UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Año XI – Número 44 – Diciembre 2015

ÍNDICE

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 3-4

Evaluadores

Agustín Carrillo de Albornoz
Alicia Fort
Ana S. Martinez
Ana Tadea Aragón
Antonino Viviano Di Stefano
Barbara Lutaif Bianchini
Carlos Sanchez
Carmen Galván Fernández
Carmen Teresa Kaiber
Cecilia Rita Crespo Crespo
Celia Rizo
Claudia Oliveira Groenwald
Cristina Ochoviet
Etda Luisa Rodríguez Minarsky
Eugenio Carlos
Eva Cid Castro
Gabriel Loureiro de Lima
Gustavo Franco
Hugo Parra
Inés del Carmen Plasencia
Jorge Brisset
José Manuel Matos
José María Gavilán Izquierdo
José Muñoz Santonja
Josefa Hernández Domínguez
Julio Vassallo
Leonor Santos
Luis Campistrus
Luis Moreno Chandler
Luiz Otávio Maciel Miranda
Margarita González Hernández
María Candelaria Espinel Febles
María Carmen García González
María Carmen Peñalva Martínez
Maria de Lurdes Serrazina
María Elena Ruiz
María Encarnación Reyes Iglesias
María Luz Callejo de la Vega
María Mercedes Colombo
María Mercedes García Blanco
Maria Mercedes Medina Palarea
Mario Dalcin
Matías Camacho Machín
Miguel Chaquiam
Mónica Ester Villarreal
Mónica Olave
Natael Cabral
Natahali Martín Rodríguez
Nelson Hein
Olga Lidia Pérez González
Patrícia Lestón
Patrick Scott
Rafael Escolano
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Rosa Martinez
Silvia Dias Alcântara Machado
Verónica Molfino
Victoria Sánchez García
Yacir Testa

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio

Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo

Colaboran

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

OEI

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 5-8

Editorial

Estimados colegas e amigos:

Este é o número 44 da revista UNIÓN, o último de 2015. Essa publicação é importante para nós pois demonstra mais uma vez nossa disposição de cumprir o compromisso que assumimos de manter a revista em dia e dar força à crença de que divulgar é dar vida ao resultado de uma pesquisa. Procuramos com cada número dessa revista possibilitar troca de ideias, pois julgamos que a mesma é vital para o avanço da Educação Matemática, e para atrair novos pesquisadores.

Mantendo nossa tradição iniciamos o número com um artigo de um pesquisador convidado. Nesse número temos o prazer de divulgar um artigo da renomada pesquisadora brasileira Gelsa Knijnik, doutora em Educação e professora titular da Unisinos. Knijnik apresenta questionamentos sobre duas áreas da Educação Matemática: a Etnomatemática e a Modelagem Matemática Escolar, os quais se fundamentam teoricamente pela Perspectiva Etnomatemática, concebida a partir das formulações de Wittgenstein e Foucault.

Acompanham Knijnik outros sete artigos, a resenha de um livro e a seção de resolução de problemas.

O primeiro desses artigos intitula-se “La enseñanza de los números racionales. Una experiencia de investigación en escuelas primarias y secundarias argentinas”, e foi escrito por Benetti, Menichelli, Ronchese, Cismondi e Oliva. Nele encontra-se uma síntese dos resultados de uma investigação sobre o ensino dos números racionais desenvolvida por docentes e alunas do Profesorado de Matemática da Escola Normal Superior Nº 33.

Na sequência está o artigo “El tratamiento metodológico de la unidad: una mirada desde la formación inicial del profesor de matemática”. Trata-se de uma perspectiva oferecida por González, Garriga González e Rojas de como proceder para ensinar os futuros professores de matemática a realizar análise metodológica das unidades dos programas escolares.

Ramos e Curi são os autores do artigo “Análise de erros em resoluções de equação e inequação exponencial: revelando as dificuldades dos alunos”. A pesquisa trata da identificação e da categorização de erros cometidos por alunos em atividades que envolvem equação e inequação exponencial.

O quarto artigo foi escrito por Costa e Lucena e intitula-se *“Educação matemática na escola indígena: implicações à formação de profesores”.* Os autores discutem uma educação matemática implícita no processo de aprendizagem das práticas socioculturais do povo indígena, tomando por base a realidade do povo Ticuna.

No artigo “Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria española”, Díaz-Levicoy, Batanero, Cezón e Serrano analisam os gráficos estatísticos em três conjuntos completos de livros didáticos espanhóis no ensino primário, para ver como os autores interpretam as diretrizes para o desenvolvimento de conteúdos curriculares.

Fuentes e Aguilar contribuem com a pesquisa em Educação Matemática trazendo seu estudo sobre “Productividad de la comunidad de matemática educativa de la región centroamericana**”** relatando um estudo documental sobre a Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME), com vistas a investigar a produtividade dos educadores matemáticos na América Central.

“Determinación de registros semióticos en una investigación didáctica: un caso aplicado a números complejos” é o título do artigo de Aznar, Distéfano, Pesa e Moler**.** Nesse artigo é descrito o processo de determinar os registros semióticos relevantes para a pesquisa educacional.

A resenha de um livro e a seção permanente de resolução de problemas completam o número.

A resenha foi elaborada por José Manuel Dos Santos Dos Santos, apresentando o “Handbook on the History of Mathematics Education”, dando-se conta da estrutura do livro, indicando as partes que o compõe, bem como as contribuições dadas pelos diversos especialistas em Educação Matemática para a construção de uma historiografia do ensino e da aprendizagem da matemática a nível global.

A seção de resolução de problemas é escrita, tradicionalmente por Uldarico Malaspina Jurado. Para o número 44 Jurado apresenta a segunda parte do problema “El rincón de los problemas Actividades lúdicas y creación de problemas. Análisis y comentários”. Este problema é uma forma de apresentar em contexto intra matemático o problema enunciado no número 43 da UNIÓN, em contexto extra matemático.

Para finalizar desejamos agradecer a colaboração dos autores, e em especial à Gelsa Knijnik, ao José Manuel Dos Santos Dos Santos e ao Uldarico Malaspina Jurado que não mediram esforços para que a revista pudesse sair no prazo estipulado.

As editoras

Celina Abar e Sonia Igliori

Editorial

Estimados colegas y amigos:

Este es el número 44 de la revista UNIÓN, la última del año 2015. Esta publicación es importante para nosotros porque demuestra una vez más nuestra voluntad de cumplir con el compromiso de mantener la revista y darle fuerza a la creencia de que la propagación es darle vida al resultado de una investigación. Estamos buscando con cada número de esta revista permitir intercambio de ideas, porque creemos que es vital para el avance de la Educación Matemática y atraer nuevos investigadores.

Manteniendo nuestra tradición comenzamos el número con un artículo de un investigador invitado. En este número tenemos el plazer de anunciar un artículo de la reconocida investigadora brasileña Gelsa Knijnik, doctora en educación y profesora de Unisinos. Knijnik presenta preguntas sobre dos áreas de Educación Matemática: la Etnomatemática y Matemáticas Modelado de la Escuela, que se basa en la teoría de la Perspectiva Etnomatemática, concibida a partir de las formulaciones de Wittgenstein y Foucault.

Acompañam Knijnik siete artículos, la revisión de un libro y la sección de solución de problemas.

El primero de estos artículos es titulado "La enseñanza de los números racionales. Una experiencia de investigación en escuelas primarias y secundarias argentinas" y fue escrito por Benetti, Menichelli, Ronchese, Cismondi y Oliva. Es una síntesis de los resultados de una investigación sobre la enseñanza de los números racionales para profesores y estudiantes de la Cátedra de matemáticas de la Escuela Normal Superior nº 33.

El artículo que sigue es "El tratamiento metodológico de la unidad: una mirada desde la formación inicial del profesor de matemáticas". Es una perspectiva que ofrece González, Garriga Gonzalez y Rojas sobre cómo proceder para enseñar a futuros profesores de matemáticas a realizar análisis metodológico de las unidades de los programas escolares.

Ramos y Curi son los autores del artículo "Análisis de errores en resoluciones de ecuación e inecuación exponencial: revelando las dificultades de los estudiantes". La investigación aborda la identificación y categorización de errores cometidos por los estudiantes en actividades que implican inecuación y ecuación exponencial.

El cuarto artículo fue escrito por Lucena y Costa y se titula "Educación de las matemáticas en la escuela indígena: implicaciones para la formación de profesores." Los autores discuten educación matemática implícita en el proceso de aprendizaje de prácticas socio-culturales de los pueblos indígenas, basados en la realidad del pueblo Ticuna.

En el artículo "Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria española", Díaz Levicoy, Batanero, Cezón y Serrano analizam los gráficos estadísticos en tres juegos completos de los libros didáticos españolas en la escuela primaria, para ver cómo los autores interpretan las directrices para el desarrollo de contenidos curriculares.

Editorial

Fuentes y Aguilar contribuem con la investigación en Educación Matemática atraz de su estudio sobre "Productividad de la comunidade de las matemáticas educativas de la región centroamericana" y informam un estudio documental sobre a Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME), para investigar la productividad de educadores matemáticos en América Central.

"Determinación de Registros semióticos en una investigación didáctica: caso aplicado a números complejos" es el título del artículo de Aznar, Distéfano, Pesa y Moler. Este artículo describe el proceso de determinar los registros semióticos pertinentes a la investigación educativa.

La revisión de un libro y la sección permanente de solución de problemas completan el número.

La resenha fue preparada por José Manuel Dos Santos Dos Santos, mostrando el "Handbook on the History of Mathematics Education", dándose cuenta de la estructura del libro, indicando las partes que lo componen, así como las aportaciones de expertos en Educación Matemática para la construcción de una historiografía de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel mundial.

La sección solución de problemas es escrita, tradicionalmente por Uldarico Malaspina Jurado. El número 44 Jurado presenta la segunda parte del problema "El rincón de los problemas Actividades lúdicas y creación de problemas. Análisis y comentários". Este problema es una forma de presentar en contexto dentro de la comunidad el problema de matemática del número 43 de la UNIÓN, en el contexto extra matemático.

Finalmente queremos agradecer la colaboración de autores, y en particular la Gelsa Knijnik, José Manuel Dos Santos Dos Santos y Uldarico Malaspina Jurado que no midieron esfuerzos para que la revista salga dentro del plazo antes señalado.

Editoras

Celina Abar e Sonia Igliori

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Página 09

Firma Invitada: *Gelsa Knijnik*

Breve CV

Licenciada em Matemática, Mestre em Matemática e Doutora em Educação (UFRGS-Brasil). Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação – Unisinos-Brasil

Gelsa Knijnik realiza pesquisas na área da Educação, com ênfase em estudos sobre Educação Matemática desde uma perspectiva social, econômica, política e cultural. Editora da revista *Educação Unisinos*, é bolsista produtividade 1C do CNPq e lidera o Grupo Interinstitucional de Pesquisa em Educação Matemática e Sociedade (GIPEMS), que integra o Diretório de Grupos de Pesquisa dessa agência de fomento.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 10-23

Fazer perguntas... ter a cabeça cheia de pontos de interrogação: uma discussão sobre etnomatemática e modelagem matemática escolar

Gelsa Knijnik

Resumen	El artículo presenta cuestionamientos sobre dos áreas de la Educación Matemática: Etnomatemática y Modelaje Matemática Escolar. Con el apoyo teórico-metodológico de la Perspectiva Etnomatemática, concebida a partir de formulaciones Wittgenstein y Foucault, el texto discute tensiones de ambas áreas con respecto al enunciado: "Es importante llevar la 'realidad' a las clases de matemáticas" y los desafíos resultantes que se plantean para el ejercicio de la investigación y la docencia. **Palabras-llave:** etnomatematicas; modelaje matemática escolar; matemáticas escolares.
Abstract	The article presents questions about two areas of mathematics education: Ethnomatematics and School Mathematics Modeling. With theoretical and methodological support on an Ethnomathematics Perspective designed based on Wittgenstein and Foucault's formulations, the text discusses tensions of both areas with regard to the statement "It is important to bring the 'reality' for math classes" and the resulting challenges that are posed to the research and teaching practices. **Key-words:** ethnomathematics; school mathematics modeling; school mathematics.
Resumo	O artigo apresenta questionamentos sobre duas áreas da Educação Matemática: a Etnomatemática e a Modelagem Matemática Escolar. Com o apoio teórico-metodológico da Perspectiva Etnomatemática, concebida a partir das formulações de Wittgenstein e Foucault, o texto discute tensionamentos de ambas áreas no que se refere ao enunciado "É importante trazer a 'realidade' para as aulas de matemática" e os decorrentes desafios que estão colocados para o exercício da pesquisa e da docência. **Palavras-chave:** etnomatemática; modelagem matemática escolar; matemática escolar.

1- Introdução

Este artigo tem como propósito discutir alguns tensionamentos que podem ser identificados em duas das vertentes da Educação Matemática que vêm sendo objeto de pesquisas no Brasil e em muitos outros países do Ocidente: a Etnomatemática e a Modelagem Matemática na Educação Básica[1]. Seu título: “Fazer perguntas... Ter a cabeça cheia de pontos interrogação...” é inspirado em um excerto da obra “Últimas conversaciones” (Wittgenstein & Bouwsma, 2004), no qual Bouwsma narra uma de suas últimas conversas com o filósofo austríaco:

> Perguntei a ele [...] se para [aprender] filosofia fazia falta algum dom especial. Ele estava seguro de que, em princípio, não: o que fazia falta era um apaixonado interesse e que este não decaísse. [E comentou]: um filósofo é alguém que tem a cabeça cheia de pontos de interrogação (p. 68).

Mesmo que eu não seja de modo algum uma filósofa, optei por parafrasear Wittgenstein e iniciar este texto mencionando meu apaixonado interesse por pensar as coisas da educação matemática, um interesse que não tem decaído: sou alguém que tem a cabeça cheia de pontos de interrogação. No presente artigo compartilho algumas dessas minhas interrogações, para as quais não tenho respostas conclusivas a dar. São interrogações que têm movimentado meu pensamento, me dado o quê pensar.

O texto está organizado em três seções. A primeira delas diz respeito à minha trajetória acadêmica, que é, na verdade, uma trajetória etnomatemática. Situado o atual ponto da curva dessa trajetória, estarão dadas as condições para que eu passe à segunda seção, na qual proporei questionamentos que, a meu modo de ver, são comuns à Etnomatemática e ao campo da Modelagem Matemática na Educação Básica. As palavras de fecho do artigo conformam sua última seção.

2– Trajetória Etnomatemática: ser fiel e infiel às nossas heranças

A Etnomatemática foi se constituindo como uma tradição da Educação Matemática, cuja emergência data de meados da década de 1970, com as formulações iniciais de Ubiratan D’Ambrosio (2002, 2004). Como apresentado em outro estudo (Knijnik, 2006), é vasta a literatura pertinente ao campo da Etnomatemática, tanto em âmbito nacional como internacional. Essa literatura destaca a relevância do exame das (etno)matemáticas produzidas pelos mais diversos grupos sociais, especificamente suas formas de organizar, gerar e disseminar os conhecimentos (matemáticos) presentes em suas culturas[2].

---

[1] Ao longo deste texto, a expressão *Educação Básica* se refere aos 12 primeiros anos do sistema educativo brasileiro (que conformam o que, no país, se nomeia por Ensino Fundamental e Ensino Médio), acrescidos da Educação de Jovens e Adultos, que se realiza em outras esferas.

[2] Desde sua emergência, a Etnomatemática vem se constituindo como um campo vasto e heterogêneo, impossibilitando a enunciação de generalizações no que diz respeito a seus aportes teórico-metodológicos, como mostram os trabalhos de Knijnik (2006), Conrado (2005), Ribeiro, Domite e Ferreira (2004) e Pinxten e François (2011), entre outros. Mesmo com essa pluralidade de temáticas, os trabalhos investigativos da área da etnomatemática convergem para duas direções: por um lado, possibilitam identificar, reconhecer e valorizar as matemáticas produzidas em diferentes formas de vida; por outro, problematizam a própria linguagem matemática transmitida e ensinada nas universidades e escolas – como mostram os estudos de D’Ambrosio (2004), Lizcano (2006) e Joseph (1996).

Sinto-me herdeira dessa tradição. É importante, no entanto, que explicite o significado que estou atribuindo à escolha dessa herança, um significado indicado por Derrida, em um diálogo com Roudinesco (Derrida & Roudinesco, 2004).

> "É preciso primeiro saber reafirmar o que vem antes de nós e que, portanto, recebemos antes mesmo de escolhê-lo, e nos comportar, sob este aspecto, como sujeito livre (...). Não apenas aceitar essa herança, mas relançá-la de outra maneira e mantê-la viva". Reafirmá-la, uma "reafirmação que ao mesmo tempo continua e interrompe" a herança.

A reafirmação da tradição Etnomatemática que tenho buscado realizar, uma reafirmação que ao mesmo tempo lhe dá continuidade, mas também, em certa medida, a interrompe, não tem um caráter individual, não é uma obra solitária. Ao contrário, ela tem uma dimensão coletiva, uma vez que se desenvolve no GIPEMS – Grupo Interinstitucional de Pesquisa em Educação Matemática e Sociedade – sediado na Universidade do Vale do Rio do Sinos – Unisinos, uma universidade jesuíta do sul do Brasil.

Nosso trabalho de produção do conhecimento tem como pressupostos três hipóteses. A primeira delas diz respeito ao tempo em que vivemos, ao contexto de globalização neoliberal no qual nossas existências (também acadêmicas) se inserem. Isso significa nos contrapor à ideia de que esse contexto seria de ordem macroestrutural e que, em um nível microestrutural, haveria somente repercussões dessa ordem maior. Estamos, isso sim, assumindo que a lógica neoliberal que conforma o mundo globalizado de hoje opera em cada um de nós, que nós mesmos estamos diretamente implicados na condução da conduta das novas gerações e na condução de nossas próprias condutas em uma determinada direção, a saber, na constituição de indivíduos que aprendam, por exemplo, a ser flexíveis, competitivos, empreendedores de si mesmos...

A segunda hipótese é de ordem interna à educação matemática. Ela trata do seguinte: nos educamos matematicamente na escola, mas também fora dela. Essa hipótese que, se aplicada a outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, a educação linguística, é consensual – quem haveria de dizer que somente ao chegar à escola as crianças aprendem a se comunicar em sua língua materna? – quando pensada no contexto da educação matemática nem sempre é tomada como pertinente. Como mostrarei mais adiante, essa hipótese tem sua sustentação em formulações filosóficas que se apoiam no pensamento de Ludwig Wittgenstein que corresponde ao que é conhecido como sua obra de maturidade, cuja principal referência é "Investigações Filosóficas" (Wittgenstein, 2004).

A terceira hipótese, associada às duas anteriores, consiste em afirmar que as práticas matemáticas escolares e as não-escolares nos ensinam coisas, ambas nos subjetivam, nos ensinam modos de ser, de estar no mundo... Estamos assumindo, portanto, que o quê e como aprendemos os conteúdos matemáticos transmitidos na escola e em outros espaços sociais estão diretamente implicados em processos de subjetivação que incorporam em nós determinados valores, como, por exemplo, ocorre com a matemática escolar, em seu intuito de desenvolver a objetividade, a abstração.

Nos últimos anos, o ponto da curva de nossa trajetória etnomatemática pode ser sintetizado pelo que nomeei *Perspectiva Etnomatemática* (Knijnik, 2012). Apoiando-me nas formulações de Michel Foucault e na obra da maturidade de Ludwig Wittgenstein, considero a Etnomatemática como uma caixa de ferramentas que possibilita: analisar os jogos de linguagem matemáticos de distintas formas de vida e suas semelhanças de família e examinar os discursos da matemática acadêmica e da matemática escolar e seus efeitos de poder.[3]

Como discutimos em outro artigo (Knijnik & Wanderer, 2013), a importância da contribuição da obra da maturidade de Wittgenstein na formulação de Knijnik se estabelece na medida em que passa a negar a existência de uma linguagem universal, o que permite que se questione a noção de uma linguagem matemática universal e as implicações educacionais decorrentes desse posicionamento epistemológico. Em efeito, no período em que é conhecido como o de sua maturidade, Wittgenstein concebe a linguagem não mais com as marcas da universalidade, perfeição e ordem, como se preexistisse às ações humanas. Como expressa nas *Investigações Filosóficas*: "Não aspiramos a um ideal: Como se nossas proposições habituais e vagas não tivessem ainda um sentido irrepreensível, e uma linguagem perfeita estivesse ainda por ser construída por nós" (2004, p.68). Assim como contesta a existência de uma linguagem universal, o filósofo problematiza a noção de uma racionalidade total e, *a priori*, apostando na constituição de diversos critérios de racionalidade. Como bem expressa Condé (2004, p.49), "talvez um dos aspectos mais importantes dessa filosofia [do Segundo Wittgenstein] seja possibilitar, a partir do caráter relacional dos usos nos seus diversos contextos e situações, um novo modelo de racionalidade".

Ademais, em sua obra da maturidade, Wittgenstein repudia a noção de um fundamento ontológico para a linguagem, a qual assume um caráter contingente e particular, adquirindo sentido mediante seus diversos *usos*. "O significado de uma palavra é seu uso na linguagem", explicita o filósofo (Wittgenstein, 2004, p.38). Dessa forma, sendo a significação de uma palavra gerada pelo seu uso, a possibilidade de essências ou garantias fixas para a linguagem é posta em questão, levando-nos a questionar também a existência de uma linguagem matemática única e com significados fixos.

É possível vincular as questões acima evidenciadas com as discussões propostas pela Etnomatemática ao colocar sob suspeição a noção de uma linguagem matemática universal, que poderia ser "desdobrada", "aplicada" em múltiplas práticas produzidas pelos diferentes grupos culturais. Em oposição a essa concepção, o pensamento de Wittgenstein é produtivo para nos fazer pensar em diferentes matemáticas (geradas por diferentes *formas de vida*, como as associadas a grupos de crianças, jovens, adultos, trabalhadores de setores específicos, acadêmicos, estudantes, etc.), que ganham sentido em seus usos.

Ao destacar a possibilidade de geração de muitas linguagens que ganham sentidos mediante seus usos, Wittgenstein (2004) enfatiza a noção de *jogos de linguagem*, que se poderiam compreender como a "totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada". Assim, processos como descrever objetos, relatar acontecimentos, construir hipóteses e analisá-las, contar histórias, resolver tarefas de cálculo aplicado, entre outros, são denominados por Wittgenstein de jogos de linguagem. Seguindo esse entendimento, pode-se dizer que

[3] Foge ao escopo deste artigo uma discussão sobre as possibilidades de articular dois filósofos de tradições filosóficas tão distintas, de modo a dar consistência teórica à formulação da perspectiva Etnomatemática. No entanto, é importante destacar que temos nos ocupado desta tarefa, como indicado em Knijnik (2012, 2014), Knijnik & Wanderer (2010, 2013).

explicitar as matemáticas geradas em atividades específicas também é um processo que pode ser significado como um jogo de linguagem no sentido atribuído pelo filósofo.

Intérpretes de Wittgenstein, como Moreno (2000, p.56), mencionam que, para a compreensão do significado, não se trata de buscar uma determinação lógica e definitiva capaz de apreendê-lo "de uma vez por todas", mas interessa analisar os critérios "fornecidos pelo uso que fazemos da linguagem nos mais diversos jogos, isto é, nas diferentes formas de vida". Mesmo que a noção de forma de vida não tenha sido extensamente desenvolvida nas teorizações de Wittgenstein, segundo Moreno (2000), em aforismos como os de número 23 e 241, das *Investigações,* o filósofo expressa seus entendimentos sobre o conceito de forma de vida:

> A expressão 'jogo de linguagem' deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida (Wittgenstein, 2004, p.27).
>
> "Assim você está dizendo, portanto, que a concordância entre os homens decide o que é certo e o que é errado?" – Certo e errado é o que os homens dizem; e os homens estão concordes na linguagem. Isto não é uma concordância de opiniões mas da forma de vida (Wittgenstein, 2004, p.123).

No aforismo 23, como indicado acima, Wittgenstein afirma que os jogos de linguagem são parte de uma forma de vida. Glock (2006) amplia esse entendimento, destacando que Wittgenstein, quando expressa a noção de forma de vida, enfatiza o "entrelaçamento entre cultura, visão de mundo e linguagem" (p.173). Desse modo, pode-se dizer que a noção de forma de vida passa a ser compreendida, na obra da maturidade de Wittgenstein, como uma engrenagem que possibilita a produção dos jogos de linguagem. "A forma de vida é o ancoradouro último da linguagem", expressa Condé (1998, p.104), afirmando que a significação das palavras, dos gestos e, pode-se dizer, das linguagens matemáticas e dos critérios de racionalidades nelas presentes são constituídos no contexto de uma dada forma de vida. Assim, as matemáticas produzidas em diversas formas de vida constituem-se em diferentes jogos de linguagem. Condé (2004) expressa essa relação, afirmando que, sendo a matemática um produto cultural, pode ser significada como um jogo de linguagem.

A partir da discussão acima empreendida, podemos considerar as matemáticas produzidas nas diferentes formas de vida como jogos de linguagem que se constituem por meio de múltiplos usos. Assim, a matemática acadêmica, a matemática escolar, as matemáticas camponesas, as matemáticas indígenas, em suma, as matemáticas geradas por grupos culturais específicos podem ser entendidas como conjuntos de jogos de linguagem engendrados em diferentes formas de vida, agregando critérios de racionalidade específicos. Porém, esses diferentes jogos não possuem uma essência invariável que os mantenha completamente incomunicáveis uns dos outros, nem uma propriedade comum a todos eles, mas algumas analogias ou parentescos – o que Wittgenstein (2004) denomina *semelhanças de família*. "Ao dizer que alguma coisa possui semelhanças de família com outra, não se está de forma alguma postulando a identidade entre ambas, mas apenas a identidade entre alguns aspectos de ambas" (Condé, 2004, p.54). Glock (2006) expressa que se pode compreender a noção de *semelhanças de família* não como um fio único que perpassasse todos os jogos de linguagem, mas como fios que se entrecruzam, como em uma corda, constituindo tais jogos. Para ele:

> Quando "olhamos e vemos" se todos os jogos possuem algo em comum, notamos que se unem, não por um único traço definidor comum, mas por uma complexa rede de semelhanças que se sobrepõem e se entrecruzam, do

> mesmo modo que os diferentes membros de uma família se parecem uns com os outros sob diferentes aspectos (compleição, feições, cor dos olhos, etc.) (Glock, 2006, pp.324-325).

Em síntese, pode-se dizer que a obra da maturidade de Wittgenstein permite que se compreendam as matemáticas produzidas por diferentes formas de vida como conjuntos de jogos de linguagem que possuem semelhanças entre si. É relevante destacar, no entanto, que, se por um lado, os jogos de linguagem de diferentes formas de vida podem "se parecer", por outro, é preciso atentar para suas especificidades, uma vez que os jogos de linguagem são engendrados por critérios de racionalidade distintos, próprios das formas de vida às quais estão associados.

O segundo eixo da formulação dada à Perspectiva Etnomatemática – aquela centrada no exame dos discursos da matemática acadêmica e matemática escolar e seus efeitos de poder – tem em Michel Foucault sua referência principal. Isso se debe às posições do filósofo francés, principalmente por sua recusa de tomar como "naturais" meta-narrativas que compõem o pensamento da Modernidade, por suas ligações com as posições filosóficas conhecidas como movimento da "virada linguística" por sua ênfase no exame dos regimes de verdade que conformam nosso tempo. Para o filósofo, a produção da "verdade" não seria desligada das relações de poder que incitam e apoiam, estando estreitamente ligadas à positividade do discurso. Afirma ser a verdade "o conjunto de regras segundo as quais se distingue o verdadeiro do falso e se atribui ao verdadeiro efeitos específicos de poder" (Foucault, 2002, p.13), "um conjunto de procedimentos regulados para a produção, a lei, a distribuição e o funcionamento dos enunciados" (Ibidem, p.14), estando "circularmente ligada a sistemas de poder, que a produzem e apoiam e a efeitos de poder que ela induz e que se reproduzem" (Ibidem , p. 14). Assim, acompanhando autores como Esther Díaz (2000, p. 75), podemos dizer que a concepção foucaultianas de verdade (assim como de razão) se afasta de uma visão transcendental, apontando para sua não-transcendência, para sua historicidade e imanência.

Foucault ajuda-nos a assumir uma atitude de suspeita, permitindo que se ponha "em questão" as verdades que circulam entre nós, operam em cada um, entram conosco em nossas aulas de matemática, determinam muito do que fazemos em aula, do que consta em nossos planejamentos, quando decidimos, por exemplo, os procedimentos pedagógicos que conduzirão o ensino de metro francês – posicionando-o como a unidade de medida que, por sua universalidade, ofereceria "a solução" para eventuais discordâncias quanto ao uso de medidas "locais "[4]; quando assumimos como verdade que os conteúdos que usualmente integram a matemática escolar abarcan os conocimientos matemáticos "produzidos pela humanidade" (com todos os problemas que esta expressão carrega consigo – a que humanidade estaríamos nos referindo? Por exemplo, estariam aí incluídos os saberes matemáticos produzidos pelos "outros", os não-europeus?)[5].

Entre os resultados que, no GIPEMS, temos obtido neste segundo eixo da perspectiva Etnomatemática, a partir de um conjunto amplo de pesquisas, podemos mencionar a análise de alguns enunciados que compõem o discurso da educação matemática: "A matemática é difícil" (Knijnik & Silva, 2008), "É importante usar materiais concretos nas aulas de matemática" (Knijnik, Wanderer e Duarte, 2010) e "A matemática está em tudo" (Knijnik & Wanderer, 2006).

[4] Em Oliveira & Knijnik (2011), este ponto é discutido de modo aprofundado.
[5] Uma reflexão de maior envergadura sobre esta questão está em Knijnik (2012).

É desde esta posição teórico-metodológica que busco, na próxima seção, estabelecer questionamentos sobre algumas das verdades que circulam no campo etnomatemático, relacionando-os com e o da modelagem matemática escolar – isto é, aquela que se realiza no âmbito da Educação Básica. Antes, porém, se impõe como necessária uma discussão, mesmo que não exaustiva, sobre o campo da Modelagem Matemática Escolar. Em consonância com a perspectiva Etnomatemática anteriormente examinada, não é pertinente indagar sobre "o que é a modelagem matemática escolar", ou seja, sobre uma definição, que acabaria por circunscrevê-la a uma suposta essência.

Buscando escapar dessa armadilha essencialista, aqui são apresentados[6] alguns dos significados que vêm adquirindo a Modelagem Matemática Escolar no Brasil, quando de sua utilização por investigadores da área que são considerados como referência, no país, devido à sua produtividade acadêmica. Esse posicionamento nos levou a considerar os nomes de Rodney Bassanezi (2002), Dionísio Burak (1992), Jonei Cerqueira Barbosa (2001) e Ademir Caldeira (2009).

Para Bassanezi (2002) e Burak (1992), a modelagem matemática é considerada uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não consiste em chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas seguir etapas nas quais o conteúdo matemático é sistematizado e aplicado. O uso dado por Barbosa à modelagem matemática escolar assume outra dimensão: sua intenção

> é proporcionar aos alunos uma compreensão acerca da importância da Matemática escolar na descrição de situações de diversos setores da sociedade (econômico, político, social), a fim de promover uma formação crítica aos estudantes capacitando-os para intervir com argumentos matemáticos em tais debates (Santana; Oliveira; Barbosa, 2011, p. 2).

Caldeira (2009) utiliza a modelagem matemática não como um método de ensino e aprendizagem cujo foco seria uma metodologia de ensino, mas como uma concepção de educação matemática. Assim, a modelagem matemática seria um dos possíveis caminhos para propiciar aos estudantes elementos que os conduzam a refletir, desde uma perspectiva social e cultural, sobre as relações dos conhecimentos matemáticos com a sociedade.

Do ponto de vista histórico, é importante ressaltar que o debate sobre modelagem matemática e seus usos na educação matemática no cenário internacional retrocede à década de 1960, quando entre matemáticos houve uma intensificação de suas preocupações com os diferentes modos de ensinar matemática. De acordo com Breiteig et al (apud BARBOSA, 2001), um marco histórico desse movimento deu-se no Simpósio de Lausanne, em 1968, que teve como tema central "Como ensinar Matemática de modo que seja útil". No Brasil, as primeiras experiências de modelagem matemática escolar foram realizadas na década de 1970, por um grupo de professores ligados à área da Matemática Aplicada na Universidade de Campinas – UNICAMP, que trabalhava com modelos matemáticos ligados à área da Biomatemática. Desde então, principalmente a partir dos anos 2000, a produção brasileira na área da modelagem matemática escolar vêm se intensificando, com o surgimento de grupos de pesquisa, como os coordenados por Jonei Barbosa, na Universidade Federal da Bahia, Jussara de Loyola Araújo, na Universidade Federal

[6] As reflexões que seguem são parte da discussão realizada em Quartieri & Knijnik (2013).

de Minas Gerais e Marilaine de Fraga Sant'ana, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

3 – Etnomatemática e Modelagem Matemática Escolar: alguns questionamentos

Entre os muitos questionamentos que poderiam ser formulados sobre o discurso Etnomatemática e o da modelagem matemática escolar, escolhi como ponto de partida para o exercício analítico que aqui busco empreender uma das verdades que, mesmo que de modo diferente, circulam em ambos discursos, na contemporaneidade. Refiro-me ao enunciado que diz: “É importante trazer a ‘realidade’ para as aulas de matemática” (Knijnik & Duarte, 2010). Como Duarte (2009) mostrou em sua tese de doutorado, sua circulação no âmbito da educação data de muito antes, mesmo que, na atualidade, venha se reatualizando mediante seus entrelaçamentos e dispersões com outros enunciados do discurso pedagógico. Mas aqui me interessa discuti-lo como parte do discurso da etnomatemática e da modelagem matemática escolar do tempo presente. Mais ainda, não se trata de um enunciado restrito à Etnomatemática, mesmo que nele (assim como na modelagem matemática escolar) ganhe especial ênfase.

