89.

Silva, B. da. (2004). Identificando sinalizações referentes às expectativas de aprendizagem sobre Geometria ao término da Educação Básica. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145.

Simon, M. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 91-104.

Armando Traldi Júnior. Prof. Dr. do Programa de pós-graduados em Educação Matemática da Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP. atraldi@pucsp.br

Maria de Fátima Aleixo de Luna. Mestranda do Programa de pós-graduados em Educação Matemática da Universidade Católica de São Paulo. PUC/SP.
fatima-luna@uol.com.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 183-189
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

Cooperativismo y Matemática en el Aula.

Andrés Alberto Barrea

Resumen

En este trabajo se expone una propuesta para ser desarrollada en el aula, especialmente en la escuela secundaria, la cual es basada en la Teoría de Juegos, y que tiene por objetivo fundamental relacionar la Matemática con la vida real. Principalmente poniendo énfasis en el desarrollo de conductas sociales cooperativas a través del análisis matemático de las situaciones planteadas. Se propone no sólo la exposición del tema sino también prácticas experimentales con el mismo

Abstract

This paper presents a proposal to be developed in the classroom, especially in middle school, which is based on game theory, and fundamental aims relate mathematics to real life. Primarily emphasizing the development of cooperative social behavior through mathematical analysis of the situations. It proposes not only the exposition of the subject but also with the same experimental practices

Resumo

Neste trabalho expõe-se uma proposta para ser desenvolvida no aula, especialmente na escola secundária, a qual é baseada na Teoria de Jogos, e que tem por objectivo fundamental relacionar a Matemática com a vida real. Principalmente pondo énfasis no desenvolvimento de condutas sociais cooperativas através da análise matemática das situações propostas. Propõe-se não só a exposição do tema senão também práticas experimentales com o mesmo.

Introducción

Generalmente, la Matemática es enseñada como un conjunto de fórmulas y variaciones de las mismas totalmente carentes de sentido práctico. Es decir entidades abstractas lejanas de lo cotidiano, de las vivencias de nuestras vidas diarias. ¿Quién no recuerda con estupor aquellos temas complicados que nunca más volveremos a usar en nuestras vidas que nos demandaron horas de estudio?

Sabemos que esto no refleja la verdad, que la mayoría de los contenidos provienen de hechos concretos, pero esto siempre queda oculto tras la rigidez con que se acostumbra a enseñarlos. Es cierto, existen temas complicados, los cuales son difíciles de presentar sin formalismo y abstracción; pero otros dan muchas posibilidades, y este es el humilde objetivo de esta presentación.

Uno podría concentrarse en ciertas preguntas pragmáticas pero no por ello poco interesantes: ¿Qué esperamos que el aprendizaje de la Matemática deje en el alumno?, ¿Son los contenidos clásicos lo suficientemente atractivos para que el alumno disfrute de ellos y desarrolle abstracción Matemática? Responderlas no es tarea sencilla, claro está, pero evidentemente la búsqueda de estas respuestas en sí misma es un camino a seguir. Es aquí donde la propuesta de este trabajo puede tener utilidad, y disponer al alumno a adentrarse en una forma de Matemática por lo menos distinta a la habitual.

La principal idea es dar un esbozo de un tema que no es parte de los cursos de Matemática tradicionales, la Teoría de Juegos, y que a mi entender podrían tener una importante contribución en el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos.

En Wikipedia (http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_juegos) podemos encontrar una breve introducción al tema, la que se transcribe a continuación:

La teoría de juegos es un área de la matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos (los llamados juegos) y llevar a cabo procesos de decisión. Sus investigadores estudian las estrategias óptimas así como el comportamiento previsto y observado de individuos en juegos. Tipos de interacción aparentemente distintos pueden, en realidad, presentar estructuras de incentivos similares y, por lo tanto, se puede representar mil veces conjuntamente un mismo juego.

Desarrollada en sus comienzos como una herramienta para entender el comportamiento de la economía, la teoría de juegos se usa actualmente en muchos campos, desde la biología a la filosofía. Experimentó un crecimiento sustancial y se formalizó por primera vez a partir de los trabajos de John Von Neumann y Oskar Morgenstern, antes y durante la Guerra Fría, debido sobre todo a su aplicación a la estrategia militar —en particular a causa del concepto de destrucción mutua garantizada. Desde los setenta, la teoría de juegos se ha aplicado a la conducta animal, incluyendo el desarrollo de las especies por la selección natural. A raíz de juegos como el dilema d el prisionero, en los que el egoísmo generalizado perjudica a los jugadores, la teoría de juegos se ha usado en economía, ciencias políticas, ética y filosofía. Finalmente, ha atraído también la atención de los investigadores en informática, usándose en inteligencia artificial y cibernética.

Aunque tiene algunos puntos en común con la teoría de la decisión, la teoría de juegos estudia decisiones realizadas en entornos donde interaccionan. En otras palabras, estudia la elección de la conducta óptima cuando los costes y los beneficios de cada opción no están fijados de antemano, sino que dependen de las elecciones de otros individuos. Un ejemplo muy conocido de la aplicación de la teoría de juegos a la vida real es el dilema del prisionero, popularizado por el matemático Albert W. Tucker, el cual tiene muchas implicaciones para comprender la naturaleza de la cooperación humana.”

Es en esta parte de la Matemática donde quiero hacer hincapié, y en especial en los llamados dilemas sociales, que modelan situaciones reales de cooperación (o egoísmo) entre los jugadores o grupos de ellos (Kollock. 1998). Esto además suma un contenido social al del razonamiento matemático que esperamos el alumno incorpore. Es decir preguntas como las siguientes deberían surgir:

- ¿Conviene pensar en conjunto y no individualmente?
- ¿Qué mecanismos aseguran que nuestra cooperación sirva?
- ¿Quién debe generar estos mecanismos?

En un hermoso libro (Fisher. 2008), el autor, con numerosos ejemplos, fundamenta la idea de que la Matemática puede mezclarse con la vida diaria.

Esta rama de la Matemática no cuenta, en principio y en su forma básica, con excesiva cantidad de fórmulas, teoremas y entes abstractos que puedan complicar el entendimiento del alumno; a la vez su cercana relación con hechos cotidianos la hace una herramienta maravillosa que extrañamente no ha sido explotada en toda su dimensión.

Comenzaremos con una revisión de los dilemas sociales más conocidos, algunos detalles matemáticos surgirán a medida que la exposición avance y trataremos, con la menor cantidad de tecnicismos.

El dilema del prisionero, el comienzo de la historia.

Este es históricamente el primer dilema social de la teoría de juegos, y existe una vasta biografía sobre el mismo (Poundstone. 1992). La cuestión es bien simple, dos personas son encarceladas por un hecho delictivo, ellas se encuentran en celdas separadas e incomunicadas y ambos reciben la misma propuesta del juez de la causa.

- Si usted confiesa ser culpable y su compañero también confiesa ambos recibirán 4 años de castigo.
- Si usted no confiesa y su compañero tampoco lo hace ambos recibirán 2 años de castigo.
- Si uno de ustedes no confiesa y el otro si lo hace, el primero recibirá 10 años y el segundo saldrá en libertad.

Podemos ver el problema gráficamente con el siguiente esquema:

JugadorA Jugador B	***Confiesa***	***No Confiesa***
Confiesa	**(4,4)**	**(0,10)**
No Confiesa	**(0,10)**	**(2,2)**

En el cuadro cuando escribimos el par (a , b) estamos significando que el jugador A recibirá el *pago* a y el jugador B el *pago* b, en este caso el pago es la cantidad de años preso, un pago no muy bienvenido por ellos.

La situación es la siguiente; lo mejor que ellos pueden lograr, pensando en conjunto (cooperativamente) es confesar ambos y cumplir una condena de 2 años cada uno.

Pero el riesgo es que el otro no confiese (ellos no conocen la decisión del otro) y tener que cumplir 10 años, lo cual hace que la situación empeore.

En cambio si ambos no confiesan deberían cumplir con 4 años cada uno, pero si alguno individualmente decide confesar, ese se haría cargo del delito y el que no confeso saldría libre.

Por lo tanto, la mejor opción individual es no confesar, pues independientemente de la decisión del otro la situación no lo llevaría a cumplir más de 4 años. Esto es lo que se conoce como <u>Equilibrio de Nash</u>. En otras palabras en un Equilibrio de Nash ningún jugador podría mejorar su pago cambiando de estrategia independientemente de lo que hagan los otros jugadores. Como conclusión podemos decir, en simples palabras

La mejor solución individual no coincide con la mejor solución grupal.

Esto es lo que da el nombre a este tipo de situaciones, *<u>dilemas sociales</u>*. Ya habrá quedado claro que aquí no hay fórmulas, ni cálculos complicados pero definitivamente hay Matemática!!

Pensando en esta situación lo primero que uno concluye que el desenlace depende de la confianza y el compañerismo de los protagonistas, y eso es claro; pero el tipo de análisis es puramente matemático.

La Tragedia de los Comunes

El dilema que presentamos a continuación, es básicamente equivalente al Dilema del Prisionero, pero muchas personas o grupos de ellas.

El trabajo original fue publicado en el año 1968 por G. Hardin y mucho se ha investigado y se sigue investigando sobre él. Esta es una cita de aquel trabajo que casi lo define:

> *“La ruina es el destino hacia el cual corren todos los hombres, cada uno buscando su mejor provecho en un mundo que cree en libertad de los recursos naturales”*

Pensemos en la siguiente situación, en cierto país los productores agrícolas deben restringirse con el uso del agua debido a la sequía imperante. Supongamos que si ellos cooperan con la restricción conseguirán una producción de 5 quintales por hectárea, mientras que si no lo hacen conseguirán 10 quintales por hectárea.

Si la mayoría de ellos no coopera, el reservorio de agua será menor, la restricción será más fuerte y solo producirán 1 quintal los que cooperen y 2 los que no lo hagan.

Podemos hacer un cuadro para este problema, similar al del dilema del prisionero.

Mayoría / Individuo	***No coopera***	***Coopera***
No Coopera	**(2,2)**	**(10,5)**
Coopera	**(1,2)**	**(5,5)**

Con el mismo razonamiento que en el dilema del prisionero, llegamos a la misma situación anticooperativista, el individuo prefiere optar por su mejor resultado individual antes que por un mejor resultado para todos. Podemos sacar una breve conclusión de este ejemplo:

Debemos incentivar en los individuos el cooperativismo

Esta conclusión proviene de un análisis de la situación, y casi es evidente en la vida real, pero situaciones como estas se ven a diario en nuestras vidas y sin los incentivos correctos el resultado siempre desfavorece a todos.

La caza del ciervo

El nombre de este dilema proviene de una vieja historia contada por el filósofo Jean Jacques Rousseau:

> *"Si un ciervo iba a ser cazado, cada uno dio cuenta de que, con el fin de tener éxito, debía cubrir fielmente su puesto, pero si una liebre pasó y quedó al alcance de cualquiera de ellos, no hay duda de que él la persiguió sin escrúpulos, y, tras la confiscación de su presa, le importaba muy poco, si con ello hizo que sus compañeros pierdan la suya."*

La historia habla de la eterna lucha entre la cooperación social y la libertad individual. Podemos citar la famosa frase de Rousseau sobre la libertad

> *"La verdadera libertad consiste en dar algo de mi libertad para entonces poder tener nuestra libertad"*

La situación ahora es la siguiente, dos jugadores a los que llamaremos A y B pretenden cazar un ciervo, para lograrlo ellos deben permanecer en sus posiciones hasta el momento oportuno, pero cada uno puede tener la posibilidad de cazar una liebre fácilmente que se cruza por sus caminos, claro esta descuidando su posición, perjudicando al otro jugador.

El dilema de la caza del ciervo puede ser visto como un dilema del prisionero "invertido", es decir lo que llamamos el Equilibrio de Nash (el cual no era la solución cooperativista en aquel caso) ahora coincide con la solución cooperativa.

En este juego el diagrama, como el usado en los anteriores juegos, es:

JugadorB Jugador A	***Caza Liebre***	***Caza Ciervo***
Caza Liebre	**(2,2)**	**(2,0)**
Caza Ciervo	**(0,2)**	**(10,10)**

Con el mismo razonamiento que en el dilema del prisionero, llegamos a una conclusión similar, la solución cooperativa (10,10) es la mejor para los dos, pero ante la posibilidad de asegurarse una presa, aunque sea menor cada individuo puede elegir una estrategia que no permita llegar a la solución óptima para todos.

La diferencia aquí es que el cooperativismo es roto por un jugador que ve la posibilidad de individualmente minimizar los riesgos, en el dilema del prisionero los jugadores pretenden maximizar sus ganancias, y en el juego de la caza del ciervo ellos pretenden minimizar los riesgos. Una interesante referencia es (Skyrms. 2004)

Este juego tiene un correlato para más de dos jugadores que es interesante de trabajar, así como también una versión probabilística del mismo (técnicamente se llama a esto estrategias mixtas) también posible para los dos dilemas anteriores.

Como una nota matemática, debemos decir que existe una formalización de lo que llamamos juego, junto con una de equilibrio de Equilibrio de Nash.

Además existen juegos que no cuentan o tienen múltiples equilibrios de Nash considerando sus estrategias puras. Un importante teorema asegura la existencia de Equilibrios de Nash para estrategias mixtas. en juegos con una cantidad finita de estrategias puras (Webb. 2007)

Trabajando con los dilemas sociales

Sumado al hecho de enseñar estos juegos en una clase, hecho que de por sí ya causaría sorpresa en el alumnado, que no acostumbra a relacionar Matemática con situaciones reales, se puede agregar, experimentación al respecto, otro hecho novedoso, pues en general se cree que la Matemática es un ciencia puramente teórica. Las clásicas frases “en Matemática todo está hecho” o “uno más uno siempre es dos” son sólo muestras de ello.

Quiero citar dos propuestas que me parecen interesantes de desarrollar. Una de ellas se puede encontrar en la referencia (Pascual. 2009), donde los autores, mediante un software implementan un juego similar a la tragedia de los comunes para ser utilizado en enseñanza.

Un juego tipo tragedia de los comunes, inspirado en pesca, es decir una fuente común de explotación (un lago, un río, etc.), junto con una tasa de reproducción sin ningún tipo de regulación para comenzar, e incorporando un sistema de premios y castigos (diseñados por los alumnos) sería un posible “experimento” a desarrollar en el aula.

Como ya hemos dicho en la referencia (Fisher. 2008), se pueden encontrar innumerables situaciones para ejemplificar estos juegos y otros con hechos de la vida real, cuya discusión en el aula enriquecería el tema y al alumnado.

Bibliografía

Fisher, L. (2008). *Rock, Paper, Scissors: Game Theory in Everyday Life.* Basic Books, New York

Hardin, G. (1968). Tragedy of Commons. *Science* 162, 1243-1248.

Kollock, P. (1998). *Social Dilemmas: The Anatomy of Cooperation*. Annu. Rev. Soc., 24, 183 -214.

Pascual, J. et. Al (2009). Una herramienta didáctica para la enseñanza de la teoría de juegos mediante Internet. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 29, 1-14.

Poundstone, W. (1992): *Prisoner's Dilemma*. Anchor Books, New York.

Skyrms, B (2004): *The Stag Hunt and the Evolution Social Structure*. Cambridge University Press, UK.

Webb, J. (2007): *Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution*. Springer, London

Andrés Alberto Barrea Doctor en Matématica de la Universidad Nacional de Córdoba, es Profesor Asistente en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física e Investigador Asistente de la carrera de Investigador Científico del Conicet. Su área de investigación es la Matemática Aplicada con énfasis en modelos matemáticos de fenómenos relacionados con tratamientos de tumores andresbarrea1789@yahoo.com.ar.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 191-200
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Juegos, estrategias e intuición

Problema

Los jugadores J1 y J2 disponen de k y m estrategias respectivamente y deben elegir una de ellas, sin conocer la elección del otro. La combinación de las estrategias que elija cada jugador determina la ganancia que recibirá y cada uno de los jugadores conoce lo que recibiría por cada una de las combinaciones posibles. Si cada jugador busca obtener la mayor ganancia posible, de una manera racional,¿cuál sería la estrategia que juegue cada uno?

Esta es una manera un tanto general de proponer un problema de la teoría de juegos y su solución requiere una formalización adecuada. John Nash es el gran matemático que trató este tipo de problemas, de manera aún más general, considerando más de dos jugadores[1]. En el presente artículo, presento experiencias didácticas y comentarios, empleando juegos sencillos, como una manera de iniciar a alumnos de diversos niveles educativos en este fascinante tema.