Ao examiná-lo em seus desdobramentos etnomatemáticos e, a seguir, naqueles vinculados à modelagem matemática escolar, sei dos riscos que estou correndo, a começar pelas limitações inerentes a um artigo acadêmico. Trata-se, sobretudo, do risco de incorrer em generalizações, uma operação que nos afasta do pensamento imanente, deslocando-o para o âmbito da transcendência. Sabendo disso, mesmo assim, optei por esta estratégia, na expectativa de que ela seja produtiva.

Poder-se-ia dizer que um objetivo que, de modo recorrente, encontramos nos estudos etnomatemáticos é seu interesse em identificar/analisar práticas matemáticas da ‘realidade’. A primeira dimensão da Perspectiva Etnomatemática apresentada na seção anterior está relacionada a isso. Entre as muitas interrogações que poderiam ser feitas, aquela que, para mim, é mais central é a seguinte: Em termos de processos de subjetivação, podemos pensar que identificar e analisar práticas matemáticas da ‘realidade’ opera em nossos estudantes, em nós mesmos, como uma tecnologia que, em princípio, pode oferecer condições para que nos tornemos pessoas que percebem o “outro”, o “diferente” com menos desprezo, com mais empatia. Isso é, a diversidade cultural, uma materialidade que aí está, seria significada como diferença cultural não estigmatizante. Mas como funciona isso quando se toma como verdade que “*É importante trazer a ‘realidade’ para as aulas de matemática”?* O que temos feito nessa operação de escolarizar práticas de fora da escola?

Se escutarmos os ensinamentos do Wittgenstein das *Investigações Filosóficas*, vamos constatar que práticas matemáticas de formas de vida não escolares, quando transportadas para as formas de vida escolares, acabam sendo pedagogizadas: são capturadas pela maquinaria escolar, tornando-se práticas <u>da</u> escola e não, como se poderia idealmente desejar, práticas da ‘realidade’ que, de modo intacto, seriam introduzidas na escola.

Isso porque as práticas de “fora da escola” e as escolares, numa linguagem wittgensteiniana, os jogos de linguagem das formas de vida não escolares e aqueles praticados na escola são regidos por lógicas diferentes, por gramáticas peculiares. E ao “atravessar a ponte” de uma forma de vida para a outra, o jogo de linguagem necessariamente passa por transformações.

Um segundo ponto que precisa ser mencionado se refere a um dos enunciados do discurso da educação matemática, muito caro ao campo da Etnomatemática, que pode ser expresso pela frase: “A matemática está em tudo!” Quem ousaria dizer que grande parte de nossas práticas cotidianas não envolvem jogos que “se parecem” ao que identificamos como jogos de linguagem da matemática escolar? A questão, no entanto, é de outra ordem: Nossas pesquisas têm mostrado que a lógica que rege os jogos de linguagem matemáticos da forma de vida escolar é bem outra da lógica que rege os jogos de fora da escola (Knijnik, 2012; Knijnik et alli, 2013; Knijnik & Wanderer, 2015). A primeira tem as marcas da abstração, do formalismo, da transcendência, enquanto a lógica da vida cotidiana não escolar, por exemplo, é marcada pela contingência...

Em um de nossos estudos (Knijnik e Wanderer, 2006) mostramos que, quando os camponeses diziam: “A matemática está em tudo!” eles, assim como nós, tinham sido capturados por uma verdade que circula na escola, na academia, no mundo social: existe uma e somente uma matemática, essa que nomeamos por “a” matemática (sendo ela composta por uma rama muito variada e não necessariamente disjunta de subáreas). O que esse estudo nos levou a concluir é que, assujeitados por esta verdade de que existe somente uma matemática, que pode ser aplicada a outras formas de vida, as semelhanças entre práticas escolares e não escolares eram tomadas como igualdades, sendo a prática “lá de fora” explicada, narrada, através da gramática da matemática escolar. Diante disso, ficamos, então, a nos perguntar: Sendo a etnomatemática precisamente a vertente da educação matemática que, historicamente, tem se ocupado com a crítica ao eurocentrismo da matemática escolar, poderia ela oferecer alguma contribuição no sentido de melhor equacionar esse tensionamento? São perguntas como essas que têm ocupado minhas práticas de ensino e pesquisa, que têm povoado meu pensamento...

Quero voltar meu olhar, agora, para a modelagem matemática escolar na sua relação com o enunciado “É importante trazer a ‘realidade’ para as aulas de matemática”. Penso que um dos propósitos importantes da modelagem matemática escolar seria construir modelos de fenômenos da ‘realidade’. Esses fenômenos seriam buscados ‘na realidade’ e modelados, isto é, construídos e analisados nas aulas de matemática. Essa construção e análise propiciaria a aprendizagem de conteúdos da matemática escolar e teria potencialidades de oferecer elementos para a reflexão sobre tais fenômenos e, no limite, até mesmo apresentar possíveis soluções para os mesmos. Tenho me feito perguntas sobre isso, perguntas que neste texto desejo compartilhar.

Se estiver correto dizer que, em princípio, a modelagem matemática escolar na Educação Básica – diferentemente daquela que ocorre em outros níveis de ensino e entre profissionais da modelagem matemática – com seu propósito de modelar um fenômeno, estaria constrangida a escolher somente algumas variáveis “matematizáveis” possíveis de serem formuladas e analisadas de acordo com a sequencia linearizada e hierarquizada do currículo da matemática escolar, à qual está submetida (por múltiplas razões, a começar pelas avaliações de larga escala), cabe indagar: Quais as potencialidades de uma modelagem restrita a todas essas contingências, para além da aquisição dos conteúdos matemáticos? É claro que isso não é pouco... Afinal, transmitir esses conteúdos é tarefa da escola. Mas não teria a modelagem matemática escolar também outras aspirações, para além dessa transmissão? Se é preciso simplificar e simplificar para que os alunos possam construir e analisar um modelo, o quanto esta simplificação, ao fim e ao cabo, no limite, vai trazer informações suficientes para que propicie reflexões sobre o fenômeno modelado?

Para além de indagações específicas que poderiam ser feitas a cada uma dessas duas vertentes da educação matemática – a etnomatemática e a modelagem matemática na Educação Básica – há uma questão que me parece pertinente a ambas, eu diria até mesmo pertinente a qualquer das vertentes da Educação Matemática, sendo decorrência de um desdobramento da primeira hipótese que formulei na introdução deste texto: Nos tempos neoliberais em que vivemos, nos quais tudo está sujeito à lógica do mercado, em que estamos submetidos a processos cada vez mais sofisticados de controle e avaliação e a uma exacerbação do sobretrabalho, somos capturados pela 'verdade' de que a educação matemática e a tecnocientífica são imprencindíveis para o desenvolvimento econômico e bem-estar da sociedade e do indivíduo[7].

É importante ressaltar que esse lugar privilegiado atribuído à ciência e, em especial, à matemática, não é coisa inventada pela globalização neoliberal hoje vigente. Como bem se sabe, a ciência emergiu junto com a modernidade, dela tornando-se o paradigma da razão, mesmo que, também ela, desde então, venha sofrendo transformações, como sua crescente hibridização com a tecnologia. Mas, como aprendemos com Pardo, "Ocidente e ciência se inventaram mutuamente" e nos dias de hoje segue vigendo a centralidade da ciência na cultura ocidental (Pardo, 2000, p. 22)

Aqui merece serem referidas as posições de Emmanuel Lizcano sobre a ciência, apresentadas em sua obra "Metáforas que nos piensan. Sobre ciência, democracia y otras poderosas ficciones" (Lizcano, 2006). O autor analisa a ciência como um mito moderno, afirmando que, entre todas as constelações míticas, das mais diferentes culturas, o mito da ciência seria o que, com maior zelo, teria sido preservado. Refere-se ao *fundamentalismo científico* ao qual, na contemporaneidade, estamos submetidos, que, para o autor, seria:

> a contribuição do imaginário europeu ao panorama atual desse fundamentalismo. Sob os sucessivos nomes de *progresso*, *desenvolvimento* e *modernização*, a ideologia da ciência (...) colonizou e destruiu, com uma eficácia até então desconhecida as concepções restantes de mundo e formas de vida que ainda restavam. Como profetizou Comte, a religião científica é a que vem se impondo, efetivamente, como *nova religião* da humanidade (p. 246).

Tenho, então, me perguntado: Em que medida nossas práticas de pesquisa e docência são, ao mesmo tempo, efeito desse fundamentalismo científico e partícipes de sua efetivação? Na contemporaneidade, estaria a modelagem matemática na Educação Básica, assim como a etnomatemática, reificando o lugar privilegiado da matemática – graças à sua linguagem formal, abstrata e, portanto, universal – e, por conseguinte, posicionando a matemática escolar em um lugar privilegiado do currículo? Que efeitos esse tipo de reificação produziria nos sujeitos escolares, isto é, em nossos alunos e em nós mesmos?

[7] Uma discussão aprofundada sobre esta questão encontra-se em Valero & Knijnik (2015).

4 – Palavras de fecho

Ao longo deste texto expus algumas das indagações que tenho me feito como professora e pesquisadora da área da Educação Matemática. Ao encerrá-lo, penso ter chegado o momento de dizer que em meu pensamento não estão somente inquietações como as que aqui apresentei: uma das lições que aprendi, ao longo de minha trajetória de trabalho junto ao Movimento Sem Terra (Knijnik, 2006) é sobre o imperativo da "segunda-feira de manhã", quando entramos em sala de aula e precisamos dar conta de nossa docência. Tenho me perguntado como compatibilizar minha posição de professora com a de pesquisadora – que afora o produtivismo que tem nos aprisionado, possibilita, ou melhor, possibilitaria ter o tempo que fosse necessário para "pensar o nosso próprio pensamento".

A pergunta que cabe formular, então, consiste no seguinte: Fazer o tipo de exercício analítico como o aqui realizado, em quê contribui para a "segunda-feira de manhã"? Eu diria que uma primeira resposta a essa pergunta se refere às possíveis contribuições que esse exercício analítico pode oferecer, para que possamos incorporar, em nossas aulas da Educação Básica, em nossas aulas da graduação e pós-graduação, reflexões sobre o lugar ocupado, na sociedade contemporânea, pela matemática e, de modo mais amplo, pela tecnociência, para evitar que o fundamentalismo científico seja reificado. Isso porque, como qualquer fundamentalismo, também esse acaba por nos imobilizar.

Uma segunda resposta se refere mais diretamente aos conteúdos a serem ensinados em nossas aulas de matemática. Na perspectiva da Etnomatemática, reflexões como as que neste texto apresentei têm embasado meu argumento sobre a importância de ampliar o repertório dos jogos de linguagem matemáticos de nossos alunos, incluindo, nesse repertório, também jogos de linguagem matemáticos praticados em formas de vida não escolares. Trata-se de assumir uma atitude ética – que é um cuidado de si voltado ao cuidado do outro. Talvez esses movimentos de contraconduta possam, de algum modo, ir se vida não escolares. No entanto, acompanhando as reflexões que hoje mencionei, considero importante observar que a ampliação desse repertório, necessariamente deverá incluir discussões sobre as diferentes racionalidades que marcam as diferentes formas de vida, de modo a demarcar as regras que conformam cada uma dessas gramáticas. Quanto à modelagem matemática escolar, ao usá-la em sala de aula, penso que valeria a pena enfatizar as limitações do modelo construído, apontando para as múltiplas variáveis que foram desconsideradas, quer seja por exigir ferramentas matemáticas mais potentes, ainda não aprendidas pelos estudantes, quer seja pelo caráter "não quantizável" dessas variáveis.

Busco em Foucault apoio para indicar a terceira resposta a esta questão. Trata-se de uma resposta que tem, como justificativa, minha inconformidade diante do injusto mundo em que vivemos, diante de uma sociedade marcada por atitudes xenófobas, racistas, sexistas e tantas outras atitudes discriminatórias, diante de um mundo no qual as oportunidades de uma vida decente não estão ao alcance de todos. Essa inconformidade tem me levado a exercitar uma crítica radical sobre o meu fazer acadêmico.

Considero importante refletir sobre questões como as que neste texto discuti, buscando ir às raízes, porque acredito que, como ensinou o filósofo, esse é um fértil caminho para que movimentos de contraconduta (Foucault, 2008) possam emergir e, como eles, nós possamos ser diferentes do que constituindo em linhas de fuga, que favoreçam romper com o que aí está, que favoreçam inventar outras “segundas-feiras de manhã”. Por isso, seguirei fazendo perguntas... com a cabeça cheia de pontos de interrogação.

Referências:

Barbosa, J. C. (2001). Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores. PhD Dissertation. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Bassanezi, R. C. (2002). Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto.

Burak, D. (1992). Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Campinas. PhD Dissertation. Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Caldeira, A. D. (2009). Modelaje Matemático: um outro olhar. Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2(2), 33-54.

Condé, M. L. L. (1998). Wittgenstein, linguagem e mundo. São Paulo: Annablume. 146p.

Condé, M. L. L. (2004). As Teias da razão: Wittgenstein e a crise da racionalidade moderna. Belo Horizonte: Argvmentvm Editora.

Conrado, A. L. (2005). A pesquisa brasileira em etnomatemática. Desenvolvimento, perspectivas, desafios. São Paulo: USP. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo.

D’Ambrósio, U. (2002). Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Ática Autentica.

D’Ambrosio, U. (2004). Etnomatemática e Educação. In: Knijnik, G.; Wanderer, F.; Oliveira, C. (orgs.). Etnomatemática, currículo e formação de professores. Santa Cruz do Sul: Edunisc, p.39-52.

Derrida, J. & Roudinesco, E. (2004) De que amanhã: diálogo. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Díaz, E. (2000). Entre la tecnociencia y el deseo: la construcción de una epistemología ampliada. 1ª. ed. Buenos Aires: Biblos.

Duarte, C. G. (2009). A “realidade” nas tramas discursivas da educação matemática escolar. Tese (Doutorado em Educação). São Leopoldo: Programa de Pós-Graduação em Educação, Unisinos.

Foucault, M. (2002). A arqueologia do Saber. Rio de Janeiro: Forense Universitária.

Foucault, M. (2008). Segurança, Território, População. São Paulo: Martins Fontes.

Glock, H. J. (2006). Dicionário de Wittgenstein. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Joseph, G. G. (1996). La Cresta Del Pavo Real. Las matemáticas y sus raíces no europeas. Madrid: Ediciones Pirámide.

Knijnik, G. (2006). Educação matemática, culturas e conhecimento na luta pela terra. Santa Cruz do Sul: Edunisc.

Knijnik, G. (2012). Differentially positioned language games: ethnomathematics from a philosophical perspective. Educational Studies in Mathematics, v. 80, 2012, p. 87-100.

Knijnik, G. (2014). Juegos de lenguaje matemáticos de distintas formas de vida: contribuciones de Wittgenstein y Foucault para pensar la educación matemática. Educación Matemática, v. 25, p. 146-161.

Knijnik, G. ; Duarte, C. G. (2010). Entrelaçamentos e Dispersões de Enunciados no Discurso da Educação Matemática Escolar: um estudo sobre a importância de trazer a 'realidade' do aluno para as aulas de matemática. Bolema. Boletim de Educação Matemática, UNESP, v. 23, p. 863-886.

Knijnik, G. ; Wanderer, F. (2006). A vida deles é uma matemática: regimes de verdade sobre a educação matemática de adultos do campo. Educação Unisinos, v. 10, p. 56-61.

Knijnik, G. ; Wanderer, F. ; Giongo, I. M. ; Duarte, C. G. (2013). Etnomatemática en movimiento. 2a. ed. Belo Horizonte: Autêntica, v. 1. 109 p .

Knijnik, G.; Wanderer, F. (2010). Mathematics Education and Differential Inclusion: A Study about Two Brazilian Time-Space Forms of Life. ZDM (Berlin Print), v. 42, p. 349-361.

Knijnik, G.; Wanderer, F. (2013). Programa Escola Ativa, escolas multisseriadas do campo e educação matemática. Educação e Pesquisa (USP. Impresso), v. 39, p. 211-225.

Knijnik, G.; Wanderer, F. ; Duarte, C. G. (2010). De las invenciones pedagógicas: la importancia del uso de materiales concretos en las aulas de matemática. Uno (Barcelona. 1994), v. 55, p. 81-93.

Knijnik, G.; Wanderer, F.(2013). Programa Escola Ativa, escolas multisseriadas do campo e educação matemática. Educação e Pesquisa (USP. Impresso), v. 39, p. 211- 225.

Knijnik, Gelsa ; Silva, F. B. (2008). "O problema são as fórmulas": um estudo sobre os sentidos atribuídos à dificuldade em aprender matemática. Cadernos de Educação (UFPel), v. 30, p. 63-78.

Lizcano, E. (2006). Metáforas que nos piensan. Sobre ciência, democracia y otras poderosas ficciones. Madrid: Ediciones Bajo Cero.

Moreno, A. (2000). Wittgenstein: os labirintos da linguagem: ensaio introdutório. São Paulo: Moderna.

Oliveira, S. & Knijnik, G. (2011). Educação matemática e jogos de linguagem da forma de vida rural do município de Santo Antonio da Patrulha: um estudo sobre o medir a terra e suas unidades de medida. Boletim GEPEM, v. 59, p. 62-72.

Pardo, R. H. (2000). Verdad e historicidad: el conocimiento científico y sus fracturas. In: Díaz, E. (Org.) La posciencia: el conocimiento científico en las postrimerías de la modernidad. 3. ed. Buenos Aires: Biblos, p. 37-62.

Pinxten, R.; Francois, K. (2011). Politics in an Indian canyon? Some thoughts on the implications of ethnomathematics. Educational Studies in Mathematics, 78(2), 261-273.

Quartieri, M. T. ; Knijnik, Gelsa. (2013). Caminando sobre el suelo árido en el análisis del discurso del modelaje matemático escolar. REDIMAT Journal of Research in Mathematics Education, v. 3, p. 274-292.

Ribeiro, J. P. M.; Domite, M. do C.; Ferreira, R. (org.) (2004). Etnomatemática: papel, valor e significado. São Paulo: Zouk.

Santana, T. S., Oliveira, A. M. P. de & Barbosa, J. C. (2011). O processo de recontextualização na produção dos discursos dos alunos em um ambiente de Modelagem Matemática. En XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Anais do XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Valero, P. ; Knijnik, G. (2015). Governing the Modern, Neoliberal child through ICT research in mathematics education. For the Learning of Mathematics, v. 35, p. 36-39.

Wittgenstein, L. & Bouwsma, O.K. (2004). Últimas Conversaciones. Salamanca: Ediciones Sígame. 2ª ed.

Wittgenstein, L. (2004). Investigações filosóficas. Editora Universitária São Francisco. Petrópolis: Vozes.

- De contacto: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
- Para la publicación: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de 5 líneas.

Nome: Gelsa Knijnik

Email: gelsak@unisinos.br

Endereço Postal: Rua Mariante, 322 apto 502.

90430-180 Porto Alegre – Brasil

Telefone: +55 5133119767

Título: Licenciada em Matemática, Mestre em Matemática e Doutora em Educação (UFRGS). Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação – Unisinos

Sobre a autora:

Gelsa Knijnik realiza pesquisas na área da Educação, com ênfase em estudos sobre educação matemática desde uma perspectiva social, econômica, política e cultural. Editora da revista *Educação Unisinos*, é bolsista produtividade 1C do CNPq e lidera o Grupo Interinstitucional de Pesquisa em Educação Matemática e Sociedade (GIPEMS), que integra o Diretório de Grupos de Pesquisa dessa agência de fomento.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 24-41

La enseñanza de los números racionales. Una experiencia de investigación en escuelas primarias y secundarias[1] argentinas

Celia Benetti, Luisa Menichelli, Lorena Ronchese, Evangelina Cismondi, Ivana Oliva

Fecha de Recepción: 11/07/2012
Fecha de aceptación: 28/11/2015

Resumen	Se presenta una síntesis de los resultados de una investigación sobre la enseñanza de los números racionales en 4 escuelas primarias y 2 secundarias situadas en el centro- sur de la provincia de Santa Fe, Argentina. La investigación se llevó a cabo durante 2010 y 2011 por el equipo formado por 3 docentes y 2 alumnas del Profesorado de Matemática de la Escuela Normal Superior Nº 33. Se investigaron las prácticas áulicas de los docentes en el contenido mencionado, porque se cree que las estrategias que ellos ponen en juego determinan la manera en que sus alumnos se relacionan con ese objeto matemático. Se hallaron evidencias que permitieron confrontar los resultados con las hipótesis, alcanzando ampliamente los objetivos planteados en la investigación. **Palabras clave:** números racionais; escuelas primarias y secundarias; estrategias.
Abstract	One presents a synthesis of the results of an investigation on the education of the rational numbers in 4 primary and 2 secondary schools placed in the center - south of the province of Santa Fe, Argentina. The investigation carried out during 2010 and 2011 for the equipment formed by 3 teachers and 2 pupils of the Professorship of Mathematics of the Normal Top School N º 33. The practices were investigated áulicas of the teachers in the mentioned content, because it is believed that the strategies that they bring into play determine the way in which his pupils relate to this mathematical object. There were situated evidences that allowed to confront the results with the hypotheses, reaching widely the aims raised in the investigation. **Keywords:** racional numbers; primary and secondary schools; strategies.
Resumo	No artigo é apresentada uma síntese dos resultados de uma investigação sobre o ensino dos números racionais em 4 escolas primárias e 2 secundárias situadas no centro- sul da província de

[1] La escuela primaria en Argentina consta de 7 años, de 1º a 7º grado, comprende alumnos de 6 a 12 años. La escuela secundaria consta de 5 años, de 1º a 5º, y comprende alumnos de 13 a 17 años.

Santa Fé, Argentina. A investigação foi desenvolvida durante 2010 e 2011 por uma equipe formada por 3 docentes e 2 alunas do Profesorado de Matemática da Escola Normal Superior Nº 33. Foram pesquisadas as práticas de aulas dos docentes sobre o conteúdo mencionado. Conjecturava-se que as estratégias que eles colocam em jogo determinam a maneira que seus alunos se relacionam com esse objecto matemático. Os investigadoes perceberam evidências que permitiram confrontar os resultados com as hipóteses, atingindo amplamente os objectivos propostos na investigação.
Palavras chave:números racionais, escolas primárias e secundárias, estratégias.

1. Algunos aspectos de la investigación

1.1. Justificación: ¿Cuál fue el propósito de la investigación?

La investigación fue llevada a cabo por un equipo conformado por docentes y alumnas del Profesorado de Matemática del Nivel Terciario de la Escuela Normal Superior N° 33 “Dr. Mariano Moreno” de la ciudad de Armstrong (Santa Fe) y tuvo el propósito de convertirse en un instrumento de utilidad en el momento de plantearse el desafío que todo docente tiene a diario en el aula: "enseñar para que el alumno aprenda".

El trabajo se centró en investigar las particularidades de las prácticas áulicas de los docentes en el contenido curricular “números racionales” porque se cree que las estrategias que los docentes ponen en juego cuando están en el aula y la diversidad de condiciones personales de cada uno de los alumnos, determinan la manera en que éstos se relacionan con los saberes matemáticos.

Las dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de ciertos contenidos, muchas veces reflejan dificultades de enseñanza por parte de los docentes. A través de la experiencia docente de los miembros del equipo, en cursos de capacitación y en investigaciones anteriores, se escuchó a profesores que se desempeñan en la enseñanza de la Matemática expresar que los alumnos tienen dificultad para abordar el campo de los números racionales y establecer las diferencias con los naturales; también se preguntan acerca de las causas de las dificultades de comprensión de los alumnos o cómo seguir adelante si el tema "fracciones" no quedó afianzado.

Lo mencionado, en parte, promovió la investigación acerca de la enseñanza y aprendizaje de los números racionales desde la escuela primaria, ya que las configuraciones didácticas de los docentes, y lo que realizan efectivamente en sus clases, son un indicador concreto de la importancia que le asignan al contenido "números racionales" y de cómo realizan la transposición didáctica del mismo, entre otras cuestiones.

La elección del contenido “números racionales” se basó en el conocimiento de la complejidad que conlleva la enseñanza y el aprendizaje de este contenido en la escolaridad primaria y en el inicio de la escolaridad secundaria. Algunas cuestiones que dan cuenta de dicha complejidad son:

-La carencia de contextualización con que suele trabajarse con el contenido "fracciones" desde la enseñanza primaria.

-La dificultad de los alumnos para abordar un nuevo campo numérico y establecer las diferencias con los números naturales.

-La forma en que los docentes abordan el tema y la adquisición por parte de los alumnos de los contenidos relacionados con fracciones.

1.2 Planteamiento del problema: ¿Qué cuestiones motivaron la investigación?

El estudio de los números racionales presenta una complejidad cuya elaboración ocupa un lugar central en la escolaridad primaria y secundaria. Abordar un tipo de práctica que genere trabajo matemático en torno a la fracción implica pensar en qué tipo de problemas funciona este objeto matemático. Entonces, se plantearon las siguientes cuestiones:

¿Se promueve que los alumnos construyan sus conocimientos presentándoselos en múltiples situaciones significativas y en contextos adecuados, y luego promoviendo la reflexión sobre sus producciones?

El docente ¿incluye en sus clases una amplia variedad de temas posibles de vincular con la noción de fracción?

Los docentes en sus prácticas ¿continúan el tema "fracciones" a medida que se va complejizando y los alumnos van avanzando en la escolaridad? ¿Cómo?

¿Se complementa el significado de fracción con los saberes previos de los alumnos y sus conocimientos de otros contenidos?

¿Se plantean situaciones donde se relacionan de manera significativa los números racionales con los números decimales?

1.3. Objetivos: ¿Qué objetivos nos propusimos?

El primer objetivo general planteado fue analizar las situaciones de enseñanza de los números racionales en parte de la escolaridad primaria y el inicio de la escolaridad secundaria para contribuir a la reflexión e implementación de estrategias docentes superadoras. Un segundo objetivo general fue favorecer la participación en la investigación educativa de los estudiantes del profesorado, conformando equipos interdisciplinarios.

Como objetivos específicos el equipo propuso caracterizar el tipo de tratamiento de los números racionales y las actuaciones de los docentes para mejorar la calidad en la enseñanza y aprendizaje de los números racionales; e identificar las valoraciones pedagógicas de los docentes sobre los números racionales como objeto de enseñanza.

1.4 Métodos y herramientas: ¿Qué consideraciones metodológicas se tuvieron en cuenta?

La metodología utilizada fue, fundamentalmente, cualitativa ya que permitió indagar, analizar y comprender las prácticas de enseñanza de los números racionales. Se estudió la realidad en su contexto natural, es decir, observando clases de matemática en las escuelas involucradas y entrevistando a los docentes respectivos, y luego interpretando los fenómenos según los significados que tienen para las personas implicadas. El alcance fue descriptivo y propositivo, especificando las características que asume el docente en el tratamiento de los números racionales como objeto de enseñanza, y correlacional, estableciendo relaciones entre los conceptos, categorías o variables emergentes de la etapa previa.

Los instrumentos seleccionados y utilizados para realizar la investigación fueron la entrevista semiestructurada y la observación y registros de clases y carpetas del alumno. Tanto para la entrevista como para la observación de clases, se siguió un protocolo de preguntas que comprendían las categorías de análisis.

Para la muestra se seleccionaron dos profesores de Matemática de 2° año del Nivel Secundario, nueve docentes del área de Matemática de 4° a 7° grado del Nivel Primario, alumnos de 4° a 7° grado del Nivel Primario y de 2° año del Nivel Secundario.

1.5 Marco Teórico: ¿En qué marco teórico nos situamos?

En las prácticas de la enseñanza el docente despliega, de una manera particular, estrategias para favorecer los procesos de construcción del conocimiento (Litwin: 1997). Una buena enseñanza podría pensarse como una práctica que, a través de la reflexión en el momento de la clase, busca la comprensión por parte de los alumnos. (Perrone: 2003). Para Carretero, el aprendizaje constructivista, en tanto respeta la actividad mental del alumno, permite adquirir los conceptos matemáticos mediante los procesos de razonamiento que desencadena. La adquisición de un concepto supone diferentes niveles de abstracción y generalización del mismo.

En el caso de la fracción, los alumnos deben descubrir de forma progresiva la lógica en la que se apoya la elaboración de este concepto. En relación a esto, es posible señalar algunos puntos de partida para su enseñanza, como son la significatividad y el sentido, los problemas y contextos donde se enseña. Tal como sostiene Chemelo G (1998, p.2): *"los alumnos realizan aprendizajes significativos cuando pueden relacionar los nuevos conocimientos a aprender con otros que ya poseen, de modo que al proponerles una situación es necesario conocer sus conocimientos anteriores*".

Las actividades que se presenten a los alumnos deben tener un sentido para ellos y un para qué, porque al comprender el propósito de la actividad pueden establecer relaciones pertinentes y tener una representación de la tarea a desarrollar. Las situaciones problema deben ser tales que funcionen como contextos adecuados para otorgar significado a los conceptos a enseñar.

En particular, y acordando con Ponce, H. (1999), la noción de fracción funciona y cobra sentido en la idea de división y en la de medida. Las situaciones de reparto o cociente partitivo que implican una división entre dos números naturales, y las situaciones de medida, son ámbitos privilegiados donde el concepto de fracción toma su sentido. Estos contextos también son citados en una investigación de Gairín, J.M (1998) sobre la instrucción de números racionales positivos.

Retomando a Ponce, uno de los aspectos conflictivos del abordaje didáctico del tema fracciones se debe a la cantidad de significados que encierra su utilización: la relación parte todo, sobre un contexto continuo y sobre un discreto, la fracción como razón, como probabilidad, como porcentaje, como operador, como proporcionalidad, como campo numérico fuera de la vida real. Lo cual está en sintonía con trabajos de Gairín (2001) y Gairín - Escolano (2005) que caracterizan los diferentes significados del número racional positivo: parte-todo, cociente partitivo o reparto, cociente indicado, razón, operador, medida. Entonces, se cree que el abordaje que el docente realice en sus clases es un claro indicador del significado que le otorga a la fracción y que enseña a sus alumnos.

En este plano, señala Díaz, A. (1998, p.4) que: *"para que los alumnos puedan entender cuál es el sentido y la función de las fracciones, es necesario plantearles situaciones en que éstas adquieran distintos significados. Existe una amplia variedad de temas posibles de vincular con la noción de fracción que es bueno que el docente incluya al planificar sus clases, por ejemplo las relaciones con proporciones, probabilidad, porcentaje, ya que la mayor parte de las veces sólo se la concibe como expresión de una parte perteneciente a un todo"*.

Es importante que los docentes tengan en cuenta ciertos aspectos como, por ejemplo, que el concepto de fracción es aplicable a variedad de situaciones y presenta aspectos interesantes y significativos para trabajar en la escuela. Como se trata de un concepto complejo, su enseñanza no debe ser a través de una progresión lineal sino complementando sus significados con los saberes previos de los alumnos y sus conocimientos de otros contenidos. Lo fundamental es que los alumnos puedan comprender los conceptos y los procedimientos, no la memorización de reglas.

También, y nuevamente coincidiendo con Ponce, un trabajo que aborde este campo numérico debe tener en cuenta los obstáculos para su comprensión. Para Alarcón, A. (2010), los obstáculos pueden ser de orden epistemológico, propios de conocimiento matemático (cambio de conjunto numérico, sus procedimientos y propiedades); de tipo psicológico: los alumnos están acostumbrados a trabajar con números que tienen sentido desde lo cotidiano, pero los fraccionarios implican todo un desafío para ellos porque lo que es evidente para los docentes no lo es tanto para los alumnos; y de tipo didáctico: cuando no se tienen en cuenta las posibles entradas al conocimiento por las que pueden ingresar los alumnos en función de sus intereses.

Entonces, uno de los obstáculos se genera a partir del conocimiento que los alumnos tienen sobre los números naturales; el abordaje de las fracciones implica una ruptura que se vincula con un cambio en la representación de número que tienen los niños hasta el momento. Algunas certezas ya construidas se verán cuestionadas, pero el docente debe generar actividades que evidencien las diferencias de funcionamiento de ambos conjuntos numéricos, así como confrontar las hipótesis que los niños poseen acerca de éstos. Otros obstáculos para el aprendizaje tienen que ver con las presentaciones tradicionales del concepto de fracción y con el énfasis puesto en los algoritmos de cálculos con racionales, que ocultan gran parte de las operaciones intermedias que se efectúan y que no permite ver las relaciones que posee la fracción con otros conceptos.

En esta investigación, se considera que los números racionales resultan herramientas óptimas en diferentes situaciones porque:

-Permiten expresar el resultado de un reparto equitativo y, en consecuencia, quedan asociados al cociente entre números naturales.

-Son indispensables en el momento de determinar una medida, a partir de lo cual se establece una relación con una unidad de medida.

-Dan cuenta de la relación de proporcionalidad directa (en términos de escalas, porcentajes, velocidad, constante, proporcionalidad).

-Habilitan a establecer relaciones entre cantidades enteras y las partes en que pueden ser subdivididas, así como entre dichas partes y la cantidad entera.

Un tratamiento escolar de los números racionales que se haga cargo de los aspectos mencionados exige pensar posibles modificaciones al modo en que ese tratamiento se ha concebido durante años.

2. Metodología de trabajo

Al comienzo de esta investigación el equipo se interrogó acerca de las propuestas actuales de la enseñanza de los números racionales: ¿tienen en cuenta tanto la especificidad del contenido como los modos en que los alumnos aprenden? ¿Qué tipos de significados de fracción se abordan en los distintos grados y/o años de la escolaridad? ¿Se promueve que los alumnos construyan sus conocimientos, vinculados con la noción fracción, presentándoselos en múltiples situaciones significativas y en contextos adecuados? Los docentes en sus prácticas: ¿continúan el contenido "números racionales" a medida que se va complejizando y los alumnos van avanzando en la escolaridad? ¿Cómo?

El recorrido que se realizó para intentar dar respuesta a los interrogantes fue el siguiente:

Se comenzó en julio del año 2010 y, luego de la aprobación del proyecto, el equipo se interiorizó de información bibliográfica sobre el tema. Se elaboraron las hojas de registro y se acordaron cuestiones a tener en cuenta para las observaciones de clases y se confeccionó la entrevista. Se realizó el trabajo de campo, que consistió en observación de clases en 9 cursos de primaria y 2 de secundaria; en entrevistas a los docentes respectivos y en la recolección de las carpetas de los alumnos de los distintos grados y cursos. Se organizaron las dimensiones y categorías de análisis de clases y de la entrevista mediante cuadros de síntesis, lo cual permitió procesar toda la información recogida. En un primer momento, se realizó el análisis descriptivo e interpretación de los resultados de todas las entrevistas, teniendo en cuenta cada dimensión y categoría. En un segundo momento, se analizaron las clases y/o material recogido contemplando dimensiones y categorías, agrupando dicho material por grado o curso.

Las técnicas e instrumentos de recolección de datos fueron:

-Entrevista semiestructurada: permitió reunir información a través de la interacción oral directa entre el entrevistador y el docente, en la que el diálogo es iniciado por el primero para dar lugar al desarrollo de la entrevista. Este instrumento facilitó vislumbrar lo que el docente piensa, sabe, y dice que hace. Al ser semiestructurada, algunas preguntas fueron de respuestas más libres y otras fueron guiadas; estas últimas permitieron contestar señalando una o varias respuestas presentadas junto con la pregunta que implicaron una orientación para el entrevistado. El equipo realizó 11 entrevistas grabadas a docentes en sus respectivos puestos de trabajos, utilizando el grabador periodístico.

-Observación de clases y carpetas del alumno. El equipo observó clases de Matemática de 11 cursos, de 4 escuelas, en las que se abordó el contenido específico "número racional", para analizar prácticas pedagógicas. La observación fue natural no participante ya que el observador es un mero espectador que no interviene en los acontecimientos y se produce dentro del contexto de interés del aula. Se observaron 14 clases, en distintos cursos y escuelas, utilizando como recurso las notas de campo. Se recolectaron carpetas de alumnos de todos los cursos y escuelas que constituyeron la muestra (una carpeta de un alumno de cada curso) como recurso de apoyo a la observación de clases. El criterio de selección de carpeta fue una decisión del docente a cargo del curso, de acuerdo al desempeño del alumno en cuanto a la asistencia a la totalidad de las clases en que se desarrollaron los temas referidos al contenido números racionales.

Tanto para la entrevista como para la observación de clases se siguió un protocolo de preguntas que comprendían las categorías de análisis[2].

El Corpus o población y muestra sobre la que se trabajó implicaron aunar criterios al momento de seleccionar la muestra, tanto de docentes como de alumnos, que fueron los siguientes:

- La enseñanza específica del área Matemática.
- La aceptación de los docentes de participar en la investigación.
- El momento en que se estaba desarrollando el contenido cuando se comenzó el trabajo de campo.

La escuela primaria en Argentina consta de 7 años, de 1º a 7º grado, comprende alumnos de 6 a 12 años. La escuela secundaria consta de 5 años, de 1º a 5º año, y comprende alumnos de 13 a 17 años. La población con la que se trabajó fue: Profesores de Matemática de Nivel Secundario de las escuelas N° 33 y N° 51, docentes del área de Matemática de Nivel Primario de las escuelas N° 262, N° 264 y N° 33 y alumnos de los cursos de dichos niveles educativos.

La muestra estuvo constituida por dos Profesores de Matemática de 2° año del Nivel Secundario, nueve docentes del área de Matemática de 4° a 7° grado del Nivel Primario y Alumnos de 4° a 7° grado del Nivel Primario y de 2° año del Nivel Secundario.

Las estrategias utilizadas para el procesamiento y análisis de datos consistieron en: transcribir las clases y las entrevistas mediante la narrativa. A los fines de una mejor organización se identificaron los grados y cursos con una letra mayúscula para cada escuela (A, B, C, D), seguida de una letra minúscula que indica el nivel (p: primaria, s: secundaria) y un número que indica el grado o curso correspondiente (4: cuarto grado, 5: quinto grado, 6: sexto grado, 7: séptimo grado, 2: segundo año). Para el tratamiento de la información, tanto de entrevistas como de clases, se diseñaron matrices o cuadros síntesis donde se explicitaron dimensiones de análisis con sus respectivas categorías y modalidades. Para la interpretación de los resultados se cruzó lo recogido de las entrevistas (el decir) y de las clases (el hacer) de cada docente involucrado.

3. Análisis descriptivo e interpretación de los resultados.

Las dimensiones de análisis se consideraron para cada docente y clase, ordenándose lo que emergió en cada categoría y modalidad en cuadros matrices o tablas.

3.1 Análisis e interpretación de las entrevistas.

A continuación se presenta el análisis descriptivo y la interpretación de once entrevistas realizadas a docentes del área de Matemática. Dichas entrevistas corresponden a docentes de 4°, 5°, 6° y 7° grado de Nivel Primario (en adelante NP) y a dos profesores del Nivel Secundario (NS). Las dimensiones de análisis fueron las siguientes:

- Dimensión 1. Formación Docente Inicial y Continua.

Las docentes entrevistadas de NP poseen título de Profesora de Enseñanza Primaria y no poseen otro título docente. Salvo un caso, el resto egresó desde mediados de la década del 80 hasta fines del 90. Los docentes del NS, poseen título de Profesor de Matemática y Física y no poseen otro título docente; egresaron en el año 1999 y el 2002. Ninguna de las docentes de NP ha realizado un Postítulo. Con respecto a otras instancias de actualización, tres casos se han actualizado a través del PROCAP (Programa de Capacitación), tres docentes mencionaron actualizarse mediante cursos, y el resto lo hizo a través de reuniones de trabajo institucionales. Respecto a los docentes de NS, ambos realizaron Postítulo y sólo uno de ellos manifestó haber realizado cursos en el área específica e implementa lo aprendido a partir de proponer actividades lúdicas. En general se evidencia una escasa tendencia hacia instancias de formación continua en los últimos años en Matemática.

Los docentes de ambos niveles educativos recurren, para la consulta de bibliografía, a los libros de textos de las distintas editoriales. En la misma medida consultan revistas, enciclopedias, páginas web. Con respecto a la bibliografía de Didáctica de la Matemática, seis casos expresaron que no consultan; los restantes manifestaron consultar los materiales de Orientaciones Metodológicas o Documentos Curriculares Ministeriales (como NAP (Núcleos de aprendizaje prioritarios, DCJ (Diseño Curricular Jurisdiccional)) por lo que parecería que confunden estos materiales con bibliografía específica de Didáctica. Si bien mencionan que consultan distintas fuentes bibliográficas, ninguno nombra material específico de la Didáctica de la Matemática; esto daría lugar a pensar que en la preparación de las clases no habría teorías que sustenten o fundamenten la enseñanza de los contenidos, por lo cual no estarían valorando los aportes de la Didáctica.

Con respecto al impacto de la Formación Continua en las prácticas de enseñanza, según lo declarado por algunos de los docentes de NP, intentan buscar estrategias y actividades innovadoras sugeridas en los cursos de actualización. Otros docentes no mencionan nada acerca de la implementación porque manifiestan que no se actualizaron en los últimos años.

En cuanto a las formas de enseñar fracciones en los inicios de la profesión y en la actualidad, la mayoría de los docentes de NP coincidieron en un cambio de la enseñanza formal y abstracta hacia una más práctica y concreta, que se relaciona con otros temas y con la vida cotidiana de los alumnos. Tres docentes no perciben la diferencia porque su incorporación al sistema es reciente, incluyendo a los docentes de NS.

Los docentes entrevistados coinciden en que la enseñanza que recibieron sobre el tema fracciones, tanto en el Nivel Secundario como en el Superior, fue de forma abstracta, aplicando los diferentes algoritmos para la resolución de ejercicios, siguiendo libros de textos y sin utilizar material concreto. Salvo en dos casos, que no realizan ninguna vinculación, los docentes afirman, que en el desarrollo de sus clases, tratan de vincular el contenido con situaciones cotidianas, utilizando material concreto para que sus alumnos puedan apropiarse del contenido.

- Dimensión 2. Trayectoria Docente.

Los docentes de NP, tienen desde los 7 años de antigüedad hasta los 30 años. Los docentes de NS, uno tiene 11 años de antigüedad y otro 6 años.

En cuanto a la rotación de los docentes entrevistados de NP, 7 afirman no cambiar de ciclo y 4 de ellos cambian cada 4 o 5 años, y, con respecto al área, todos alegan mantenerse en la misma área. En cuanto al grado, en dos de los casos, los docentes se mantienen en el mismo grado, y 7 de ellos rotan pero dentro del mismo ciclo. Ante estas condiciones, resulta llamativo que los docentes, según sus dichos, no realicen una capacitación continua en Matemática ni consulten bibliografía de la Didáctica.

- Dimensión 3. Contenido: Números racionales.

Todos los docentes manifestaron que la fuente de selección del contenido son los Diseños Curriculares Jurisdiccionales (DCJ) y los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP). Sólo un docente hizo referencia a una “*planificación armada a comienzos del año lectivo*”.

De los significados de fracción presentados, sólo un docente manifestó que “*todos los significados son relevantes*”. El significado “relación parte-todo” fue elegido por ocho docentes, y el significado “reparto o cociente partitivo” fue elegido por siete docentes. Los otros significados más elegidos fueron: “medida” (cinco docentes), “razón” (cuatro docentes) y “operador” (tres docentes). Es pertinente aclarar que la pregunta fue elaborada con opciones, por lo que surge el interrogante sobre el conocimiento que tienen los docentes acerca de los distintos significados y su tratamiento.

Todas las docentes del NP manifestaron que vinculan el contenido fracciones con el contenido medidas, haciendo referencia a las medidas de magnitudes más utilizadas, como son las de longitud, tiempo y masa. Algunas además lo vinculan con los números decimales. Y en el caso de las docentes de 7° grado, también hacen referencia al vínculo entre fracciones y proporcionalidad y entre fracciones y el eje geometría. Una sola manifestó el vínculo de las fracciones con el eje probabilidad y estadística. Los profesores de NS manifestaron que vinculan, principalmente, el contenido fracciones con geometría: teorema de Thales, teorema de Pitágoras, relaciones trigonométricas, razones y proporciones numéricas, porcentajes y escalas.

Las docentes de dos escuelas primarias, manifestaron que articulan el contenido fracciones mediante reuniones de trabajo con sus pares del área con el objetivo de conocer, establecer y secuenciar los contenidos básicos de cada grado. Unas pocas declararon que realizan cambios internos si lo consideran necesario a lo largo del año lectivo. En la otra escuela primaria, las docentes manifestaron que, desde hace algunos años, se estableció una articulación de contenidos entre 4° y 5° grado, y entre 6° y 7° grado en todas las áreas; y adaptan su planificación a esa articulación. No obstante, la docente de 7° grado manifestó que, en ocasiones, selecciona los contenidos de acuerdo al nivel de los alumnos y “*empieza el tema desde el principio si fuera necesario*”. Uno de los profesores de NS declaró que se articulan los contenidos a principio del año lectivo, con todos los docentes del área Matemática. Y el otro profesor manifestó que sólo articula con la docente del año inmediato posterior. Lo mencionado daría cuenta de la falta de un trabajo colectivo que se expresa en el PCI como también de una concepción de planificación flexible y revisada.

- Dimensión 4. Trabajo áulico.

Los tipos de estrategias que mencionaron como más utilizadas son: el uso de material concreto y el planteo de situaciones problemáticas relacionadas con el contexto cotidiano. Un docente aclaró que además realiza "*discusión, análisis, síntesis y elaboración de conclusiones*" a partir de esas situaciones problemáticas. Otros nombraron las siguientes: indagación de conocimientos previos, uso de distintos lenguajes, correcciones y explicaciones de los alumnos en el pizarrón. Una docente hizo referencia al trabajo sobre el error, aunque no aclaró de qué manera lo realiza. Un profesor manifestó que, en algunas ocasiones, realiza actividades con la computadora y cálculos mentales. Un docente nombra como estrategias el uso del tangram y la relación entre los números fraccionarios y decimales; otro menciona los gráficos circulares y fracciones equivalentes. En relación a estos dos últimos casos mencionados, parecen confundir estrategias de enseñanza con recursos didácticos y contenidos.

Los docentes, en su mayoría, manifestaron que luego de realizar las actividades con material concreto, formalizan el contenido mediante interrogantes para obtener conclusiones o síntesis de conceptos, trabajos de aplicación, registros en carpetas de lo trabajado en clase o de conceptos básicos. Una docente reconoció que sus alumnos "*trabajan en grupos y luego exponen lo trabajado con material concreto o juegos didácticos, se realiza una síntesis y se aplica a otra situación*".

Los docentes consideraron más frecuentes los siguientes obstáculos: la conexión entre fracciones y números decimales (ocho docentes), los números naturales (cinco docentes), los algoritmos de las operaciones (cinco docentes), la representación gráfica y en la recta numérica (cinco docentes) y la presentación tradicional del concepto (tres docentes). La superación de dichos obstáculos manifiestan realizarla mediante explicaciones y trabajo oral con sus alumnos, actividades en el pizarrón para resolver y corregir entre todos, ejercitación en clase y de tarea, especialmente con las operaciones que más dificultades presentan. Dos docentes hicieron referencia al trabajo sobre el error. Un docente refirió a la utilización de material concreto para superar obstáculos. Otro manifestó "*muchas actividades y mucho machaque*" a sus alumnos. Y otro hizo hincapié en presentar ejemplos con diferentes caminos de resolución para llegar a un mismo resultado.

Con respecto a los contextos de conexión entre números fraccionarios y números decimales, todos los docentes hacen referencia al planteo de situaciones que impliquen la utilización de dichas expresiones para lograr la integración de las mismas. Varios docentes mencionan que las situaciones problemáticas están relacionadas con medidas y dinero. La mayoría utiliza la recta numérica y las representaciones gráficas para visualizar la conexión ya expresada. Los docentes de NS coinciden en abordar dicha conexión proponiendo situaciones problemáticas en contextos como el dinero y en los que pueda utilizarse el significado de porcentaje. También hacen uso de la recta numérica para relacionar fracciones con decimales.

La totalidad de las docentes entrevistadas de NP, expresan que abordan las operaciones con números racionales a partir del concepto fracciones equivalentes y ponen el acento en la propuesta de actividades que parten del planteo de situaciones concretas. Los profesores del 2° año del NS, además de utilizar el concepto de equivalencia y la representación gráfica, manifiestan hacer uso de otras estrategias como el uso de calculadoras, la recta numérica y la aplicación de las propiedades de las operaciones.

En cuanto a la intencionalidad de las actividades, algunos docentes responden que la selección de las mismas favorece la elaboración de conceptos, su transferencia a otras situaciones y su fijación. Otros expresan que la intención es proponer clases prácticas y entretenidas para lograr la comprensión del contenido. Todos coinciden en propuestas que estén relacionadas con el entorno del alumno para que pueda acceder al conocimiento de manera relevante y significativa. Se evidencia una intencionalidad con fundamento en la selección de las actividades.

- Dimensión 5: Recursos Didácticos.

De los docentes entrevistados, seis casos coinciden en utilizar tizas y pizarrón. De estos mismos casos, tres de ellos coinciden en usar carteles o láminas y son tres también los que mencionan material concreto pero no especifican a qué se refiere dicho material. Dos casos nombran el uso de la pizarra magnética. Dos docentes también hacen referencia al uso de manuales. Un docente menciona la recta numérica y otro docente elementos de medición. Hay tres casos que hacen referencia al uso de juegos didácticos, siendo dos quienes especifican dichos juegos: dominó y tangram. Dos casos indican la representación gráfica como recurso utilizado. Un docente del NP menciona usar el equipo “el mundo de las fracciones” y otro la tabla de madera. Se evidencia el uso de una importante variedad de recursos didácticos. En cuanto a la disponibilidad de los mismos, cinco docentes mencionan que los recursos son provistos tanto por la institución en la que trabajan como también por ellos mismos; de éstos, un docente agrega la construcción de recursos por parte de los alumnos. Tres casos hacen mención sólo a la escuela y dos casos sólo a la dotación personal, siendo estos últimos correspondientes al NS; lo cual permitiría decir que el NP, se organiza de otra forma en cuanto a la disponibilidad de recursos didácticos.

3.2 Análisis e interpretación de las observaciones de clases.

A continuación se presenta el análisis descriptivo y la interpretación de las observaciones de clases de docentes del área de Matemática de 4°, 5°, 6° y 7° grado de Nivel Primario (en adelante NP) y de los profesores del Nivel Secundario (NS), y de las carpetas de los alumnos de los cursos respectivos. Se analizaron diversas dimensiones para todas las clases y/o carpetas observadas, por cada grado o curso, ordenándose la información en cuadros matrices. Aquí se presenta el análisis descriptivo y correlacional que se realizó a posteriori contemplando todas las clases en su conjunto.

- Dimensión 1. Momentos en la gestión de la clase:

La mayoría de los docentes presentaron el tema a partir de interrogantes orales, representación grafica en el pizarrón y con el uso de material concreto para la realización de actividades relacionadas con la vida cotidiana de los alumnos. En los cursos superiores, se observó el planteo de situaciones problemáticas. Para indagar los saberes previos, el interrogatorio oral fue la estrategia más utilizada. La motivación se generó utilizando gran parte de las estrategias ya mencionadas, a excepción de una docente de 6° grado que recurre a una salida por el barrio.

En su mayoría, los docentes propusieron actividades acordes al contenido y que responden a los objetivos de la clase. En algunos docentes se evidenció la profundización del contenido en la graduación de dificultades de los ejercicios y problemas propuestos, pero la mayoría presentan ejercicios rutinarios para la fijación de los contenidos. Todas las clases se desarrollaron en un clima de intercambio entre docentes y alumnos, los cuales respondieron a las preguntas y propuestas planteadas, pero no fueron actividades que generen un trabajo independiente.

Con respecto al cierre de las clases, sólo dos casos realizaron procesos de síntesis de contenidos en forma oral y registrando en las carpetas. En el resto de los casos, se dan tareas e interrogantes para la fijación de los contenidos. En este punto, pareciera no haber coherencia entre lo declarado por la mayoría de los docentes y lo observado en las clases. No hay concordancia en cuanto a lo manifestado acerca de la formalización del contenido.

En cuanto a la evaluación de proceso, se rescató sólo un caso, que tuvo un seguimiento más prolongado por parte de la observadora. En este curso la docente hace una evaluación del proceso re trabajando el error, lo que permitió ver los logros y dificultades en el proceso de aprendizaje.

- Dimensión 2. Tratamiento de los números racionales en la clase.

Se observó el desarrollo de contenidos conceptuales correspondientes a los estipulados para cada grado o año, entre los cuales se mencionan: números fraccionarios, fracciones equivalentes, escritura y orden en fracciones, operaciones básicas, expresiones decimales, operaciones con decimales, razones y proporciones, proporcionalidad directa e inversa, ecuaciones y notación científica. Estos contenidos se articulan con los procedimentales pero se evidenció la prevalencia de estos últimos con la aplicación de procedimientos operativos para resolver ejercicios y problemas.

Todos los docentes coinciden en el uso de las siguientes estrategias didácticas: exposición, diálogo e interrogatorio oral, resolución conjunta de actividades utilizando el pizarrón y material concreto, resolución de situaciones problemáticas. Hay varios que también utilizaron la representación gráfica. Con respecto a la enseñanza de las operaciones, la mayoría recurre a enseñar el algoritmo correspondiente a cada operación. Se evidencia que en la práctica no sostienen lo expresado en la entrevista, porque directamente recurren a la enseñanza de mecanismos de resolución de operaciones, sin utilizar conceptos que permitan comprender los fundamentos de los procesos operatorios.

El contenido fue presentado por los docentes, en su mayoría, con preguntas orales, a través de situaciones problemáticas relacionadas con la vida cotidiana y con la utilización de material concreto. En menor medida se presentó a partir de la definición del concepto de número racional. En todas las clases observadas hubo planteo de actividades acordes al contenido y al grupo; no siendo así en la relación secuenciación- estrategia, ya que en la mitad de los casos pareciera ser que algunas estrategias no fueron las más adecuadas para el desarrollo del contenido. En algunos casos, las actividades seleccionadas fueron acertadas, pero no se observaron los resultados esperados, porque no hubo una adecuada secuenciación del tratamiento de ese contenido en la clase.

Las estrategias utilizadas por los docentes en sus clases coinciden, en parte, con lo declarado en las entrevistas, ya que algunas de las mismas no se evidenciaron ni en la observación ni en las carpetas de los alumnos. Por ejemplo, la estrategia resolución de problemas, en casi todos los casos, no es concebida como un desafío para que los alumnos lleguen a la construcción del conocimiento propuesto para esa clase.

En todas las clases se observó el uso de la tiza, pizarrón y carpeta del alumno como recursos más utilizados; le siguen el material concreto, fotocopias, recortes de diarios, calculadora y el manual escolar. Dichos recursos son utilizados en distintos momentos de clase y en forma alternada por docentes y alumnos. Esto coincide con lo manifestado por los docentes.

Por el tiempo de observación empleado para las clases es pertinente aclarar que se arribó a una aproximación sobre los obstáculos en la enseñanza de los números racionales. Se cuenta con datos para expresar que el mayor obstáculo fue la ausencia de diferenciación de funcionamiento con los números naturales. En un caso fue notable la dificultad que tuvo una docente para representar números fraccionarios en la recta numérica lo que significó un obstáculo para los alumnos. Los otros obstáculos mencionados por los docentes en la entrevista no fueron relevantes durante las observaciones de clases.

En cuanto a los contextos de trabajo de fracciones se evidenció, principalmente, que los significados reparto y parte-todo fueron enseñados con propuestas de actividades relacionadas con dinero, medida y reparto de cantidades discretas y continuas. En cuanto a decimales, se trabajaron en contextos de dinero y medida.

La mayoría de los docentes utilizaron explicaciones claras para dar las consignas de las actividades y explicitaron el contenido y los objetivos de la clase a través de la escritura en el pizarrón o mediante aclaraciones orales.

- <u>Dimensión 3. Actuación del docente.</u>

La mayoría de los docentes observados poseen una concepción de la enseñanza técnica o conceptual, que se evidencia en la tendencia a explicar conceptos y procedimientos para resolver ejercicios. Es preciso destacar un caso en el cual la docente se ubica en la otra concepción, la procesual-critica-reflexiva, puesto que procede para que los alumnos construyan progresivamente sus conocimientos.

Con respecto a los tipos de significados de fracción se trabajaron los siguientes:

-relación parte-todo: fue el que más prevaleció y se evidenció mucha presencia de representación gráfica en las actividades propuestas.

-reparto o cociente partitivo: se evidenció en pocos casos y a partir del planteo de situaciones problemáticas, pero sin la utilización del material concreto.

-medida: en este caso, lo observado demostró que no se utiliza como significado sino como contexto en la propuesta de actividades.

-operador: se trabajó a través del planteo de ejercicios y problemas observados en las carpetas de los alumnos.

-cociente indicado: se observó en tres casos y se lo relaciona con números decimales haciendo la división correspondiente entre numerador y denominador.

En este caso, lo observado concuerda con lo declarado por los docentes en las entrevistas.

La mayoría de los docentes plantean problemas contextualizados y que se relacionan con situaciones reales o cotidianas pero sin utilizar material concreto o manipulable para experimentar y construir. La ejercitación apunta a la fijación de conceptos y a la aplicación de algoritmos de las operaciones. En ningún caso se evidenció la relación con temas de otras áreas.

4. Algunas conclusiones y reflexiones del equipo a partir de la experiencia de investigar

El trabajo de campo y el procesamiento de la información permitieron arribar a una serie de conclusiones a partir de los interrogantes surgidos en el planteamiento del problema:

¿Se promueve que los alumnos construyan sus conocimientos presentándoselos en múltiples situaciones significativas y en contextos adecuados, y luego promoviendo la reflexión sobre sus producciones?

Es válido retomar a Graciela Chemelo (1998: 2) quien plantea la importancia de presentar situaciones que funcionen como contextos adecuados para otorgar significados a los conceptos a enseñar, porque en muchas ocasiones no fue evidente el uso de estrategias didácticas que apunten a desarrollar una variedad de situaciones significativas, por lo tanto no habría espacios para promover la construcción de los conocimientos en torno al contenido fracción.

El docente ¿incluye en sus clases una amplia variedad de temas posibles de vincular con la noción de fracción?

Se manifestaron pocos intentos de vincular la noción fracción con otros temas matemáticos y muchas veces se la concibió como expresión de una parte perteneciente a un todo, esto da lugar a que su aprendizaje sea sólo como un concepto aislado y sin funcionalidad. Adriana Díaz (Zona Educativa: 1998) sugiere la importancia que tiene para los alumnos entender el sentido y la función de las fracciones, para lo cual es necesario plantear situaciones en la que éstas adquieran distintos significados como por ejemplo: relaciones con proporciones, probabilidad y porcentaje.

Los docentes en sus prácticas ¿continúan el tema "fracciones" a medida que se va complejizando y los alumnos van avanzando en la escolaridad? ¿Cómo? ¿Se complementa el significado de fracción con los saberes previos de los alumnos y sus conocimientos de otros contenidos?

En las prácticas docentes fue notable la progresión lineal del tratamiento del contenido, no obstante, dicha progresión no implica un trabajo articulado y secuenciado de un año a otro. Además, se evidenció un trabajo escaso con los saberes previos, lo cual no permitió la complejización del concepto y por ende se desaprovecharon los distintos significados que se deberían abordar. También existieron varios indicios de que en el proceso de enseñanza se priorizó el aspecto procedimental por sobre el conceptual.

¿Se plantean situaciones donde se relacionan de manera significativa los números racionales con los números decimales?

Generalmente no hubo un planteo de situaciones que den lugar a relacionar significativamente los contenidos mencionados. Se evidenciaron, en muchos casos, situaciones de conversión, pero a modo de nexo entre los dos contenidos, por lo que no existió un trabajo integrado para favorecer la relación entre las fracciones y los decimales, esto da lugar a la conformación de dos conjuntos numéricos diferenciados. Fue notable la ausencia de un trabajo con la fracción como cociente partitivo, lo que implica una división entre dos números naturales, por lo que los docentes no utilizaron estrategias que vinculen las fracciones con los números decimales.

En función de los objetivos específicos planteados en la investigación, surgieron las siguientes reflexiones:

Fue notorio el seguimiento por parte de los docentes de las actividades propuestas en los libros de texto. Si bien esto da cuenta de una buena elección de las mismas, en muchos casos, los resultados de aprendizaje no fueron óptimos. Tal vez habría que repensar que cada año, cada grupo de alumnos, debe plantear desafíos renovados. Los conocimientos que se enseñan y las estrategias de enseñanza también deben modificarse. Estar actualizado respecto de temas de la Didáctica de la Matemática ayuda a realizar una relectura de las prácticas habituales, encontrar nuevos sentidos para lo que se hace y reinventar nuevas propuestas. Se entiende que enseñar Matemática requiere dominar los conocimientos y las teorías subyacentes para adoptar una postura y poder utilizar dichos conocimientos como instrumentos en la preparación de clases, y entonces recién seleccionar actividades acordes a la propuesta pedagógica.

A lo largo de su recorrido, los alumnos deben ir trabajando los distintos significados de las fracciones; pero a su vez, para cada uno de éstos, se requiere del planteo de distintos problemas que permita tratar aspectos relativos al orden de racionales, a la equivalencia, a la operatoria. Esto indica que para cada significado es necesaria la construcción de un conjunto de problemas de diferentes niveles de complejidad. Con respecto a esto, se observó que el significado más trabajado es el de parte todo, en forma repetitiva, en los distintos grados y no se pudo determinar el proceso de complejización. Se podría decir que de las entrevistas se desprende un desconocimiento, por parte de las docentes, de los distintos significados de las fracciones en sus contextos de uso. Y como consecuencia, se evidenció un tratamiento del tema que no sería el apropiado.

Resultó llamativo que en las clases observadas fue poco frecuente la sistematización de los saberes que fueron descubriendo los alumnos. Esta tarea de establecer relaciones entre las conclusiones de las clases y el conocimiento matemático al que se pretende llegar, introduciendo las reglas y el lenguaje específico, y entre los conocimientos ya incorporados y los nuevos, es una tarea que debería estar siempre a cargo del docente y resulta necesario para que los alumnos identifiquen qué han aprendido.

Se podría recomendar que se diseñe una secuencia de aprendizaje a nivel institucional basada en la experimentación con materiales concretos y visuales, dando suficiente tiempo a los alumnos para comprender los conceptos que son fundamentales. Además, por lo que revelan las entrevistas, son docentes que rotan dentro del mismo ciclo y no cambian de área. Esto debería motivarlos para realizar capacitaciones, que les brindarían una profundización en el manejo del contenido, sin descuidar la importancia del acompañamiento de una bibliografía de la Didáctica de la Matemática.

Para dar respuesta al segundo objetivo general, relacionado con la participación de los estudiantes del Profesorado en instancias de investigación, ha sido logrado sobremanera, involucrándose todos los miembros del equipo en un trabajo sistemático, continuo y colaborativo. Además, se evidencia que este tipo de experiencias puede constituirse en una forma viable de formación de docentes reflexivos en Matemática.

Con respecto al primer objetivo general de poder contribuir a la reflexión e implementación de estrategias docentes superadoras, se desarrolló una Jornada – Taller de Capacitación "*La enseñanza de las fracciones*", a cargo de la Señora Alejandra Alarcón, profesora de Matemática, Física y Cosmografía y Licenciada en Educación con orientación en la Enseñanza de la Matemática. Se destaca el aporte valioso de todo el material teórico-práctico elaborado por dicha Profesora, que está disponible en la biblioteca de la institución y que es consultado en forma permanente por docentes de las distintas escuelas primarias y secundarias de nuestra localidad.

Además se procedió a la devolución de las conclusiones obtenidas y de orientaciones didácticas, elaboradas por este equipo, a directivos y docentes de las escuelas involucradas.

5. Bibliografía.

Alagia, H., Bressan, A., Sadovsky, P. (2005) Reflexiones teóricas para la Educación Matemática. Buenos Aires: Libros Del Zorzal.

Alarcón, Alejandra del Valle. (2010) Fracciones y números racionales. En Revista Novedades Educativas, N° 238, pp. 34-37.

Alsina Claudi (1996) Enseñar Matemáticas. Buenos Aires: Editorial GRAO.

Bravin, C. y Pievi, N. (Coordinación de Investigación del INFD) (2008) Documento Metodológico Orientador para la Investigación Educativa. Buenos Aires: INFD.

Bressan A. y Chemello G. (2007) Los CBC y la enseñanza de la Matemática. Buenos Aires: AZ Editores.

Chemelo G. (2004) Matemática 7 - 3ºCiclo EGB. Buenos Aires: Longseller.

Chemelo G. (2004) Matemática 8 - 3ºCiclo EGB. Buenos Aires: Longseller.

Chemelo G. (1998) La Matemática hoy. En Zona educativa-Aula 2: Las grandes dificultades de Matemática: Las Fracciones, pp. 2-3.

Cohen, L. y Manion, L. (1990) Métodos de Investigación Educativa. Madrid: La Muralla.

Díaz A. (1998). Las fracciones: cómo abordarlas. En Zona educativa-Aula 2: Las grandes dificultades de Matemática: Las Fracciones, pp. 4-9.

Escolano Vizcarra, R. (2007). Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente. España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza. Contextos Educativos, 11 (2008), pp. 241 -251.

Documento Curricular: Matemática. Números racionales. Aportes para la enseñanza. Nivel Medio. (2006) G.C.B.A. Ministerio de Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula.

Fioriti, G. (comp.) (2006) Didácticas Específicas. Reflexiones y aportes para la Enseñanza. Buenos Aires: Paidós.

Gairín Sallán, J. M. y Muñoz Escolano, J. (2005). El número racional positivo en la práctica educativa: estudio de una propuesta editorial. Córdoba: IX Simposio SEIEM Grupo de investigación: Pensamiento numérico y algebraico.

Gairín Sallán, J. M. (2001) Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. España: Universidad de Zaragoza, Departamento de Matemática, Contextos educativos, 4 (2001), pp. 137-159.

Gairín Sallán, J. M. (1998). Números racionales positivos: reflexiones sobre la instrucción. España: Ediciones Universidad de Salamanca: Aula, 10, 1998, 41-64, ISSN: 0214-3402

Itzcovic, H. (2008). La Matemática Escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula. Buenos Aires: AIQUE.

Litwin, E. (1997) Las Configuraciones Didácticas: una nueva agenda para la Enseñanza Superior. Buenos Aires: Paidos.

López Carretero, A. (1987) Por qué y cómo enseñar fracciones. Cuadernos de Pedagogía: Prácticas de EGB – ISSN 0210-0630, 148, 1987, pp 44-49 España: Fundación Dialnet – Universidad de La Rioja.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. Diseño Curricular Jurisdiccional 2º Y 3º Ciclo EGB: Ministerio De Educación.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2003). Diseño Curricular Jurisdiccional Educación Polimodal. : Ministerio De Educación.

Panizza, M. (comp.) (2005). Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de EGB. Análisis y propuestas. Buenos Aires: Paidós.

Ponce, H. (1999) Las fracciones en la escuela: un camino con obstáculos. En Enseñar y aprender Matemática. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Ponce, H. (1999) Fracciones: significados, relaciones y propiedades. En Colección Biblioteca Didáctica. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Rico, L. (coord.) (1997) La Educación Matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona: HORSORI.

Rowan T. y Bourne B. (1999) Pensando como matemáticos. Buenos Aires: Manantial.

Samuel J. y Dupin J. (2005) Introducción a la Didáctica de las Ciencias y la Matemática. Buenos Aires: Ediciones Colihue.