Un ejemplo muy conocido de este tipo de problemas es el llamado "*dilema de los prisioneros*", en el cual los jugadores tienen dos estrategias cada uno:

Dos sospechosos son detenidos y acusados de un delito. No hay evidencias suficientes para condenarlos, por lo cual la decisión de condenarlos a cierto tiempo de prisión o de liberarlos, se tomará con base en lo que declaren los sospechosos. Los sospechosos son encerrados sin posibilidades de comunicarse entre sí y se les comunica que tienen la posibilidad de confesar o no confesar. Si ninguno confiesa, ambos serán condenados por un delito menor y sentenciados a 1 año de cárcel; si ambos confiesan, serán sentenciados a 6 años de cárcel, cada uno, por el delito cometido; y si uno confiesa y el otro no, al que confiesa se le dará la libertad y al que no confiesa se le condenará a 9 años de prisión. Si ambos sospechosos toman su decisión racionalmente, ¿cuál de sus opciones elegirán? ¿Confesar? O ¿No confesar?

Por las múltiples aplicaciones de estos problemas en las ciencias sociales, por su importancia en sí misma como tema matemático y por sus grandes potencialidades didácticas para contribuir al desarrollo del pensamiento matemático,

[1] Nash, J. (1950) Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the National Academy of Sciences 36: 48-49

de la capacidad de aprender a aprender y de la intuición optimizadora, considero que se deben hacer esfuerzos para usarlos desde el nivel secundario. Una manera de hacerlo es proponiendo situaciones lúdicas que sean asumidas trabajando en grupos.

A continuación narro cómo he desarrollado algunas experiencias didácticas con alumnos universitarios de segundo o tercer año de carreras de economía, ciencias e ingeniería, que podrían servir de base para experiencias más sencillas con alumnos de secundaria.

Jugando en el aula

Divido al conjunto de alumnos de la clase en dos grupos (grupo Alfa y grupo Beta) y en cada uno pido dos alumnos voluntarios para que sean los jugadores (J1 y J2) de juegos cuyas reglas voy a anunciar. Cada uno de los jugadores forma un equipo de "asesores" para que lo ayuden a tomar la decisión que más le convendría. Ni los jugadores ni los equipos pueden comunicarse y la decisión debe ser muy racional.

Juego 1

Para el juego, entrego dos tarjetas, T1 y T2, a cada jugador, cada una de la cuales tiene escrito un pedido que yo cumpliré.

***T1**: Dale 3 soles[2] al otro jugador.*

***T2**: Dame 1 sol.*

Después de deliberar con su equipo asesor durante un tiempo prudencial, los jugadores de cada grupo me entregan su tarjeta y luego de leer ambos pedidos, yo cumplo con hacer lo que cada uno me solicita.[3]

El juego consiste en que cada grupo obtenga la mayor ganancia posible.

Comprensión del problema:

Es una fase fundamental y generalmente, discutiendo en cada grupo, se llega a organizar la información de alguna de las siguientes formas:

- *Listas de pagos*

Pagos que recibiría J1:

Elección de J1	Elección de J2	Pago a J1
T1	T1	3
T1	T2	0
T2	T1	4
T2	T2	1

Pagos que recibiría J2:

Elección de J1	Elección de J2	Pago a J2
T1	T1	3
T1	T2	4
T2	T1	0
T2	T2	1

[2] El "Nuevo sol" es la unidad monetaria en el Perú. Coloquialmente, usamos "sol"

[3] El juego es una variante de la versión de Auman del juego "el dilema de los prisioneros".

- *Cuadros matriciales*

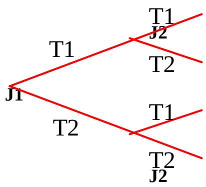
Pagos a J1:

		J2	
		T1	T2
J1	T1	3	0
	T2	4	1

Pagos a J2:

		J2	
		T1	T2
J1	T1	3	4
	T2	0	1

- *Árboles*



Pagos a **J1**	Pagos a **J2**
3	3
0	4
4	0
1	1

Es un gran estímulo a la capacidad de aprender a aprender de los estudiantes, constatar luego, que sin saberlo han estado usando conceptos y representaciones propias de la teoría de juegos; así, la forma de organizar la información mediante "listas de pagos" nos está dando las *funciones de pagos* del juego propuesto, y las dos últimas formas de organizar la información es prácticamente la misma que se usa al representar los juegos en *forma normal* y en *forma extensiva*, respectivamente. Resulta sencillo pasar de los dos cuadros matriciales a un cuadro bimatricial que resume ambos y que es el que se usa para el análisis de juegos en forma normal.

		J2	
		T1	T2
J1	T1	(3, 3)	(0, 4)
	T2	(4, 0)	(1, 1)

Generalmente, en ambos grupos los dos jugadores entregan las tarjetas T2. Cuando se les pide exponer cómo llegaron a esa elección, lo hacen usando la forma en que sistematizaron la información para comprender mejor el problema y usando criterios que corresponden a una aproximación intuitiva de "*estrategias estrictamente dominadas*"; es decir, que si J1 entrega T1 obtendrá un menor pago que si entrega T2, cualquiera que sea la tarjeta que entregue J2 (3 es menor que 4 y 0 es menor que 1). En consecuencia, J1 descarta entregar T1. En este caso, lo mismo ocurre para J2 y en consecuencia, aunque más les convendría a ambos jugadores entregar las tarjetas T1, porque así cada uno ganaría 3 soles, la racionalidad los lleva a optar a ambos por entregar las tarjetas T2.

Regresando al caso del dilema de los prisioneros, resumimos la situación planteada usando números negativos para los años de prisión y la notación bimatricial introducida:

		P2	
		No confesar	*Confesar*
P1	*No confesar*	(-1, -1)	(-9, 0)
	Confesar	(0, -9)	(-6, -6)

Se ve claramente que, de manera análoga al juego anterior, aunque a ambos prisioneros les conviene más optar por no confesar, la racionalidad los llevaría a ambos a confesar. La racionalidad se basa en que la "ganancia" de cada prisionero por no confesar siempre es menor que la "ganancia" por confesar (-1 es menor que 0 y -9 es menor que -6), lo cual, en lenguaje de teoría de juegos se expresa diciendo que "la estrategia *no confesar* está estrictamente dominada por la estrategia *confesar*".

Después de haber analizado estos juegos, es interesante pedir a los estudiantes que piensen en casos reales en los que se tiene una situación similar. En una ocasión, un grupo observó que la misma situación se daba en la carrera armamentista entre dos países: a ambos, lo que más les conviene es gastar poco en armas, pero ante la desconfianza, la racionalidad los lleva a gastar mucho en armas.

Continuamos, proponiendo dos nuevos juegos, para examinarlos en grupos de a lo más 4 estudiantes.

Juego 2

Jugador 1: Dispone de dos fichas para jugar: la blanca y la negra.
Jugador 2: Dispone de tres fichas para jugar: roja, amarilla y verde.

Cada jugador colocará en una caja una de las fichas que dispone, una sola vez, y de la combinación de fichas que resulte, cada jugador obtendrá una determinada "ganancia"

Si el jugador 1 coloca su ficha blanca, ganará 4, 3 ó 4 soles, según el jugador 2 coloque su ficha roja, amarilla o verde, respectivamente. En cada uno de estos casos, la ganancia del jugador 2 sería 3, 4 ó 5 soles respectivamente.

Si el jugador 1 coloca su ficha negra, ganará 0, 5 ó 3 soles, según el jugador 2 coloque su ficha roja, amarilla o verde, respectivamente. En cada uno de estos casos, la ganancia del jugador 2 sería 6, 0 ó 4 soles respectivamente.

Los jugadores conocen las reglas, pero ninguno sabe lo que jugará el otro.

Actividades grupales

a) Organizar y resumir la información dada para el juego, de modo que se vean claramente las diversas posibilidades y sus respectivas ganancias para los jugadores.

b) Si los jugadores toman su decisión racionalmente ¿qué ficha elegiría cada uno? Justificar usando la información organizada.

Los grupos resumen la información fácilmente, usando una bimatriz como las que hemos visto:

		J2		
		Roja	Amarilla	Verde
J1	Blanca	(4, 3)	(3, 4)	(4, 5)
	Negra	(0, 6)	(5, 0)	(3, 4)

Todos los grupos coinciden en que J1 colocará la ficha blanca y J2 colocará la ficha verde. Se puede percibir que para J1 ninguna estrategia está estrictamente domina por otra, pero para J2, la estrategia "Amarilla" está estrictamente dominada por la "Verde" (los pagos 4 ó 0 que recibiría J2 por "Amarilla" siempre son menores que los pagos 5 ó 4 que recibiría por "Verde"). Descartando la estrategia "Amarilla", el juego se reduce a un caso de bimatriz de 2x2 como los anteriores

		J2	
		Roja	Verde
J1	Blanca	(4, 3)	(4, 5)
	Negra	(0, 6)	(3, 4)

Se ve ahora que "Negra" está estrictamente dominada por "Blanca" (0 es menor que 4 y 3 es menor que 4). Entonces J1 descartará la estrategia "Negra" y el juego se reduce a una bimatriz de una sola fila (de "Blanca") por dos columnas (de "Roja" y "Verde") y en tal situación J2 descarta "Roja", por estar estrictamente dominada por "Verde", pues 3 es menor que 5. Así, la conclusión racional es la combinación "Blanca" y "Verde".

En las justificaciones, los alumnos suelen distraer su análisis usando el argumento de evitar obtener un pago de 0 soles, como se muestra en la siguiente solución. Cabe destacar que en sus análisis consideran que un jugador actuará "buscando un equilibrio", imaginando lo que el otro hará, lo cual a su vez tendrá en cuenta lo que éste supone que hará el primero:

* En el juego 2, la mejor jugada sería la tarjeta blan para el jugador 1 y la tarjeta verde para el jugador con las cuales tendrían una ganancia de 4 y 5 soles respectivamente.

* EL jugador 1 no escogería la tarjeta negra ya que existe la posibilidad de que su ganancia sea cero y eso lo sabe el jugador 2, quien no escoge la tarjeta amarilla por la misma razón. Si se sabe por ambos lados que no será escogida la negra y la amarilla, EL jugador 2 simplemente verá con que tarjeta tiene más ganancia cuando el jugador 1 elig blanca. Así, nos damos cuenta de que es mejor jugar este pensando en la estrategia de ambos jugadores tratand buscar un equilibrio de ganancia que le convenga a ambos

Teniendo presente esta observación, resulta particularmente interesante el siguiente juego:

Juego 3

Jugador 1: Dispone de tres fichas para jugar: blanca, negra y marrón.
Jugador 2: Dispone de tres fichas para jugar: roja, amarilla y verde.

Cada jugador colocará en una caja una de las fichas que dispone, una sola vez, y de la combinación de fichas que resulte, cada jugador obtendrá una determinada "ganancia"

Si el jugador 1 coloca su ficha blanca, ganará 1, 3 ó 3 soles, según el jugador 2 coloque su ficha roja, amarilla o verde, respectivamente. En cada uno de estos casos, la ganancia del jugador 2 sería 9, 4 u 8 soles respectivamente.

Si el jugador 1 coloca su ficha negra, ganará 2, 0 ó 4 soles, según el jugador 2 coloque su ficha roja, amarilla o verde, respectivamente. En cada uno de estos casos, la ganancia del jugador 2 sería 4, 4 ó 6 soles respectivamente.

Si el jugador 1 coloca su ficha marrón, ganará 3, 2 ó 3 soles, según el jugador 2 coloque su ficha roja, amarilla o verde, respectivamente. En cada uno de estos casos, la ganancia del jugador 2 sería 5, 6 ó 4 soles respectivamente.

Los jugadores conocen las reglas, pero ninguno sabe lo que jugará el otro.

Actividades grupales

a) Organizar y resumir la información dada para el juego, de modo que se vean claramente las diversas posibilidades y sus respectivas ganancias para los jugadores.

b) Si los jugadores toman su decisión racionalmente ¿qué ficha elegiría cada uno? Justificar usando la información organizada.

c) Presentar la información organizada y resumida de algún juego conocido o inventado por el grupo y explicar si existe o no una "decisión racional" de cada jugador.

La parte (a) es fácilmente obtenida, usando la representación bimatricial:

		J2		
		Roja	Amarilla	Verde
J1	Blanca	(1, 9)	(3, 4)	(3, 8)
	Negra	(2, 4)	(0, 4)	(4, 6)
	Marrón	(3, 5)	(2, 6)	(3, 4)

En este juego se tiene una dificultad especial: no existen estrategias estrictamente dominadas para ninguno de los jugadores. El pago cero a J1 en la combinación de estrategias "Negra" para J1 y "Amarilla" para J2, hace que los estudiantes inicialmente no consideren la estrategia "Negra" como una buena opción para J1. Sin embargo, generalmente llegan a la solución que corresponde a un equilibrio de Nash, en la cual la mejor elección para J1 es “Negra” y la mejor elección para J2 es “Verde”. Las dificultades para explicar cómo llegan a tal solución y la ausencia de formalizaciones o algoritmos, nos hacen calificar de *intuitiva* a tal solución. Que el profesor y toda la clase acepten como correcta la solución, les da seguridad y entonces la tarea es encontrar una manera racional de llegar a tal solución. Esta es una parte fundamental en el aprendizaje de la teoría de juegos, pues es la búsqueda de un manejo más cuidadoso de la racionalidad de los jugadores, que en verdad es el inicio del manejo de la racionalidad propia de esta teoría, pero sin conocer aún definiciones formales ni técnicas, que cuando son dadas desde el inicio llevan a un aprendizaje puramente deductivo y a veces de aplicación mecánica de técnicas y recortan esta fase tan importante de *aproximación intuitiva y creativa*.

Toma un poco de tiempo, pero generalmente luego de discusiones en cada grupo y entre los grupos, se llega a la técnica de examinar lo que elegiría un jugador si supiera la elección que va a hacer el otro jugador y marcar los pagos correspondientes, y entonces la solución queda determinada por las estrategias que corresponden a una casilla en la que están marcadas las dos componentes del par de pagos.

Después de esta experiencia, queda muy claro para los estudiantes que la ausencia de estrategias estrictamente dominadas no implica la ausencia de una solución y resulta muy interesante pedirles que ensayen una definición de ese concepto de “solución racional”, que en verdad es el concepto de *equilibrio de Nash*. Los estudiantes perciben claramente la necesidad de formalizar y se les pide que lo hagan. En este sentido, tuve una excelente experiencia al recibir la siguiente explicación, como intento de llegar a una “definición de equilibrio de Nash” para juegos similares a los dados:

Se hacen dos listas:

Si J2 eligiera:	**entonces J1 elegiría:**
Roja	Marrón
Amarilla	Blanca
Verde	Negra

Si J1 eligiera:	**entonces J2 elegiría:**
Blanca	Roja
Negra	Verde
Marrón	Amarilla

Como **Verde – Negra** está en la primera lista y **Negra – Verde** está en la segunda, este par de estrategias es la solución racional del juego. En verdad las listas son las “correspondencias de mejor respuesta” de cada jugador y, esencialmente, se está dando la definición de equilibrio de Nash, con estrategias puras, que suele darse, usando tales correspondencias, para juegos finitos de dos jugadores[4].

Inventando juegos

Una actividad que se pide muy poco – o nunca – a los estudiantes, es inventar problemas. Considero que siempre debería hacerse paralelamente a la actividad de resolver problemas, pues estimula la creatividad, ayuda a precisar las ideas y conceptos que se fueron introduciendo y generalmente se presentan nuevas

[4] R_1 y R_2 son correspondencias que definen los conjuntos de mejores respuestas de los jugadores para cada estrategia del otro jugador. Así, (s, t) es un equilibrio de Nash si y sólo si $s \in R_1(t)$ y $t \in R_2(s)$.

dificultades que requieren introducir nuevos conceptos o técnicas para resolverlas. Resulta muy atractivo y motivador para los alumnos tratar de resolver dificultades que ellos mismos han creado; más aún si lo han hecho conscientes de los criterios que deberán usar para resolverlas, pero que les resultan insuficientes. Al pedirles que inventen juegos similares a los vistos, en los que se examine las elecciones que harían jugadores racionales, los alumnos llegan a plantear, sin proponérselo, juegos en los que hay más de un equilibrio de Nash, juegos en los que la mejor respuesta de un jugador a cierta estrategia del otro jugador no es una única estrategia (lo cual será retomado para explicar el término "correspondencia" en lugar del término "función"); y – lo más interesante – juegos en los que no existe un equilibrio de Nash, según el criterio dado.

Luego de discutir algunos problemas seleccionados, se presentan de manera formal las definiciones de juego, funciones de pago, estrategias estrictamente dominadas, correspondencias de mejor respuesta y equilibrio de Nash para juegos de dos jugadores. Se hace notar la equivalencia al definir el equilibrio de Nash en términos de correspondencias de mejor respuesta (o de reacción) y en términos de funciones de pago. Se hace ver, observando una bimatriz de pagos con un equilibrio de Nash, que siendo (s*, t*) un equlibrio de Nash, si el jugador 1 cambia de estrategia y el jugador 2 no cambia, entonces el pago que recibe el jugador 1 en ningún caso es mejor que el que le corresponde con (s*, t*) y que también ocurre lo mismo si el jugador 2 es el que cambia de estrategia sin que cambie el jugador 1. Se enuncia también el teorema de Nash, según el cual todo juego finito (tanto el conjunto de jugadores como el de estrategias de cada uno de ellos son conjuntos finitos) tiene un equilibrio de Nash.

A continuación algunos juegos seleccionados de entre los inventados por los alumnos:

Juego (a)

	R	S	T
A	(3, 6)	(7, 1)	(2, 6)
B	(4, 1)	(7, 5)	(5, 8)

Juego (b)

	R	S
A	(2, 4)	(3, 9)
B	(5, 3)	(2, 1)

Juego (c)

	S	T	U	V
A	(2, 4)	(3, 9)	(7, 1)	(7, 0)
B	(5, 3)	(2, 1)	(6, 4)	(4, 1)
C	(0, 5)	(4, 3)	(3, 3)	(9, 2)

Juego (d)

	S	T
A	(2, -2)	(-6, 6)
B	(-3, 3)	(4, -4)

En todos los juegos se usa la técnica de subrayar los pagos de cada jugador, que correspondan a la o las mejores respuestas, considerando que el otro jugador elegirá una estrategia determinada. Así, en el juego (a), si J1 eligiera la estrategia A, entonces J2 elegiría R ó T, por lo cual se subrayan los correspondientes números 6 de la fila A. Si J1 eligiera B, entonces J2 elegiría T y se subraya el correspondiente número 8 de la fila B. Análogamente, si J2 eligiera R, entonces J1 elegiría B y se subraya el correspondiente 4 de la columna R. Completando el procedimiento, se obtiene:

	R	S	T
A	(3, $\underline{6}$)	($\underline{7}$, 1)	(2, $\underline{6}$)
B	($\underline{4}$, 1)	($\underline{7}$, 5)	($\underline{5}$, $\underline{8}$)

La combinación de equilibrio se da con las estrategias B y T, pues su casilla tiene a ambos números subrayados.

En este juego es fácil ver que al jugador 1 le sería indiferente elegir su estrategia A o su estrategia B si supiera que el jugador 2 elegirá su estrategia S. Análogamente, para el jugador 2, respecto a sus estrategias R y T, si supiera que el jugador 1 elegirá su estrategia A. Usando las correspondencias de mejor respuesta tenemos:

$$R_1(R) = \{B\}\ ;\ \ R_1(S) = \{A, B\}\ ;\ \ R_1(T) = \{B\}$$

$$R_2(A) = \{R, T\}\ ;\ \ R_2(B) = \{T\}$$

Se verifica que el par de estrategias (B, T) es un equilibrio de Nash observando que $B \in R_1(T)$ y que $T \in R_2(B)$. A esto mismo se llegó con la técnica del subrayado y también se puede llegar eliminando estrategias estrictamente dominadas: primero la S, luego la A y finalmente la R.

En el juego (b) se obtienen dos equilibrios de Nash, lo cual suscita discusiones sobre cuál de ellos se escogería y motiva hacer comentarios sobre intercambiabilidad y equivalencia de equilibrios y sobre equilibrios subjuego-perfectos. Más aún, cuando se introdujo el concepto de estrategias mixtas, fue muy interesante que los alumnos descubrieran que este juego propuesto por ellos tiene un tercer equilibrio de Nash.

En el juego (c), obtenido añadiendo estrategias a ambos jugadores del juego (b), no se obtuvieron equilibrios de Nash, lo cual despertó inquietud entre los alumnos, pues resultó natural pensar que se había encontrado un contraejemplo al teorema de Nash de existencia de equilibrio en todo juego finito, enunciado anteriormente. Se sugirió entonces buscar juegos más sencillos que tengan esta particularidad. Así apareció el juego (d), que además tiene otra particularidad muy interesante: es un juego de suma nula; es decir, un juego en el cual lo que gana un jugador es lo que pierde el otro.

En el juego (d), ante la ausencia de estrategias estrictamente dominadas y al no encontrar un criterio claro para que los jugadores elijan una de sus estrategias, sugerí pensar que en verdad los jugadores tienen más de dos formas de elegir sus estrategias, considerando el azar. En la mayoría de veces, en esta situación los alumnos encontraron como una tercera manera de elegir una estrategia el lanzar una moneda al aire y según salga cara o sello, optar por una u otra estrategia. Llegado a este punto, la pregunta natural es ¿por qué no usar un dado en lugar de una moneda? ; o ¿por qué no una ruleta? Este es el inicio del estudio de estrategias mixtas, usando probabilidades. Los detalles los dejamos para otro artículo y recomendamos a los lectores interesados indagar en la abundante bibliografía sobre teoría de juegos; en particular, en el libro de Gibbons (1993)[5], o en el de Binmore (1993)[6].

Comentarios

1. Las ideas aquí expuestas, como parte de mis experiencias didácticas desarrolladas con jóvenes universitarios, pueden servir de base para desarrollarlas con jóvenes de secundaria y tener nuevas fuentes de información sobre el uso de la intuición en la resolución de problemas de optimización y sobre la factibilidad de introducir este tema en los currícula de la educación básica. La teoría de situaciones didácticas, el enfoque ontosemiótico y la ingeniería didáctica, son enfoques teóricos de la educación matemática que podrían utilizarse en las investigaciones al respecto.

2. La teoría de juegos presenta tan interesantes oportunidades de ejercitar el pensamiento matemático – en particular el pensamiento optimizador en situaciones de conflicto – y tiene tantas aplicaciones en economía, sociología, psicología, negocios, política, derecho, biología, etc., que una introducción elemental a ella, tratando problemas como los aquí propuestos, debería formar parte de los cursos básicos de matemáticas para todos los estudiantes universitarios. En Internet hay abundante información sobre sus múltiples aplicaciones y referencias a diversas situaciones. Un video interesante de divulgación, relacionado con una perspectiva dinámica del dilema de los prisioneros, se puede encontrar en:
   http://www.youtube.com/watch?v=g5MeC3GDx74&feature=related

[5] Gibbons, R. (1993). *Un primer curso de teoría de juegos*. Barcelona: Antoni Bosch
[6] Binmore, K. (1993). *Teoría de juegos*. Madrid: McGraw-Hill

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 201-210
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

GeoGebra. Un recurso imprescindible en el aula de Matemáticas

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Antes de nada quisiera dejar claro que este trabajo no tiene como objetivo ofrecer una lección magistral sobre el uso de un determinado programa, por el contrario solo intenta ofrecer información de utilidad para aquel profesorado que aún no conozca GeoGebra o que todavía no se haya animado a utilizarlo en su aula.

A pesar de la amplia oferta existente de programas de geometría dinámica, de cálculo simbólico o de representación de funciones, además de la gran cantidad de páginas webs que ofrecen diferentes applets con propuestas para llevar al aula, considero que GeoGebra está ganando terreno al resto de opciones y, poco a poco se está haciendo imprescindible en el aula sobre todo cuando se apuesta por el uso de las TIC como recurso didáctico.

A las posibilidades que ofrece y a la sencillez para su uso, hay que añadir sus características de software libre, disponible para distintas plataformas y sobre todo en continuo desarrollo, ofreciendo siempre la última versión que se puede descargar en la Web www.geogebra.org.

Creado por **Markus Hohenwarter**, actualmente en la Universidad Johannes Kepler de Linz (Austria) ha aumentado de manera exagerada el número de usuarios en todo el mundo, ofreciendo traducciones del programa en casi todos los idiomas.

GeoGebra no es solo geometría dinámica (Geo) y álgebra (Gebra), es mucho más, ya que ofrece herramientas y opciones que permitirán trabajar cualquier contenido matemático, sobre todo en niveles educativos equivalentes a Primaria, Secundaria o Bachillerato, sin contar las propuestas de futuro en las que están trabajando que harán que sea imprescindible para enseñar matemáticas.

Primeros pasos con GeoGebra

Para comenzar a utilizar GeoGebra es necesario tener claro algunas ideas previas que ayudaran para profundizar y complicar poco a poco las construcciones que se puedan realizar.

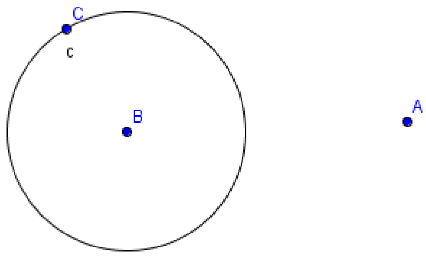
A partir de unos objetos básicos en el plano se irán estableciendo relaciones entre ellos que, cuando estén bien definidas, se mantendrán al cambiar las condiciones iniciales.

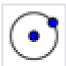
Esta es una de las características de los programas de geometría dinámica que diferenciara entre dibujar y construir. Dibujar será trazar unos objetos junto a otros sin ninguna relación entre ellos y por tanto, al modificar las condiciones iniciales, al no existir relaciones, se perderán las relaciones que deberían existir entre ellos; sin embargo al hablar de construir estamos indicando que se han establecido relaciones matemáticas o geométricas entre los objetos que se mantendrán al cambiar las condiciones iniciales. Aclaramos esto con un sencillo ejemplo.

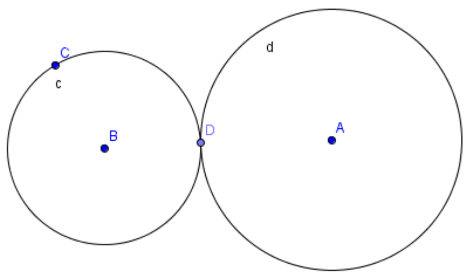
Actividad 1.

A partir de una circunferencia c y un punto exterior A. Traza la circunferencia que tenga centro a A y sea tangente a la circunferencia c.

Comenzamos dibujando los objetos iniciales, el punto A y la circunferencia c.

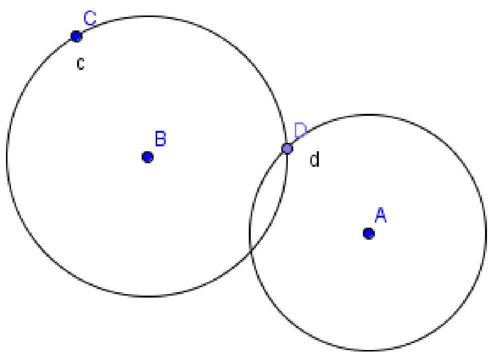


Podemos intentar "dibujar" la circunferencia tangente, para ello seleccionamos la herramienta .

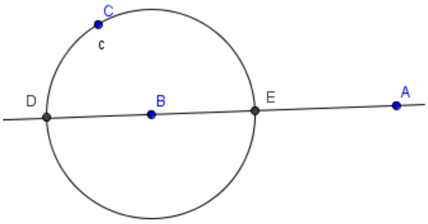


Antes de cambiar nada en la construcción, pensemos si hemos utilizado alguna propiedad geométrica.

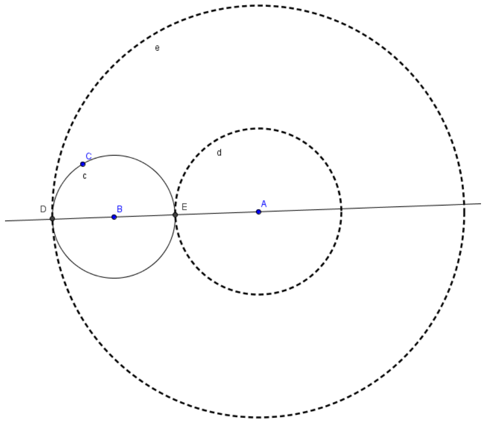
La respuesta es que no hemos utilizado ninguna propiedad y por tanto al mover la circunferencia c o el punto A, las circunferencias dejarán de ser tangentes, como podemos observar en la imagen siguiente al mover el punto A.



La construcción correcta se logrará al determinar de manera exacta el punto de tangencia. Para ello, basta con trazar la recta que une A con el centro de la circunferencia para determinar los puntos de tangencia que serán los puntos de intersección.

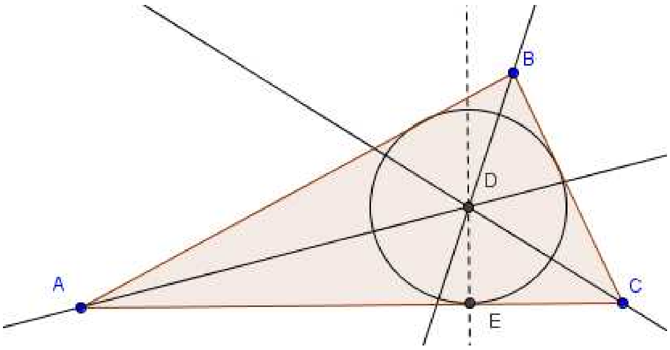


Ya solo queda trazar las dos circunferencias que cumplen la condición pedida de tangencia.



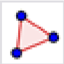
La primera construcción se ha obtenido dibujando y por tanto no mantiene relaciones que si se han utilizado en la segunda que si es una construcción.

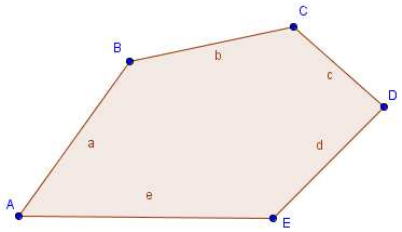
Algo similar ocurre cuando se propone la construcción de la circunferencia inscrita a un triángulo en la que una vez obtenido el incentro se intenta dibujar la circunferencia sin pensar que es necesario determinar el punto de tangencia sobre cualquiera de los lados.



Actividad 2.

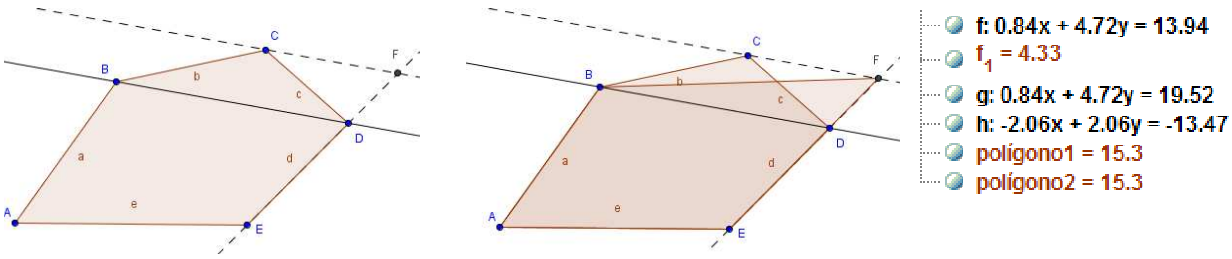
A partir de un polígono cualquiera, construir un nuevo polígono con un lado menos pero cuya área sea igual a la del polígono inicial.

Comenzamos dibujando un polígono cualquiera, utilizando para ello la herramienta *Polígono* :



Aplicando que dos triángulos con igual base y altura tendrán la misma área, unimos dos vértices, por ejemplo B y D con una recta. Trazamos la recta paralela a BD por el vértice intermedio C y prolongamos el lado ED.

El punto de corte de estas dos rectas será el nuevo vértice que hace que se cumpla la condición de mantener el área ya que los triángulos BCD y BDF tienen igual base y altura. Ya solo queda dibujar el nuevo polígono cuya área es igual a la del polígono inicial tal como aparece en la vista algebraica.

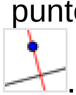


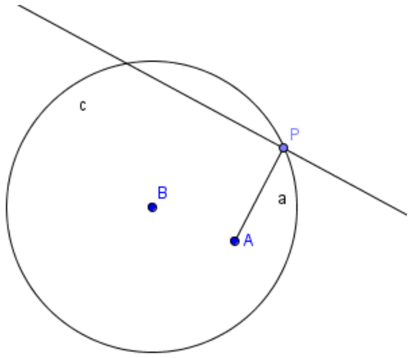
Como propuesta de trabajo planteamos la construcción de un polígono con un lado más cuya área sea igual a la del polígono inicial. En la imagen que hemos insertado correspondiente a la ventana algebraica podemos observar que aparecen las ecuaciones de las rectas que hemos trazado, lo cual nos da nuevas posibilidades de trabajo en el aula.

Mostremos nuevas actividades, por ejemplo algunos lugares geométricos que se pueden obtener a partir de la opción *Lugar* que ofrece GeoGebra, representada por la herramienta  o a partir de las opciones de las posibilidades de animación y trazo que quizás sean más vistosas.