Schanzer, R. (1999) Paradigmas de los enfoques cuantitativo y cualitativo en investigación social. Rosario: UNR- Escuela de Comunicación Social.

Serie Curricular. Matemática N° 4: Números Racionales y Geometría (2007). Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, Subsecretaría de Educación, Dirección Provincial de Educación Primaria, Dirección de Gestión Curricular.

Stone,W. (comp.) (2003) La Enseñanza para la comprensión: vinculación entre la Investigación y la Práctica. Buenos Aires: Paidós.

Villela, J. (1997) Sugerencias para la clase de Matemática. Buenos Aires: Aique.

Autor/es:

Datos de identificación de las autoras:
Celia Benetti, Luisa Menichelli, Lorena Ronchese, Evangelina Cismondi, Ivana Oliva.

Datos de identificación de la institución:
Escuela: Escuela Normal Superior N° 33 "Dr. Mariano Moreno". CUE: 820181200. Localidad: Armstrong. Departamento: Belgrano. Provincia: Santa Fe. País: Argentina. Mail: terc33@arnet.com.ar. Teléfono: (0054) 3471 461102

Datos de contacto de una de las autoras:
Apellido y nombre: Benetti, Celia María. Dirección electrónica: cmbenetti@hotmail.com. Dirección postal: Moreno 464. Ciudad: Montes de Oca (2521). Provincia: Santa Fe. País: Argentina. Teléfono: (0054) 03471 15672469

Breve reseña:
Luisa Menichelli es Profesora en Matemática, Licenciada en Gestión Educativa y Rectora de la Institución; Lorena Ronchese es Profesora en Ciencias de la Educación y Celia Benetti es Profesora en Matemática, Física y Cosmografía. Las tres trabajan como formadoras de formadores en el Profesorado de Matemática de la Escuela Normal Superior Nº 33 "Dr. Mariano Moreno" de Armstrong, Santa Fe, Argentina, desde hace más de 10 años. Ivana Oliva y Evangelina Cismondi eran estudiantes del último año de dicho Profesorado durante la investigación; en la actualidad ya son profesoras egresadas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 42-55

El tratamiento metodológico de la unidad: una mirada desde la formación inicial del profesor de matemática

Andel Pérez González, Ana Teresa Garriga González, Marta Beatriz Valdés Rojas

Fecha de recepción: 27/05/2014
Fecha de aceptación: 28/11/2015

Resumen	El artículo ofrece un procedimiento para enseñar a los futuros profesores de matemática a hacer el análisis metodológico de las unidades de los programas escolares. El mismo tiene en cuenta las exigencias más actuales en la enseñanza de la matemática, así como el carácter integrador y sistémico que debe caracterizar las habilidades profesionales para la planificación del proceso de enseñanza - aprendizaje. **Palabras clave**: futuros professores de matemática; programas escolares; análisis metodológico.
Abstract	The article offers a procedure to teach to make the future mathematics professors the methodological analysis of the units of the school programs. The same one keeps in mind the most current demands for the mathematics's teaching, as well as the integrative and systemic character that should characterize the professional abilities for the planning of the teaching process - learning. **Keywords**: future mathematics professors; school programs; methodological analysis.
Resumo	O artigo oferece um procedimento para ensinar os futuros professores de matemática a realizar análise metodológica das unidades dos programas escolares. São consideradas as demandas mais atuais para o ensino da matemática como também o caráter integrador e sistêmico que devem caracterizar as habilidades profissionais para o planejamento do processo de ensino-aprendizagem. **Palavras-Chave**: futuros professores de matemática; programas escolares; análise metodológica.

Introducción

En los últimos años las modificaciones que caracterizan el desarrollo del conocimiento, la economía, la cultura y la moral a nivel internacional, nacional y local exigen nuevos roles a las universidades y, de manera particular, demandan la formación de un profesional bien preparado para asumir los retos de la contemporaneidad. Al respecto se reconoce: "… como una de las necesidades de la universidad responder al desarrollo social en correspondencia con las demandas actuales con una organización científica…" (Llantada, s/a, p. 1).

Desde esta perspectiva se identifica al profesional de la educación por el significativo papel que desempeña en el desarrollo de todo país, de ahí la importancia de prestar una especial atención a su proceso de formación inicial. Estas razones hacen énfasis en la necesidad de condicionarlo a los adelantos científico – tecnológicos en las diferentes esferas de la vida, porque "… la formación de profesores para la enseñanza de la Matemática continúa siendo un problema no resuelto en los países de América Latina y el Caribe" (Cruz, Lavigne y Sosa, 2011, p. 5).

Lo anterior conduce a que desde los diferentes contextos se identifiquen las principales contradicciones que exigen el perfeccionamiento del proceso de formación inicial del profesor de matemática; entre ellas adquiere mayor relevancia la necesidad de prepararlos para realizar una acertada planificación del proceso de enseñanza – aprendizaje.

A nivel internacional, los trabajos relacionados con la formación inicial del profesor de matemática enfatizan en la formación didáctica y aportan elementos de interés para la planificación del proceso de enseñanza – aprendizaje desde su relación con el conocimiento didáctico y los retos actuales para la enseñanza de la matemática. Por su parte en Cuba los autores consideran de interés la planificación del proceso de enseñanza - aprendizaje de la asignatura matemática, sin embargo estudian la temática a partir de su relación con el trabajo metodológico y dirigen sus propuestas a la formación postgraduada.

Al considerar las ideas analizadas anteriormente y conocer que los estudiantes de la carrera: Licenciatura en Educación, especialidad Matemática – Física manifiestan insuficiencias al realizar el análisis metodológico de las unidades de los programas escolares, es que los autores del artículo ofrecen un procedimiento para enseñar a los estudiantes en formación inicial a hacerlo desde una óptica integradora y sistémica y considerando las exigencias más actuales para la enseñanza de la matemática en Cuba.

1. La formación inicial del profesor de Matemática. Exigencias actuales.

La formación inicial de profesores de matemática se analiza como un tema que alcanza un interés creciente en los diferentes contextos. Importantes investigadores dedican sus estudios a la concepción de este proceso a partir de las exigencias de la sociedad.

Según el criterio de González al caracterizar los roles de los nuevos profesores de matemática, los mismos deben ser capaces de:

- Propiciar situaciones que propicien la comunicación de ideas matemáticas.
- Generar actividades que inciten para recopilar, organizar y analizar información, resolver problemas y construir argumentaciones lógicas.
- Estimular la búsqueda del conocimiento y la comprensión de la matemática.

- Vincular la matemática con otras áreas del conocimiento, de modo que desarrollen una sensibilidad tal que permita apreciar y disfrutar de su poder y belleza.
- Relacionar la matemática con el entorno a fin de ayudar a comprender la vida y la interconexión de sus diferentes ramas.
- Estimular el uso de la tecnología en los procesos de aprender y hacer matemática (González, 2000, p. 3).

En este sentido se considera que para lograr un desempeño adecuado a estos roles se requiere de cambios sustanciales en los programas diseñados para la formación inicial; al respecto el autor antes citado refiere que los futuros profesores deben vivenciar por sí mismos nuevas formas de aprender matemática e involucrarse personalmente en situaciones de aprendizaje y enseñanza como las que se espera que ellos sean capaces de diseñar y gestionar durante el ejercicio profesional, actividad que se debe concretar desde los diferentes contextos y etapas del proceso de formación inicial.

Por otra parte resultan significativos los principios para la formación de profesores de matemáticas descritos en Cooney y Wiegel (2003). Los mismos se refieren a que los profesores en formación deberían:

- Experimentar la matemática como una materia plural.
- Estudiar explícitamente y reflexionar sobre las matemáticas escolares.
- Experimentar las matemáticas de manera tal que apoye el desarrollo de estilos de enseñanza orientados a los procesos.

A juicio de los autores de este artículo los principios se encaminan a revelar la importancia del vínculo de los estudiantes en formación con el contexto escolar, al necesario protagonismo de estos en sus procesos formativos y, de manera particular, a la integración de los tipos de conocimientos a lograr en el ciclo formativo inicial.

Desde otra posición Godino y otros (2008) reconocen la utilización de un modelo que centra la atención en el conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza, integrando otros modelos que en esencia jerarquizan uno de estos tipos de conocimientos. Teniendo en cuenta la idea anterior, los mismos autores enfatizan en la necesidad de integrar la formación matemática de los futuros profesores con la formación didáctica; elemento que resulta de gran interés. Especial atención muestra el autor citado en la “reflexión guiada” como un aspecto favorecedor del proceso de formación profesional del profesor de matemática; esta idea en el contexto cubano se identifica como el enfoque profesional pedagógico, el cual se asume como un principio en el presente artículo.

En relación con la reflexión también Llinares y Kainer (2006) destacan que la práctica reflexiva ofrece una perspectiva de cómo los estudiantes aprenden sobre la enseñanza y les proporciona información sobre los cambios a considerar para la enseñanza de las matemáticas. A raíz de lo anteriormente descrito se asegura que el futuro profesor debe tener conocimientos históricos sobre las matemáticas, utilizar las tecnologías, comprender el proceso de solución de problemas, ser hábil en la planeación y ejecución de situaciones de estudio y ante los problemas que surjan en el proceso y conocer el trabajo de investigación en educación matemática.

Los puntos de vista analizados hasta aquí constituyen referentes también en la experiencia cubana para la formación de profesores de matemática, aunque se considera que las investigaciones realizadas sobre la formación didáctica se enfocan en su gran mayoría desde la Formación Pedagógica General. En este sentido resulta importante resaltar las relaciones que se manifiestan entre los contextos de formación, las etapas del proceso de enseñanza y aprendizaje y la evaluación del modo de actuación del educador durante la formación inicial.

Desde la mirada de Garcés (2003) la concepción del proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática durante la formación inicial debe proyectarse por lograr la unidad de la formación matemática y didáctica en función del modo de actuación profesional y, en particular, el trabajo con el sistema de tareas, este último elemento de trascendental importancia para el desarrollo de las habilidades profesionales relacionadas con la planificación.

En relación con el papel del estudiante en formación inicial se coincide con Montenegro y otros (2009) cuando resumen que las acciones formativas con enfoque profesional deben ser además más interpretativas y conceptuales, más identificadas con pensamientos lógicos y divergentes, más aplicativas, creativas y sobre todo apoyadas en contenidos actualizados. Estos autores puntualizan que solo cumpliendo con las exigencias anteriores se logrará el desarrollo exitoso de los modos de actuación profesional y las habilidades profesionales relacionadas con la planificación.

Más recientemente Pozo (2011) realiza valoraciones concretas sobre los problemas y las habilidades profesionales que rigen el proceso de formación inicial del profesional de la carrera Matemática – Física, desde sus posiciones explica el modo de concreción a partir de la disciplina Didáctica de la Matemática, aspecto en el que se profundiza a continuación.

2. La disciplina Didáctica de la Matemática. La concepción de su proceso de enseñanza - aprendizaje

A los estudiantes de la carrera: Licenciatura en Educación, especialidad Matemática – Física en Cuba se le asigna desde el Modelo del Profesional (2010) como perfil del egresado dirigir el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática y la Física, elemento que se revela en las diferentes categorías que son definidas desde el propio documento y que se tienen en cuenta en la concepción del programa de la disciplina Didáctica de la Matemática.

Por otra parte en las Indicaciones Metodológicas y de Organización de la carrera (2014) se reconoce que el papel que le corresponde a esta disciplina es precisamente ofrecer los fundamentos teóricos y metodológicos específicos para la dirección del proceso educativo y de enseñanza - aprendizaje de la Matemática, a partir de considerar las mejores experiencias del desarrollo de la Metodología de la Enseñanza de la Matemática en Cuba.

Se identifica entonces desde el programa de la disciplina que esta contribuye a la formación del modo de actuación de los estudiantes para la dirección del proceso de enseñanza - aprendizaje, razón por la cual una concepción adecuada durante todos los años de la carrera resulta indispensable. Como elemento de interés para su proceso de enseñanza – aprendizaje resalta la necesidad de establecer vínculos interdisciplinarios con el resto de las disciplinas y, específicamente con la Formación Laboral Investigativa.

En las orientaciones metodológicas que ofrece el programa se diferencian tres etapas por las cuales debe transitar para cumplir sus objetivos, y posteriormente se caracteriza qué debe ocurrir en cada una de ellas. Por la importancia que merece para la concepción del proceso de enseñanza – aprendizaje de sus contenidos se relacionan a continuación: la primera ocurre antes de iniciar la formación académica de la disciplina, y se deben analizar los contenidos que tienen un carácter propedéutico y posteriormente resultan básicos para lograr los objetivos más generales. En la segunda, durante la formación académica, se introducen de forma integrada los contenidos específicos de cada asignatura y se profundiza en su aplicación para dirigir el proceso de enseñanza - aprendizaje de la matemática. Finalmente en la tercera, concluida su formación académica, es necesario sistematizar el desarrollo de las habilidades generales y básicas en los estudiantes de la carrera al aprovechar las potencialidades del currículo, particularmente la práctica laboral.

En correspondencia con cada etapa se estructuran sus contenidos esenciales y se determinan sus objetivos generales, uno de ellos es: “Dirigir el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática, en función de la formación de los educandos, utilizando los recursos aportados por la disciplina respecto a la planificación y evaluación, los métodos para la realización de las funciones didácticas y las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática, en el cumplimiento de sus funciones profesionales con originalidad y creatividad, a fin de potenciar las características desarrolladoras del aprendizaje” (MINED, 2010, p. 7).

Para lograr el cumplimiento del objetivo anterior, los autores identifican la pertinencia de centrar la atención en la realización del análisis metodológico de las unidades, el diseño de sistemas de clases y la planificación de clases, por considerar estas habilidades profesionales como el hilo conductor de las actividades docentes en la disciplina.

En relación con la organización de la disciplina y su proceso de enseñanza – aprendizaje se considera oportuno tener en cuenta las siguientes ideas metodológicas:

- Lograr establecer la integración necesaria de los componentes laboral, académico e investigativo en función del cumplimiento de los objetivos desde los diferentes contextos.

- Aprovechar los momentos oportunos para destacar los aspectos teóricos y prácticos de la Didáctica de la Matemática que potencian las características desarrolladoras del aprendizaje.
- Utilizar preferiblemente las conferencias, seminarios, clases prácticas y talleres como tipos de clase; sin olvidar el enfoque de sistema con que deben proyectarse.
- Prestar especial atención al desarrollo de las habilidades comunicativas a través de la argumentación de ideas y propuestas de tratamiento metodológico a contenidos matemáticos.
- Desarrollar la independencia cognoscitiva a partir de promover la búsqueda y el procesamiento de información, el ordenamiento lógico de los contenidos y las habilidades en la utilización de las diferentes fuentes del conocimiento.
- Promover la elaboración y solución de ejercicios y problemas que luego explicarán cómo utilizarlos en una clase o sistema de clases.
- Orientar el diseño de instrumentos para observar aspectos didácticos y metodológicos esenciales en clases o partes de estas.
- Sugerir la confección de instrumentos para el diagnóstico del saber y poder de una unidad determinada, o instrumentos de evaluación sistemática y parcial.
- Orientar la preparación del tratamiento metodológico, el sistema de clases y las clases correspondientes a contenidos seleccionados.

A juicio de los autores cumplir con las exigencias anteriores permite profundizar e integrar de forma sistemática los métodos de trabajo característicos de la enseñanza de la matemática, que sin duda contribuyen a una mejor formación inicial de los estudiantes para la planificación del proceso de enseñanza – aprendizaje, elemento en el que a continuación se profundiza.

3. Las habilidades profesionales para planificación del proceso de enseñanza – aprendizaje desde la formación inicial del profesor de matemática.

Sobre la teoría de las habilidades profesionales en la literatura consultada se reconoce como una de las investigadoras cubanas que más ha aportado a Zayas. La misma identifica un grupo de ellas que son de obligado desarrollo para la formación integral del futuro profesional de la educación, por lo que se considera importante retomar la siguiente idea: "… es necesario integrar los conocimientos y elevarlos al nivel de aplicación profesional" (Zayas, 1997, p. 82).

La autora citada apunta en otro momento que las habilidades profesionales son "… el tipo de actividad que a lo largo del proceso de formación del profesional deberá sistematizarse hasta convertirse en una habilidad con un grado de generalidad tal, que le permita aplicar los conocimientos, actuar y transformar su objeto de trabajo y por lo tanto, resolver los problemas más generales y frecuentes que se presentan en las diferentes esferas de actuación" (Zayas, 2000, p. 32). Se asumen los criterios anteriores, pues en ellos se resalta el papel de la actividad y la integración de los conocimientos a la solución de los problemas profesionales que los sujetos tienen que enfrentar.

De indiscutible valor resultan los criterios de Abdulina (1984) en relación a las habilidades profesionales pedagógicas. La misma plantea que constituyen principios para su desarrollo los siguientes: el de la extensión y sistematicidad, el de la combinación de la teoría y la práctica y el del carácter jerárquico del modelo del profesional. Se asumen estos principios, ya que ponen de manifiesto la integración de los componentes académico, laboral e investigativo y la pertinencia del vínculo entre la teoría y la práctica en todas las actividades de las diferentes disciplinas en función de las exigencias del modelo del profesional.

Se es consecuente entonces con los presupuestos teóricos que se asumen en relación a las habilidades profesionales, particularmente para modelar las relacionadas con la planificación. Se hace necesario entonces precisar cuáles son las habilidades profesionales que debe dominar un estudiante de la carrera Matemática - Física para planificar el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática.

La bibliografía especializada en didáctica general en los últimos años habla en términos de dirección del proceso de enseñanza – aprendizaje, por esta razón en los modelos de formación inicial se identifica como uno de los problemas profesionales y de los objetivos generales que debe distinguir el modo de actuación de los futuros profesores.

Resulta de interés la opinión de Quesada y otros (2006) sobre la labor docente. Para ellos es en esencia una permanente planificación estratégica en la que deben cumplir con las siguientes etapas: diagnosticar, planear, aplicar y retroalimentar. Al explicar la planeación señalan que consiste en la definición del plan único de acción, que incluye la identificación de los métodos y recursos, las tácticas y estructuras organizativas y metodológicas, así como el diseño de las estrategias para su realización.

A juicio de los autores en estos criterios no se revelan con suficiente claridad el análisis de todos los componentes del proceso de enseñanza – aprendizaje al realizar su planificación, y en su explicación no se aprecia el necesario carácter integrador entre las diferentes etapas, cuestiones en las que más adelante se profundiza. Los autores de este trabajo coinciden con Peña y otros (2002) al considerar la planificación como un proceso complejo, que no se desarrolla linealmente y que exige de la creatividad del profesor, razón por la cual es necesario comenzar su análisis desde la formación inicial.

Por otra parte Pérez (2007) al estudiar las cuestiones relacionadas con la planificación de la enseñanza reconoce que consiste en la determinación de las influencias que ejerce el docente sobre los alumnos para lograr el aprendizaje. Destaca también los criterios de Guzmán y Romero (2002) en relación a los tipos de planificación existentes: el fundamental, que se elabora antes de la interacción alumno - docente, y el regulador, que se confecciona durante esta interacción. Para los autores ambos son importantes pero se centra la atención solo en el primero de los casos.

Buscando perfeccionar la labor de los profesores de matemática Pérez y otros (2013) plantean que al concebir la dirección del proceso de enseñanza – aprendizaje se deben diferenciar cuatros fases que se interrelacionan y complementan, las mismas se tienen en cuenta para diferenciar las funciones de la dirección: planificación, organización, ejecución y control. Estos insisten en que las fases de planificación y organización se interrelacionan en un proceso complejo, no esquemático y sin rigidez de pensamiento, con lo cual se está plenamente de acuerdo.

Se observa que una vez más los autores que se mencionan analizan la temática desde la visión del trabajo metodológico; explican la preparación de la asignatura como el resultado de la planificación a largo, mediano y corto plazo, es decir, el tratamiento metodológico de la unidad, el diseño de los sistemas de clases y la planificación de clases respectivamente. Lo anterior confirma la pertinencia de realizar una mirada desde la formación inicial, momento en que estas habilidades deben ser formadas y desarrolladas en los estudiantes de la carrera. A continuación se centra la atención en el análisis metodológico de la unidad.

En el contexto extranjero se identifica esta importante habilidad como el diseño o la planeación de unidades didácticas y se destacan los trabajos de Romero (2004), Lupiáñez y Romero (2008), Godino y otros (2008), Guzmán (2007), Zuluaga y Buitrago (2013) entre otros.

En sus trabajos los elementos más significativos son: la identificación del análisis didáctico a partir de un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debe idealmente diseñar las actividades de enseñanza y aprendizaje y sus potencialidades para el desarrollo de una actitud positiva hacia la enseñanza de las matemáticas de modo que valore su papel formativo en la educación de los ciudadanos; siempre considerando el contexto social y los fundamentos teóricos de la escuela cubana actual.

En Cuba los autores que investigan en didáctica de la matemática también han analizado esta habilidad; se destacan entre ellos Peña y otros (2002), Enis (2008), Fernández (2010), Pérez y otros (2013). La diferencia más relevante radica en que ha sido vista siempre desde la realización del trabajo metodológico, es decir, pensando en profesores ya graduados. Por otra parte los trabajos más recientes aun no logran dar una respuesta que satisfaga las exigencias actuales para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Por tales razones a seguidas se propone un procedimiento para ser utilizado desde la formación inicial del profesor de matemática.

4. El análisis metodológico de la unidad. Propuesta de un procedimiento para su realización.

Los puntos coincidentes y las diferencias apreciables en los trabajos consultados que se relacionan con el análisis metodológico de la unidad permiten considerar esta habilidad profesional como: la actividad que implica el análisis individualizado de cada uno de los componentes no personales del proceso de enseñanza – aprendizaje a partir de su carácter de sistema, las particularidades de los componentes personales y el contexto donde se realizará el mismo, teniendo como punto de partida las orientaciones metodológicas del programa y los lineamientos de trabajo de la asignatura matemática. La misma se realiza de forma colectiva y/o individual previo al diseño del sistema de clases y la planificación de las clases de la unidad o subunidad temática correspondiente en función de elevar la calidad del proceso de enseñanza – aprendizaje.

Para la realización entonces del análisis metodológico de la unidad los autores consideran oportuno preparar a los futuros profesores de matemática para realizar las siguientes acciones:

1. Analizar los objetivos de la unidad y sus relaciones con las demás unidades del programa y asignaturas del grado.
2. Analizar el sistema de contenidos de la unidad y sus relaciones con contenidos antecedentes.
3. Analizar los métodos y procedimientos más propicios para el desarrollo de la unidad.
4. Analizar los medios de enseñanza – aprendizaje que resultan más propicias para el proceso de enseñanza – aprendizaje durante el desarrollo de la unidad.
5. Analizar las formas de organización que resultan más propicias para el proceso de enseñanza – aprendizaje durante el desarrollo de la unidad.
6. Determinación de la estrategia de evaluación más efectiva para comprobar el cumplimiento de los objetivos planteados.

Lo anteriormente expresado es posible de esquematizar a partir de la siguiente figura.

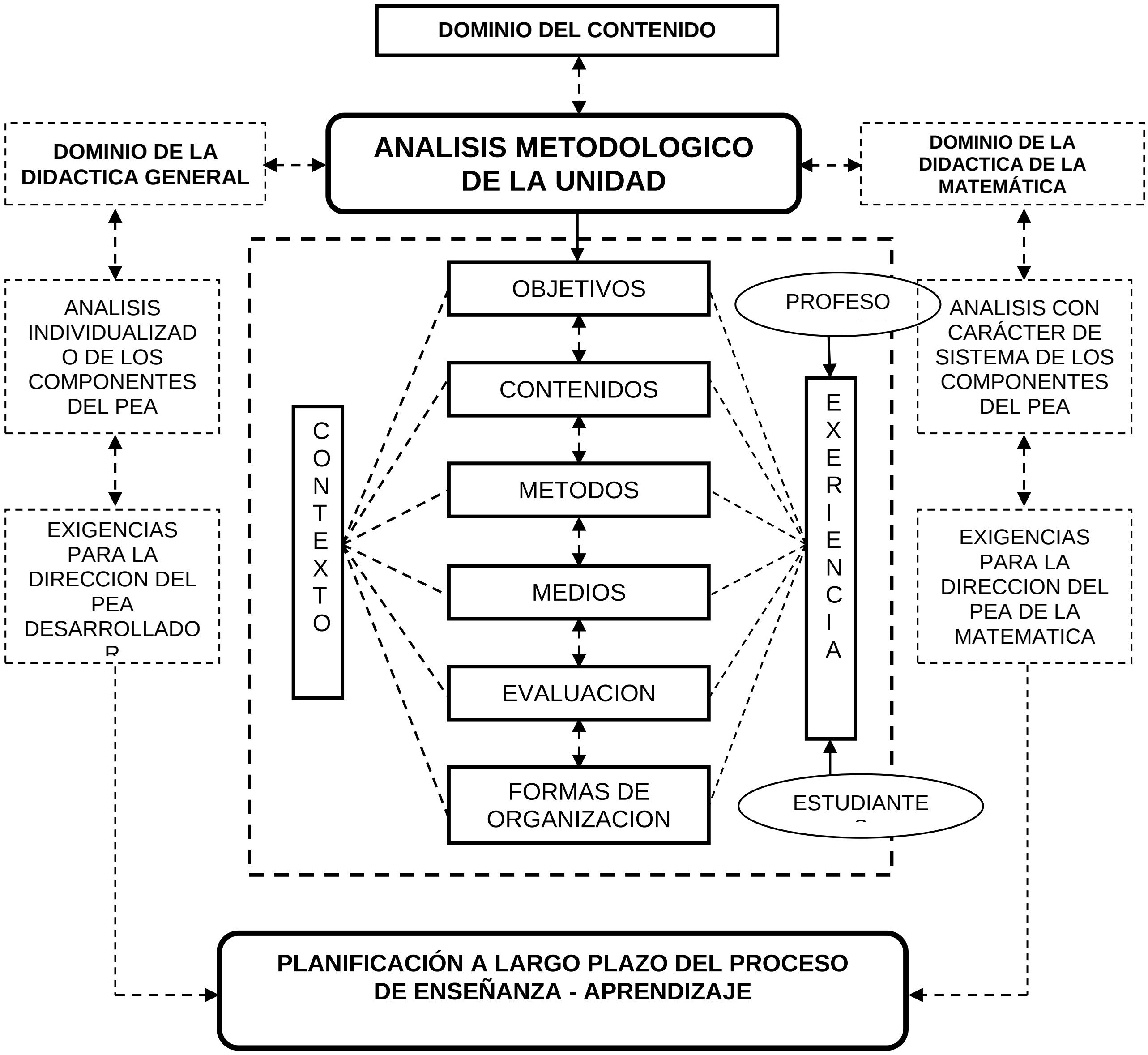


Figura # 1 Análisis metodológico de la unidad

Para la realización de cada una de las acciones que anteriormente se plantearon se proponen entonces las siguientes operaciones:

1. Analizar los objetivos y sus relaciones con los de las demás unidades del programa y asignaturas del grado.

- Identificar los objetivos generales según los diferentes campos de estudio y sus potencialidades para promover una cultura científica.
- Determinar la relación de los objetivos con los de la asignatura en el grado y el nivel, así como su proyección futura.
- Identificar las líneas directrices relativas a conocimientos, habilidades y formas de pensamiento matemático que predominan en la unidad.
- Identificar los objetivos antecedentes de la asignatura, las variantes para diagnosticarlos y para asegurar las condiciones previas.

- Identificar los objetivos de otras asignaturas que demuestren el papel de la matemática para comprender fenómenos de otras ciencias y sus aplicaciones.
- Identificar las ideas del desarrollo histórico de los contenidos a enseñar que pueden ser utilizados para la motivación de los estudiantes.

2. Analizar el sistema de contenidos de la unidad y sus relaciones con contenidos antecedentes.

- Identificar los tipos de conocimientos (conceptos y definiciones, teoremas y sus demostraciones, procedimientos) y su significado.
- Identificar las habilidades matemáticas a desarrollar, sin desaprovechar la modelación, argumentación, transferencia y la comunicación de resultados.
- Identificar las potencialidades de los conocimientos y las habilidades para la formación integral de los estudiantes.
- Determinar las potencialidades de los contenidos para la representación de situaciones de diferentes contextos mediante modelos analíticos o gráficos.
- Valorar las situaciones de la vida, la ciencia, la técnica y el arte que desde el punto de vista educativo se puedan trabajar desde el contenido.
- Identificar los contenidos de otras asignaturas para establecer nexos interdisciplinarios.
- Identificar los tipos de tareas que resulten más significativos para los estudiantes atendiendo a los niveles de desempeño cognitivo y la simbología y terminología matemática más apropiados al contexto.
- Analizar los errores más frecuentes en el aprendizaje del contenido en cursos anteriores, sus causas y posibles acciones de intervención.

3. Analizar los métodos y procedimientos para el desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje.

- Seleccionar los métodos que propicien la implicación de los estudiantes en la búsqueda de los contenidos y la comprensión matemática.
- Identificar los procedimientos heurísticos que despierten la curiosidad científica durante el desarrollo de los contenidos.
- Seleccionar las formas de trabajo y de pensamiento matemático que permitan interiorizar la utilidad del contenido.
- Identificar las estrategias de enseñanza - aprendizaje que pueden ser utilizadas durante el desarrollo de los contenidos.

4. Analizar los medios de enseñanza – aprendizaje para el desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje.

- Seleccionar los libros de textos y los cuadernos complementarios donde se desarrollen los contenidos.
- Identificar otros textos complementarios donde se desarrollen los contenidos.
- Identificar los software educativos y/o asistentes matemáticos que pueden ser utilizados para la introducción y/o fijación de los contenidos.
- Determinar medios de enseñanza que se pueden elaborar para la introducción y comprensión del significado de los contenidos.
- Seleccionar materiales audiovisuales que pueden utilizarse para la introducción y comprensión de los contenidos.

- Seleccionar resultados de las investigaciones científicas y experiencias de avanzada que pueden ser utilizados para el desarrollo de los contenidos.
- Determinar los medios de enseñanza - aprendizaje que son necesarios para el trabajo en la pizarra y/o la libreta de los estudiantes.

5. Analizar las formas de organización para el proceso de enseñanza – aprendizaje.

- Seleccionar los tipos de clases a utilizar durante el desarrollo de los contenidos.
- Seleccionar otras formas de organización del trabajo docente que puedan utilizarse para el desarrollo de los contenidos o para el trabajo diferenciado.
- Realizar la propuesta de dosificación de los contenidos teniendo en cuenta el diagnóstico individual y grupal de los estudiantes.

6. Determinar la estrategia de evaluación para comprobar el cumplimiento de los objetivos planteados.

- Identificar los objetivos fundamentales a evaluar de modo que sobrepase el nivel reproductivo.
- Identificar el nivel de complejidad e integralidad en que se evaluará cada objetivo.
- Determinar las variadas formas de evaluación para cada objetivo.
- Determinar las vías de evaluación para cada objetivo.

Consideraciones finales

La formación inicial del profesor de matemática sin dudas en la actualidad requiere de modificaciones sistemáticas que se correspondan con las exigencias más actuales de la sociedad. Los cambios en los roles del docente y el desarrollo de las tecnologías exigen de la concepción de un proceso caracterizado por el enfoque profesional pedagógico que prepare a los futuros profesionales para enseñar la matemática de una manera diferente.

La Didáctica de la Matemática es la disciplina responsabilizada con la preparación de los estudiantes de la carrera para la planificación del proceso de enseñanza – aprendizaje. Sus exigencias más actuales redundan en la necesidad de integrar los tres componentes del proceso de formación inicial y de responder a las tendencias contemporáneas de la enseñanza de la matemática.

El desarrollo de las habilidades profesionales para la planificación es hoy una exigencia importante para la formación inicial del profesor de matemática. La concepción de este proceso se sustenta en la teoría de la actividad a partir de la consideración de las acciones y operaciones a realizar en cada momento.

En la planificación de la enseñanza desempeña un papel fundamental el enseñar a los estudiantes de la carrera a realizar el análisis metodológico de la unidad, de ahí que se considere pertinente la propuesta de un procedimiento que se caracterice por su carácter sistémico e integrador y que responda a las exigencias más actuales para la enseñanza – aprendizaje de la matemática.

Bibliografía

Abdulina, O. A. (1982). La preparación pedagógica general del maestro en el Sistema de Instrucción Superior Pedagógica. Moscú: Prosvischenie.

Álvarez, P. M., Almeida, C. B. y Villegas, E. V. J. (2013). El proceso de enseñanza – aprendizaje de la asignatura matemática documentos metodológicos. Material en soporte digital.

Álvarez, Z., R. M. (2000). La didáctica de las Ciencias Sociales: Eje de la formación del profesorado. En Modelos, contenidos y experiencias en la formación de profesores de Ciencias Sociales. Joan Pagés I. Blanch, Jesús Estepa Gimenez y Grabiel Través González. Universidad de Huelva. España.

Álvarez, Z., R. M. (1997). Hacia un currículum integral y contextualizado. Honduras: Editorial Universidad Nacional Autónoma.

Beltrán, P. C. (2011). La estructuración sistémica del contenido como base para la gestión de competencias profesionales pedagógicas desde la disciplina Didáctica de la Matemática. Tesis presentada en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Guantánamo: Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero.

Godino, J. D y otros. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. En: Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia, 17-19. Recuperado en: http://www.ugr.es/local/jgodino

Ginoris Q., O., F. Addine F. y J. Turcaz M. (2006). Didáctica General. Material Básico Maestría en Educación. Instituto Latinoamericano y Caribeño. Cuba: La Habana. Material en soporte digital.

Gómez G. P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemática de secundaria. Tesis doctoral. España: Universidad de La Rioja. Recuperado de: dialnet.unirioja.es.

Gómez G., P. y Romero, L.R.. (2002). Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Recuperado de http://cumbia.ath.cx/lr.htm

Jon P. M. y otros. (2002). El Tratamiento Metodológico de una Unidad y de un Sistema de Clases. En El transcurso de las Líneas Directrices y la Planificación de la enseñanza en los Programas de Matemática de los municipios seleccionados para las Transformaciones del Programa de las Secundarias Básicas. Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Lupiáñez, J. L. y Romero, R. L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En PNA, 3(1), 35 - 48.

Martínez L., M. (s/a). La formación de los profesionales: tarea básica de las universidades. Organización científica de la Educación Superior en pregrado. Material en soporte digital.

Massón C. R. M., Lavigne M. J. L. y Sosa V. A. (2011). Estudio comparado en la formación de profesores de Secundaria Básica. Cuba: Palcograf.

Ministerio de Educación, Cuba. (2010). Modelo del Profesional de la Carrera Licenciado en Educación, especialidad Matemática – Física. Material en Soporte Digital.

Ministerio de Educación. (2010). Programa de la disciplina Didáctica de la Matemática. Material en soporte digital.

Ministerio de Educación. (2014). Indicaciones metodológicas y de organización de la carrera Matemática – Física. Material en soporte digital.

Mora Z. A. y Buitrago J. O. (2013). Aprender a enseñar matemáticas desde la planificación. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. p. 384.

Romero, L. R. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. En: Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado, 8 (1). Universidad de Granada.

Ruiz P. A. M. (2007). La integración de conceptos matemáticos a partir de las relaciones conceptuales clásicas en la educación preuniversitaria. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Sancti Spiritus.

Torres F. P. (2010). El arte de enseñar científicamente. Consejos útiles para docentes noveles. Cuba: La Habana. Material en soporte digital.

Autor/es:

Andel Pérez González. Sancti Spiritus, Cuba, 1979. Máster en Educación Superior, mención Docencia Universitaria. Profesor Auxiliar. Universidad de Ciencias Pedagógicas Silverio Blanco Núñez. Profesor de Didáctica de la Matemática. Investiga la formación inicial del profesor de matemática y su formación didáctica. Actualmente realiza su tesis doctoral.

Ana Teresa Garriga González. Sancti Spiritus, Cuba, 1960. Máster en Ciencias de la Educación, mención Secundaría Básica. Profesora Auxiliar. Universidad de Ciencias Pedagógicas Silverio Blanco Núñez. Profesora de Fundamentos de la Matemática Escolar. Investiga el seguimiento a los egresados de la carrera Matemática.

Marta Beatriz Valdés Rojas. Sancti Spiritus, Cuba, 1963. Doctora en Ciencias Pedagógicas. Profesora Titular. Universidad de Ciencias Pedagógicas Silverio Blanco Núñez. Profesora de Pedagogía. Investiga la formación inicial de los profesionales de la educación desde los procesos de autoevaluación y acreditación de instituciones y carrera universitarias.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 56-72

Análise de erros em resoluções de equação e inequação exponencial: revelando as dificuldades dos alunos

Maria Luisa Perdigão Diz Ramos, Edda Curi

Fecha de recepción: 26/06/2014
Fecha de aceptación: 28/11/2015

Resumen	Este artículo tiene como objetivo analizar, clasificar e identificar los errores cometidos por los estudiantes en las actividades que implican la ecuación y la desigualdad exponencial. La investigación es parte de un estudio doctoral que se llevó a cabo con 37 alumnos del 1º año de la Enseñanza Secundaria de un curso técnico en una escuela pública de Minas Gerais - Brasil. Utilizamos del análisis de contenido en la resolución presentada por los estudiantes y así hemos creado tres categorías con el objetivo de identificar los errores encontrados. Como resultado, fue constatado que los estudiantes tenían dificultades desde de la Enseñanza Primaria, además de las relacionadas con los contenidos investigados. **Palabras clave**: errores; ecuación y la desigualdad exponencial; Enseñanza Secundaria
Abstract	This article aims to analyze, categorize and identify mistakes made by students in activities that involve exponential equation and inequality. The investigation is part of a doctoral research that was conducted with 37 students from a public High School focused on professional and technological education in Minas Gerais / Brazil. We use content analysis in the resolution by the students and so we created three categories for the purpose of identifying the errors found. As a result, it was found that students had difficulties coming from the Elementary School, in addition to those relating to the contents investigated. **Keywords**: mistakes; exponential equation and inequality; Elementary School
Resumo	Este artigo tem como objetivo analisar, identificar e categorizar erros cometidos por alunos em atividades que envolvem equação e inequação exponencial. A investigação faz parte de uma pesquisa de doutorado que foi realizada com 37 alunos do 1º ano do Ensino Médio de um curso técnico de uma escola pública de Minas Gerais – Brasil. Utilizamos da análise de conteúdo na resolução apresentada pelos alunos e assim, criamos três categorias com a finalidade de identificar os erros encontrados. Como resultado, foi possível constatar que os alunos apresentaram dificuldades oriundas do Ensino Fundamental, além daquelas referentes aos conteúdos investigados. **Palavras-Chave**: erros; equação e inequação exponencial; Ensino Médio

Introdução

O erro vem sendo pesquisado na Educação Matemática ao longo dos anos. Cury (2008) apresenta as ideias de alguns precursores que trataram o erro em suas pesquisas. Thorndike é mencionado pela autora como o pai da Psicologia Educacional e enfatizava em seus trabalhos que os interesses vitais do aluno devem ser respeitados, procurando não o entediar com “dificuldades inúteis”. Para ele, era necessário o reforço dos hábitos que permitiam ao aluno a prática dos cálculos. Devido às críticas recebidas por outros colegas, que consideravam seu método baseado em exercícios repetitivos, Thorndike passou a investigar dificuldades e erros relacionados com problemas que ocorrem nas operações aritméticas fundamentais, tornando-se um dos precursores dos estudos relacionados aos erros.

Cury (2008) também menciona o trabalho realizado pelo psicólogo russo Krutetskii. Em seu trabalho, Krutetskii mostra a importância de se analisar o processo e não apenas o produto. Como exemplificado por ele, não se deve avaliar somente a alternativa assinalada em uma questão de múltipla escolha ou o resultado apresentado em uma questão aberta; é necessário também analisar o raciocínio apresentado durante o processo de resolução da questão. Analisando o processo dessa maneira é possível perceber as habilidades matemáticas dos estudantes, além das dificuldades por eles apresentadas. O pesquisador afirma também que, nessa forma de análise, pode-se questionar os estudantes a respeito dos erros cometidos e ajudá-los na reconstrução do conhecimento.

No trabalho desenvolvido por Krutetskii e sua equipe foram utilizados vários métodos de pesquisa que envolviam conteúdos matemáticos de diversos ramos tais como, Álgebra, Aritmética, Geometria e Lógica. Na investigação foram envolvidos desde um único estudante até um grande grupo, além de tomarem opinião de pais, professores e matemáticos. Levaram em consideração não somente a produção escrita dos estudantes, mas também a produção oral, como, por exemplo, o registro da resolução das questões realizadas em voz alta e o questionamento das respostas apresentadas.

Segundo Cury (2008), os trabalhos realizados por esses pesquisadores datam do início do século XX e a partir deles foi possível perceber que, para favorecer a aprendizagem e eliminar as dificuldades e os erros, era necessário utilizar da análise em produção escrita realizada pelo aluno. Então, acreditamos que seja fundamental o professor criar situações nas quais os alunos se tornem capazes de expor suas dificuldades e o professor capaz de analisá-las. Analisar a produção escrita do aluno não é simplesmente verificar o que ele acertou ou errou. O professor deve ter a preocupação de saber o grau de conhecimento que o aluno detém e que o conduz a elaborar uma determinada resposta, pois essa ação é que o levará a descobrir as dificuldades de aprendizagem apresentadas por esse aluno.

Neste artigo trazemos a análise de erros realizada na produção escrita de 37 alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública de ensino técnico localizada em Minas Gerais – Brasil. Essa análise faz parte do resultado da pesquisa de doutorado da primeira autora. Mostraremos neste trabalho a análise de erros realizada em duas questões sobre o conteúdo de equação e inequação exponencial.

Revisão de Literatura

Iniciaremos esta revisão levando em consideração a afinidade existente entre as palavras dificuldade e erro. Para isso, usaremos dos trabalhos de alguns pesquisadores com a finalidade de descrever as acepções que eles apresentam para a palavra erro e qual a relação delas com a palavra dificuldade.

No campo semântico, De La Torre (2007) descreve o erro usando quatro pontos cardeais: efeito destrutivo, deturpativo, construtivo e criativo. O erro é apontado por ele de uma forma binária: a negativa (efeito destrutivo e deturpativo) e a positiva (construtivo e criativo). Na forma negativa, o erro tem um efeito destrutivo, isto é, ele provoca falhas irreversíveis; já na forma de estímulo criativo o erro pode ser considerado como um instrumento de progresso.

Além disso, De La Torre (2007) assinala ainda que o erro pode indicar duas situações: resultado e processo. O erro visto como resultado tem um significado negativo, isto é, apresenta um efeito deturpativo ou destrutivo. Visto como processo pode ser considerado como procedimento construtivo, método de descoberta científica ou como uma forma de transmissão didática, portanto, vista como um estímulo criativo. Essa criatividade, conforme apontada pelo autor, “[...] não está, como é natural, no erro, mas nas pessoas que são capazes de gerar novas ideias apoiando-se nele” (p. 15).

Para a pesquisadora Borasi (1989) o erro pode contribuir para uma melhor compreensão e aprendizagem da Matemática. Na maioria das vezes o professor acredita que a melhor forma de capacitar o aluno é por meio da transmissão direta do assunto a ser lecionado. Ele não percebe que o aluno pode chegar a uma compreensão mais profunda de um conteúdo matemático a partir do estudo, análise e exploração criativa de alguns erros.

De acordo com Rico (1998), o professor não pode ignorar a capacidade do aluno, nem tão pouco desprezar os erros que ele comete. Ele descreve que a maioria das investigações considera as seguintes características predominantes nos erros cometidos pelos alunos:

- Os erros são surpreendentes e permanecem ocultos para o professor durante algum tempo.
- Os erros são persistentes e para serem retificados é necessário que haja uma reorganização do conhecimento do aluno.
- Os erros podem ser sistemáticos ou podem acontecer por engano. No primeiro tipo de erro, o aluno possui uma compreensão equivocada e a utiliza achando

que está correta. Esse tipo de erro acontece com uma frequência maior e contribui mais para revelar o processo mental do aluno. No segundo tipo, o erro é proveniente de lapso, descuido ou esquecimento temporário.

- Os erros acontecem por falta de conhecimento de conceitos e símbolos.

Analisando o erro em um contexto escolar, o fato de o aluno cometer um equívoco, ou uma falha, ou um descuido proveniente de seu pensamento ou ação, já é o suficiente para alertar o professor de que alguma coisa está errada e que alguma atitude deve ser tomada. Assim, citando Socas (1997), Lupiáñez (2013) afirma que o erro é uma manifestação visível de uma dificuldade. Ainda, segundo o autor, os erros cometidos em atividades matemáticas dão condições aos professores de visualizarem as dificuldades dos alunos.

A busca do conhecimento depende muito da interpretação daquilo que está sendo analisado. Na maioria das vezes, essa busca não acontece sem que o aluno demonstre incertezas. Então, é importante que o erro seja visto pelo professor como um elemento didático e não como algo que deva ser ignorado. Tratado dessa maneira, o erro se transforma em estratégia de uma pedagogia que tem como objetivo a superação das dificuldades. Corroborando com o exposto, Dullius et al. (2012) descrevem que "o professor deve estar atento à origem do erro cometido pelo estudante, para poder intervir de forma a ajudá-lo a detectar e superar as dificuldades." (p. 73).

Devido ao que foi mencionado, consideramos que as duas palavras estão atreladas, pois, no nosso entendimento, o erro é uma das formas pelas quais os alunos revelam suas dificuldades em um determinado conteúdo escolar.

A seguir, apresentaremos alguns trabalhos que tem como foco a análise de erros na produção escrita de alunos. Um dos estudos que chegaram ao Brasil foi o realizado por Borasi (1989), o qual apresenta uma contribuição expressiva sobre a visão do erro na Educação Matemática. Iniciaremos a apresentação por meio desse trabalho, cujo foco de investigação foi o Ensino Básico.

O trabalho de Borasi (1989) é intitulado "Students' Constructive Uses of Mathematical Errors: A Taxonomy". Com o objetivo de mostrar como os erros podem ser utilizados de forma construtiva no processo ensino-aprendizagem, a autora realizou uma investigação com duas turmas de alunos do *11th grade*[1], a qual envolvia um experimento composto de 10 questões sobre definições matemáticas. Ao todo, registrou-se 20 erros que foram analisados. Em seguida, a autora deixa uma contribuição denominada por ela "Taxonomia para o uso construtivo dos erros" (p. 27, tradução nossa). Como resultado, identificou-se oito elementos específicos que foram considerados como as formas mais adequadas para se usar construtivamente os erros.

[1] O sistema de ensino americano inclui do nível pré-escolar até 12° ano (K – 12). Atualmente no Brasil o Ensino Básico está estruturado em 12 anos, sendo assim, *11th grade* corresponde ao 2° ano do Ensino Médio.

Na mesma época, outro trabalho foi realizado por um grupo de pesquisadores. Também, com a finalidade de analisar os erros cometidos por estudantes, Resnick et al. (1989) realizaram uma pesquisa com 113 crianças dos Estados Unidos, França e Israel, em níveis de escolaridade que variavam da *4th grade* até *6th grade*[2]. O estudo tinha como objetivo verificar os erros cometidos pelos alunos ao trabalharem com números e frações decimais e verificar se tais erros eram provenientes de tentativas de integração do novo conhecimento com o que já havia sido ensinado sobre números inteiros. Para isso foram aplicados testes, nos quais os alunos deveriam identificar os números maiores e menores em uma relação de valores apresentados na forma decimal e de fração. Como resultado, foi possível compreender a lógica de raciocínio desses alunos e verificar que eles fizeram uso de regras de comparação de números inteiros ao compararem números decimais.

Em sua pesquisa de mestrado, Feltes (2007) analisou qualitativamente erros em testes aplicados a alunos da 7ª e 8ª séries (8º e 9º anos) do Ensino Fundamental e alunos do 1º ano do Ensino Médio ao resolverem questões de potenciação, radiciação e equações exponenciais. Os erros foram classificados em 17 categorias e assim foi possível verificar que as maiores dificuldades estavam relacionadas a operações numéricas e às propriedades da potenciação. Além disso, a autora aplicou um questionário aos professores de Matemática, que lecionavam nas escolas investigadas, sobre os erros cometidos por seus alunos. A partir do resultado desse questionário, a autora constatou que os professores investigados consideravam que os erros eram provenientes de falta de estudo e/ou de atenção.

Dullius, Quartieri e Furlanetto (2012) analisaram 10 questões das Olimpíadas de Matemática realizadas por 311 alunos das três séries do Ensino Médio de 26 municípios do Vale do Taquari em Lajeado/RS. A prova teve como uma de suas particularidades a interdisciplinaridade, pois, a contextualização das questões trouxe problemas do cotidiano, abordando conteúdos previstos nas três séries do Ensino Médio. Partindo de cinco categorias levantadas por meio dos referenciais teóricos selecionados, os autores apresentaram os erros cometidos por questão, seguido de gráficos com o objetivo de exibir os percentuais de erros por categorias em cada série. De uma forma geral, observou-se uma grande incidência de erros devido à compreensão do enunciado e de erros devido a dificuldades com o conteúdo investigado.

Também realizando análise de erros em respostas parcialmente corretas e incorretas em uma questão sobre resolução de equações, Cury, Ribeiro e Müller (2011) apresentam o resultado de uma pesquisa feita com 141 alunos de cursos de licenciatura de Matemática de dez instituições de ensino superior do Brasil. Os dados analisados foram discutidos utilizando-se como referenciais teóricos algumas pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Álgebra, bem como o conceito de conhecimento pedagógico do conteúdo. As respostas foram classificadas como corretas, parcialmente corretas, incorretas e ausência de respostas. Das 89 respostas parcialmente corretas e incorretas, as três parcialmente corretas não

[2] Levando em consideração o que foi dito na nota anterior, o *4th grade até 6th grade* correspondem do 5° ao 7° ano do Ensino Fundamental.

foram categorizadas, por apresentarem erros distintos. Para as 86 respostas incorretas foram criadas cinco categorias e em cada uma delas foram apresentados os erros e uma síntese sobre eles. Nesse trabalho, os autores descreveram em suas considerações finais que, devido ao baixo índice de acerto na questão (13%), os alunos demonstraram a falta de conhecimento sobre equações e seus processos de resolução e alertaram para a importância de que os formadores de professores de Matemática também devem levar em conta o conhecimento pedagógico do conteúdo. Assim, os autores consideraram também a importância de se discutir as causas dos erros com esses futuros professores a fim de conscientizá-los da necessidade de analisar os erros cometidos pelos alunos e ajudá-los na superação das dificuldades.

Borasi (1989), Resnick et al. (1989), Feltes (2007) e Dullius (2012) realizaram seus trabalhos com alunos da Educação Básica e obtiveram resultados significativos com relação a importância da análise de erros na produção escrita dos alunos em questões de Matemática. No que diz respeito à Formação Inicial de Professores, a pesquisa de Cury, Ribeiro e Müller (2011), além de apresentarem análise de erros em questões de Matemática, descreveram, também, a importância dos professores trabalharem a análise de erros com os alunos de licenciatura.

Metodologia de Pesquisa

O método aqui adotado foi o de pesquisa qualitativa, utilizando-se da análise de conteúdo nas produções escritas desses alunos. Em conformidade com a análise de conteúdo definida por Bardin (1977), executamos a análise em três etapas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na primeira etapa, pré-análise, a resolução da questão apresentada por cada aluno foi identificada com a letra A seguida de um número usado para referenciá-lo neste trabalho. Conforme Cury (2013), para correção das resoluções apresentadas foram criadas quatro classificações denominadas como: Resposta correta – Código 2; Resposta parcialmente correta – Código 1; Resposta incorreta – Código 0 e Resposta em Branco – Código 9. Na segunda etapa, exploração do material, trabalhamos com "o processo de unitarização e classificação das respostas parcialmente corretas ou incorretas" (CURY, 2013, p. 6). As respostas semelhantes foram agrupadas e, posteriormente, os tipos de erros categorizados. Para isso, utilizamos da análise de erros como parte integrante da análise de conteúdo. Na última etapa, tratamento dos resultados, utilizamos exemplos retirados do próprio *corpus* para descrevermos os erros identificados dentro de cada categoria.

Para realização desta pesquisa contamos com a participação dos 37 alunos que compõem a turma B do 1º ano da Educação Profissional Tecnológica de Nível Médio na Modalidade Integrada de um curso técnico ofertado por uma escola pública de Minas Gerais – Brasil. A escolha dessa turma se deu pelo fato da pesquisadora (primeira autora) lecionar para os alunos a disciplina técnica de Sistemas Digitais, tendo, portanto, uma maior proximidade com eles.

As questões aqui analisadas foram as de números 16 e 17, retiradas do teste investigativo composto por 20 questões. O teste foi aplicado a esses alunos durante o desenvolvimento do trabalho de doutorado da pesquisadora e abordava o conteúdo lecionado na disciplina de Matemática, no 1º semestre do 1º ano do Ensino Médio.

Apresentaremos os resultados das questões da seguinte maneira:

- Inicialmente, descreveremos o enunciado, o objetivo e a resolução tomada como padrão em cada questão. Em seguida, será mostrado o quadro com o porcentual de respostas por questões classificadas como: correta, parcialmente correta, incorreta e em branco.

- Num segundo momento, apresentaremos os tipos de erros cometidos no teste investigativo por categoria, acompanhado de exemplo e texto-síntese.

Apresentação e Análise dos Dados

Iniciaremos, então, com a apresentação do enunciado, objetivo e resposta padrão para cada uma das questões. É importante que o professor defina uma resposta padrão a partir das respostas apresentadas pelos alunos, pois, assim, não estará julgando os erros de seus alunos a partir de suas estruturas mentais (DE LA TORRE, 2007). Por esse motivo, tomamos como respostas padrão para as questões 16 e 17 as apresentadas por A3 e A20, respectivamente.

A questão 16 traz o seguinte enunciado:

16 – Resolva a equação: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1} = 8$

Na análise da questão 16 temos como objetivo identificar as dificuldades do aluno com relação à resolução de equação exponencial. Para resolvê-la, o aluno deveria inverter a base e operar com expoente negativo, além de representar o número 8 em potência de 2. Em seguida, aplicar as propriedades da equação exponencial e achar os valores de x que satisfaçam a equação.

Na Figura 1 está representada a resolução dada por A3, sendo ela considerada a resposta padrão para a questão.

Figura 1 – Resposta Padrão da Questão 16 Apresentada por A3

$$(2^{-1})^{-x^2+1} = 2^3$$
$$2^{x^2-1} = 2^3$$
$$x^2-1-3=0$$
$$x^2-4=0$$
$$x=\pm\sqrt{4} \quad x=\pm 2$$

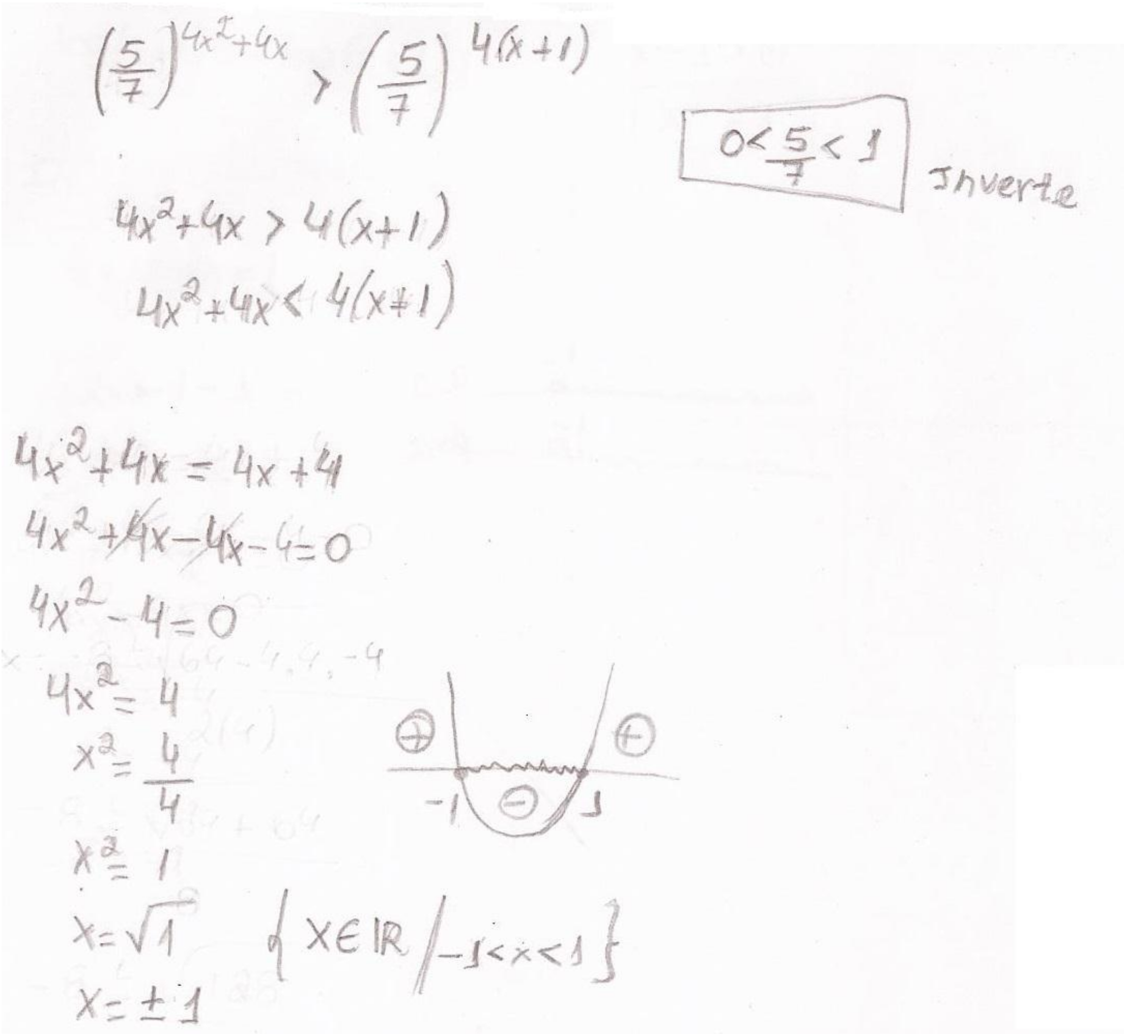
O enunciado da questão 17 foi:

17 – Determine os valores de x tais que $\left(\frac{5}{7}\right)^{4x^2+4x} > \left(\frac{5}{7}\right)^{4(x+1)}$.

Na questão 17, o nosso objetivo foi o de identificar as dificuldades do aluno ao resolver inequação exponencial, quando a base da potência se encontra entre 0 e 1. Para solucionar a questão, o aluno deveria aplicar as propriedades de uma inequação exponencial e inverter o sinal da relação de desigualdade entre os expoentes. Em seguida, achar os zeros da função polinomial do 2º grau e determinar, a partir do estudo do sinal da função $f(x) = x^2 - 1$, a solução da questão.

A Figura 2 apresenta a resolução dada por A20.

Figura 2 – Resposta Padrão da Questão 17 Apresentada por A20



No Quadro 1 estão apresentados o número de alunos e o valor percentual de respostas por classificação.

Quadro 1: Distribuição de Respostas por Classificação

Classificação	Questão 16		Questão 17	
	Nº	%	Nº	%
Correta	16	43	6	16
Parcialmente Correta	11	30	3	8
Incorreta	6	16	24	65
Em branco	4	11	4	11
Total	37	100	37	100

Analisando os dados do Quadro 1, verificamos que o maior índice de resoluções corretas ocorreu na questão 16. Na questão 17, 73% dos alunos apresentaram resoluções classificadas como parcialmente correta ou incorreta, sendo a maioria incorreta – 65%.

Analisando as resoluções parcialmente correta e incorreta foi possível identificar os erros cometidos pelos alunos e assim criar três categorias para esses erros, que relacionamos a seguir:

1. Erro no cálculo das raízes da equação do 2º grau ou dos zeros da função polinomial do 2º grau.

2. Erro na aplicação das propriedades da equação ou inequação exponencial.

3. Erro no estudo de sinal da função polinomial do 2º grau.

Na primeira categoria o tipo de erro identificado foi cometido durante o cálculo das raízes de uma equação do 2º grau. Um exemplo desse erro está mostrado na Figura 3.

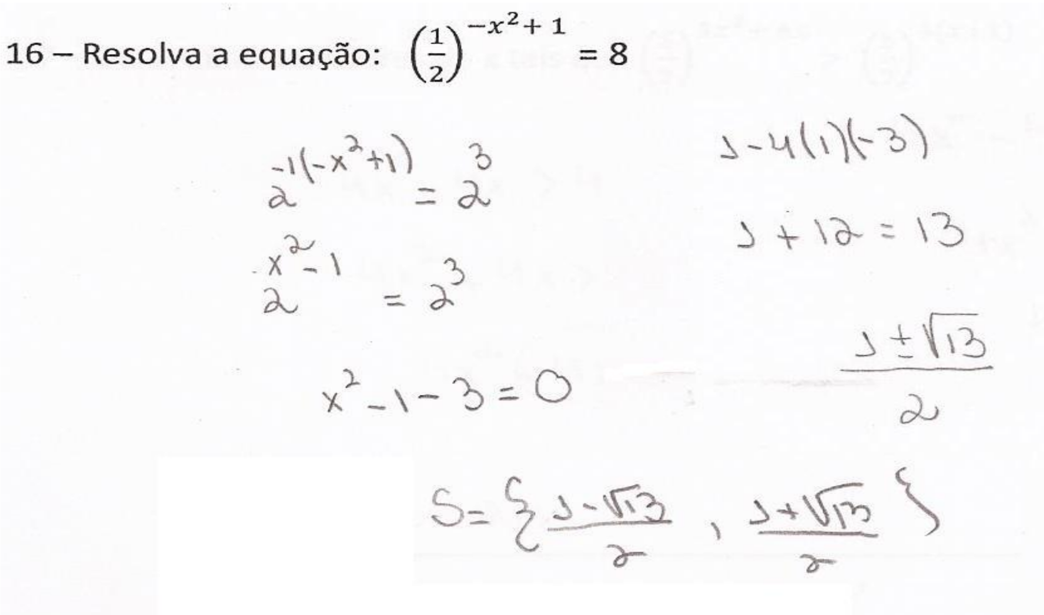
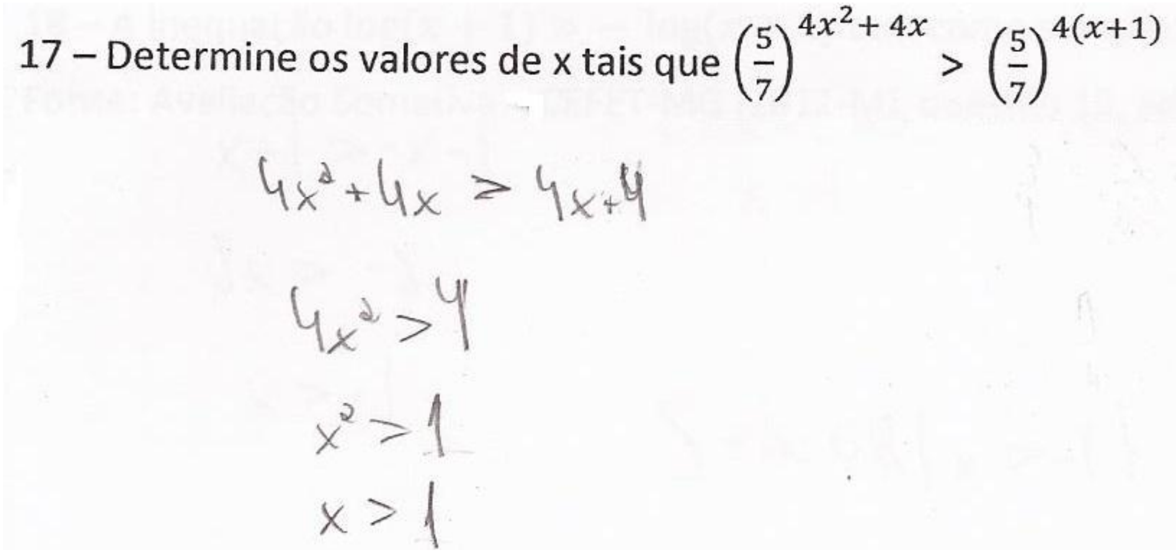


Figura 3 – Resposta Apresentada por A19

A19 errou ao calcular as raízes da equação de 2º grau que possui o coeficiente b igual a zero. O aluno resolveu corretamente a equação exponencial, mas no momento de encontrar as soluções, errou ao considerar na equação encontrada $x^2 - 1 - 3 = 0$ o valor de $b = -1$ e $c = -3$, ao invés de $b = 0$ e $c = -4$. Esse mesmo erro foi cometido por A10 na mesma questão. Entendemos que esses alunos desconhecem a existência de equações de 2º grau que não apresentam todos os coeficientes.

Diferentemente do que foi descrito acima, outro tipo de erro no cálculo das raízes de uma equação de 2º grau ou de uma função polinomial do 2º grau ocorreu de forma semelhante nas questões 16 e 17. Um dos erros está mostrado na Figura 4.

Figura 4 – Resposta Apresentada por A11



17 – Determine os valores de x tais que $\left(\frac{5}{7}\right)^{4x^2+4x} > \left(\frac{5}{7}\right)^{4(x+1)}$

$4x^2+4x > 4x+4$

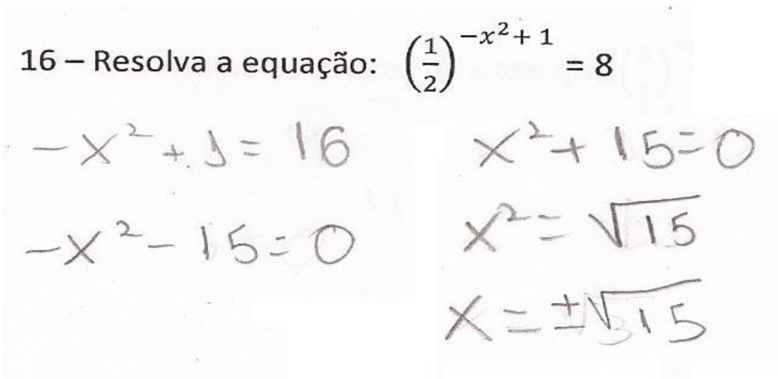
$4x^2 > 4$

$x^2 > 1$

$x > 1$

No desenvolvimento da questão 17, A11 encontrou somente um único zero para a função $f(x) = x^2 - 1$. Acreditamos que, pelo fato de b igual a zero, o aluno encontrou somente a raiz quadrada positiva do número, deixando, assim, de apresentar a raiz negativa na resolução. Talvez, por esse motivo, deixou de realizar o estudo de sinal da função. Também, não podemos deixar de destacar, que o aluno cometeu erro referente à categoria 2, o qual será descrito mais a frente.

Na segunda categoria, o tipo de erro encontrado nas duas questões foi referente à resolução incorreta de uma equação ou de uma inequação exponencial. Na questão 16 os alunos erraram ao aplicar as propriedades da equação exponencial, conforme apresentado na Figura 5.



16 – Resolva a equação: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1} = 8$

$-x^2+1=16$

$-x^2-15=0$

$x^2+15=0$

$x^2=\sqrt{15}$

$x=\pm\sqrt{15}$

Figura 5 – Resposta Apresentada por A24

Sem aplicar as propriedades da equação exponencial, A24 procurou resolver a questão usando de artifícios incorretos. Desconsiderando que o denominador faz parte da base da potência da equação exponencial, o aluno efetuou uma transposição do número 2, multiplicando-o pelo número 8 existente no segundo membro da equação, apresentando assim, resposta incorreta para a questão.