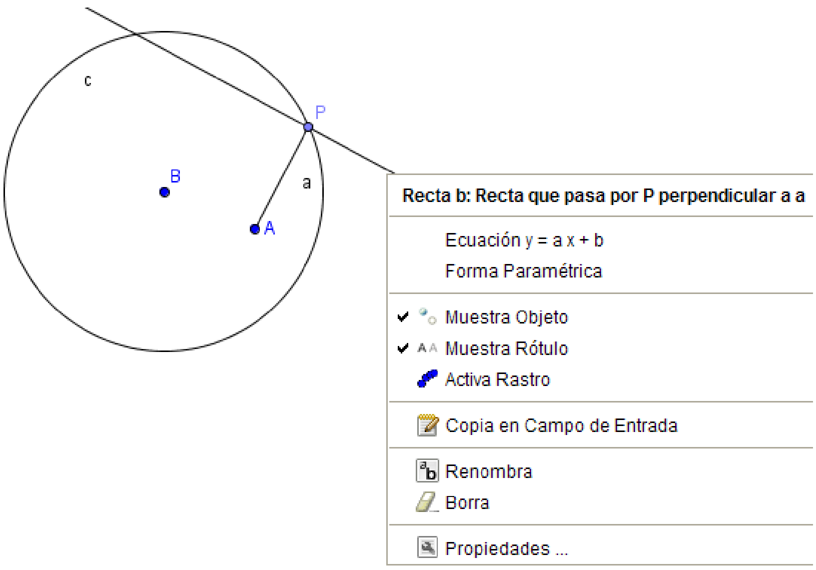
Actividad 3.

Sea A un punto interior de una circunferencia c y P un punto de ella. Hallar el lugar geométrico descrito por las rectas perpendiculares al segmento PA, cuando P recorre la circunferencia.

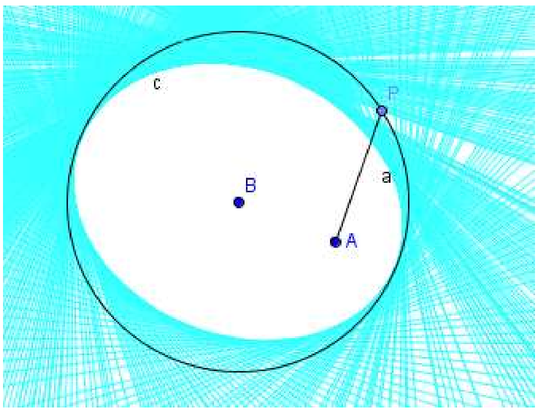
Comenzamos dibujando los objetos iniciales A, P y c, dibujando a continuación, el segmento PA y la recta perpendicular al segmento por el punto P, utilizando para ello las herramientas *Segmento*  y *Recta perpendicular* .



Para obtener el lugar geométrico activamos la traza de la recta perpendicular pulsando el botón derecho con el cursor situado sobre ella.



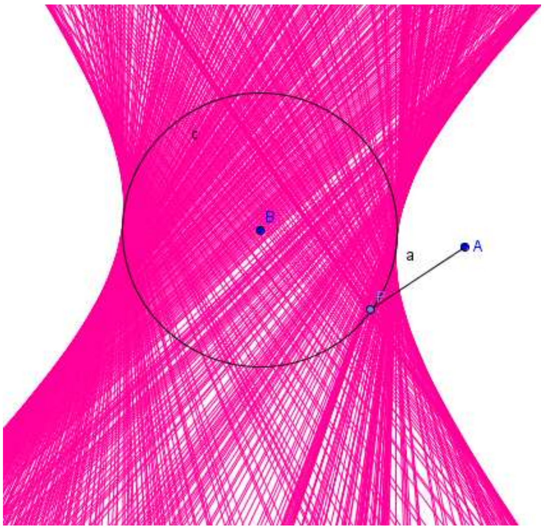
Ya solo nos queda mover el punto P para que aparezca el lugar descrito cuando el punto recorre la circunferencia.



Podemos observar que se trata de una elipse cuyo centro es el centro de la circunferencia y A es uno de sus focos. Como alternativa podemos diseñar la construcción para que el movimiento del punto P se produzca de manera automática en lugar de manual.

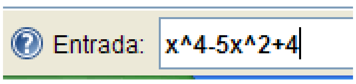
Ahora, podemos plantear ¿qué ocurre cuando el punto A es un punto exterior a la circunferencia c?

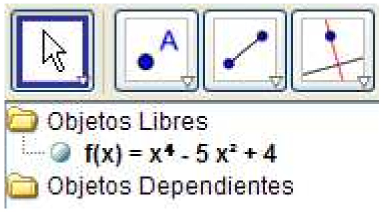
Sólo tendremos que arrastrar el punto A fuera de la circunferencia, teniendo la precaución de pulsar las teclas Ctrl – F para eliminar el rastro anterior, antes de volver a mover el punto P para obtener la imagen de una nueva cónica, en este caso una hipérbola.



Como GeoGebra no es solo geometría, proponemos algunas actividades para trabajar otros contenidos, como puede ser la representación de funciones.

Para representar una función basta con escribir su ley de formación en la línea de Entrada que encontramos en la parte inferior de la ventana.



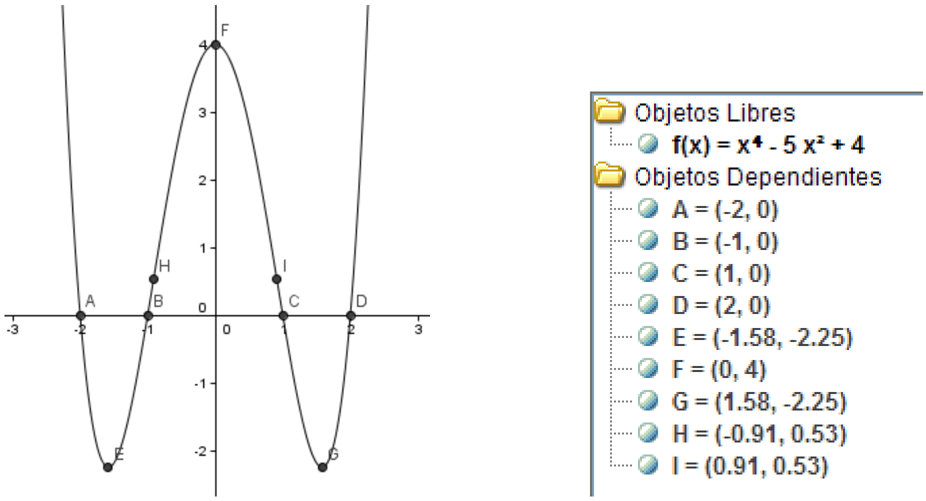


Aparecerá la representación de la función como aparece en la imagen siguiente, en la que previamente hemos activado la representación de los ejes de coordenadas a partir de las opciones disponibles en el menú *Vista*.

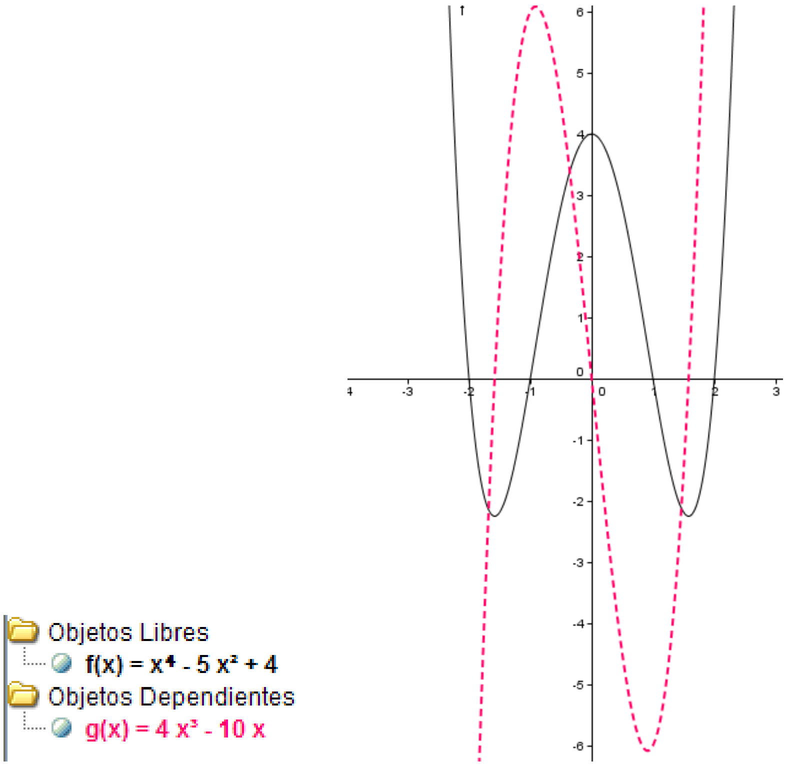
¿Qué podemos hacer a partir de la representación de una función?

Al pulsar sobre la pestaña Comando aparecerá la amplia lista de funciones disponibles, que en este caso, al tratarse de una función polinómica es aún mayor ya que podemos obtener las raíces, los extremos o los puntos de inflexión a partir de las instrucciones raíz[f(x)], extremo[f(x)] y puntoinflexión[f(x)].

Los puntos correspondientes aparecerán representados en la función y sus coordenadas las tendremos en la ventana algebraica.

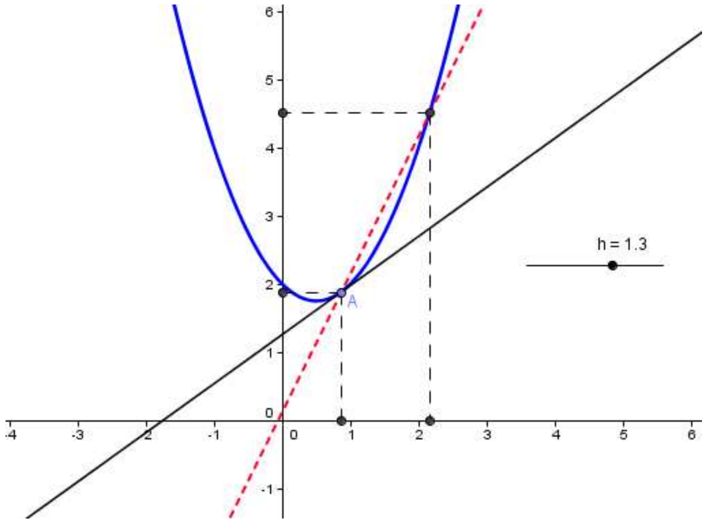


Además, para cualquier función podemos obtener su función derivada utilizando el comando *Derivada*, que devuelve la expresión a la vez que la representa.



De manera similar se podrá obtener la integral utilizando la sintaxis integral[f(x)] o el valor de una integral definida cuando además se incluyan los extremos de integración integral[f(x],a, b].

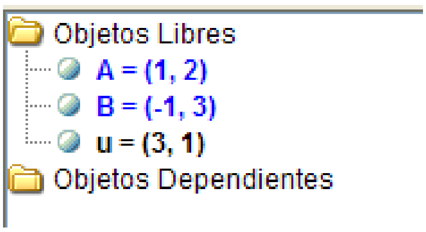
Pensemos lo fácil que resultaría realizar una construcción para facilitar la interpretación del concepto de derivada en un punto.

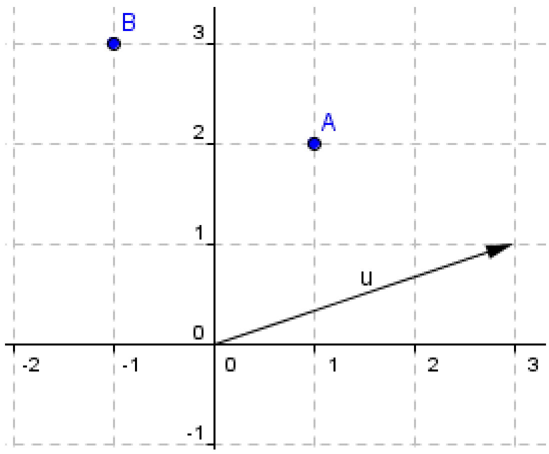


Como ya hemos indicado al dibujar cualquier punto aparecen de manera automática sus coordenadas en la ventana algebraica, pero si deseamos realizar el proceso contrario, dibujar un punto a partir de sus coordenadas, bastará con introducirlas a partir de la línea de entrada, escribiendo (a,b) o A=(a,b), siendo a y b las coordenadas y A el nombre que desea asignar al punto.

Es recomendable acceder al menú *Vista* para activar la cuadrícula.

Si escribimos u=(a,b) estaremos creando el vector u cuyas coordenadas serán (a,b).



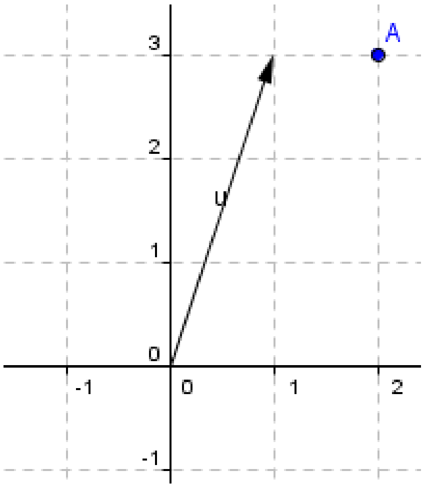


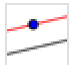
Con opciones como las anteriores es fácil deducir que GeoGebra será de gran ayuda para resolver problemas de geometría afín o euclídea como el que se propone a continuación.

Actividad 4.

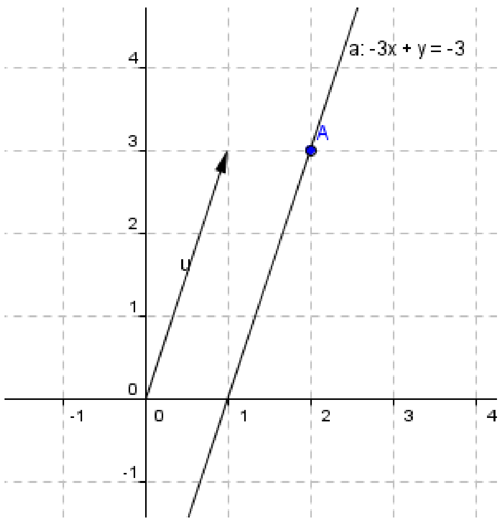
Halla la ecuación de la recta definida por el punto A (2, 3) y el vector $\vec{u}$ = (1, 3). Determina la ecuación de la recta paralela que pasa por el punto (-2, 1).

Comenzamos definiendo el punto A y el vector $\vec{u}$, introduciendo sus coordenadas a partir de la línea de entrada.

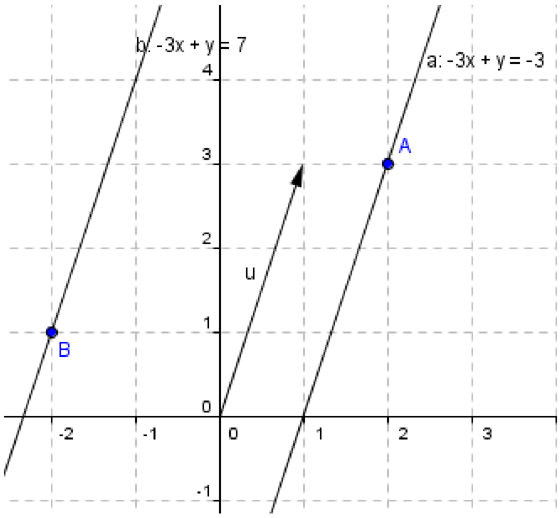


Para trazar la recta pedida podemos utilizar la herramienta Recta Paralela  para dibujar la recta paralela al vector $\vec{u}$ por el punto A o escribir en la línea de entrada la instrucción recta[A,u].

En cualquiera de los dos casos, aparecerá la representación de la recta y su ecuación en la ventana algebraica que también se mostrará en la ventana gráfica cuando se indique en las propiedades del objeto (recordamos que hay que pulsar el botón derecho sobre el objeto del que se desea cambiar las propiedades).



Para resolver el segundo apartado, bastará con introducir el nuevo punto y repetir el proceso anterior.



Como actividad para que realicen proponemos:

En el triángulo de vértices A(3, 2), B(-1, -2) y C(-4,4). Calcular:

a. Las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados.
b. Las ecuaciones de las alturas.
c. La longitud de la altura trazada desde el vértice A.
d. Las coordenadas del ortocentro.