Na questão 17, o erro cometido pelos alunos nesta categoria foi devido a não identificação de que a base da potência da inequação estava entre 0 e 1. Dos 27 alunos que apresentaram resposta parcialmente correta e incorreta, 24 apresentaram esse tipo de erro. A Figura 6 exibe o erro cometido por esses alunos.

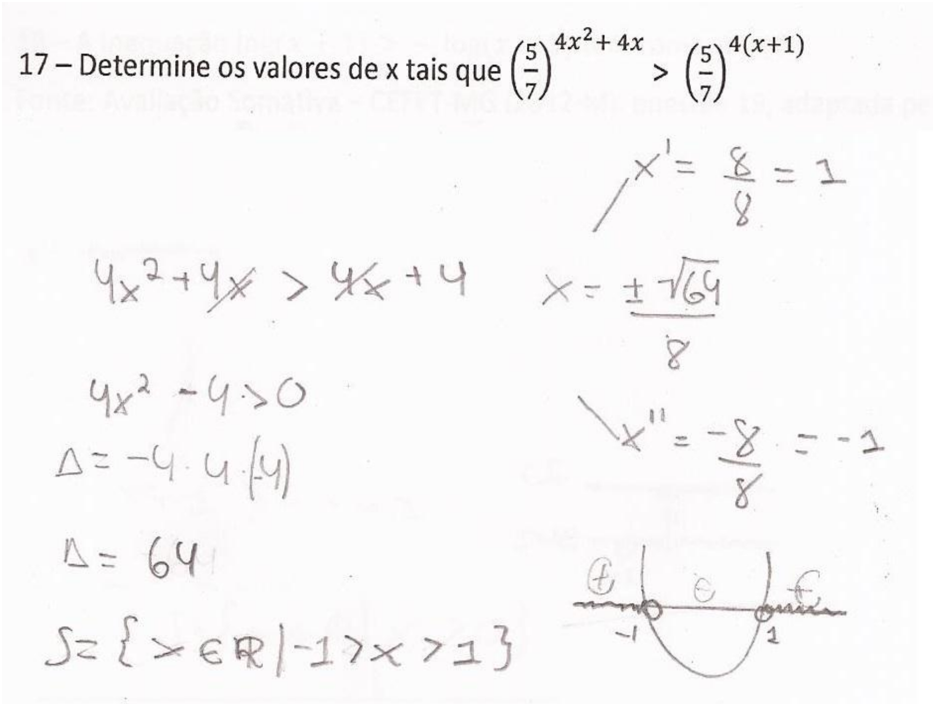


Figura 6 – Resposta Apresentada por A10

Como os alunos não identificaram que o valor da base da potência estava entre 0 e 1, logo não realizaram a inversão do sinal. Acreditamos que, para esses alunos, a resolução de uma inequação exponencial é realizada sempre da mesma forma, independentemente do valor da base da potência. Igualmente a A10, A11 também não realizou a inversão do sinal, conforme apresentado na Figura 4, além de ter cometido outros erros já mencionados.

Na terceira categoria se encontra o tipo de erro referente a não realização do estudo de sinal da função encontrada na questão 17. A Figura 7 mostra esse tipo de erro cometido por A15.

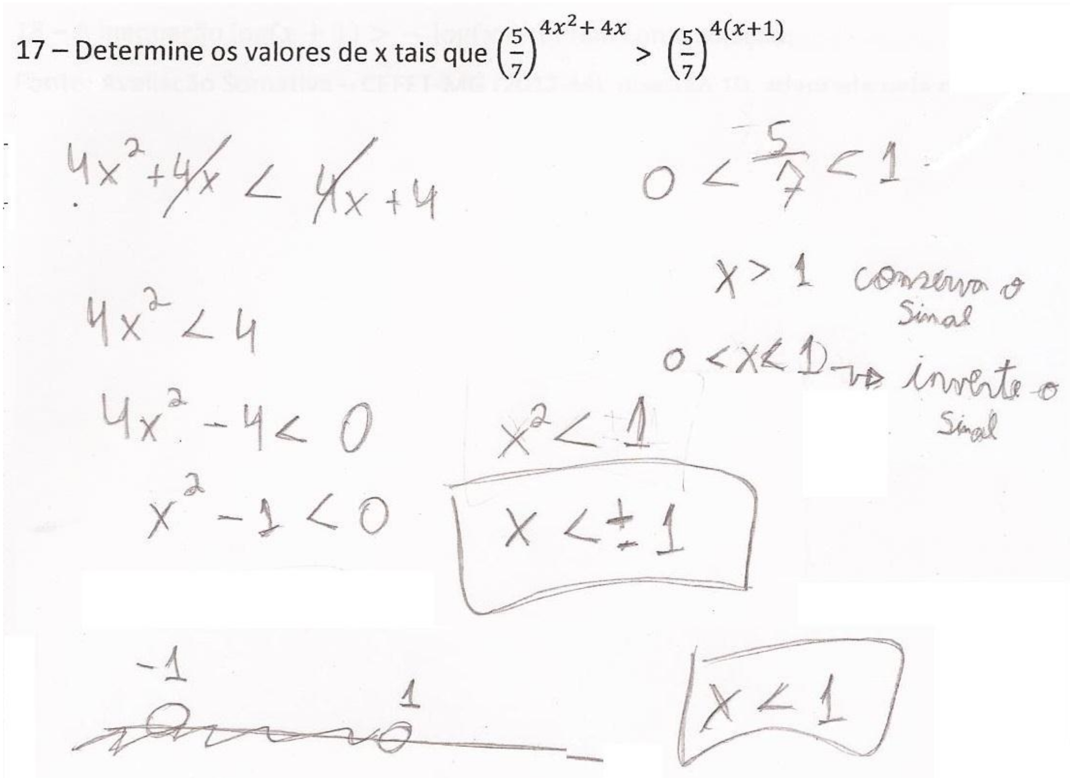


Figura 7 – Resposta Apresentada por A15

A15 resolveu corretamente a questão até o momento em que encontrou os zeros da função $f(x) = x^2 - 1$, mas, ao realizar o estudo de sinal da função, o aluno apresentou os zeros na reta real sem esboçar a parábola, definindo, assim, a solução incorreta para a questão.

Considerações Finais

Ao realizar a análise de erros nas resoluções apresentadas pelos alunos, identificamos erros provenientes do Ensino Fundamental, além de erros referentes ao conteúdo de equação e inequação exponencial, conteúdo esse que é abordado no Ensino Médio. Foi possível notar que, em algumas resoluções apresentadas, o erro cometido por alguns alunos foram, exclusivamente, erros referentes ao conteúdo do Ensino Fundamental.

Como dificuldade proveniente do Ensino Fundamental foi possível identificar erro cometido pelos alunos no cálculo das raízes de uma equação do 2º grau e nos zeros de uma função polinomial do 2º grau, quando essas possuem os coeficientes b ou c iguais a zero. Esses mesmos erros foram identificados por meio da análise de erros realizada na avaliação somativa desses alunos (RAMOS; CURI, 2014). Provavelmente, esses erros já vinham sendo cometidos por eles no cálculo das raízes de equações quadráticas desde o Ensino Fundamental, pois também os identificamos neste trabalho.

Lima (2007) aponta erros semelhantes cometidos por alunos ao encontrarem as raízes das seguintes equações quadráticas: $r^2 - r = 2$ e $m^2 = 9$. A autora descreve que uma única raiz é dada como resposta para cada equação e considera que parece ter faltado aos alunos “motivação para buscar outra raiz. [...] eles podem não pensar que é possível achar outro número que seja adequado para a situação, e se satisfazem com apenas uma raiz.” (p. 266).

Do que foi analisado, encontramos erros referentes à aplicação das propriedades de potência. Os alunos não conseguiram identificar que a fração $\frac{1}{2}$ deveria ser substituída pela potência de 2, ou seja, 2^{-1}, e que deveriam, também, ter transformado o número 8 em potência de 2, ou seja, 2^3, para resolverem a equação exponencial. Feltes (2007) também identificou erros análogos em seu trabalho de mestrado, além de outros erros, classificando-os em 17 categorias diferentes.

Os erros cometidos referentes ao conteúdo do Ensino Médio foram devido à aplicação incorreta das propriedades de uma equação ou inequação exponencial, além da forma incorreta de realizar o estudo de sinal da função encontrada na resolução da questão 17. Júnior (2011), em sua pesquisa, identificou erros referentes ao estudo de sinal na resolução de inequações.

A partir da análise de erros foi possível revelar as dificuldades que os alunos apresentam no conteúdo de equação e inequação exponencial. Por meio desse tipo de análise o professor não só identifica as dificuldades dos alunos, mas também poderá utilizar desses erros em sua prática de ensino. Para isso, o professor deve abandonar a pedagogia tradicional e utilizar de uma nova pedagogia, na qual o erro é visto como um instrumento que contribui para a aprendizagem do aluno.

Assim, a análise de erros pode ser assinalada como uma estratégia didática, pois é uma proposta de exploração e análise da produção escrita do aluno com o intuito de gerar uma fonte de construção de novos conhecimentos (PINTO, 2000; DE LA TORRE, 2007). Isso é possível, pois quando o aluno comete um erro ele está mostrando para o professor o seu conhecimento e em função do retorno, ele definirá se deve continuar utilizando desse conhecimento, ou optar por outro apresentado pelo professor (CORDEIRO, 2009).

Os erros podem ser ocasionados por vários motivos, e esses motivos podem ser identificados quando o professor analisa o processo e não só o resultado. É possível melhorar a estratégia didática, fazendo as intervenções necessárias com a finalidade de esclarecer os enganos. De La Torre (2007) vai além quando afirma que “Do mesmo modo que eliminar a febre não supõe erradicar a doença, mas encobri-la, o erro é um indicador de que determinados processos de ensino/aprendizagem não funcionam” (p. 78). Assim, compete ao professor usar de criatividade para melhorar o processo, pois, dessa forma não estará encobrindo o erro e sim procurando retificá-lo, para que ele não se torne recorrente. Um exemplo do uso do erro como estratégia didática foi apresentado por Ramos (2013).

A criação de novas estratégias didáticas é confirmada por Perrenoud (2000) quando afirma que, a partir de ideias compartilhadas com os alunos, o professor deve ser capaz de criar formas para facilitar a construção de conhecimento. Para ele, “A relação com o saber do professor é tão determinante quanto sua inventividade didática” (p. 64). Tirando proveito dessa inventividade didática o professor utilizará do erro para atingir o aprendizado individual ou de grupos, ou seja, usar o erro como “trampolins para a aprendizagem” (BORASI, 1989).

Diversas são as maneiras de usar o erro para a reconstrução do conhecimento: 1) partindo de erros do próprio aluno ou de outros, o professor poderá elaborar atividades, nas quais o aluno deverá localizar, identificar e corrigir os erros; 2) solicitar ao aluno que resolva o mesmo problema com valores diferentes, de forma que obtenha resultados absurdos, facilitando assim a percepção dos erros cometidos; 3) fazer uso de software que auxilie o aluno nas atividades desenvolvidas; 4) fazer uso de jogos que facilite o entendimento de um determinado conteúdo.

Acrescentando ao que foi dito, Ramos e Curi (2013) apontam uma forma de favorecer o aprendizado do aluno utilizando-se do erro em atividades realizadas na disciplina de Sistemas Digitais:

> Destacamos também que é de grande importância a participação de colegas nas correções das atividades. Há de se considerar que, no dia a dia, o aluno interage com colegas ao realizar resoluções de problemas por se encontrar em um contexto social que pode ser favorável ao seu aprendizado. Dessa forma, o surgimento de dificuldades e erros pode ser minimizado. Essas intervenções, aluno-aluno ou professor-aluno, também poderão ser auxiliadas com uso de softwares específicos para desenvolvimento de projetos de Sistemas Digitais. (RAMOS; CURI, 2013, p. 245).

Assim, não somente no Ensino de Matemática, é importante que o professor adote o papel de um agente instigador, isto é, aquele que “busca criar formas de perturbar o sistema cognitivo do aluno.” (PINTO, 2000, p. 45). Esse tipo de atitude faz parte da concepção construtivista, a qual coloca a aquisição do conhecimento como um processo de construção, onde o sujeito interage com o mundo físico e social.

Pinto (2000) e De La Torre (2007) afirmam que o rompimento com a pedagogia tradicional não é uma tarefa simples, pois exige reflexões e mudanças por parte dos professores, dos alunos e das escolas. A mudança é fundamental, pois na nova pedagogia os professores representam um papel ativo e são os responsáveis por construir suas próprias práticas e teorias.

Em suma, concordamos com o que é apresentado por Cury et al. (2011) ao afirmar que é importante os professores trabalharem com a análise de erros com os alunos dos cursos de licenciatura. Isso porque, acreditamos que esses futuros professores, ao aprenderem a lidar com os seus próprios erros, saberão utilizar-se dos erros cometidos por seus alunos em suas práticas de ensino, ajudando-os a superar suas dificuldades.

Bibliografia

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo.* Edições 70. São Paulo: Livraria Martins Fontes, 229 p.

Borasi, R. (1989). *Students' Constructive Uses of Mathematical Errors: A Taxonomy. In: Annual Meeting of the American Educational Research Association.* San Francisco, California: USA, p. 36.

Cordeiro, C. C. (2009). *Análise e classificação de erros de questões de geometria plana da olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas.* Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica)-Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy", Duque de Caxias, p. 170.

Cury, H. N. (2008). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos Alunos.* Belo Horizonte: Autêntica. Coleção Tendência em Educação Matemática, p. 112.

Cury, H. N. (2013). *Análise de erros: uma possibilidade de trabalho em cursos de formação inicial de professores.* In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., Curitiba. Anais... Curitiba: ENEM-PR, 1-15.

Cury, H. N., Ribeiro, A. J, Müller, T. J. (2011). *Explorando erros na resolução de equações: um caminho para a formação do professor de Matemática.* Unión Revista iberoamericana de educación matemática, n.28, 143-157.

De La Torre (2007). *Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança.* Porto Alegre: Artmed, p. 240.

Dullius, M. M., Quartieri, M. T., Furlanetto, V. (2012). *Análise e classificação de erros na resolução de uma prova de olimpíada de matemática*. Unión Revista iberoamericana de educación matemática, n.32, 71-84.

Feltes, R. Z.(2007). *Análise de erros em potenciação e radiciação: um estudo com alunos de ensino fundamental e médio.* Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática)-Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, p. 136.

Junior, F. S. C. (2011). *Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no Ensino Médio.* Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, p. 194.

Lima, R. N. (2007). *Equações algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da matemática.* Tese (Programa em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, p. 358.

Lupiáñez, J. L. (2013). *Análisis Didáctico: la planificación del aprendizaje desde uma perspectiva curricular.* IN: Rico, Luis; Lupiáñez, José Luis; Molina, Marta. (Org.). Análisis didáctico em educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular. Granada.

Perrenoud, P. (2000). *Pedagogia diferenciada.* Porto Alegre: Artmed, p. 183.

Pinto, N. B. (2000). *O erro como estratégia didática*. São Paulo: Papirus, p. 182.

Ramos, M. L. P. D. R. (2013). *Detecção, identificação e retificação: as três fases no tratamento e na correção dos erros.* In: Encontro Nacional de Educação

Matemática, 11., Curitiba. Anais... Curitiba: ENEM-PR, 1-14.

Ramos, M. L. P. D. R., Curi, E.. (2013). *Análise de erros em avaliação de sistemas digitais: uma questão com lógica and e flip-flop.* Revista Eletrônica em Educação Matemática, Florianópolis, v.8, n.1, 232-247.

Ramos, M. L. P. D. R., Curi, E.. (2014). *Dificuldades e erros de alunos do 1º ano da educação profissional tecnológica de nível médio em matemática: reflexões e desafios.* Revista Produção Discente Educação Matemática, São Paulo, v.3, n.1, 67-81.

Resnick, L. B, Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., Peled, I. (1989). *Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions.* Journal for Research in Mathematics Education, v.20, n.1, 8-27.

Rico, L. (1998). *Errores y dificuldades en el aprendizaje de las matemáticas.* In: KILPATRICK, J.; GOMES, P. e RICO, L. Educación matemática. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 69-108. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/679/1/KilpatrickEducacion.pdf >. Acesso em: 25 mar. 2014.

Socas, Martín M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de lãs matemáticas en la Educación Secundaria. In: RICO, Luiz (Org.). La educación matemática en la enseñanza secundaria, Barcelona, 125-154.

Maria Luisa Perdigão Diz Ramos: Professora do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – Cefet-MG. Possui graduação em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Mestrado em Modelagem Matemática pelo Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. Doutoranda em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul. Atualmente é professora do Curso Técnico em Eletrotécnica no Cefet-MG. mlperdigao@yahoo.com.br.

Edda Curi: Professora da Universidade Cruzeiro do Sul – UNICSUL. Possui graduação em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Atualmente é coordenadora e professora titular do Curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul. edda.curi@gmail.com.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 73-89

Educação matemática na escola indígena: implicações à formação de professores

Lucélida de Fátima Maia da Costa , Isabel Cristina Rodrigues de Lucena

Fecha de recepción: 28/07/2014
Fecha de aceptación: 28/11/2015

Resumen

En este artículo presentamos puntos para la discusión acerca de una educación matemática implícita en el proceso de aprendizaje de las prácticas socioculturales del pueblo indígena, tomando por base la realidad del pueblo Ticuna. A partir de las analices de observaciones realizadas en dos pesquisas cualitativas con contribuciones de la etnografía percibimos que las acciones pedagógicas promovidas por la escuela non se articulan con la construcción del pensamiento matemático activado por los estudiantes ticunas en su contexto sociocultural, al confeccionar canastos, tapetes, esculturas en madera y en el proceso de producción de harina, lo que implica rever os procesos de formación del profesor que enseña matemática y el trabajo docente realizado, de modo general, en las escuelas indígenas.
Palabras claves: educación matemática, escuela indígena, formación de profesor.

Abstract

In this article we bring points to the discussion of implicit learning of mathematics education in the socio-cultural practices of the indigenous people process, based on the reality of Ticuna. From the analysis of observations made on two qualitative research with ethnographic contributions realized that the pedagogical actions promoted by the school are not linked with the construction of mathematical thinking Ticunas mobilized by students in their sociocultural context, by the manufacturing of baskets, mats, wooden carvings and in flour production process, which entails reviewing the processes of teacher education that teaches math and teaching work, generally in indigenous schools.
Keywords: mathematics education, indigenous schools, teacher training.

Resumo

Neste artigo trazemos pontos à discussão sobre uma educação matemática implícita no processo de aprendizagem das práticas socioculturais do povo indígena, tomando por base a realidade do povo Ticuna. A partir das análises de observações realizadas em duas pesquisas qualitativas com aportes etnográficos percebemos que as ações pedagógicas promovidas pela escola não se articulam com a construção do pensamento matemático mobilizado pelos estudantes ticunas no seu contexto sociocultural, ao confeccionar cestos, esteiras, esculturas em madeira e no processo de produção de farinha, o que implica rever os processos de formação do professor que ensina matemática e o trabalho docente realizado, de modo geral, nas escolas indígenas.
Palavras-chaves: educação matemática, escola indígena, formação de professor.

1. Introdução

O convívio sociocultural ganha vida nas interações desenvolvidas pelos sujeitos em suas atividades diárias. Por meio dessas interações o conhecimento pode ser criado, compartilhado e ampliado. Nesse convívio aprende-se e ensina-se por meio das relações sócio-histórico-culturais vivenciadas e constituídas pelos sujeitos, por exemplo, de uma comunidade indígena, onde os modos de lidar, explicar, compreender o mundo no qual se vive é sempre uma perspectiva de um grupo sociocultural.

Nesse sentido, elaboramos este artigo com base nas análises dos resultados de duas pesquisas qualitativas desenvolvidas com aportes da metodologia de pesquisa etnográfica, cuja primeira empiria foi realizada no período de 2008 a 2009 e contou com a colaboração de duas tecedoras ticunas, dois professores de matemática e seus estudantes. No período de 2010 a 2011, uma segunda pesquisa nos permitiu realizar novas observações das práticas socioculturais desenvolvidas por oito jovens ticunas que foram selecionados por serem parentes e morarem próximos uns dos outros. Assim, neste texto, quando nos referimos a pesquisa, no singular, estamos fazendo alusão a todo o estudo realizado no período de 2008 a 2011.

O *locus* das observações referentes às prátticas socioculturais indígenas é a aldeia Ticuna Umariaçu localizada no extremo oeste do estado do Amazonas, no município de Tabatinga, na fronteira do Brasil com a Colômbia e o Peru. Essa aldeia é uma das mais populosas do Brasil e nela, as pessoas ainda possuem um ritmo de vida que mantem vivas características da cultura e da tradição Ticuna, como a língua e a produção de cestaria.

A pesquisa nos exigiu uma aproximação ao modo de vida dos sujeitos e permitiu a realização de observações diretas do contexto escolar, em particular das aulas de matemática, e do desenvolvimento de práticas socioculturais realizadas por estudantes no seu convívio diário na aldeia, como a confecção de cestaria, a produção de esculturas em madeira e o processo de produção de farinha. O objetivo comum das duas pesquisas era compreender como os processos cognitivos mobilizados em práticas socioculturais constituem-se mote à educação matemática escolar indígena. Para tanto, alicerçamos nossas ações e compreensões em fundamentos teóricos que nos permitissem entender como as pessoas aprendem e como distintos modos de vida influenciam, criam, distintos meios de ensino e de aprendizagem.

A partir da análise das informações obtidas e de nossa reflexão sobre o que vimos e vivenciamos no período das pesquisas elaboramos este artigo que tem o objetivo de trazer pontos à discussão sobre uma educação matemática implícita no processo de aprendizagem das práticas socioculturais do povo indígena, tomando por base a realidade do povo Ticuna. Ademais, percebemos que as ações pedagógicas promovidas pela escola não se articulam com a construção do pensamento matemático mobilizado pelos estudantes no contexto sociocultural, o que implica rever os processos de formação do professor que ensina matemática e o trabalho docente realizado, de modo geral, nas escolas indígenas.

2. Contextos da educação matemática indígena

A vida sociocultural de um estudante indígena, na aldeia, está conformada por muitas práticas que constituem um processo de formação que inclui ajudar os mais velhos em suas atividades tradicionais. As meninas, por exemplo, aprendem a tecer bolsas, a trançar esteiras e cestos, a plantar, a cuidar da casa, a fazer comida; os meninos aprendem a caçar, pescar, construir canoas, fazer esculturas, construir casas, tecer rede de pesca, fazer armadilhas etc. Nesse convívio estabelecem relações de comparação, medem, contam, classificam, fazem predições, ações fundantes de um pensamento matemático desenvolvido culturalmente. Atualmente, tem se tornado parte do cotidiano de estudantes indígenas, também, ir à escola.

A escola, em muitas aldeias, possui grande valorização e é tida como um lugar para se aprender as coisas do homem branco. Na aldeia do Umariaçu existem escolas mantidas pelo governo municipal que atendem crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental e uma escola estadual que atende estudantes de todos os níveis da escolarização/educação básica (Ensino Fundamental e Ensino Médio). A educação básica, no Brasil, compreende o Ensino Fundamental de 9 anos de duração e o Ensino Médio de 3 anos. O Ensino Fundamental é de responsabilidade do governo municipal e nos seus cinco primeiros anos (anos iniciais) atuam, prioritariamente, professores com formação em pedagogia. Nos quatro últimos anos do Ensino Fundamental e nos três de Ensino Médio, sendo este último de responsabilidade do governo estadual, a prioridade é que as aulas sejam ministradas por professores licenciados em áreas específicas: matemática, história, biologia, língua portuguesa etc.

Ao observarmos o processo de escolarização de estudantes ticunas percebemos que, de modo geral, nas escolas da aldeia Umariaçu, as crianças, jovens e adultos obtém uma formação escolar com poucas características de sua cultura. No entanto, vale destacar que a primeira língua adotada na escola é a língua Ticuna e que nos anos iniciais de escolarização, os estudantes são alfabetizados em sua língua materna e posteriormente, em português. O currículo adotado em pouco se diferencia do vigente em escolas urbanas, não indígenas, da região. O ensino é disciplinar e a matemática, a história, a geografia, as ciências naturais, pouco dialogam com os saberes culturais do povo Ticuna.

Esta observação ganha relevância ao pensarmos as possíveis influências da cultura de um povo às relações que se estabelecem no contexto escolar, pois lembramos, de acordo com Warnier (2003), que cultura pode ser entendida como:

> Uma totalidade complexa feita de normas, de hábitos, de repertórios de ação e de representação, adquirida pelo homem enquanto membro de uma sociedade. Toda cultura é singular, geograficamente ou socialmente localizada, objeto de expressão discursiva em uma língua dada, fator de identificação dos grupos e dos indivíduos e de diferenciação diante dos outros, bem como fator de orientação dos atores, uns em relação aos outros e em relação ao seu meio. Toda cultura é transmitida por tradições reformuladas em função do contexto histórico. (Warnier, 2003, p.23).

No processo de desenvolvimento da pesquisa, período em que nos aproximamos mais do modo de vida sociocultural dos ticunas, percebemos como se veem enquanto ser social e podemos compreender alguns traços fortes de sua cultura e como direcionam o processo de ensino e de aprendizagem das tarefas tradicionais. A constituição do "ser" ticuna é complexa e está relacionada com a dinâmica de vida, do ensinar e do aprender, a qual se estrutura a partir de quatro eixos que contemplam o pensar-se, o sentir-se e o viver Ticuna.

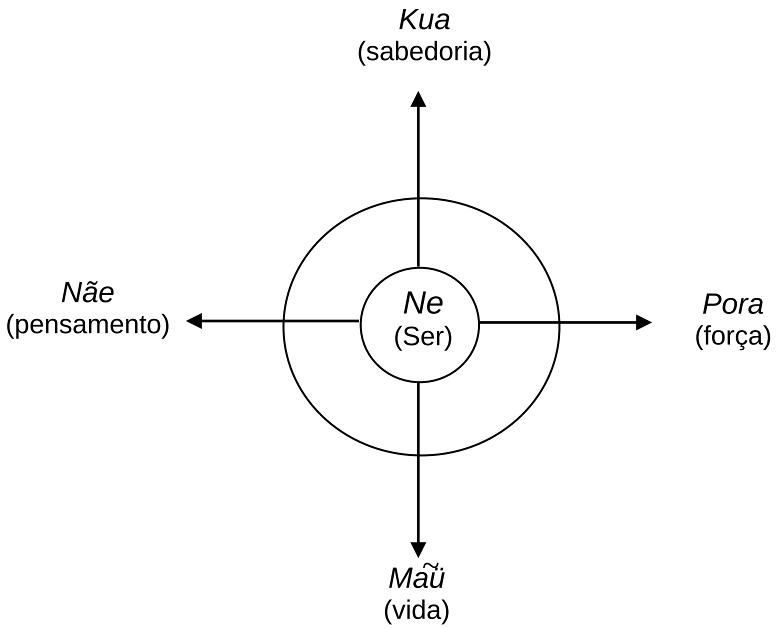


Fig. 1: Representação da constituição do Ser Ticuna

Nessa constituição o sujeito é o centro, é a essência, mas sua existência depende da articulação entre o pensamento que se expressa na sabedoria (*Nãe*) presente nos conselhos dos mais velhos, e na força (*Pora*) necessária para realizar as atividades da vida. É uma constituição recursiva entre polos cognitivos complementares, que se retroalimentam e mantém o vínculo do sujeito com a natureza; a sabedoria, adquirida com o tempo, vem da experiência construída no intuito de representar, compreender e explicar os fenômenos da vida. O ticuna é desse modo um ser complexo, vive e vivencia processos de pensamentos. Toda atividade sociocultural não é realizada de forma impulsiva, é pensada, pois, como dizem os ticunas: a vida é pensamento.

Nesse sentido o conhecimento, inclusive o matemático, construído nas atividades desenvolvidas no convívio sociocultural Ticuna não é apenas o reflexo de saberes tradicionais, dados brutos que se opõem aos saberes científicos, isto porque:

> Diferentemente do senso comum, os saberes da tradição arquitetam compreensões com base em métodos sistemáticos, experiências controladas e sistematizações organizadas de forma contínua. Mesmo que não tenham como princípio primeiro uma crítica coletiva permanente, tais saberes se objetivam numa matriz de conhecimento que pode ser atualizada, refutada, acrescida, negada, reformada. (Almeida, 2010, p. 67).

Assim sendo, enfatizamos a importância de conhecermos os saberes da tradição que estruturam o modo de pensar do povo Ticuna para, no contexto escolar, pensarmos métodos de ensino que possibilitem articular os saberes da tradição com os saberes científicos para propiciar uma aprendizagem mais significativa e contextualizada em uma realidade compreensível e com referências para o estudante.

Na aldeia Umariaçu, ainda que sua proximidade com a cidade esteja facilitando o contato dos indígenas com o mundo do branco e seu modo de vida e, isso esteja causando transformações culturais, todavia seus habitantes mantém vivas as tradições, especialmente em relação a divisão sexual do trabalho. Nessa aldeia, construir utensílios para a caça ou pesca é trabalho de homem, construir casas e os meios de transporte, também é trabalho de homem, confeccionar cestos e esteiras é trabalho de mulher, a produção da farinha é um trabalho familiar, onde todos os membros desempenham determinadas atividades.

Na confecção de uma canoa, trabalho de homem, da escolha da madeira ao entalho final, são mobilizados diversos processos cognitivos. O homem experiente e o jovem aprendiz são levados a elaborar pensamentos nos quais colocam os objetos em relação para perceber a madeira mais adequada, o maior comprimento que a canoa poderá atingir, o melhor lugar para proceder a um determinado corte, de modo que podemos pensar em um processo de construção permeado e direcionado por pensamentos matemáticos estruturados e validados nessa tradição. Nesse processo usam basicamente o conhecimento tradicional, inclusive as unidades de medidas mais utilizadas são o palmo e os dedos, e, as decisões tomadas decorrem da percepção e da memória. O conhecimento surgido ou ampliado nesse processo tem sua gênese nas relações que estabelecem a partir da experiência, “consiste em experienciar o acordo entre aquilo que visa e aquilo que é dado, entre a intenção e a efetuação do gesto. Esse processo é feito pelo corpo como mediador do mundo”. (Barreto & Anastacio, 2010, p. 105).

Na confecção de cestos, redes, esteiras e paneiros, práticas tradicionais consideradas trabalho de mulher, há a mobilização de processos cognitivos como a percepção, a linguagem e a memória que direcionam as ações de escolher a matéria prima adequada, de determinar o tamanho da tala a ser usada de acordo ao tamanho do fundo do cesto pretendido; de estabelecer preço de acordo ao trabalho realizado e ao que se pretende comprar com o dinheiro obtido na venda. É um processo que requer e expressa pensamentos com uma lógica cultural que ultrapassa a manipulação de quantidades e a realização de contagem, exige o estabelecimento de relações complexas; é um processo que segundo Gerdes (2011, p.7), “tem um caráter fortemente artístico e matemático. Embora os aspetos matemáticos dessas atividades culturais tradicionais não, ou quase não, têm sido reconhecidos pela ‘Academia’, isto não os torna menos matemáticos”.

Ainda nos referindo aos utensílios produzidos e utilizados pelas mulheres destacamos a confecção de vassouras e peneiras que possuem grande utilidade doméstica e permitem, durante sua confecção, a articulação entre pensamentos matemáticos para ao colocar os objetos em uma relação com a finalidade de optar pela melhor matéria prima ou a forma mais adequada, para conseguir confeccionálos com boa qualidade, e uma motivação cultural, pois são implementos que caracterizam uma boa mulher, ou seja, toda boa Ticuna sabe fazer seus próprios utensílios, não precisa comprá-los.

As mulheres sempre estão ampliando sua criatividade, constantemente ficam imaginando trançados mais bonitos e atrativos, tentam aprender padrões decorativos que viram em outros lugares, combinam e recombinam técnicas, inventam instrumentos e testam matéria prima. Nesse processo estabelecem relações entre objetos, fenômenos e produtos, pensamento basilar à construção de um tipo de conhecimento matemático mestiço, híbrido, nem realista nem idealista, mas que "põe o problema da coessencialidade da qualidade e da quantidade, no qual se inscreve a temporalidade e a espacialidade". (Vergani, 2003, p.30).

Na produção da farinha, trabalho que envolve toda a família, os sujeitos de ambos, os sexos dividem as tarefas executadas nessa produção. Geralmente, mulheres e crianças são encarregadas de arrancar e descascar a macaxeira ou mandioca, os homens se encarregam do motor de ralar a macaxeira, do forno e de torrar a farinha. Nesse processo ocorrem aprendizagens culturais por meio da utilização dos saberes tradicionais, que informam o tempo certo da colheita, de deixar a macaxeira de molho, de determinar a temperatura do forno, a maneira de utilizar o tipiti, o modo adequado de mexer a massa para formar uma farinha de caroços uniformes.

Embora atualmente já utilizem objetos industrializados, vendidos no comércio das cidades vizinhas, utensílios, como as peneiras e o tipiti, confeccionados pelas mulheres, são muito úteis no processo de produção da farinha. Na utilização desses utensílios há o estabelecimento de relações para determinar capacidade, quantidade e peso, mobilizam processos cognitivos que permitem aprender de modo intencional por meio da observação e da percepção. É o desenvolvimento de uma atividade desencadeadora de uma aprendizagem consciente, pois tomando por base os estudos de Leontiev (1978), podemos pensar que aquilo que não é percebido, em geral, não é passível de ser reproduzido voluntariamente e o objeto da consciência do sujeito depende do tipo de atividade mental por ele desempenhanda.