Esperamos que estas sencillas actividades permitan hacerse una primera idea de GeoGebra a quien no lo conozca y le animen a trabajar con él, para ir descubriendo el enorme potencial que ofrece, que como indiqué al principio está en continua evolución y desarrollo con nuevas versiones que ampliarán las posibilidades de cálculo simbólico o de representación en 3D.

En este trabajo no hemos entrado en descripción de herramientas y tareas ya que en la web de GeoGebra se puede descargar un manual, sin contar la gran cantidad de ejemplos que es posible encontrar en la red (en la bibliografía os propongo algunas) que seguro ayudarán a incorporarlo como un recurso más, de enorme potencia y sobre todo fácil de utilizar en el aula por la sencillez que conlleva como otra de sus principales características.

Bibliografía

Proyecto Gauss. Instituto Tecnologías Educactivas del Ministerio de Educación de España. http://recursostic.educacion.es/gauss/web/
Webs interactivas de matemáticas elaboradas por Manuel Sada. http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/index.htm
Geometría dinámica y matemáticas. http://geometriadinamica.es/
Presentaciones con GeoGebra de Rafael Losada. http://www.iespravia.com/rafa/rafa_geogebra.htm
Geometría dinámica en matemáticas. Página de José Antonio Mora. http://jmora7.com/
Actividades con GeoGebra. Web de Ignacio Larrosa. http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 211-222
ISSN: 1815-0640

La enseñanza de las matemáticas a través de la implementación del juego del rol y de aventura

Fabio Nelson Zapata Grajales; Natalia Andrea Cano Velásquez

Resumen

Este artículo pretende dar a conocer la estrategia didáctica de juegos de rol como una alternativa para que los docentes enseñen las matemáticas de forma divertida y amena; ya que este tipo de juegos presentan una relación directa con la realidad de los estudiantes, que generalmente, utilizan su tiempo de ocio en video juegos de rol, presenciando películas épicas o bien, leyendo libros de aventuras como *Harry Potter* o *El señor de los anillos*. Evidenciar las matemáticas en algo que les resulta tan cercano deberá influir de alguna manera en su motivación y en su entendimiento.

Abstract

This article seeks to highlight the teaching strategy role-playing games as an alternative for teachers to teach mathematics in a fun and enjoyable, because these games have a direct relationship with the reality of the students who generally use their leisure time in video RPGs, watching epic movies or read books of adventure as Harry Potter or The Lord of the Rings Evidence of mathematics in something that is so close will somehow influence their motivation and their understanding.

Resumo

Este artigo pretende dar a conhecer a estratégia didáctica dos jogos de papel como uma alternativa para que os docentes ensinem as matemáticas de uma forma divertida e amena; devido a que este tipo de jogos apresentam uma relação directa com a realidade dos estudantes, filmes épicas ou bem, lendo livros de aventuras como Harry Potter ou O senhor dos anéis Evidenciar as matemáticas em algo que lhes resulta tão próximo deverá influir de alguma maneira em sua motivação e em seu entendimento

Introducción

Según Darlington (1998) los juegos de rol son creados por David Arneson y Ernest Gary Gigax (1971), quienes crearon Dangeons and Dragons (Calabozos y Dragones), primer juego de rol del mundo en ser comercializado. Desde su comercialización surge la afición en todo el mundo por este juego y otros que vendrían más adelante como: túneles y trolls (1975), el imperio del trono pétalo (1975) y caballería y hechicería (1976) entre otros.

En la actualidad son muchos los jóvenes que interactúan con medios tecnológicos que permiten asumir un rol o un personaje a partir del desarrollo de una aventura. Esto motiva a muchos jóvenes y cada vez, hay más adeptos.

Este apartado se centra en lo que los juegos de rol y de aventura pueden significar como estrategia didáctica.

Un juego de rol es una aventura virtual o imaginaria, donde él o los participantes asumen un personaje, lo caracterizan y personifican. De otro lado, un juego de aventura no necesariamente los participantes asumen un rol, sino que trabajan en equipo para cumplir con una misión que se les propone. En este sentido se convierten en la excusa perfecta para movilizar el aprendizaje de los estudiantes; quienes se motivan a participar de su propia aventura.

Finalmente, se ha considerado el juego de rol, debido al impacto que éste ha generado en niños, niñas y jóvenes en las últimas décadas. Esta es una estrategia divertida donde los estudiantes aprenden a partir de sus vivencias y experiencias. Para tal efecto, los participantes imaginan un escenario (o disponen de un tablero y muñecos, piezas o cartas) en el que sus personajes interactúan o bien, realizan representaciones dramáticas conforme se desarrolla la aventura.

1. Características principales del juego de rol y de aventura de tipo narrativo.

Para hacer un juego de rol o de aventura de tipo narrativo, se propone considerar las siguientes características, que se obtuvieron a partir de los aportes de Pilonieta (2001, 2003):

- **Intención:** Pensar en los conceptos, procedimientos y contextos que se quieren desarrollar desde el saber especifico. Esto permitirá pensar en una situación o narración acorde con la historia del concepto o con los contextos donde se aplica el concepto. Lo importante es que los participantes**,** piensen, decidan, aprendan y lo más importante se diviertan.
- **Creación de la historia:** Se comienza con una historia básica para toda la aventura provista de contexto, situación y verosimilitud. Puede ser fantástica o real de acuerdo a los intereses que tenga el maestro. Se sugiere sin final para que los participantes la terminen.
- **Objetivo:** La aventura o juego de rol, debe tener un propósito para el jugador que va a asumir e intervenir en la historia. Se debe ser claro con lo que va a hacer el jugador o los jugadores, que misión tienen dentro del juego: Proteger, crear, rescatar, salvar, buscar pistas, solucionar acertijos, asumir retos, resolver situaciones.
- **Desarrollo de la historia:** Se incluyen los momentos y los diferentes retos que deberá hacer el jugador o los jugadores; se sugiere que incluya un dispositivo que active la intervención de los jugadores como dados o ruletas**.** Estos momentos deben cumplir con dos aspectos: Asegurar que los niveles de complejidad sean jerarquizados, e incluir sorpresa o desestabilización en los participantes.
- **Creación de equipos de trabajo:** Es importante que los estudiantes trabajen en equipo durante el desarrollo del juego, para que compartan sus hallazgos y pensamientos. Tener en cuenta que en un juego de rol no se gana ni se pierde; sólo se juega y se divierte, se socializa y aprende.
- **Creación de personajes:** Cada jugador es responsable de escoger o crear su propio personaje y representarlo. Para ello el docente debe dar opciones de personajes y describir sus cualidades: Fuerza, inteligencia, control de tiempo, creativo, líder

- **Contextualizar el personaje:** Según la historia cada jugador deberá crear su propia curriculum vitae acerca de su personaje: familiares, amigos, oficio, virtudes, logros. Esto con el objetivo de que haya un involucramiento total, fundamento principal de los juegos de rol
- **Ambientes de Aprendizaje:** disponer de todos los recursos para hacer del aula de clase un lugar más propicio para el desarrollo de la aventura o, adecuar espacios dentro o fuera del aula que tengan que ver con la historia.

2. Aportes pedagógicos que brinda la implementación de los juegos de rol como estrategia de enseñanza.

Por último, se sugieren los aportes al campo de la educación que ofrecen los juegos de rol y de aventura, desde los planteamientos de Pilonieta (2001, 2003) y Elwyn y Cols (2001, citados en Exley, Dennik y Manzano 2007, p.76):

2.1. Docente:

- Proporciona una estrategia rica, llena de posibilidades para enseñar o afianzar un concepto.
- Permite la interdisciplinariedad de los saberes.
- Presenta alternativas muy atractivas e ilustrativas que van desde complejidades manejables hasta complejidades con mayores y crecientes niveles de relación de variables.
- Seguir el protocolo de mediación.
- "*Cerrar la brecha entre teoría y práctica y consolidar el desarrollo de destrezas*."

2.2. Estudiante:

- Motiva intrínsecamente al estudiante, brindándole diversión.
- Manejo apropiado de la información, toma de decisiones complejas y dominio de altísimos niveles de lectura.
- Aprender jugando inteligentemente.
- Desarrollo de la creatividad y la imaginación.
- Fomenta el trabajo en equipo.

"*Comprender cómo se sienten y reaccionan otros en distintas situaciones. Recibir retroalimentación inmediata y diversificada acerca de su actuación*."

3. Procedimiento para mediar en un juego de rol: Protocolo de Mediación

El protocolo de mediación es una herramienta metodológica para el docente mediar y el estudiante resolver cualquier problema o situación que se le presente, invita a la autoreflexión y al dominio de la impulsividad. Es una estrategia de resolución de problemas que invita al docente a preguntar con una intención. Genera la creación de estrategias por parte del alumno y el establecimiento de principios.

A continuación se describen las preguntas del protocolo de mediación, desde los planteamientos de Tébar (2003), Puentes (2006) y Polanía y Sánchez (2007) resumidos en la siguiente tabla:

Protocolo de Mediación	
Formas de interrogación (Labor docente)	**Ámbitos de interrogación (Labor del estudiante)**
¿Qué ve? (identificación) Como preguntas complementarias se podrían hacer: ¿Qué has encontrado?, ¿En qué lugar de la pagina?	Es importante que el estudiante tenga una percepción clara definiendo tres niveles de observación: **1.** Lo que ve a simple vista, **2.** Lo que no ve a simple vista y **3.** La relación de las partes con el todo: ¿Qué es esto?
¿Qué hay de nuevo? (comparación) Como preguntas complementarias se podrían hacer: ¿Qué haces cuando comparas?, ¿ En qué situaciones de la vida comparas?, ¿Puedes darme un ejemplo?	El estudiante deberá establecer una contrastación de lo que sabe con lo nuevo que se le presenta, estableciendo semejanzas y diferencias.
¿Qué hay que hacer? (Discriminar) Como pregunta complementaria se podrían hacer: ¿Qué se pide?	El estudiante debe identificar, la labor a desarrollar, qué se pide, identificar las variables y los contextos de la situación.
¿Cómo lo hago?(análisis) Como preguntas complementarias se podrían hacer: ¿De cuántas formas podemos iniciar la resolución de un problema?, ¿Por qué has comenzado por este dato o elemento?, ¿Qué pasaría si empezaras por otro sitio?	El estudiante deberá establecer una estrategia de solución, pasos que lo lleven a resolver el problema.
¿Qué aprendí?(metacognición) Como preguntas complementarias se podrían hacer: ¿Cómo lo hice?, ¿Qué idea sintetiza mejor de cuánto hemos estudiado?, ¿Cuáles son los elementos esenciales de este tema?, ¿Qué estrategia has seguido?	El estudiante evalúa la estrategia utilizada, si funcionó si podría mejorarla. Además deberá establecer principios y generalizaciones.
Nota: A medida que el estudiante se va familiarizando con la metodología del protocolo de mediación, deberá aprenderselo y utilizarlo por sí mismo, cada vez más va siendo tarea propia del estudiante.	

Tabla 1: Protocolo de mediación.

4. El laberinto del rubí: un ejemplo de juego de rol para el reconocimiento de variables y la enseñanza de sistemas e ecuaciones 2x2.

Un famoso extranjero; ladrón de joyas llamado Shirleck Hobbes en 1997 robó en el Museo de Piedras, un rubí que cuesta diez millones de dólares. Tras su detención confesó que el rubí no podía ser encontrado por nadie y que todos los esfuerzos que se hicieran serían en vano; por lo que nunca se supo donde lo escondió. Antes de morir dejó unas cajas con algunas cartas, que parecerían ser las pistas para encontrar el Rubí.

Se cree que el secreto para encontrar la joya está en un castillo Romano, ya que las cajas se encontraron abandonadas en una gran ese "S" que se encuentra a las afueras de tan impactante edificación.

Muchos son los caza recompensas, policías, matemáticos y amantes del acertijo, que han intentado hallar la joya siguiendo las pistas que dejó Shirleck; pero su astucia ha logrado frustrar los sueños de todos lo que se han atrevido. Se dice que el ladrón es un genio y que si alguien logra hallar la joya, también se catalogará como tal.

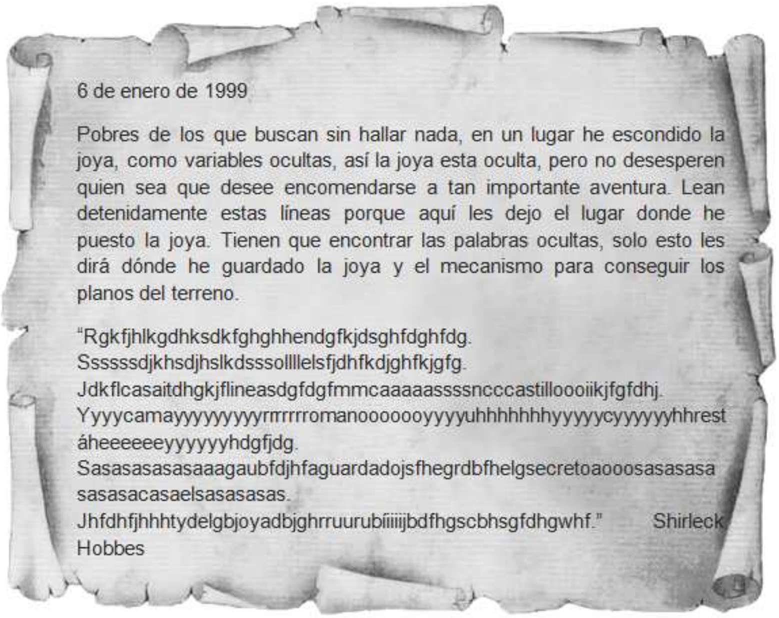
En el año 2009, el millonario Minos Onúaf, persona quién donó al museo la famosa joya, publicó las cartas y contenido de los objetos, dejadas por el ladrón, para que cualquier persona de cualquier región del mundo, lograra descifrar las pistas y recuperar el rubí; quien lo hiciera recibiría del millonario, como recompensa, a su ingenio, un certificado de su gran talento e inteligencia y el compromiso de hacer con el dinero lo que él o las personas que logren hallar la joya destinen hacer con él.

A continuación se presentan las pistas del laberinto de Rubí nombre que le dio el ladrón a tan majestuosa labor de búsqueda de la joya. En esta historia ustedes serán investigadores.

4.1. Pistas dejadas por el ladrón:

Hola mi Nombre es Minos, lean detenidamente queridos aventureros estas pistas, ya que la información y el orden en el que se encontraron parece ser incoherente, recuerden que el ladrón es muy astuto y pudo dejarlas así para despistarlos, "las variables son también ocultas y pueden despistar, ese es mi consejo."

Pista…:



6 de enero de 1999

Pobres de los que buscan sin hallar nada, en un lugar he escondido la joya, como variables ocultas, así la joya esta oculta, pero no desesperen quien sea que desee encomendarse a tan importante aventura. Lean detenidamente estas líneas porque aquí les dejo el lugar donde he puesto la joya. Tienen que encontrar las palabras ocultas, solo esto les dirá dónde he guardado la joya y el mecanismo para conseguir los planos del terreno.

"Rgkfjhlkgdhksdkfghghhendgfkjdsghfdghfdg.
Ssssssdjkhsdjhslkdsssollllelsfjdhfkdjghfkjgfg.
Jdkflcasaitdhgkjflineasdgfdgfmmcaaaaassssncccastilloooiikjfgfdhj.
Yyyycamayyyyyyyyyrrrrrrromanoooooyyyyuhhhhhhhyyyyycyyyyyhhrest áheeeeeeyyyyyyhdgfjdg.
Sasasasasasaaagaubfdjhfaguardadojsfhegrdbfhelgsecretoaooosasasasa sasasacasaelsasasasas.
Jhfdhfjhhhtydelgbjoyadbjghrruurubiiiiijbdfhgscbhsgfdhgwhf." Shirleck Hobbes

¿Dónde Shirleck ha guardado el secreto para encontrar la joya?

Pista…:

Si están en este punto necesitarán toda la concentración pues el destino es azaroso y el recorrido es extenso.
En el piso dos debes ser astuto: Si en este alfabeto, consiguiera se escribe como sigue: **χονσιγυιερα**. Entonces la siguiente clave se escribe así:
Χοντανδο Δε δερεχηα α ιζθυιερδα βυσχα λα πυεστα νυμερο τρεχε.

¿Cuál es el mensaje dejado por el ladrón?

Pista:

Noviembre 24 de 2008

Este acertijo, oculta una palabra relacionada con un objeto, que te será de mucha ayuda para comenzar con tu búsqueda y poder resolver uno de los acertijos que dejé puesto para "aquellos intrépidos que con la tecnología ya no se pierden". Para encontrarla descubrí qué sílaba falta para formar cada grupo de tres palabras y una sola palabra. Esas mismas sílabas, leídas en orden, te darán la palabra en cuestión.

1.
__LULA
__LESTE
__ LDA

2.
__GAR
__EGO
__ Z

3.
__ GO

¿Cuál es ese objeto?

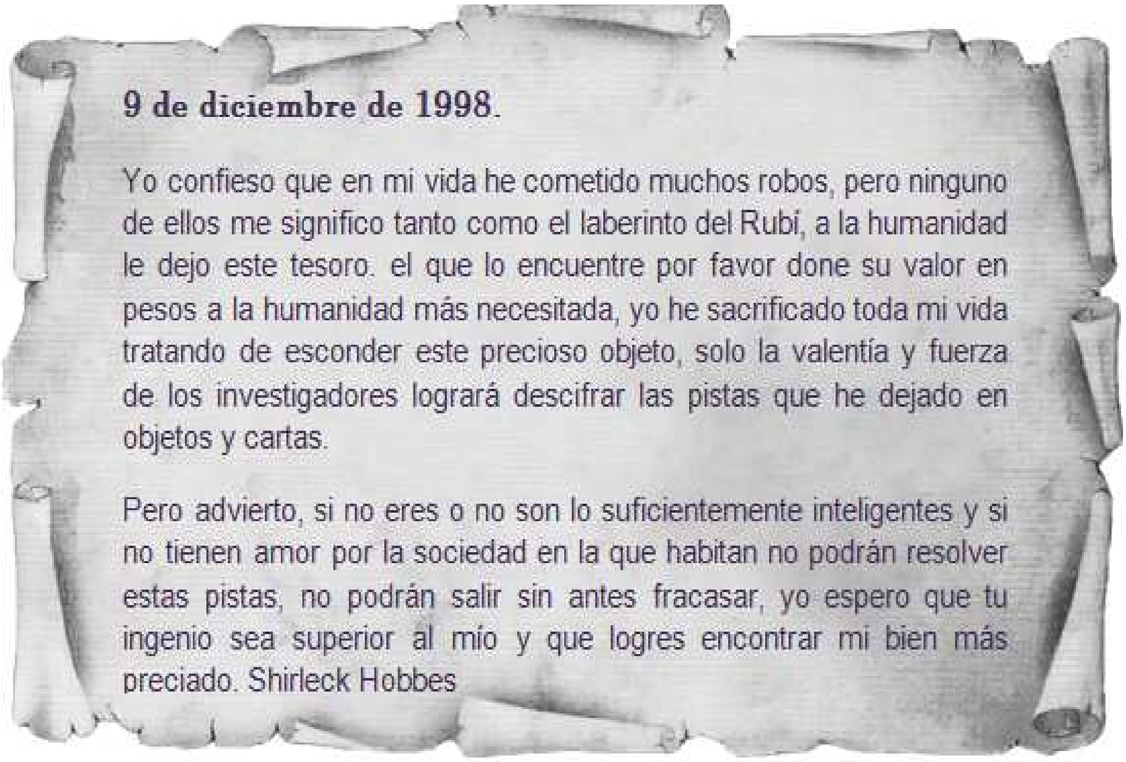
Pista…:

Para los pisos 4, 5 y 6 ya no tienes que pensar recuerden seguir por la misma posición de la puerta por donde entraste del piso tres. El número secreto para abrir la caja fuerte donde está el secreto que te guiará al Rubí tiene 4 dígitos, y está formado por dos números de dos cifras, ordenados de mayor a menor.

Éstos son los dos únicos números de dos cifras que son iguales a la suma del cuadrado de la cifra de las decenas y el cubo de la cifra de las unidades. Shirleck Hobbes

¿Cuál es el número secreto de la caja fuerte?

Pista…:



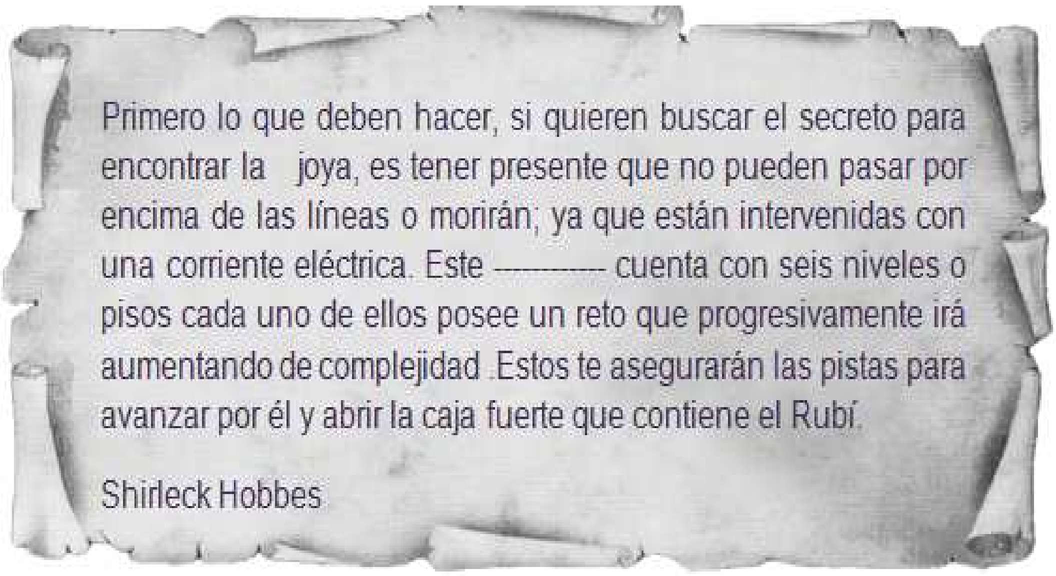
9 de diciembre de 1998.

Yo confieso que en mi vida he cometido muchos robos, pero ninguno de ellos me significo tanto como el laberinto del Rubí, a la humanidad le dejo este tesoro. el que lo encuentre por favor done su valor en pesos a la humanidad más necesitada, yo he sacrificado toda mi vida tratando de esconder este precioso objeto, solo la valentía y fuerza de los investigadores logrará descifrar las pistas que he dejado en objetos y cartas.

Pero advierto, si no eres o no son lo suficientemente inteligentes y si no tienen amor por la sociedad en la que habitan no podrán resolver estas pistas; no podrán salir sin antes fracasar, yo espero que tu ingenio sea superior al mío y que logres encontrar mi bien más preciado. Shirleck Hobbes

¿Qué misión encomendó Shirleck a los valientes que se atrevan a buscar la joya?

Pista…:



Primero lo que deben hacer, si quieren buscar el secreto para encontrar la joya, es tener presente que no pueden pasar por encima de las líneas o morirán; ya que están intervenidas con una corriente eléctrica. Este ---------- cuenta con seis niveles o pisos cada uno de ellos posee un reto que progresivamente irá aumentando de complejidad .Estos te asegurarán las pistas para avanzar por él y abrir la caja fuerte que contiene el Rubí.

Shirleck Hobbes

¿Cuál es la palabra que falta?

Pista…:

¿Cuál es el número de la puerta por donde debes continuar el recorrido?

El Rubí tiene un código de barras que permite su identificación en el mercado cambiario.
Formando parte de este código aparece un número de 14 dígitos que corresponde a ese producto.
Este número está formado por varios bloques de dígitos que representan la zona geográfica, la empresa y el producto concreto.
El último dígito es lo que se denomina un **«dígito de control»**, ya que sirve para detectar algunos de los errores que pueden producirse durante el manejo de dicho número como, por ejemplo, equivocarse al introducir uno de los dígitos o intercambiar dos dígitos consecutivos.
Para determinar el dígito de control les voy a facilitar un poco las cosas (este número les dirá el numero de la puerta del piso tres “3” por donde dirigirse para avanzar contando de derecha a izquierda)
Deberán entonces calcular la suma de todas las cifras que, de izquierda a derecha, ocupan un lugar par y multiplicar el resultado obtenido por 3.
Luego deberán sumar todas las cifras que ocupan un lugar impar.
El dígito de control es el número que hay que sumar al total, para que el resultado final sea 100.

1254169870929--

En la imagen tenemos el código de barras del Rubí.
Este código te permitirá abrir la caja donde está guardado el secreto dentro de la caja fuerte. **Shirleck Hobbes.**

Pista…:

Diciembre 25 de 2008.

Qué extraño es el mundo, con tan intrincados caminos por recorrer no saben lo que les espera y donde se han metido.

Para entrar al *piso uno* en la gran ese "S" encontrarás un ------------ con un único número, pero más allá de ese número se encuentra un secreto. Debes hallar la palabra que se esconde debajo del número.

52 78382 7272 368727 25 7476 866 26682636 33 497843732 2 3373242 37 52 686376 24626. Se sabe que el número dos es la letra a. Shirleck Hobbes

¿Cuál es el mensaje dejado por el ladrón?

Este castillo sólo se entregará a aquellos estudiantes que logren saber donde ésta la piedra preciosa o solucionar la situación que está en el documento número trs o de fecha: 6 de enero de 1999.

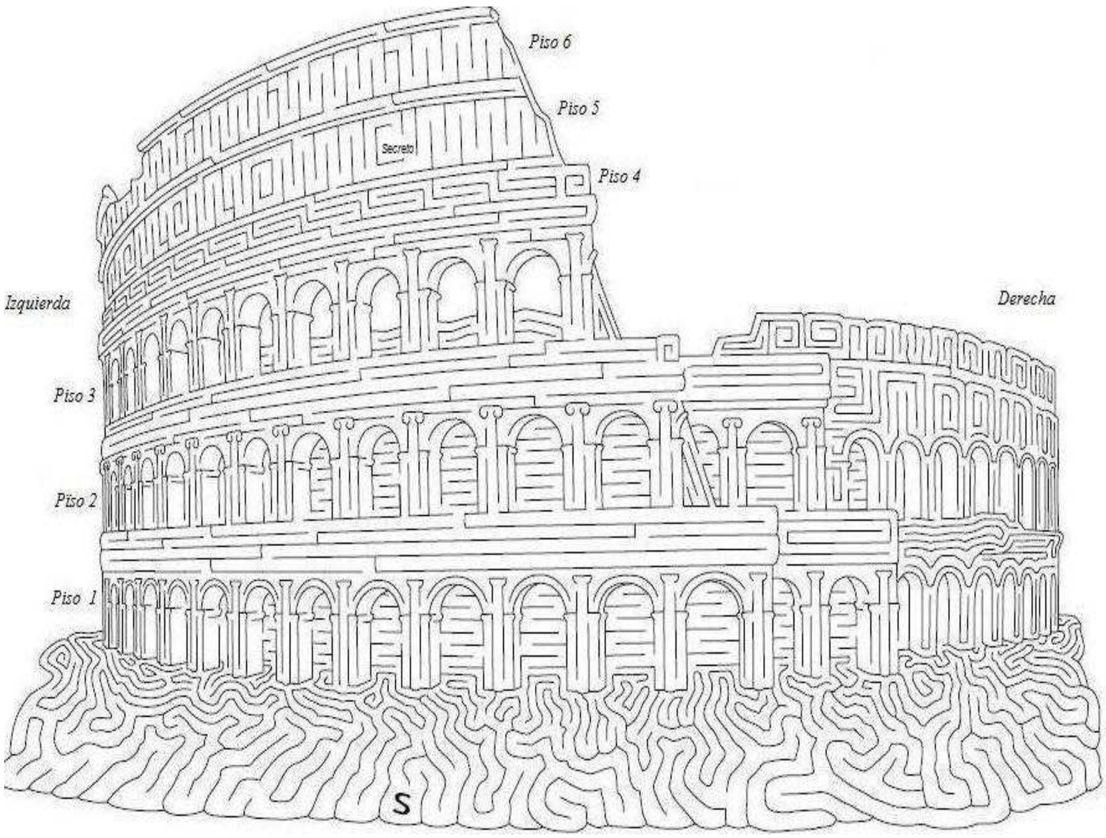


Figura 1: Castillo para el juego de rol.

Esta hoja solamente se les entregará a aquellos estudiantes valientes que supieron llegar hasta la última parte, solucionando cada prueba.

4.2. El secreto del misterio de Rubí:

Hola queridos investigadores solo me queda por decirles que he disfrutado poniéndoles tantas trabas. Si ya han llegado hasta aquí es porque tienen las habilidades mentales suficientes para hacer el bien con el dinero que el rico Minos destinará, espero lo hagan bien.

Les cuento que descubrir este secreto no es tan fácil deben pensar con mucha atención que se ha hecho durante toda la aventura, para utilizar todas estas estrategias aquí, utilicen mi computador allí deje un programa llamado **Geogebra**, para que puedan resolver el acertijo de una forma más satisfactoria.

Cada letra representa un número que al ser sustituido en el mensaje por cada una de estos por las letras, les dará la solución para encontrar la joya: soluciona las ecuaciones del misterio perdido del rubí:

$a - l = 1$ $2a + l = 2$	$4j - o = 10$ $2j + o = 2$	$i + 2c = 3$ $i + c = -1$	$d + s = 3$ $d - s = -5$	$e + y = 10$ $e - y = -4$	$-2u + 5t = 4$ $u - 2t = 6$
$-2p + 5r = 6$ $p - 2r = 1$	$n - 3h = -8$ $n - 2h = 1$	$z - 3q = -4$ $z - 2q = 1$			

Tabla 2: Sistemas de ecuaciones 2x2.

4.3. Mensaje para descifrar:

0	1

2	-2	7	1

7/2	3

3	19	4	13	3	19	6	8	1

3	19

0	1

17	13	3	8	6	1

7/2	-5	9	6	3

-1/2	3	0

17	-5	7/2	-2

-1/2	-2	7/2.

7/2	-5

7/2	3

2	13	3	19	6	1

-1/2	3

-1/2	3	8	3	4	9	1

1

-5	11	5	13	-5	3	-1/2	1.

Bibliografía

Darlington, S. (1998) Historia del juego de rol. En Escuelas Populares del Deporte (INDER) (Ed.), *Aprender jugando: una propuesta para construir ciudad*, 136-145. Antioquia: autor.

Exley, K. Dennik, R. Manzano, P. (2007). *Enseñanza en pequeños grupos en educación superior: Tutorías, seminarios y otros agrupamientos*. Narcea, Madrid.

Pilonieta, G. (2001). *Procesos de formación con juegos de rol: Un enfoque desde la modificabilidad estructural cognitiva*. [manuscrito no publicado]. Equipo Cisne de investigación, Bogotá.

Pilonieta, G. (2003). *Aventuras e inteligencia: Desarrollo de la inteligencia en aventura*. Versión 3. Knol. Extraído el 15 de Junio, 2009 desde:http://knol.google.com/k/german-pilonieta/aventuras-e-inteligencia/3kfv202auj9nl/7.

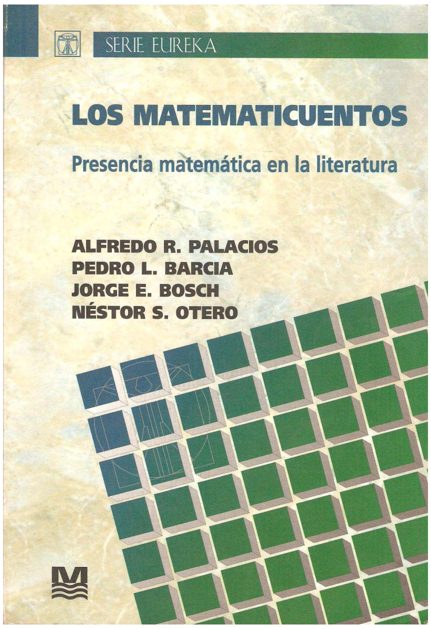
Polanía Sagra, C; Sánchez Zuleta C. (2007). *Un acercamiento al pensamiento geométrico.* Universidad de Medellín, Medellín.

Puentes Osma, Y. (2006). *Organizaciones escolares inteligentes: gestión de entornos educativos de calidad*. Magisterio, Bogotá.
Tébar Belmonte, L. (2003). *El perfil del profesor mediador.* Santillana, Madrid.