Não podemos compreender a geração de conhecimento, o processo educativo e a elaboração de um pensamento matemático, no processo de produção de farinha no contexto Ticuna, sem considerarmos o sujeito na sua relação com o mundo. Nesse sentido, os pressupostos da etnomatemática tida como "um programa que visa explicar os processos de geração, organização e transmissão de conhecimento em diversos sistemas culturais e as forças interativas que agem nos e entre os três processos" podem se constituir em um meio para essa compreensão, pois nos permite reconhecer e valorizar os aspectos socioculturais do ensino e da aprendizagem, que quando incorporados ao currículo acarretam profundas mudanças na prática docente (D'Ambrosio, 1998, p.7).

No contexto indígena Ticuna, percebemos que os processos de ensino e de aprendizagem das atividades cotidianas como cozinhar, plantar, pescar, tecer, trançar, ocorrem, basicamente, por meio da observação, os mais jovens aprendem imitando o que perceberam da realização executada pelos mais velhos. A atribuição de tarefas é feita de forma gradual das mais simples para as mais complexas, assim como ocorre na produção de farinha.

Ao finalizar o processo de produção de farinha os sujeitos passam a estabelecer relações entre variáveis pertencentes ao seu contexto cultural com outras externas a ele. Armazenam a farinha em paneiros, utensílio confeccionado pelas mulheres, que possuem variada capacidade e cujo tamanho é determinado pelo comprimento das talas utilizadas na sua confecção, mas para a atribuição de preço os ticunas tem que pensar e utilizar unidades de medidas e valores externos a seu contexto cultural estabelecem assim, relações entre tamanho e peso, capacidade e preço, ou seja, atribuem o preço de um paneiro de farinha pela quantidade em quilogramas que ele comporta, pois na hora da venda a farinha será vendida em quilogramas.

A produção de farinha envolve teoria e prática. Implica contar, medir, localizar, explicar. Exige dos sujeitos distinguir em termos de preços a qualidade do produto final, pois a farinha branca de caroços mais uniformes é mais valorizada que a farinha amarela de caroços graúdos. Fica evidente que durante todo o processo de produção de farinha, do plantio da roça até a venda são mobilizados distintos processos cognitivos e estabelecidas diversas relações que exigem do sujeito habilidades para contar, medir, comparar, fazer inferências, ou seja, desencadeiam pensamentos matemáticos, estimulam o desenvolvimento da "capacidade de resolver problemas ou elaborar produtos que são importantes num determinado ambiente ou comunidade cultural". (Gardner, 1995, p. 21).

Resolver problemas implica mobilização de pensamentos com objetivo determinado assim como ocorre nos processos de produção da farinha, na confecção de cestos, no preparo de armadilhas ou na construção de casas numa aldeia indígena. A resolução de problemas presente em tais processos pode ser entendida, também, quando percebemos que:

> [...] seres humanos existem em múltiplos contextos, e que estes contextos simultaneamente requerem e estimulam diferentes arranjos e grupos de inteligência [...]. Nós precisamos compreender esses contextos – que valores eles representam, que sinais eles transmitem, como interagem com, e modelam, as inclinações dos jovens indivíduos criados em seu meio. (Gardner, 1995, p.213-214).

No convívio sociocultural, o estudante está imerso em um meio que lhe proporciona variados ambientes de aprendizagens com uma característica predominate: a natureza não verbal com ênfase na observação. Podemos inferir que trata-se de ambientes que proporcionam a criação de processos de aprendizagens dedutivos a partir de critérios empíricos. A estimulação/mobilização desse tipo de pensamento ocorre em quase todas as atividades socioculturais desenvolvidas pelos jovens e crianças como por exemplo, na construção de canoas, armadilhas, no preparo de comidas, nas brincadeiras e na confecção da cestaria.

Essa realidade nos leva a refletir sobre a necessidade de repensar e reestruturar os processos de formação de professores que trabalham ou trabalharão nesses contextos, pois não podemos atribuir ao estudante a responsabilidade de, individualmente e de forma independente, perceber as relações que se estabelecem entre o que aprende na escola e o que vive fora dela, mas é função do processo educativo escolar reconhecer, valorizar, resgatar e usar os saberes tradicionais da comunidade, os saberes prévios dos estudantes como mola propulsora da aprendizagem que se propõe desencadear.

No convívio sociocultural o estudante ticuna aprende que a vida está ligada a ações, ao fazer e não ao falar. O falar é ação dos sábios, de quem já provou que sabe fazer e, portanto sua fala é conselho e se ouve. O conhecimento matemático, por exemplo, pouco ou quase nada é construído, compartilhado ou ampliado com explanações orais, ou seja, embora a cultura tenha uma base epistemológica centrada na oralidade, a construção de conhecimentos matemáticos ocorrem na prática, no observar e no fazer, ao contrário do contexto escolar, no qual a linguagem oral é determinante.

Dessa forma, podemos pensar em um esquema onde o sujeito vive uma realidade dicotômica ao se considerar a construção do conhecimento, em especial o matemático, fora da escola, realidade que exige processos de pensamento para a ação, e na escola, onde lhe é exigido processos de pensamentos dissociados de ações práticas, uma realidade que o limita e o torna um sujeito não ativo no contexto escolar.

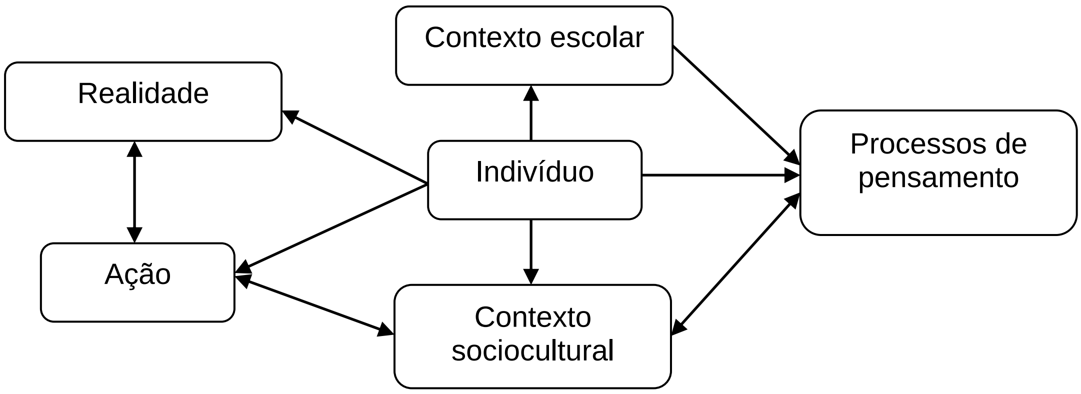


Fig. 2: Esquema representativo da dicotomia entre a aprendizagem no contexto escolar e no contexto sociocultural.

A vida na aldeia leva o estudante ticuna à mobilização de processos cognitivos desencadeadores de processos de pensamento que se transformam em ações de acordo as necessidades da realidade em que vive, adquirindo assim, significado. No escolar, lhe é exigido uma mobilização de pensamentos que, geralmente, não requerem o estabelecimento de conexões com outros contextos, exige-se apenas um exercício mental que o sujeito não está habituado a fazer.

No contexto cultural Ticuna a confecção de esculturas é uma atividade comum no convívio entre jovens e adultos, considerada trabalho de homem, exige desde a escolha da madeira o estabelecimento de relações que desencadeiam e expressam formas de pensar matematicamente validada nesse grupo cultural. No contexto investigado as pessoas ainda aprendem esculpir a madeira de modo tradicional, observando o trabalho dos mais velhos/experientes, pois "'fazer' e 'como fazer' são aspectos importantes e nutrientes das ações de ensinar e de aprender”. (Bicudo, 2010, p. 44).

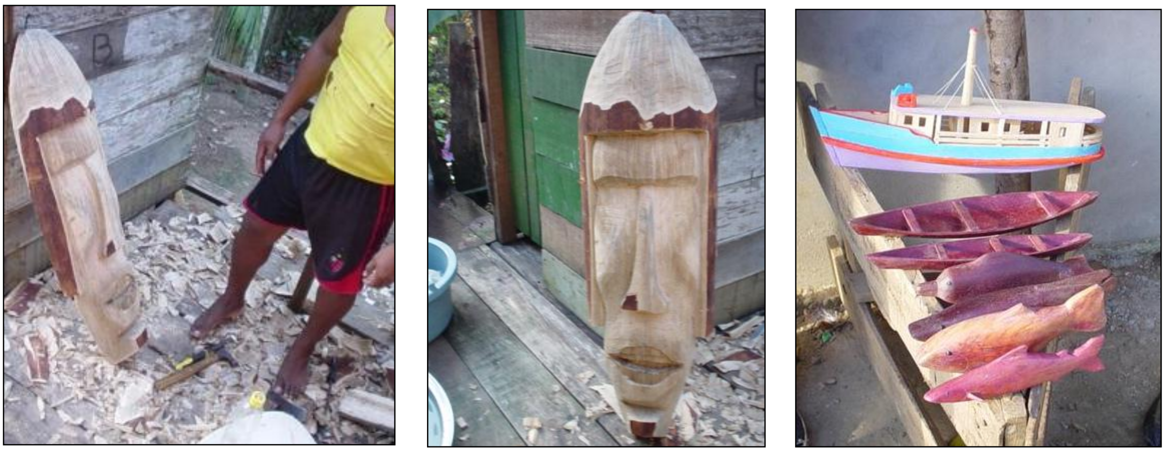


Fig. 3: Esculturas confeccionadas por ticunas

Nesse processo, a escolha da madeira adequada, o formato de cada peça, a semelhança com o objeto original exige do artesão habilidade para comparar, medir, perceber simetrias, determinar padrões e utilizar ferramentas. Essas ações levam o sujeito a colocar objetos em relação para perceber a madeira mais adequada, a ferramenta apropriada, o tamanho e o ângulo do entalho, são a expressão de um pensamento matemático construído e significado na prática.

Assim, as ideias vão sendo gradativamente apreendidas e organizadas na estrutura cognitiva na qual se ancoram e se reordenam novos conceitos e ideias, as quais o sujeito vai progressivamente internalizando, aprendendo. Essa aprendizagem ocorre pela mobilização de processos cognitivos que, no âmbito da confecção de esculturas, desencadeiam processos de pensamentos, inclusive, matemáticos. Nesse processo, os escultores estão sempre comparando as características físicas com as imaginárias dos objetos, condição necessária para determinar o ponto onde devem acentuar uma curva ou retirar excessos de madeira, ou seja, ao mesmo tempo em que observam as propriedades externas do objeto, como o tamanho e a forma, os comparam com a imagem mental que criaram deles para identificar semelhanças e diferenças que só existem na relação em que os colocam. É a mobilização de um pensamento relacional entre o visível e o imaginário comum na cultura indígena, um pensamento originado da convivência cotidiana e explicativa do mundo.

Isso nos faz refletir sobre a educação matemática escolar, geralmente, efetivada em escolas indígenas por meio de um ensino puramente racional que tende a conduzir os estudantes a um mundo de objetividade pautado na repetição de processos e fórmulas que lhe são destituídas de significado, esquecendo, por vezes que somos constituídos por:

> Dois itinerários do pensamento que se parasitam permanentemente: um empírico-lógico-racional, outro mítico-simbólico-mágico. Qualquer redução de um desses pólos do

> espírito ao outro compromete a amplitude de nossas concepções de mundo, nos faz andar com uma perna só. O ilusório sozinho nos encerra no delírio. A razão sozinha se torna racionalização, se embrutece, fica cega para tudo o que não é cálculo, regra, lógica. (Almeida, 2006, p.12).

Ao estudar a produção de cestarias, cestos e esteiras, Costa (2009), mostra que as mulheres ticunas manifestam um pensamento relacional semelhante ao manifestado pelos jovens na aprendizagenm da confecção de esculturas. Essas mulheres desenvolvem o processo de confecção comparando o conhecimento físico dos objetos com as características imaginárias que tem deles e que, geralmente, estão relacionadas a significados culturais criados na sua relação com a natureza ou na própria constituição do povo Ticuna. Tal comportamento parece ser um padrão entre os ticunas, pois isso ficou evidente em todas as atividades práticas que os estudantes desenvolvem no convívio sociocultural, as quais tivemos a oportunidade de observar.

O estudo de Costa (2009) evidenciou na confecção de cestarias a utilização de técnicas, inclusive mostra que o ordenamento dado às fibras, na confecção de um cesto, segue um sequenciamento passível de representação por meio de algoritmos próprios da matemática escolar baseada no modelo ocidental, formal, como a Progressão Aritmética (P.A.) e a Progressão Geométrica (P.G.) que se apresentam na confecção de cestos de fundo quadrilátero e de fundo circular, respectivamente. No entanto, essa matemática identificável na produção da cestaria Ticuna, expressa muito mais que a representação de técnica utilizada nesse processo, é a evidência de um pensamento matemático construído e sistematizado no desenvolvimento de uma prática cultural, o qual se estrutura e é compartilhado por meio da observação e da percepção, processos cognitivos básicos no modo de vida dos estudantes ticunas.

Observando os contextos de vida de estudantes ticunas, de modo geral, percebemos uma dicotomia existente entre a educação matemática desenvolvida no contexto escolar e a educação matemática implícita no modo de vida, no convívio sociocultural (Costa, 2012). Inexiste, no contexto escolar, um diálogo que ponha a conversar a diversidade de saberes da cultura Ticuna, os conhecimentos prévios dos estudantes e o conhecimento matemático do currículo escolar, como indicamos no quadro a seguir.

A educação matemática no contexto escolar	**A educação matemática no convívio sociocultural**
Organizada de forma hierárquica e compartimentalizada em anos e níveis escolares.	Não possui a hierarquização como pressuposto; se aprende o que é necessário de acordo a cada situação.
Ênfase em atividades abstratas	Ênfase na prática
Descontextualizada	Contextualizada
Rigorosa e inflexível	Rigorosa, mas flexível admite modos distintos de fazer.
Linguagem simbólica acentuada	Não há ênfase em linguagem simbólica
Pouca aplicabilidade	Muita aplicabilidade
Ênfase na reprodução tendo a	Ênfase na observação tendo oralidade

linguagem oral como determinante	como base
Prioriza o resultado final e o acerto	Prioriza o processo, o resultado é apenas consequência
Estimula a reprodução como demonstração da aprendizagem	Estimula o fazer/criação como demonstração da aprendizagem.

Fig. 4: Quadro com características da educação matemática escolar e da sociocultural

A dicotomia percebida nos permite inferir que a elaboração do pensamento matemático, no contexto cultural de estudantes indígenas, sofre interferência e influencia as relações socioculturais desenvolvidas pelos sujeitos no meio em que estão inseridos e, no qual se dá essa construção, gerando formas específicas de ensinar e aprender que não são consideradas no contexto escolar.

Assim sendo, no sentido de sua possibilidade, criação e transformação é que pensamos a existência de um pensamento matemático no desenvolvimento de práticas socioculturais, pensamento possível de ser ressignificado no contexto da educação matemática na escola indígena, pois a forma como os sujeitos mobilizam distintos processos cognitivos para organizar, comparar, integrar, armazenar e comunicar informações captadas do meio indica uma forma particular de desencadear aprendizagem, inclusive matemática, que não pode ser ignorada e precisa ser conhecida pelos professores que atuam nesse contexto.

3. A formação do professor indígena

Os processos de formação de professores, no Brasil, ainda estão longe de atender as especificidades das distintas realidades sócio-histórico-culturais presentes nesse enorme território, no qual se apresentam diversas dificuldades enfrentadas por formadores de professores indígenas de todo o país e que, ultimamente, vem ganhando destaque nos debates nacionais, pois, as indicações de formação do perfil desse profissional apontam à necessidade de se refletir e assumir posturas diferentes de acordo a realidade cultural de cada etnia.

A necessidade de desenvolvimento e manutenção de relações com o mundo além-aldeia, tem levado os indígenas a reivindicar a implantação de escolas em suas aldeias com o intuito de adquirirem por meio destas, conhecimentos que os levem a convivência social e comercial com o homem branco, no entanto, essas reivindicações esbarram na necessidade de um profissional habilitado para atuar como professor nessas escolas.

No estado do Amazonas, na maioria das aldeias, há a presença institucional da escola, e, em muitas delas, principalmente nos anos iniciais do Ensino Fundamental, as atividades docentes já estão sendo desenvolvidas por professores das próprias aldeias. Professores formados em escolas e universidades urbanas, situação que conduz às reflexões acerca da formação desses professores e nos instigou a enveredar por um caminho que nos levou a questionar e investigar o significado do ato de “formar” nesse e para esse contexto.

No contexto indígena, para ser professor não basta cursar uma licenciatura, esse curso apenas habilita em função das exigências legais. Para ser professor, é necessário muito mais que cumprir requisitos e créditos acadêmicos, é necessário querer, é necessário apaixonar-se pela profissão, é necessário saber que seu trabalho interferirá na vida e na decisão de rumos de vida de muitas pessoas, e nesse sentido, destacamos o desejo de muitos indígenas aspirantes a professor que buscam superar obstáculos e adquirir os conhecimentos científicos que o habilitarão ao oficio da docência.

Ser professor em uma aldeia indígena, principalmente ser professor indígena na sua própria comunidade, possui significados que vão além do exercer uma profissão, representa superação, destaque e até poder. O professor indígena é, a princípio, o mediador das relações que se estabelecem em primeira instância entre os sujeitos de sua comunidade e o mundo externo a ela, é ele quem oficialmente, prepara o estudante indígena para falar a língua do branco, é ele quem, a priori, pode explicar as coisas do mundo além-aldeia, pois foi, teoricamente, preparado com essa finalidade, ele estudou e se formou para isso. Na maioria das vezes, estudou na cidade, saiu da aldeia, manteve contato, desenvolveu relações sociais, econômicas e até afetivas com os brancos, porém a que custo? Com quais significados? O que ficou dessa formação?

É nesse sentido que questionamos a formação desse professor, pois, se sobre ele pesa a responsabilidade de mediar a conexão entre dois mundos, é necessário que ele seja devidamente preparado para isso. Nada mais justo, que ele tenha uma formação que realmente o prepare para compreender o que lhe é ensinado do mundo exterior para ensinar na sua comunidade, com significado e utilidade o que aprendeu. No entanto, percebemos que muito ainda falta fazer para que os cursos de formação de professores indígenas atinjam esse objetivo.

A formação do professor, em particular do professor indígena, não ocorre de forma isolada, pois as pessoas são seres sociais que desenvolvem relações que interferem e sofrem influências nesse processo de formação. Assim sendo, a formação deve ser contínua, pois não existe uma delimitação de onde começa e onde termina tal processo. Esta se dá do e no alargamento da construção de identidades, conceitos, valores, de forma corporativa nos espaços de atuação pessoal, social, político, cultural e profissional, ou seja, “o ideal é que a formação ocorra num processo articulado fora e dentro da escola”. (Fusari, 1999, p. 19).

É perceptível que o conhecimento escolar se tornou nos últimos anos um objeto de desejo de grande parte dos indígenas, principalmente, dos que vivem em aldeias próximas às cidades. A escola se tornou um lugar para adquirir conhecimento do homem branco, um lugar para aprender, por exemplo, a língua e a matemática que possibilitarão à comunicação, em pé de igualdade, nas relações comerciais de compra e venda do peixe, do artesanato ou dos produtos da roça. É nessa escola, que o indígena deveria adquirir o conhecimento sistematizado pelo homem branco, mas com o respaldo das especificações inerentes às distintas etnias.

O direito a um ensino diferenciado que respeite as especificações culturais, como a língua própria, é garantido no artigo 210 da Constituição Federal brasileira de 1988 ao preconizar que "o Ensino Fundamental regular será ministrado em língua portuguesa, asseguradas às comunidades indígenas também a utilização de suas línguas maternas e processos próprios de aprendizagem". Essa garantia de especificidade ganhou detalhamento nos artigos 78 e 79 da Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional – LDB/96 que reafirmam a necessidade da educação escolar reforçar o sentimento de identidade e pertencimento do indígena para com sua comunidade. Atualmente, as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Escolar Indígena, tem dentre seus objetivos:

> Assegurar que o modelo de organização e gestão das escolas indígenas leve em consideração as práticas socioculturais e econômicas das respectivas comunidades, bem como suas formas de produção de conhecimento, processos próprios de ensino e de aprendizagem e projetos societários. (Brasil, 2013, p.376).

Então é importante termos em mente, na hora de pensarmos a formação de um professor indígena, as diferenciações entre os processos educacionais dos indígenas e dos não indígenas, pois estas diferenças interferem no processo de ensino e de aprendizagem escolar, pois no mundo do indígena a educação é um processo global onde o conhecimento é construído, validado e difundido na interação social dentro da aldeia. Ademais, vale destacar que muito da visão de escola, manifestada por professores indígenas, é reflexo de anos de contato com os brancos, mas, de modo geral, o professor indígena mantem traços culturais fortes e acredita que a escola pode construir a ponte entre os conhecimentos tradicionais e os da sociedade urbanizada (Brasil, 2002).

Lembramos de acordo com Meliá (1999) e Silva (2005), que é de interesse da comunidade a formação de um "bom" professor, pois seu trabalho, também, contribui para a formação de um bom indígena. Este bom indígena é considerado no sentido da responsabilidade pela manutenção e perpetuação das características de sua cultura, de seus saberes tradicionais. Assim sendo, percebemos a responsabilidade que pesa sobre o processo educacional escolar para em suas ações educativas respeitar e valorizar o processo educacional cultural de cada povo.

Nossa preocupação em chamar a atenção aos processos de formação de professores indígenas decorre de nossas percepções sobre como se estrutura a prática docente desse futuro professor e as relações estabelecidas em certos cursos de formação que não conseguem despertar, no professor em formação inicial ou continuada, uma visão de não substituição de sua cultura, mas de ressignificação e fortalecimento de seus saberes para a criação de uma escola que consiga enxergar nas práticas cotidianas de seu povo, como na confecção dos trançados, nos bailes, na plantação e colheita de uma roça e nas suas construções, a Matemática, a Física, a Geografia, a História etc., como produtos culturais de um povo possíveis de serem aprendidos por homens e mulheres.

Pensamos em uma formação docente capaz de despertar a percepção das variadas situações matemáticas que envolvem a relação pessoas – meio ambiente e pessoas – pessoas como as presentes no plantar a mandioca (fazer a roça), na colheita, no assar, no armazenamento em latas ou em paneiros, ações que podem ser discutidas e ressignificadas em sala de aula levando, por exemplo, o estudante a compreender a abrangência das relações socioculturais que se efetivam no processo de produção da farinha. Na escola indígena, ao discutirmos as questões sociais e os saberes tradicionais da comunidade abrimos perspectivas à valorização do homem e da mulher como um sujeito pertencente a um grupo cultural e contribuímos para minimizar "o fosso epistemológico entre as ciências e as tradições" (D'Ambrosio, 2011, p.45).

Pensamos que a escola não deve ser apenas um lugar onde o professor fala, por exemplo, a língua Ticuna e ensina as "coisas" do mundo do branco, mas um espaço onde possa ser efetivado todo o respaldo legal para uma educação escolar indígena, que realmente respeite as especificidades de cada povo. Pensamos na escola e, consequentemente, na prática docente não como lugar de tensões, mas como espaços propícios à criação de "instrumentos de resistência e afirmação cultural, que contribuam no processo histórico de sobrevivência de povos etnicamente diferenciados" (Silva, 2011, p. 88).

Ao refletirmos sobre o processo de formação do professor indígena, acreditamos de acordo com Silva (2011, p. 86), que:

> O desafio que se coloca é o pensar as escolas indígenas – e, ao cerne dessa reflexão, o papel dos professores indígenas e a crucial questão de sua formação – nos seus limites e possibilidades, dentro da realidade atual, cada dia mais norteada por tendências homogeneizadoras e globalizantes.

Nesse sentido, a formação de professores indígenas, apresenta pontos que devem ser repensados e podem ser melhorados para primar pela qualidade desse ensino no sentido de que os professores formadores possam conhecer e respeitar os processos de pensamentos que movem esses sujeitos em direção a uma formação docente, pois esses professores serão disseminadores de ideias, formadores de opinião e preparadores de crianças e jovens, em suas aldeias, que têm sonhos e querem competir por um lugar digno na sociedade e, para isso, necessitam de conhecimentos que vão além dos conhecimentos culturais próprios de sua etnia.

É importante questionarmos de que forma estão se efetivando os processos de formação inicial e continuada do professor indígena para podermos pensar meios de contribuir para sua melhoria no sentido de possibilitar ao professor indígena estabelecer pontes entre o conhecimento formal, acadêmico, científico e o conhecimento tradicional sem traumas, sem danos, de forma a tornar-se o interlocutor entre os anseios da aldeia e o mundo exterior a ela.

Algumas considerações para finalizar

As escolas indígenas têm ao mesmo tempo características comuns e específicas que as tornam realidades complexas, pois são muitas e distintas as particularidades que as compõem. Quando falamos em educação matemática na escola indígena temos clareza das necessidades próprias de cada etnia a partir do lugar e dos sujeitos que a compõem.

A construção de saberes e conhecimentos não estão somente na escola, estão também, na forma de ser e viver em comunidade. O modo de vida e o modo de se relacionar uns com os outros é um elemento crucial na vida dos estudantes indígenas e certamente interferem em todo trajeto educacional desses sujeitos.

No tocante a educação matemática, desde seu nascimento, os indígenas vão aprendendo formas próprias de medir, contar, localizar, comparar, construir instrumentos e ferramentas, contar e registrar o tempo, fazer prognósticos, elaborar conjecturas e a validá-las no convívio em sociedade. Nesse sentido, o grande desafio do educador matemático, na escola indígena, consiste em fomentar a integração, o diálogo, em todos os níveis educacionais, de conceitos matemáticos com os muitos e distintos saberes culturais do povo indígena, pois assim permitirá que seus estudantes se sintam parte importante e integrante do processo e não apenas um coadjuvante cujos valores, crenças e tradição nunca são considerados no contexto escolar.

Quando falamos em fomentar, na escola, o diálogo entre saberes da ciência os tradição indígena, no âmbito da educação matemática, pensamos em termos de referências, ou seja, que as ações docentes do professor de matemática permita ao estudante indígena buscar em suas memórias, em suas referências culturais, elementos para dar sentido e significado ao que lhe está sendo ensinado. Nesse sentido, o ordenamento dado as fibras de um vegetal na confecção de cesto, as formas de calcular a capacidade de um paneiro, de determinar o tempo da colheita de uma roça, dentre outras práticas, podem despertar a percepção e a mobilização de pensamentos matemáticos para a aprendizagem da matemática proposta nos currículos escolares.

Assim, vemos nos cursos de formação de professores indígenas, em especial na formação continuada, a necessidade de habilitar o professor para além do ensino de conhecimentos técnicos e científicos. Se faz necessário práticas para o reconhecer e valorizar os saberes tradicionais do povo onde a escola está inserida, pois este pode ser o diferencial da escola indígena, ou seja, uma formação para um ensino plural, local e global simultaneamente. Por isso, defendemos o repensar das práticas docentes, de modo geral, atualmente vigentes em processos de formação de professores para e em contextos indígenas, pois percebemos ainda a impregnação de um forte caráter individualista assentado em um paradigma fragmentado que, de certa forma, deixa à margem do processo de aprendizagem os saberes que identificam e caracterizam o estudante indígena.

Referências

Almeida, M. C. (2010). *Complexidade, saberes científicos e saberes da tradição*. São Paulo: Livraria da Física.

Almeida, M. C. (2006). Prefácio - um alpendre lilás para a educação. En: Farias, C. A. *Alfabetos da alma*: histórias da tradição na escola. Porto Alegre: Sulina.

Barreto, M. F. T. & Anastacio, M. Q. A. (2010). A compreensão de números apresentada por crianças: multiplicação. En: Bicudo, M. A. V. (Org.). *Filosofia da educação Matemática*: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas, 101-127. São Paulo: Editora UNESP.

Bicudo, M. A. V. (2010). Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: Bicudo, M. A. V. (Org.). *Filosofia da educação Matemática*: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas, 23-47. São Paulo: Editora UNESP. p. 23-47.

Brasil. (2013). *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Ministério da Educação. Brasília: MEC, SEB, DICEI.

Brasil. (2002). *Referenciais para a Formação de Professores Indígenas*. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.* Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996.

Brasil. (1988). *Constituição da República Federativa do Brasil*. Promulgada em 5 de outubro de 1988. Brasília: Senado Federal.

Costa, L. F. M. (2012). *A Etnomatemática na Educação do Campo, em contextos indígena e ribeirinho, seus processos cognitivos e implicações à formação de professores.* Dissertação de Mestrado. Universidade do Estado do Amazonas. Manaus-AM: UEA.

Costa, L. F. M. (2009). *Los tejidos y las tramas matemáticas. El tejido ticuna como soporte para la enseñanza de las matemáticas.* Dissertação de Mestrado. Universidade Nacional da Colômbia – Sede Amazônia. Letícia: UNAL.

D'Ambrosio, U. (2011). *Educação para uma sociedade em transição*. Natal-RN: EDUFRN.

D'Ambrosio, U. (1998). *Etnomatemática*: Arte ou técnica de explicar ou conhecer. São Paulo: Ática.

Fusari, J. C. (1999). Formação Continuada de Educadores na Escola e em outras situações. En: *Coordenador Pedagógico e Formação Docente*. São Paulo: Loyola.

Gardner, H. (1995). *Inteligência Múltiplas:* A Teoria na Prática. Porto Alegre: Artmed.

Gerdes, P. (2011). *Mulheres, Cultura e Geometria na África Austral*: Sugestões para Pesquisa. Estados Unidos da América: Lulu, Morrisville, NC 27560, EUA & Londres, GB.

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality.* Nova Jersey: Prentice-Hall.

Meliá, B. (1999). *Educação Indígena e Alfabetização*. São Paulo: Edições Loyola.

Silva, A. L. (2005). Mitos e Cosmologias Indígenas no Brasil: Breve introdução. En Grupioni, L. D. B. *Índios no Brasil*. São Paulo: Editora Global.

Silva, R. H. D. (2011). Afinal, quem educa os educadores indígenas? En: Gomes, N. L.; Silva, P. B. G. (Orgs.). *Experiências étnico-culturais para a formação de professores*. Belo Horizonte: Autêntica.

Vergani, T. (2003). *A surpresa do mundo:* ensaios sobre cognição, cultura e educação. Natal: Editorial Flecha do Tempo.

Warnier, J. P. (2003). *A mundialização da Cultura*. Bauru, São Paulo: EDUSC.

Lucélida de Fátima Maia da Costa: Mestre em Estudos Amazônicos pela Universidade Nacional da Colômbia. Mestre em Educação em Ciências na Amazônia pela Universidade do Estado do Amazonas. Doutoranda em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará. Professora do Colegiado de Matemática da Universidade do Estado do Amazonas no Centro de Estudos Superiores de Parintins. Bolsista da Fundação de Amparo á Pesquisa do Estado do Amazonas – FAPEAM. ldfmaiadc@gmail.com

Isabel Cristina Rodrigues de Lucena: Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará. Coordenadora do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Cultura Amazônica (GEMAZ). ilucena@ufpa.br

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 90-112

Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria española

Danilo Díaz-Levicoy, Carmen Batanero Bernabeu, Pedro Arteaga Cezón, María M. Gea Serrano

Fecha de recepción: 24/09/2014
Fecha de aceptación: 25/11/2015

Resumen	En este trabajo analizamos los gráficos estadísticos incluidos en tres series completas de libros de texto españoles de Educación primaria, para ver la forma en que los autores interpretan las directrices curriculares en la elaboración de los contenidos. Se analizan los tipos de gráfico, su complejidad, niveles de lectura y actividad solicitada al alumno. Los resultados muestran predominancia del gráfico de barras con poco peso de otros tratados en el currículo; nivel de lectura adecuado, variedad de complejidad del gráfico y predominio de la actividad de lectura. Se concluye con algunas sugerencias para la enseñanza del tema y la formación de profesores. **Palabras clave**: gráficos estadísticos; libros de texto; educación primaria.
Abstract	In this paper we analyze the statistical graphs in three series of Spanish text books for primary education, to investigate how the authors interpret the curricular guidelines in developing this content. Graph types, their semiotic complexity, reading levels and the activity requested from the student are analyzed. The results show predominance of bar graphs with low weight of other graphs included in the curriculum; appropriate reading level, a variety of graph semiotic complexity and dominance of the reading activity. We conclude with some suggestions for the teaching of the topic and the training of teachers. **Keywords**: statistical graph; textbook; primary education
Resumo	Neste artigo analisamos os gráficos estatísticos em três conjuntos completos de livros didáticos espanhóis no ensino primário, para avaliar como os autores interpretam as diretrizes para o desenvolvimento de conteúdos curriculares. Os tipos de gráficos, sua complexidade, os níveis de leitura e a atividade solicitada ao estudante são analisados. Os resultados mostram predomínio do gráfico de barras com menor exploração de outros tratados no currículo; nível de leitura adequado, uma variedade de complexidade do gráfico e domínio da atividade de leitura. Conclui-se com algumas sugestões para o ensino da matéria ela formação de professores. **Palavras-chave:** gráficos estatísticos; livros didáticos; educação primária

1. Introducción

La comprensión de gráficos estadísticos es una parte importante del sentido estadístico, que Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013) describen como unión de la cultura y el razonamiento estadístico. Esta comprensión es también fundamental en la organización, descripción y análisis de datos, al facilitar la obtención de nueva información oculta en los datos brutos, al cambiar la forma de representarlos (Wild y Pfannkuch, 1999).

Los gráficos estadísticos también permiten conectar la escuela con la sociedad actual, debido a su gran presencia en los medios de comunicación (Espinel, 2007) o en las redes sociales (Eudave, 2009; Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras, 2011). Aunque las nuevas tecnologías permiten la realización de gráficos de una forma rápida, estos pueden no ser los adecuados para las variables que se están representando, lo que implica la importancia de la competencia gráfica de los estudiantes (Arteaga, Batanero y Contreras, 2011).