Fabio Nelson Zapata Grajales:Especialista en didáctica de las ciencias: Matemáticas y física de la Universidad Pontificia Bolivariana (Medellín –Colombia) y licenciado en Matemáticas de la Universidad De Antioquia (Medellín –Colombia). Docente de la Institución Educativa Pedregal (Medellín – Colombia). Ponente en el IX Encuentro Nacional de Matemáticas Educativa. Universidad Popular del César. Valledupar - Colombia 2008. Autor de artículos en medios locales entre los cuales se destaca: Matemáticas de lo cotidiano: En Encuentro académico, 16, 1-12. Universidad de Antioquía, Medellín y Enseñanza de la magnitud superficie. Publicado en texto: Modulo 3: Pensamiento métrico y sistemas de medida. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia, Medellín. yoytatela@yahoo.es

Natalia Andrea Cano Velásquez. Especialista en didáctica de las ciencias: Matemáticas y física de la Universidad Pontificia Bolivariana (Medellín –Colombia) y licenciado en Matemáticas de la Universidad De Antioquia (Medellín –Colombia). Docente de la Institución Educativa Santo Ángel (Medellín – Colombia). Ponente en el IX Encuentro Nacional de Matemáticas Educativa. Universidad Popular del César. Valledupar - Colombia 2008. Autora de artículos en medios locales entre los cuales se destaca: Matemáticas de lo cotidiano: En Encuentro académico, 16, 1-12. Universidad de Antioquía, Medellín. natatelina@yahoo.es

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 223-226
ISSN: 1815-0640



LOS MATEMATICUENTOS: Presencia matemática en la literatura

Alfredo Palacios, Pedro Barcia,
Jorge Bosch y Néstor Otero.

Serie Eureka.
Editorial Magisterio Río de La Plata. 1995.
ISBN 950-550-182

Matematicuentos, un texto exquisito para los que gustan de la buena lectura, del uso del ingenio, de un original resultado matemático. Todo junto, por el mismo precio: el tiempo de ocio invertido en la lectura de un buen libro. Para todos aquellos que, como yo, encuentran placer y se recrean en la lectura, pero tal vez eligieron como profesión algo aparentemente contrapuesto, como es la enseñanza de la matemática, recomiendo la lectura de este libro.

Una vez más pienso en esta cadencia tan sui generis de la matemática que oscila entre el arte y la ciencia con curvas suaves donde existe la derivada en cada punto, y la recta tangente se convierte en un tobogán hacia un espacio para disfrutar pensando o pensar disfrutando.

¿Quién no se ha divertido alguna vez resolviendo juegos de ingenio, o apostando con los amigos sobre quién es el asesino en una buena película policial? Ese mismo placer lo siento cada vez que me enfrento a un problema complicado, pero cuando después de varias batallas, la solución fluye como si saliera de la lámpara de Aladino, con esa magia que tienen la lógica y el álgebra, como herramientas indiscutibles para el éxito. Por eso, quiero transmitirles las palabras de Morris Kline, porque coincido plenamente con ellas: "*Una demostración realizada con elegancia es un poema en todos los sentidos, salvo por la forma en que está escrito*".

Los puntos de encuentro entre la literatura y la matemática son tantos como a^k *con* $a>1$ *y* $k>1$(grande), por eso los invito a leer este libro. Básicamente, la estructura del mismo consiste en analizar textos literarios, en cuyas tramas aparecen conceptos matemáticos, luego hacer el análisis desde lo ideológico y simbólico, desde lo literario y artístico también.

Es indudable la calidad y riqueza de los textos elegidos, con lo cual se puede disfrutar tanto de la lectura de los mismos, como del análisis posterior que realizan los autores, con mucha minuciosidad, con un rico conocimiento de la historia del pensamiento y de la literatura, tanto como de la historia del pensamiento matemático y que ayuda al lector a entender la idea que cada palabra encierra.

También es interesante destacar, que no hay necesidad de leer los capítulos en el orden en el que aparecen, sino que el lector puede elegir el tema y el escritor con quien tiene mayor afinidad, ya que ellos son “linealmente independientes”, aunque confluyen todos a un punto de interés común. De cualquier manera, si aceptan mi consejo, una buena manera de empezar es por “La carta robada”, (Cap. 3) por lo atractivo de la historia, que hará que los que gustamos de la matemática nos sintamos con ganas de ayudar al detective Dupín en su investigación, sobre todo cuando plantea el siguiente silogismo:

a) El ministro es matemático y poeta.

b) Todos los poetas son locos.

c) El ministro es loco.

Este razonamiento lleva a Dupín a confiar ampliamente en el ingenio del ministro para esconder la carta, y nos da (a los matemáticos) la estocada final al decir: “[...]Como poeta y matemático es capaz de razonar bien, en tanto que como mero matemático hubiera sido incapaz de hacerlo y habría quedado a merced del prefecto”.

Más interesante aún, resulta después de leer el cuento, la lectura del excelente análisis realizado por Pedro Luis Barcia, que nos hace ver que el detective en cuestión “es heredero de la tradición racionalista de Descartes”, entre otras cosas, y nuevamente disfruté de esta segunda parte, la de la reflexión sobre el texto literario, logrando “[...]tender los puentes y jugar a visitar las distintas regiones del saber, aparentemente inconexas”, que es a lo que nos invita Alfredo Palacios en el prólogo.

Un breve comentario de cada capítulo, remarcada la idea central, ayudará a constituir una idea generalizada sobre los Matematicuentos:

Capítulo I: La teoría de conjuntos desde el punto de vista de Borges.

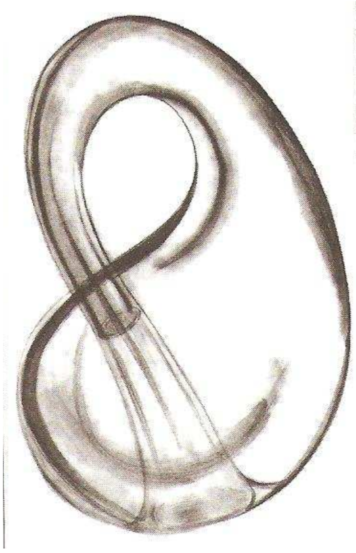
“Cantor siguió el camino más difícil: el de la verdadera creación. [...]En la obra de Borges, el proceso cantoniano aparece en su totalidad, tanto desde el punto de vista del esfuerzo personal como desde el punto de vista de la clara conceptualización del infinito actual”. Alfredo Palacios (pag.28) sugiere leer a Borges, de quien cada uno de ustedes seguramente ya tiene una opinión formada. A veces leemos porque nos produce placer, sin preguntarnos por qué. Lo mismo que al escuchar música o mirar un cuadro, me gusta o no me gusta y no tengo necesidad de explicar razones. No obstante, insisto, en que leer a Borges luego de la lectura de este análisis tan certero y claro, incrementa el disfrute, ya que es como ponerse en la piel del autor, quién se atreve a tratar en su obra conceptos matemáticos y lo hace con la precisión del que "la tiene clara" (es Borges, ¿no?). Como dice Palacios: "[...]tomada primero en sí la idea matemática pura, se jugará luego con la posibilidad de transferirla al mundo de la ficción estética".

Las diversificaciones del pensamiento son parte de la naturaleza del hombre, que nunca sigue una travesía lineal, muy positivo para nuestro trabajo con la matemática y la posibilidad de discurrir y formar las exquisitas redes que engloban el saber de esta querida ciencia. Posiblemente los que gustamos de la matemática, sintamos algo así como que estos textos recomendados nos contienen en nuestros intereses, por eso el título del artículo.

Capítulo 2: La botella de Klein y otros conceptos topológicos

¿Alguna vez se imaginaron dando un paseo por la Cinta de Möbius, indefinidamente?, sería una caminata de recorrido infinito, de nunca acabar. Menos aún navegando en un mar que tiene la forma de la botella de Klein. Enrique Anderson Imbert sí y lo narra en un maravilloso cuento, dónde los conceptos topológicos se tratan con total fidelidad. Luego Jorge Bosch hace una descripción sintética de los conceptos matemáticos utilizados, y cómo él lo dice: "[...]la cuestión es establecer qué tienen que ver estos objetos matemáticos con el relato de Anderson Imbert y con su propia manera de narrar" (pág.67).

Les aseguro que es como haber penetrado en un espacio 4D, y no es ficción: "Se demuestra matemáticamente que, si se supone a la botella de Klein sumergida en un espacio de dimensión 4, ella se puede representar, sin necesidad de autopenetraciones". (Jorge Bosch).



Capítulo 3: La lógica como una estrategia para la investigación policial.

Ya se ha realizado un sucinto comentado al comienzo de este escrito.

Capítulo 4: La paradoja de Aquiles desde la literatura.

Este capítulo nos muestra como un problema matemático de más de dos milenios de antigüedad interesa a diversos autores de la literatura del siglo XX. Pedro Luis Barcia plantea una interesante paradoja, que lo justifica: La tortuga pasa a simbolizar la razón, que avanza a paso lento y dificultoso. Frente a esta forma de conocer que es la racional, el conocimiento por la belleza es instantáneo y directo, como si tuviera los pies de Aquiles.

Capítulo 5: Diofanto de Alejandría y la cardinalidad del número.

Los autores proponen un ensayo de José Edmundo Clemente sobre Diofanto, mientras se preguntan si existen los "matematiensayos". Yo digo que sí, y este es muy interesante y entretenido. Leerlo hará que paguemos la "[...] deuda con Diofanto, olvidado inventor del álgebra" ya que gracias a él: "A partir de la nueva simbología, las matemáticas avanzan derechas hacia el océano infinito de las ecuaciones y las posibilidades teóricas del cálculo" (pag. 138).

Recomendaciones adyacentes

En el capítulo 3 (pag.89) Pedro L. Barcia nos cuenta que Dupín engendró a Holmes, y Holmes a los futuros detectives de numerosas obras, sus hijos literarios, que nos deslumbran con su perspicacia e ingenio.

Como soy una asidua lectora de Conan Doyle y además tengo puesta la camiseta de la matemática, me permito recomendar la lectura del cuento "La aventura de los tres estudiantes" de Arthur Conan Doyle, donde Sherlock Holmes dedujo con un simple esquema geométrico, cuál de los tres estudiantes había robado el examen. Aquí es donde la matemática se humaniza y adquiere vida propia, para convertirse en artífice de soluciones de problemas de la realidad plena.

La creatividad también es un atributo de la matemática, además, mientras más se lee más se disfruta.

Raquel Cognigni.
Dpto. de Matemática.
Universidad Nacional del Comahue.
Argentina.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 227-228
ISSN: 1815-0640

M@temátic@s en l@ red

GeoGebra:

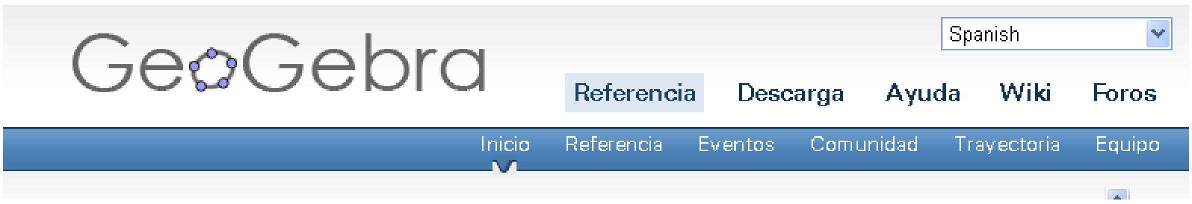
Software de matemática, libre, para enseñar y aprender

En esta reseña los invitamos a conocer el portal de un software libre de matemática que es muy útil en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta asignatura en los distintos niveles educativos, la dirección del mismo es: www.geogebra.org. Fue creado por Markus Hohenwarter y cuenta con una enorme cantidad de usuarios en todo el mundo.

En su portada se puede leer textualmente:

"GeoGebra es un software libre de matemática para educación en todos sus niveles disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en organización en tablas y planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. Ha recibido numerosas distinciones y ha sido galardonado en Europa y USA en organizaciones y foros de software educativo".

La siguiente es la barra principal de la página, de la misma daremos una breve y sucinta explicación:



Como servicio la página brinda un traductor propio, que incluye más de 30 idiomas, que se encuentran en la parte superior y a derecha de la pantalla.

En la línea azul se presenta:

- Inicio

  En esta sección se permite la descarga del software, se encuentra un manual completo y actualizado y dentro de ella existe una subsección que se denomina Primeros Pasos, en la hay un foro e incluye materiales introductorios y de aprendizaje. También, en la parte inferior derecha de la pantalla se puede ingresar el correo electrónico para acceder a toda la información actualizada de GeoGebra.

- **Referencia**

  Acá se encuentra una síntesis de posibilidades que ofrece el software, un video explicativo y además se ofrece información sobre premios y proyectos asociados.

- **Eventos**

  Mediante un mapa mundial y un calendario se puede averiguar qué talleres, jornadas y conferencias vinculados a GeoGebra se ofrecerán. También se ofrece una dirección para recibir cualquier novedad al respecto, la misma es support@geogebra.org

- **Comunidad**

  Existe un listado todos los institutos de GeoGebra, con las páginas web correspondientes, es interesante destacar que en los cinco continentes se cuenta con la presencia de los mismos. Esta información, al igual que en eventos, es acompañada por la ubicación de ellos en un mapa.

- **Trayectoria**

  En esta sección se presentan las novedades, las proyecciones a futuro mediante versiones de prueba y también se puede acceder a las versiones anteriores de GeoGebra.

- **Equipo**

  Se presenta el equipo humano que hay detrás de este importante software, por supuesto este grupo es encabezado por el propio creador de GeoGebra Markus Hohenwarter.

  Cuenta también con el GeoGebraWiki, que dice textualmente: "*es un fondo libre de materiales educativos para el software de matemáticas dinámico GeoGebra. Esto consiste en artículos con materiales GeoGebra para la educación de matemáticas en escuelas. ¡Cada uno puede contribuir y cargar materiales aquí! Todo el contenido de este fondo puede ser usado gratuitamente según una Licencia de Cámara de los Comunes Creativa*"

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 229-233
ISSN: 1815-0640

Información

La Fundación con viento de popa: entre frazadas, material escolar y primera escuela

La Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz* sigue viento en popa, a toda vela de solidaridad y esfuerzo para conseguir cosas para los demás–los hechos hablan por sí solos-, en un trabajo con pocos años de vida (la Fundación fue presentada el 24 de febrero de 2006) pero con resultados muy a flor de piel y considerando la Educación y la Cultura como puntos clave para lograr un mundo mejor para todos.

Así en el pasado mes de junio de 2010 se han enviado 1000 euros para la compra de frazadas para la Comunidad Indígena (descendiente de los diaguitas-calchaquíes) de El Mollar, en Tafí del Valle, provincia de San Miguel de Tucumán, Argentina. Hay que precisar que el lugar, a 103 Km. de la capital, se encuentra a 2137 metros de altitud. Este año el invierno en dicha zona ha sido muy intenso con temperaturas muy bajas por lo que las frazadas (mantas) de una y dos plazas fueron bien recibidas. La financiación corrió a cargo de la Fundación y un grupo de profesores de Tenerife.

También se aprovechó este envío de frazadas para hacer llegar material escolar a dos lugares: por un lado a la misma comunidad de El Mollar ya citada y a la “Escuela Nª 158 de la provincia Tierra del Fuego” que se encuentra ubicada en la localidad de Santa Felisa, Departamento del Río Hondo, en la provincia de Santiago del Estero que limita con la de Tucumán. Toda esta actividad fue coordinada por la profesora Lidia Beatriz Esper, de la Universidad Nacional en Tucumán.

Como dato curioso podemos resaltar los lazos que unen a varios miembros de la Fundación con Argentina. En concreto, el Presidente de la Fundación, Salvador Pérez Pérez y su esposa, Rosario Aurora Estévez González (los padres de Carlos Salvador y Beatriz), ambos profesores en Canarias durante décadas de amor y dedicación a la educación y Luis Balbuena, siendo entonces concejal del Ayuntamiento de San Cristóbal de La Laguna, participaron durante el curso 1991-92 en un proyecto a través de las Escuelas Asociadas a la Unesco y del Centro Internacional de Conservación del Patrimonio (CICOP). Se incluía un intercambio entre profesores y estudiantes de la República de Argentina (cerca de cien) y de Canarias (sesenta). Fue un inolvidable proyecto pues los argentinos visitaron las islas de Tenerife y Lanzarote durante 17 días y los canarios visitamos Buenos Aires, Córdoba y La Rioja siendo recibidos hasta por el Presidente Menen y el Premio Nobel de la Paz Pérez Esquivel. Un intercambio nunca olvidado en las dos orillas y la demostración clara de que el mundo de la Educación siempre une con la fuerza de la amistad y del reconocimiento mutuo.

Niños de primer grado, en la institución de Educación Intercultural Bilingüe de la comunidad quechua de Huilluq (Urubamba, Cusco), dispuestos a empezar a trabajar con los materiales donados por la Fundación *Carlos Salvador y Beatriz*, en actividades del área Matemática.	La Profesora Martha Villavicencio con el Director y docentes de la comunidad Shipibo-Konibo San Francisco (Pucallpa, Región Ucayali). Les informa sobre la Fundación *Carlos Salvador y Beatriz* y los materiales que donó para uso de los niños en el área Matemática.
	

La Fundación desea continuar esta labor de ayudas y solidaridad y tratará de buscar otras alternativas que la hagan más eficaz y directa como, por ejemplo, que la adquisición de los materiales se haga en el propio país, hacerlos llegar a lugares de otros países, etc.

Mientras tanto llega a su término la primera escuela que se construye en Paraguay gracias a la firma de un convenio de colaboración con otras instituciones del país. El presupuesto ha sido aportado por la Fundación. La obra se ubica en Cerro Poty, en la comunidad educativa de la Escuela Indígena Nº 5934, de la parcialidad Mbyá y Avá guaraní, al pie del Cerro Lambaré, a poca distancia de la ribera del río Paraguay y del vertedero de residuos de la capital. La escuela está dotada de aula, cocina-comedor y servicios higiénicos. En esta acción ha participado la Comunidad Escolar del Colegio *Princesa Tejina*, de Tenerife, mediante una acción solidaria realizada con este fin.

Los frutos han sido logrados gracias a la colaboración de personas ajenas a la Fundación entre las que podemos destacar al Director en Paraguay de la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI), Luis María Scasso, quien ha conseguido aunar voluntades y gestionar las bases de la colaboración de la Fundación y el Ministerio de Educación y Cultura. Además, la OEI está a cargo de la ejecución de la obra con controles continuados. En el próximo informe daremos cuenta de la inauguración y puesta en funcionamiento.

Finalmente, aunque seamos reiterativos,

- No hay que olvidar que esta es una Fundación que parte de la desgracia y se dirige a la esperanza y está dispuesta a "hacer cosas por los demás". Ser socio es fácil: con 5 o 10 euros al año podemos hacer mucho por la educación, la cultura y la solidaridad.
- Estamos orgullosos pero no satisfechos: podemos hacer más.

Para tener más información, les invitamos a que visiten nuestra página web

www.carlossalvadorybeatrizfundación.com

Hay muchas fotos pues, muchas veces, una imagen vale más que mil palabras

¡¡Les esperamos!!

A Fundação com vento de popa: entre frazadas, material escolar e primeira escola

A Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz segue de vento em popa, a toda a vai de solidariedade e esforço para conseguir coisas para os demais–os factos falam por si sozinhos-, num trabalho com poucos anos de vida (a Fundação foi apresentada o 24 de fevereiro de 2006) mas com resultados muito a flor de pele e considerando a Educação e a Cultura como pontos finque para conseguir um mundo melhor para todos.

Assim no passado mês de junho de 2010 se enviaram 1000 euros para a compra de frazadas para a Comunidade Indígena (descendente dos diaguitas-calchaquíes) do Mollar, em Tafí do Vale, província de San Miguel de Tucumán, Argentina. Há que precisar que o lugar, a 103 Km. da capital, encontra-se a 2137 metros de altitude. Neste ano o inverno em dita zona foi muito intenso com temperaturas muito baixas pelo que as frazadas (mantas) de uma e duas praças foram bem recebidas. O financiamento correu a cargo da Fundação e um grupo de professores de Tenerife.

Também se aproveitou este envio de frazadas para fazer chegar material escolar a dois lugares: por um lado à mesma comunidade do Mollar já citada e à "Escola Nª 158 da província Terra do Fogo" que se encontra localizada na localidade de Santa Felisa, Departamento do Rio Fundo, na província de Santiago do Estero que limita com a de Tucumán. Toda esta actividade foi coordenada pela professora Lidia Beatriz Esper, da Universidade Nacional em Tucumán.

Como dado curioso podemos ressaltar os laços que unem a vários membros da Fundação com Argentina. Em concreto, o Presidente da Fundação, Salvador Pérez Pérez e sua esposa, Rosario Aurora Estévez González (os pais de Carlos Salvador y Beatriz), ambos professores em Canárias durante décadas de amor e dedicación à educação e Luis Balbuena, sendo então vereador da Prefeitura de San Cristóbal da Laguna, participaram durante o curso 1991-92 num projecto através das Escolas Associadas à Unesco e do Centro Internacional de Conservação do Património (CICOP). Incluía-se um intercâmbio entre professores e estudantes da República de Argentina (cerca de cem) e de Canárias (sessenta). Foi um inolvidable projecto pois os argentinos visitaram as ilhas de Tenerife e Lanzarote durante 17 dias e os canarios visitamos Buenos Aires, Córdoba e La Rioja sendo recebidos até pelo Presidente Menem e o Prêmio Nobel da Paz Pérez Esquivel. Um intercâmbio nunca esquecido nas duas orlas e a demonstração clara de que o mundo da Educação sempre une com a força da amizade e do reconhecimento mútuo.

A Fundação deseja continuar este labor de ajudas e solidariedade e tratará de procurar outras alternativas que a façam mais eficaz e directa como, por exemplo, que a aquisição dos materiais se faça no próprio país, os fazer chegar a lugares de outros países, etc.

Enquanto chega a seu termo a primeira escola que se constrói em Paraguai graças à assinatura de um convênio de colaboração com outras instituições do país. O orçamento foi contribuído pela Fundação. A obra localiza-se em Cerro Poty, na comunidade educativa da Escola Indígena Nº 5934, da parcialidad Mbyá e Avá guaraní, ao pé do Cerro Lambaré, a pouca distância da ribera do rio Paraguai e do vertedero de residuos da capital. A escola está dotada de aula, cocina-comedor e serviços higiénicos. Nesta acção participou a Comunidade Escolar do Colégio Princesa Tejina, de Tenerife, mediante uma acção solidaria realizada com este fim.

Meninos de primeiro grau, na instituição de Educação Intercultural Bilingüe da comunidade quechua de Huilluq (Urubamba, Cusco), dispostos a começar a trabalhar com os materiais doados pela Fundação Carlos Salvador e Beatriz, em actividades do área Matemática.	A Professora Martha Villavicencio com o Director e docentes da comunidade Shipibo-Konibo San Francisco (Pucallpa, Região Ucayali). Informa-lhes sobre a Fundação Carlos Salvador e Beatriz e os materiais que doou para uso dos meninos no área Matemática.
	

Os frutos foram conseguidos graças à colaboração de pessoas alheias à Fundação entre as que podemos destacar ao Director em Paraguai da Organização de Estados Iberoamericanos (OEI), Luis María Scasso, quem conseguiu aunar vontades e gestionar as bases da colaboração da Fundação e o Ministério de Educação e Cultura. Además, a OEI está a cargo da execução da obra com controles continuados. No próximo relatório daremos conta da inauguração e posta em funcionamento.

Finalmente, ainda que sejamos reiterativos,

- Não há que esquecer que esta é uma Fundação que parte da desgraça e se dirige à esperança e está disposta a "fazer coisas pelos demais". Ser sócio é fácil: com 5 ou 10 euros ao ano podemos fazer muito pela educação, a cultura e a solidariedade.
- Estamos orgulhosos mas não satisfeitos: podemos fazer mais.

Para ter mais informação, convidamos-lhes a que visitem nossa página site:

www.carlossalvadorybeatrizfundación.com

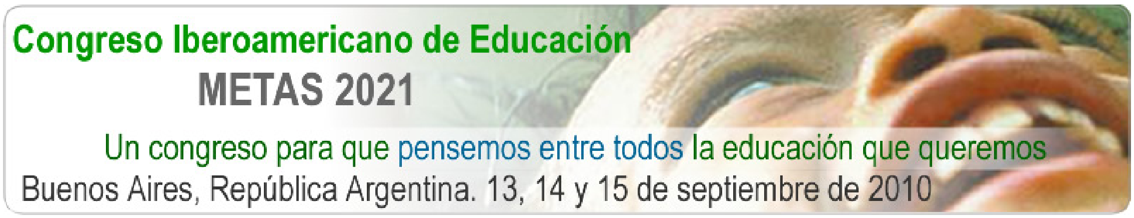
Há muitas fotos pois, muitas vezes, uma imagem vale mais que mil palavras

¡¡Lhes esperamos!!

UNIÓN REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Septiembre de 2010, Número 23, página 235-237
ISSN: 1815-0640

Información

Congreso Iberoamericano de Educación: METAS 2021.
La FISEM y la revista UNIÓN estuvieron allí.



Presentación del curso Ñandutí de formación permanente del profesorado de matemáticas de secundaria.

Póster sobre UNIÓN.

La Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI), el Ministerio de Educación de la Nación Argentina y la Secretaría General Iberoamericana (SEGIB) con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID) convocaron al Congreso Iberoamericano de Educación: Metas 2021 que se celebró en Buenos Aires (Argentina) entre los días 13 y 15 de septiembre de 2010.

Tiene como objetivo principal discutir y concretar los objetivos, metas, indicadores, programas de acción compartidos y mecanismos de seguimiento y evaluación de la propuesta "Metas 2021: la educación que queremos para la generación de los Bicentenarios" que promueve la OEI y que puede ser consultado en: http://www.oei.es/index.php

Hubo una reunión de ministros de Educación y Cultura de Iberoamérica y alrededor de 3200 de educadores que pudieron compartir experiencias, proyectos e investigaciones. En este marco, la FISEM participó en dos actuaciones:

1. La presentación del Curso Ñandutí para la formación permanente en el área de las matemáticas por parte de los profesores Luis Balbuena Castellano y Agustín Carrillo de Albornoz Torres.

Septiembre de 2010, Número 23, página 235-237
ISSN: 1815-0640

Dieron a conocer los objetivos y los contenidos de este Curso on line que ya se viene desarrollando en Paraguay a un grupo de 400 profesores de Secundaria. Se desea ofrecer a 40 000 profesores y profesoras de toda Iberoamérica en un plazo de cuatro años.

El curso está ligado a las Metas Educativas 2021 y viene justificado porque la evolución del conocimiento y de las técnicas que ayudan a enseñar y a aprender, hacen que la formación permanente sea imprescindible si queremos tener un profesorado y una enseñanza de calidad. Y estos dos elementos son de los necesarios para conseguir que las sociedades avancen en su desarrollo científico, tecnológico y en la conquista de su estado de bienestar al que se debe aspirar como objetivo colectivo. En esa línea, como se ha indicado, la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) desea colaborar con todos los estados de la región ofreciendo este curso para la formación permanente del profesorado de Enseñanza Secundaria.

Por otra parte, las Técnicas de la Información y la Comunicación (TIC) han experimentado tal desarrollo en estos últimos tiempos, que obligan a las instituciones educativas a hacer un esfuerzo para que el profesorado pueda acceder a ellas y aprovechar todo lo que de positivo tienen a la hora de enseñar y de aprender Matemáticas.

Se dirige al profesorado de Enseñanza Secundaria en ejercicio de cualquiera de los países iberoamericano. Cualquier docente de este nivel puede solicitar participar. No es necesario ningún tipo de requisito previo salvo el impartir docencia en ese nivel que acreditará cuando se le solicite. Tampoco es necesario poseer una formación previa en el manejo de los medios informáticos porque, precisamente, uno de los objetivos del curso es proporcionar esos conocimientos a quienes estén dispuestos a formarse para la utilización de esos recursos. En este sentido, habrá una unidad cero cuyo contenido va en esa línea.

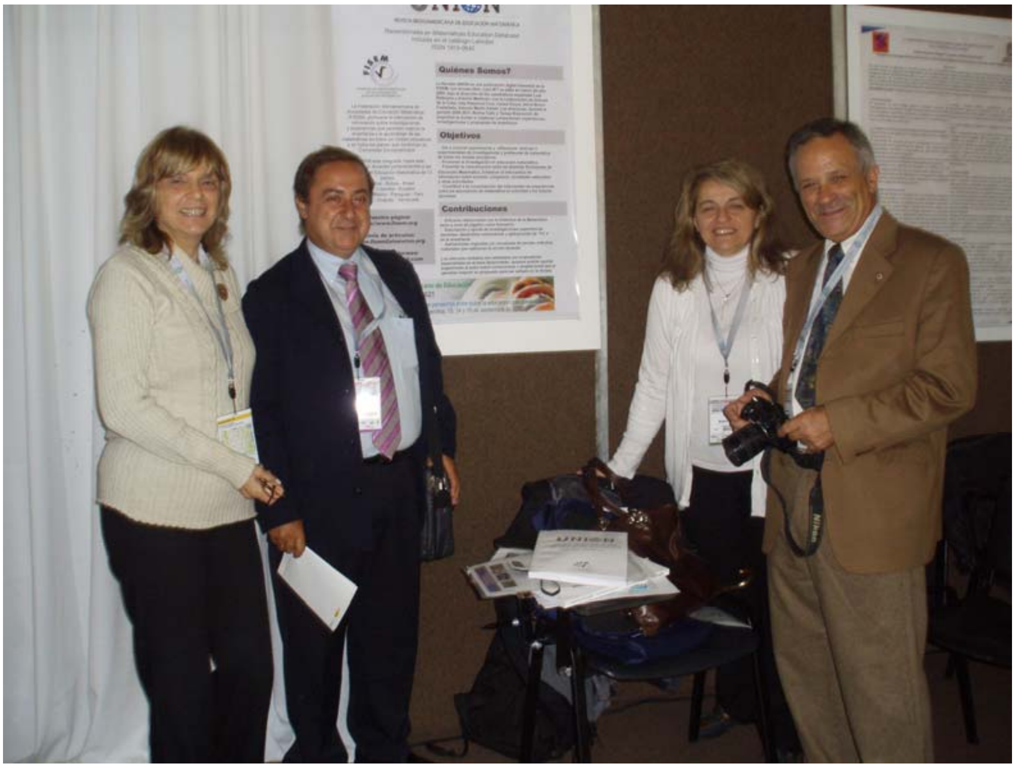
Precisamente por estar dirigido a profesores en ejercicio, el material que se entrega a lo largo del año que dura el curso, está pensado para ser utilizado por el profesorado en su aula y para tratar de dinamizar las matemáticas tanto en el aula como en el centro educativo.

2. Las codirectoras de la revista digital UNIÓN que avala la FISEM, las profesoras Teresa Claudia Braicovich y Norma Susana Cotic, presentaron un póster en el se explican los objetivos de la revista y se describe con detalle cuál es la organización de los números que se vienen editando. Fue muy visitado durante el tiempo de exposición entregándose un folleto con los datos de acceso a cuantos se interesaron.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, página 235-237
ISSN: 1815-0640

Información



Durante la presentación del póster, de derecha a izquierda: Luis Balbuena Castellano, Teresa Claudia Braicovich, Agustín Carrillo de Albornoz Torres, Norma Susana Cotic.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 239-240
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2010

REUNION ANUAL DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Lugar**:** Tandil, Pcia. de Buenos Aires. (Argentina)

Convoca**:** Unión Matemática Argentina (UMA)

Fecha: 27 de septiembre al 2 de octubre de 2010

Información: **www.union-matematica.org.ar**

Lugar**:** Villa María. Córdoba. Argentina.
Convoca**:** Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)
Fecha: 7 al 9 de octubre de 2010.
Información: **www.soarem.org.ar**

VII Congreso Venezolano de Educación Matemática
Organiza: Asovemat, Asociación Venezolana
Lugar: Caracas. Venezuela.
Fecha: 5 al 8 de octubre 2010
Información: **asovematrc@cantv.net**

11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Convoca: Asociación Colombiana de Matemática Educativa - ASOCOLME
Lugar: Colegio Champagnat, Bogotá. Colombia.
Fecha: 7 al 9 de octubre.
Información: **www.asocolme.com**

Escuela de Matemáticas de Latinoamerica y el Caribe.
Convoca: Sociedad Ecuatoriana de Matemática - SEDEM
Lugar: Escuela Politécnica Nacional. Quito, Ecuador.
Fecha: 18 al 29 de octubre.
Información: **www.sedem.org.ec**

AÑO 2011

XIII CIAEM: XIII Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática
Lugar**:** Recife. Brasil
Convoca: Comité Interamericano de Educación Matemática.
Fecha: 26 al 29 de junio de 2011
Información: **http://www.ce.ufpe.br/ciaem2011**

Conferencia de GeoGebra-Latin America 2010. Brasil

Lugar: San Pablo. Brasil
Fecha: 12 al 15 de noviembre de 2011.
Información: **http://www.geogebra.org/cms/en/events**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, página 241-242
ISSN: 1815-0640

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org con copia a revistaunion@gmail.com. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 20 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen(español) o resumo(portugués) y abstract (inglés)**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos personales** en esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas
   - Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Editorial Alianza, Madrid. España.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires. Argentina.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). *La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria*. Educación Matemática 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). *Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma*. Revista de didáctica de las matemáticas 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991).Research on mathematical proof. En: Tall, D. (ed.), Advanced Mathematical Thinking, 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

García Cruz, J. (2008*). Génesis histórica y enseñanza de las matemáticas*. UNIÓN Nº14 [en línea]. Recuperado el 20 de marzo de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=320

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 6 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com