En el currículo español de Educación Primaria vigente hasta la fecha (MEC, 2006), los gráficos estadísticos aparecen en el bloque *Tratamiento de la información, azar y probabilidad* con los siguientes contenidos:

> *Primer Ciclo* (6-7 años)*:* Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos.
>
> *Segundo Ciclo* (7-9 años): Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares. Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara.
>
> *Tercer Ciclo* (10-11 años): Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos. Obtención y utilización de información para la realización de gráficos (MEC, 2006, p. 43101).

También encontramos los siguientes criterios de evaluación:

> *Primer ciclo:* Realizar interpretaciones elementales de los datos presentados en gráficas de barras. Formular y resolver sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficos (MEC, 2006, p. 43098).
>
> *Segundo Ciclo:* Recoger datos sobre hechos y objetos de la vida cotidiana utilizando técnicas sencillas de recuento, ordenar estos datos atendiendo a un criterio de clasificación y expresar el resultado en forma de tabla o gráfica (MEC, 2006, p. 43100).
>
> *Tercer Ciclo*: Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato (MEC, 2006, p. 43101).

Actualmente nos encontramos en un cambio de programas, que se pondrá en marcha el año 2015 en la Educación Primaria, para lo cual se han modificado ligeramente los contenidos (MECD, 2014). La principal diferencia, es que se hace mención explícita a los gráficos de líneas y de sectores, además del gráfico de barras.

A nivel internacional, los Principios y Estándares para la Matemática Escolar del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), en el bloque *Análisis de Datos y Probabilidad*, señalan que los estudiantes de primaria deben ser capaces de representar información en tablas, gráficos de línea, puntos y barras. Estos mismos gráficos, se incluyen en los Common Core State Standards Initiative (CCSSI, 2010) progresivamente desde el primer curso de primaria, junto con los histogramas y gráficos de cajas que solo aparecen en el sexto curso. Tanto estos documentos como el Proyecto GAISE de la American Statistical Association y el NCTM (Franklin et al., 2005) coinciden en la importancia de trabajar con gráficos estadísticos desde edades tempranas.

El objetivo general de nuestra investigación fue analizar la presentación de los gráficos estadísticos en tres series de libros de textos para la Educación Primaria española, esperando que los resultados del análisis permitan plantear sugerencias para la mejora de la enseñanza y la formación de los profesores que han de enseñar este tema.

En lo que sigue presentamos los fundamentos del estudio, el método empleado, los resultados y conclusiones del análisis.

2. Fundamentos

2.1. Importancia del libro de texto

Los libros de texto son hoy día un recurso básico para las diferentes áreas de aprendizaje, al ser un apoyo en la preparación de las clases para los profesores, pues, con frecuencia, regulan las acciones de enseñanza y aprendizaje en el aula (Cordero y Flores, 2007). Su estudio permite observar los resultados de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), esto es, los cambios que experimenta el conocimiento matemático cuando es adaptado para su enseñanza. Estos textos adaptan los objetivos y contenidos definidos en las directrices curriculares y son un paso previo al currículo implementado en el aula (Herbel, 2007).

Los libros de texto presentan las ideas matemáticas en diferentes contextos, lo que permite apreciar las aplicaciones de la matemática, a la vez que permiten a los estudiantes explorar diferentes ideas y facilitan el aprendizaje (Reys, Reys y Chavez, 2004). Ortiz (2002) indica que son una fuente de datos y actividades para el aula y que resultan de un gran esfuerzo de planificación y síntesis

A pesar de esta importancia, la investigación sobre la presentación de los gráficos estadísticos en los libros de texto es muy escasa en todos los niveles educativos. A continuación resumimos los más significativos.

Lavalle, Micheli y Rubio (2006) estudiaron el lenguaje gráfico utilizado en el tema de correlación y regresión en siete libros de texto de Educación Secundaria en Argentina. Destacan el refuerzo de la correlación con el uso de diagramas de dispersión, que sirven para proponer ejercicios en que el estudiante analice el tipo y grado de relación lineal. A la misma conclusión llegan Gea, Batanero, Arteaga, Cañadas y Contreras (2014) en un estudio del mismo tema en ocho libros españoles de Bachillerato. Estos autores analizan igualmente el uso de los diagramas de barras e histogramas tridimensionales y gráficos de burbuja en los textos.

Como parte de su estudio del lenguaje de la probabilidad en dos series de libros de texto españoles de primaria, Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) analizan los gráficos incluidos en el tema. Encuentra un amplio uso de representaciones tabulares y gráficas, entre ellas, gráfico de barras y sectores, pictograma, e incluso un histograma; los autores se limitan a observar su presencia en los textos, sin llevar a cabo un estudio de su distribución o de las variables de los gráficos estadísticos.

En nuestro trabajo completamos los anteriores analizando los textos de educación primaria, con variables no tenidas en cuenta en la investigación previa, como la actividad solicitada al alumno y la complejidad del gráfico en sí y del nivel de lectura requerido, aspectos que analizamos a continuación.

2.2. Niveles de complejidad en la lectura y construcción de gráficos estadísticos

La lectura y construcción de gráficos estadísticos puede conllevar diferentes niveles de complejidad, según han analizado diversos autores. A continuación exponemos los trabajos de aquellos que tendremos en cuenta en nuestro análisis.

Son varios los autores que describen niveles de dificultad en la lectura de gráficos estadísticos. Bertin (1967) identifica tres niveles: e*xtracción de datos, extracción de tendencias y análisis de la estructura de los datos.* Estos tres niveles fueron analizados con más detalle posteriormente por Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001) quienes los denominan en forma diferente, en la forma que describimos a continuación:

1. *Leer los datos* (extracción de datos para Bertin): Consiste en una lectura literal de la información representada en el gráfico, es decir, no se realiza una interpretación de la información contenida en el gráfico estadístico, ni cálculos adicionales. Un ejemplo sería leer la frecuencia correspondiente a un valor dado.
2. *Leer dentro de los datos* (nivel de extracción de tendencias en Bertin): En este nivel hay que deducir una información basada en los datos proporcionados en el gráfico, pero que no se representa explícitamente. Para obtenerla se deben realizar cálculos o comparar los datos del gráfico. Un ejemplo sería encontrar la moda en un gráfico de barras.
3. *Leer más allá de los datos* (análisis de estructura en Bertin): Requiere la realización de inferencias a partir de la información que se presenta en el gráfico y que va más allá de realizar cálculos y/o comparaciones. Por ejemplo, predecir la frecuencia de un valor no incluido en el gráfico o dibujar la línea de regresión en un diagrama de dispersión.
4. *Leer detrás de los datos*: Consiste en valorar críticamente los datos; la forma en que fueron obtenidos y la posibilidad de extender las conclusiones; por lo que se requiere un conocimiento del contexto. Por ejemplo, preguntarse si la elección de una muestra ha sido la adecuada o si hay errores de medida en los datos.

Mientras que los anteriores niveles se refieren a la lectura del gráfico, otros autores han definido niveles de complejidad de los gráficos en sí mismos. Así, para Arteaga (2008, 2011) y Batanero, Arteaga y Ruiz (2010) la construcción de gráficos estadísticos puede ser más o menos compleja, según se pongan en juego diferentes objetos matemáticos. Estos autores definen los siguientes niveles de complejidad en los gráficos estadísticos.

1. *Gráficos que representan datos individuales*: Serían gráficos que sólo muestran datos aislados (por ejemplo, un alumno podría representar su edad, sin representar las edades de sus compañeros). Por ello en estos gráficos no se utilizan los conceptos de variable ni distribución y no se requiere un análisis global de la información.
2. *Representación de un conjunto de datos uno a uno, sin llegar a resumir su distribución*: Estos gráficos representan cada dato de la distribución sin agruparlos; no se manejan las ideas de frecuencia ni distribución de frecuencias. Por ejemplo, si se tienen 20 edades de alumnos de un curso y en el gráfico se representada cada una de estas edades, sin cálculo de frecuencias. Ya se usa la idea de variable, pero el orden de representación de los datos es arbitrario; no se sigue el orden numérico.
3. *Representación de una distribución de datos*: Se refiere a la representación de una distribución de manera agrupada y con cálculo de frecuencias; los datos se presentan de manera ordenada, siguiendo el orden de los ejes del gráfico (si se usan) o bien orden numérico. Por ejemplo, cuando los estudiantes agrupan las edades de un curso, calculando las frecuencias y las represente en un gráfico colocando las edades en orden (eje *X*).
4. *Representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico*: Cuando se representan dos o más distribuciones de frecuencias en el mismo gráfico estadístico. Por ejemplo, representar en un gráfico estadístico las edades de dos cursos del mismo nivel (calculando las respectivas frecuencias).

Tanto la complejidad del gráfico, como el nivel de lectura requerido influirán en la dificultad de la tarea propuesta al alumno. Igualmente será relevante *el tipo de tarea pedida (*lectura*,* construcción, cálculo, etc.), por lo que estas variables serán tenidas en cuenta en nuestro estudio, como se expone a continuación.

3. Metodología

3.1. Muestra

Para esta investigación se han analizado tres series completas de libros de texto publicadas en los años próximos a la promulgación del Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006), donde se introducen por primera vez los gráficos en el currículo de Educación Primaria en España. Se han elegido estas editoriales porque en todas ellas aparecen los gráficos estadísticos, en la mayoría de los cursos, y tienen gran tradición y difusión en España. Los textos analizados se eligieron mediante un muestreo no probabilístico intencional (muestreo dirigido), basado en una selección controlada y con características especificadas definidas previamente (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Se incluye su listado como anexo.

Cada uno de estos libros se revisó con detalle, para seleccionar los ejemplos, ejercicios, tareas o párrafos en que se incluyera al menos un gráfico estadístico. Denominaremos “actividades” a todas ellas y serán la primera unidad del análisis de contenido. En la Tabla 1 indicamos el número de actividades analizadas en cada una de las editoriales, que es muy similar en todas ellas.

Editorial	Frecuencia	Porcentaje
SM	74	34,4
Anaya	77	35,8
Santillana	64	29,8
Total	215	100

Tabla 1. Distribución de actividades analizadas por editorial

En la Tabla 2 presentamos la distribución de las actividades en las diferentes editoriales por curso escolar. Globalmente observamos que la mayor proporción de actividades sobre gráficos estadísticos se da en el quinto curso, seguido por el sexto y el tercero, aunque en todos los cursos aparecen algunas. Ello nos indica que se sigue, aunque sea con presencia pequeña, la sugerencia curricular de introducir el trabajo con datos y gráficos desde el primer curso.

Observamos también alguna diferencia entre editoriales, pues la tercera (Santillana) tiene algo mayor proporción de gráficos estadísticos en los dos primeros cursos y la distribución en el resto de cursos es más homogénea que en las otras. Por su parte, la primera (SM) tiene prácticamente concentrado el tema en los cursos quinto y tercero.

Nivel	SM		Anaya		Santillana		Total	
	N	%	N	%	N	%	N	%
1	2	2,7	5	6,5	5	7,8	12	5,6
2	3	4,1	3	3,9	8	12,5	14	6,5
3	20	27	12	15,6	11	17,2	43	20
4	3	4,1	16	20,8	13	20,3	32	14,9
5	39	52,7	12	15,6	13	20,3	64	29,8
6	7	9,5	29	37,7	14	21,9	50	23,3
Total	74	100	77	100	64	100	215	100

Tabla 2. Frecuencia y porcentaje de actividades analizadas por nivel escolar y editorial

3.2. Método de análisis

Una vez seleccionadas las distintas actividades en las que intervienen gráficos estadísticos, hemos analizado los tipos de gráficos incluidos en las actividades para comparar con lo especificado en el currículo y en investigaciones previas.

Respecto al método de análisis, seguimos una metodología de tipo cualitativa y exploratoria mediante el análisis de contenido (Zapico, 2006). Las etapas del análisis de contenido (Castiello, 2002) se resumen en los siguientes puntos:

1. Seleccionar las unidades del texto que contengan información (datos) sobre el fenómeno que es de interés estudio; en nuestro caso, como se ha dicho, seleccionar las actividades sobre gráficos.

2. Transformar tales datos en *unidades de registro*, es decir, porciones mínimas de contenido que se deben analizar separadamente porque aparecen palabras, frases o temas que consideran significativos, en nuestro caso, cada actividad diferenciada fue una unidad de registro.
3. Definir un *sistema de variables y categorías de análisis* que permite un proceso de codificación, es decir, transformar datos brutos en variables y categorías. Las variables utilizadas y categorías se describen en el apartado siguiente.
4. Realizar la codificación de cada una de estas variables en el conjunto de actividades seleccionadas de los libros de textos estudiados. Para ello se siguió un proceso inductivo y cíclico, realizando lecturas detalladas de cada actividad, interpretando y revisando los datos obtenidos, dando sentido al análisis, buscando vínculos entre las categorías y contrastando con nuestro marco teórico.

3.3. Variables

En nuestro trabajo se han tenido en cuenta dos variables independientes: editorial y nivel educativo a que va dirigido el libro de texto, que se cruzarán con todas las dependientes para comparar. Las variables dependientes son las siguientes:

- *Tipos de gráfico*: habiéndose encontrado en los textos los siguientes tipos: gráfico de barras, gráfico de líneas, gráfico de líneas acumulado, pictograma, gráfico de sectores, histograma, gráfico de puntos, gráfico de dispersión y pirámide de población.
- *Niveles de lectura* considerados por Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001), con cuatro posibles: leer los datos; leer dentro de los datos; leer más allá de los datos y leer detrás de los datos.
- *Nivel de complejidad del gráfico*, entre los definidos por Arteaga (2011): Representación de datos individuales; Representación de un conjunto de datos, sin llegar a resumir su distribución; Representación de una distribución de datos; Representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico.
- *Actividad que se pide en la tarea,* que puede ser: leer, calcular, construir, comparar, ejemplo, traducir, pasar a tabla, completar, describir variable o inventar problema.

4. Resultados

Descrito el método utilizado, pasamos a exponer nuestros resultados en cada una de las variables dependientes consideradas.

4.1. Tipos de gráfico

En primer lugar se analizó el tipo de gráfico incluido en la actividad. La Tabla 3 muestra la distribución global de todas las actividades analizadas según el tipo de gráfico que intervienen en ella. En esta tabla observamos también que en algunas actividades aparecen dos gráficos diferentes, por ejemplo, sectores y líneas.

Se evidencia una gran variedad de gráficos estadísticos en los libros de texto (barras, líneas, sectores, histograma, puntos, pictograma, entre otros), existiendo un claro predominio los gráficos de barras, líneas, sectores y pictogramas en un 46%, 20%, 12,1% y 7,4%; respectivamente. Los gráficos de barras alcanzan un porcentaje cercano al 50% y doblan a los de línea, que es el segundo tipo de gráfico más común en los libros de texto analizados de Enseñanza Primaria en España.

Tipo de gráfico	Frecuencia	Porcentaje
Barras	99	46
Líneas	43	20
Líneas acumuladas	2	0,9
Sectores	26	12,1
Sectores y barras	2	0,9
Sectores y Líneas	8	3,7
Histograma	8	3,7
Puntos	3	1,4
Pictograma	16	7,4
Pictograma y Puntos	1	0,5
Pictograma y barras	1	0,5
Dispersión	3	1,4
Pirámide	2	0,9
No especifica	1	0,5
Total	215	100

Tabla 3. Frecuencia y porcentaje de gráficos por tipo

Los gráficos estadísticos que tiene menor presencia son los de dispersión, puntos, pirámide de población, líneas acumuladas, pictograma e histograma. Este resultado es razonable, puesto que estos gráficos son más complejos y se trata de libros dirigidos a niños de Educación Primaria

En la Tabla 4 se resume la distribución del tipo de gráfico estadístico y el nivel educativo en el que se presenta. Se observa que en los dos primeros niveles de Educación Primaria (1 y 2) la totalidad de los gráficos son de barras. Se seguiría entonces la recomendación de Watson (2006) de introducir estos gráficos en primer lugar, debido a su sencillez.

Gráfico	Curso 1		Curso 2		Curso 3		Curso 4		Curso 5		Curso 6		Total	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Barras	12	100	14	100	26	60,5	10	31,3	26	40,6	11	22	99	46
Líneas					8	18,6	10	31,3	18	28,1	7	14	43	20
Pictograma					3	7	3	9,4	8	12,5	2	4	16	7,4
Sectores							3	9,4	9	14,1	14	28	26	12,1
Otros					6	14	6	18,8	3	4,7	16	32	31	14,4
Total	12	100	12	100	43	100	32	100	64	100	50	100	215	100

Tabla 4. Frecuencia y porcentaje de gráficos por tipo y curso

En el tercer curso observamos, mayoritariamente, la presencia de gráficos de barras, línea y se introduce el pictograma, mientras en el cuarto hay un predominio de los gráficos de barra y línea, y aparecen gráficos de sectores y pictogramas. En el quinto y sexto curso se observa una mayor variedad de gráficos, llegando a tener mayor presencia el diagrama de sectores en el sexto curso que otros gráficos. Observamos entonces el siguiente orden de introducción: gráficos de barras (1º y 2º curso), de líneas, puntos y pictograma (3º), de dispersión (4º), sectores (4º y 5º), pirámide de población e histograma (6º).

La Tabla 5 presenta la distribución de los gráficos según la editorial. Todas tienen un predominio de gráfico de barras, pero hay algunas diferencias. Aparecen en un segundo lugar en las editoriales SM y Anaya los gráficos de línea y los pictogramas en Santillana. Además, Anaya no presenta actividades sobre pictogramas. Santillana presenta un bajo número de actividades con gráficos de sectores y SM de pictogramas.

Gráfico	SM		Anaya		Santillana		Total	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Barras	32	43,2	42	54,5	25	39,1	99	46
Líneas	17	23	16	20,8	10	15,6	43	20
Pictograma	5	6,8			11	17,2	16	7,4
Sectores	13	17,6	9	11,7	4	6,3	26	12,1
Otros	7	9,5	10	13	14	21,9	31	14,4
Total	74	100	77	100	64	100	215	100

Tabla 5. Frecuencia y porcentaje de gráficos por tipo y editorial

4.3. Niveles de lectura

En segundo lugar analizamos los niveles de lectura (Curcio, 1989; Friel, Curcio y Bright, 2001) identificados en los gráficos presentes en las actividades analizadas. Un ejemplo de nivel de "leer los datos" lo encontramos en la Figura 1, donde se pide al niño leer la cantidad horizontal de cuadros que se encuentran a la derecha de cada día de la semana para dar respuesta a las preguntas planteadas (cantidad de jarritas hechas en cada día). Se trata de una lectura literal del gráfico, pues simplemente para cada valor de la variable debe encontrar su frecuencia. No se precisa realizar operaciones ni comparaciones con los datos.

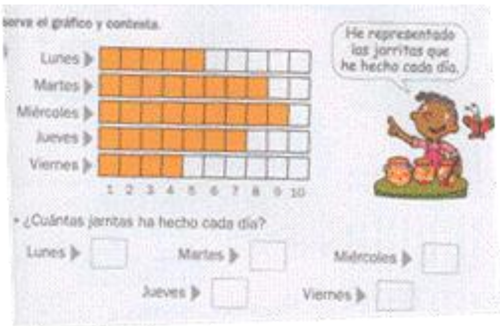


Figura 1. Nivel "leer los datos"
Fuente: Texto Santillana, 1º curso, p. 107.

El nivel "leer dentro de los datos" se ejemplifica en la Figura 2 donde se consulta sobre el día en que salió de vacaciones Raquel, es decir, el día en que la frecuencia acumulada se estabiliza y alcanza su valor máximo. Para responder, el niño debe identificar el día de la semana en que el consumo de agua se estabiliza. Para ello, además de hacer una lectura simple del dato de cada día de la semana, ha de comparar cada dato con el anterior, para ver si hay o no variación. La operación aritmética que puede utilizar para determinar lo que consume cada día, y cuándo se fue de vacaciones, es la sustracción.

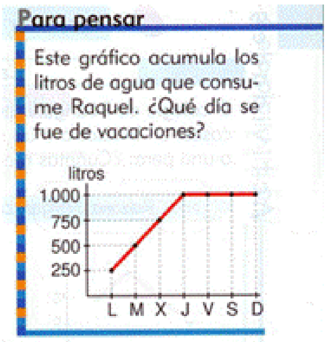


Figura 2. Nivel "leer dentro de los datos"
Fuente: Texto SM, 3º curso, p. 121

El tercer nivel, "leer más allá de los datos", se ejemplifica en la Figura 3, donde se muestra un gráfico de líneas en el que se representa la cantidad de agua (en millones de litros) que tiene un embalse a lo largo de seis meses. Se debe responder a preguntas relativas a la unidad de medición de la variable analizada, el mes en que hubo mayor cantidad de agua y de qué cantidad se trataba, y el mes en qué hubo menor cantidad. Además, se pide justificar qué sucederá en los próximos tres meses con la cantidad de agua, situación que lo ubica en el nivel 3 de lectura, ya que se solicita explicar una posible tendencia en función de los valores representados en el gráfico.

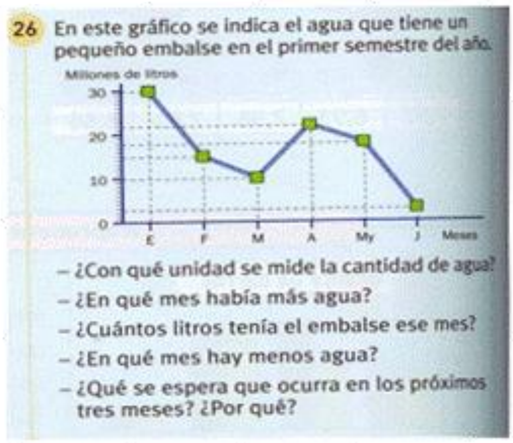


Figura 3. Nivel "leer más allá de los datos"
Fuente: Texto M, 5º curso, p. 118

Finalmente, el nivel de "leer detrás de los datos" se observa en la actividad de la Figura 4, donde se muestra un gráfico de barras con que representa el dinero recaudado en taquilla de una película de dibujos animados. En esta actividad el niño debe hacer un juicio sobre por qué ha vuelto a aumentar la recaudación tras cuatro semanas y si tardarán mucho en retirar la película (es decir, debe aplicar sus conocimientos no matemáticos sobre el contexto).

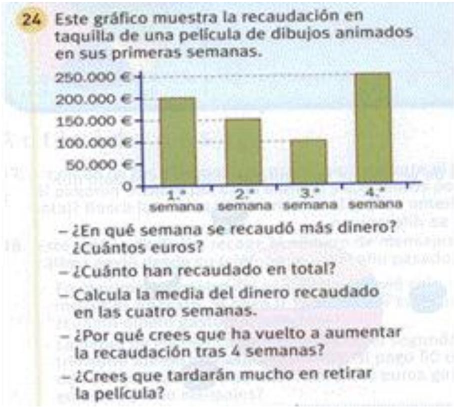


Figura 4. Nivel de "leer detrás de los datos"
Fuente: Texto SM, 5º curso, p.118

En la Tabla 6 se muestra la clasificación de las actividades, donde intervienen gráficos estadísticos, según el nivel de lectura. El 35,3% de los gráficos estadísticos requieren el nivel 1 de "leer los datos" y el 58,6% el nivel 2 de "leer dentro de los datos". Estos niveles de lectura (1 y 2) agrupan prácticamente todas las actividades propuestas. Los niveles 3 "leer más allá de los datos" y 4 "leer detrás de los datos" aparecen ocasionalmente.

Nivel de lectura	Frecuencia	Porcentaje	Porc. Acumulado
1	76	35,3	35,3
2	126	58,6	94
3	9	4,2	98,1
4	4	1,9	100
Total	215	100	

Tabla 6. Frecuencia y porcentaje de gráficos por nivel de lectura

En la Tabla 7 hacemos una clasificación de las actividades según nivel de lectura y nivel educativo en que se presentan. El predominio de los niveles 1 (leer los datos) y 2 (leer dentro de los datos) se observa sobre todo en los tres primeros cursos, y progresivamente se sube el nivel. En el curso 4º aparece una actividad de nivel 3 "leer dentro de los datos" y en quinto se introduce el nivel 4 "leer más allá de los datos", disminuyendo el porcentaje de niveles anteriores.

Nivel de lectura	Curso 1		Curso 2		Curso 3		Curso 4		Curso 5		Curso 6		Total	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
1	4	33,3	2	14,3	19	44,2	11	34,4	16	25	24	48	76	35,3
2	8	66,7	12	85,7	24	55,8	20	62,5	40	62,5	22	44	126	58,6
3							1	3,1	4	6,3	4	8	9	4,2
4									4	6,3			4	1,9
Total	12	100	14	100	43	100	32	100	64	100	50	100	215	100

Tabla 7. Frecuencia y porcentaje de gráficos por nivel de lectura y curso

La Tabla 8 muestra la clasificación de los gráficos estadísticos presentes en las actividades planteadas, según su nivel de lectura y el editorial, entre las que hay pocas diferencias. En general, se observa que el nivel de lectura más común, en las tres editoriales, es el nivel 2, destacando la editorial Santillana donde su presencia es de un 73,4%. Las editoriales Anaya y Santillana no presentan gráficos estadísticos con nivel de lectura 4 (leer detrás de los datos), donde se deba realizar un valoración crítica sobre la calidad de los datos y la forma de obtención de la información.

Nivel de lectura	SM		Anaya		Santillana		Total	
	N	%	N	%	N	%	N	%
1	28	37,8	32	41,6	16	25	76	35,3
2	38	51,4	41	53,2	47	73,4	126	58,6
3	4	5,4	4	5,2	1	1,6	9	4,2
4	4	5,4					4	1,9
Total	74	100	77	100	64	100	215	100

Tabla 8. Frecuencia y porcentaje de gráficos por nivel de lectura y editorial

En resumen, básicamente se proponen lecturas directas de los datos o comparaciones y operaciones con los datos del gráfico. En este sentido, se podría incluir en los últimos cursos alguna actividad más de nivel 3 o 4, para tener en cuenta las indicaciones del NCTM (2000) que sugiere que los niños han de obtener conclusiones y predicciones, con sus respectivas justificaciones, en base a los datos recogidos. En el mismo sentido, en las recomendaciones curriculares más recientes del sistema educativo español, se incluye el siguiente estándar de aprendizaje evaluable: "*realiza análisis crítico argumentado sobre las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos*" (MECD, 2014, p. 19376).

4.4. Complejidad del gráfico

En este estudio no se han identificado actividades donde se ejemplifique el nivel de complejidad 1 de "representación de datos individuales".

El nivel de complejidad 2 de "representación de un conjunto de datos uno a uno, sin llegar a resumir su distribución" se observa, por ejemplo, en la Figura 5, donde se muestra un gráfico de líneas que muestra la variación de las temperaturas durante una semana, alcanzando la temperatura mínima el cuarto día de la semana.

Figura 5. Gráfico de complejidad 2
Fuente: Texto SM, 3º curso, p. 120.

En Figura 6 encontramos un ejemplo del nivel de complejidad "representación de una distribución de datos". En esta actividad se muestra la distribución de las ventas realizadas en el departamento de electrónica de cierto almacén. En esta actividad se pregunta por la cantidad de ordenadores y de cámaras vendidas, sabiendo que la cantidad de cadenas musicales es de 24.

Figura 6. Gráfico de complejidad 3
Fuente: Texto SM, 5º curso, p.120

La Figura 7 es un ejemplo del nivel "representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico". Se muestra la cantidad de estudiantes, de primero y segundo de primaria, que han pasado sus últimas vacaciones en la playa o la montaña.

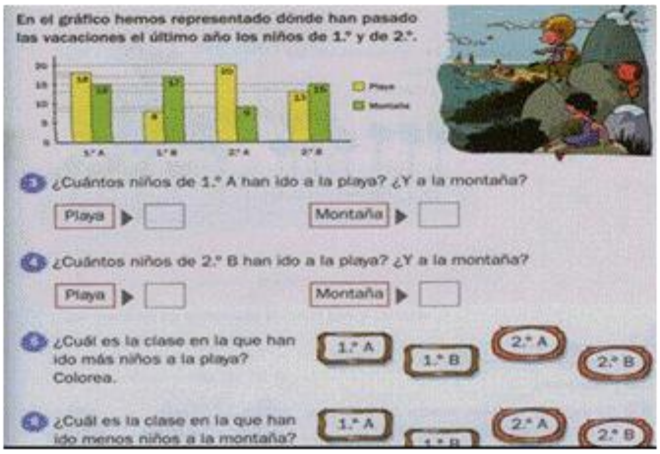


Figura 7.Gráfico de complejidad 4
Fuente: Texto Santillana, 2º curso, p.117

En la Tabla 9 se presenta la clasificación de las actividades según el nivel de complejidad del gráfico estadístico involucrado. El nivel más frecuente es el 3 "representación de una distribución de datos". Los niveles 2 "representación de un conjunto de datos, sin llegar a resumir su distribución" y 4 "representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico" no presentan grandes diferencias, pues en ambos casos tienen un porcentaje alrededor del 20%.

Nivel del gráfico	Frecuencia	Porcentaje	Porc .Acumulado
2	41	19,1	19,1
3	126	58,6	77,7
4	48	22,3	100
Total	215	100	

Tabla 9. Frecuencia y porcentaje de gráficos por nivel de complejidad

La Tabla 10 muestra la relación que existe entre los niveles de complejidad del gráfico y el curso de primaria al que corresponden los libros de textos. En los tres primeros cursos más del 70% de las actividades implican un nivel 3 (representación de una distribución). Esta proporción baja en los siguientes niveles. En el cuarto curso, contradictoriamente, el nivel más común es el nivel 2 “representación de un conjunto de datos, sin llegar a resumir su distribución”, posiblemente por la mayor frecuencia de gráficos de líneas en este nivel educativo.

Nivel del gráfico	Curso 1		Curso 2		Curso 3		Curso 4		Curso 5		Curso 6		Total	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
2	3	25	2	14,3	7	16,3	14	43,8	13	20,3	2	4	41	19,1
3	9	75	10	71,4	33	76,7	11	34,4	30	46,9	33	66	126	58,6
4			2	14,3	3	7	7	21,9	21	32,8	15	30	48	22,3
Total	12	100	14	100	43	100	32	100	64	100	50	100	215	100

Tabla 10. Frecuencia y porcentaje de gráficos por nivel de complejidad y curso

En los últimos cursos observamos un aumento del nivel 4 “representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico”; generalmente se trata de gráficos de barras o de líneas múltiples, con porcentajes levemente superiores al 30% en quinto y sexto curso, aunque todavía predomina la “representación de una distribución de datos”. En el primer año de primaria no se presentan actividades de este nivel 4 y el sexto curso presenta solo un 4% de actividades con un nivel 2. Los cursos 4 y 5 presentan una distribución más homogénea de actividades según complejidad.

En la Tabla 11 se hace el resumen de las actividades analizadas según la editorial y nivel de complejidad del gráfico estadístico, donde encontramos de nuevo diferencias. Las tres editoriales coinciden en la mayor presencia de gráficos en el nivel de complejidad 3, pero los textos de la editorial Santillana son los que presentan una distribución más homogénea de las actividades, según su nivel de complejidad, con porcentajes en torno al 30% en cada uno de los niveles 2, 3 y 4.

Nivel del gráfico	**SM**		**Anaya**		**Santillana**		**Total**	
	N	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
2	6	8,1	16	20,8	19	29,7	41	19,1
3	54	73	47	61	25	39,1	126	58,6
4	14	18,9	14	18,2	20	31,3	48	22,3
Total	74	100	77	100	64	100	215	100

Tabla 11. Frecuencia y porcentaje de gráficos por nivel de complejidad y editorial

4.5. Actividad planteada respecto a los gráficos

Para un los gráficos analizados se plantean diferentes tareas, que describimos a continuación, algunas de las cuales se combinan en el mismo gráfico.

Leer el gráfico: A partir de un gráfico ya construido, se pide al niño que responda a ciertas preguntas en función a la lectura que pueda hacer de él. Por tanto, el alumno ha de conocer los convenios específicos del gráfico en cuestión (por ejemplo, en un diagrama de sectores, qué representa cada sector). Ha de ser capaz de leer el título del gráfico o bien la descripción del mismo en el texto; diferenciar las escalas y ejes (cuál se refiere a las variables y cuál a las frecuencias) y leer los valores de los datos. Un ejemplo de esta actividad la encontramos en la Figura 1.

Calcular: Es una actividad que pide la lectura literal de la información y, sobre esta información, efectuar cálculos sencillos (sumar o restar, encontrar media, moda, mediana, rango). Por tanto, a la categoría anterior, se añade la competencia para hacer los cálculos pedidos. Un ejemplo aparece en la Figura 4 donde se pide calcular el total de lo recaudado en dichas semanas.

Comparar: Se pide que se realicen comparación entre variables, categorías de las variables o formas de representación (tablas o gráficos). Un ejemplo se presenta en la Figura 7, donde el alumno ha de comparar dos distribuciones.

Construir: Es una actividad donde se le pide al estudiante que construya un gráfico con datos sin agrupar o agrupados desde una tabla de frecuencia. En la Figura 8 se presenta una situación en que una niña ha registrado la edad de 40 niños y niñas. Sobre estos datos se pide a los estudiantes que organicen la información en una tabla y que construyan el gráfico de barras que corresponda.

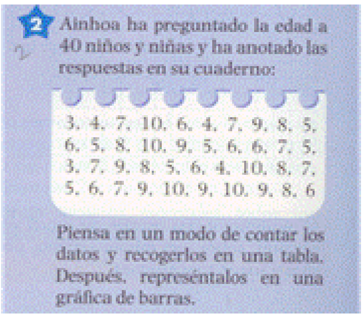


Figura 8. Ejemplo de construir
Fuente: Texto Anaya, 4º curso, p.170

Ejemplo: Corresponde a un sección del libro de texto que utilizan los autores para explicar un concepto, una forma de construcción, un tipo de gráfico, la forma de interpretar. Es decir, se utiliza para aclarar ideas y/o conceptos nuevos que se presentan. La Figura 5 ilustra un ejemplo donde se explica cómo construir un gráfico de líneas —primero señalar los datos con un punto y después unirlos con líneas rectas— relacionada con las temperaturas registradas durante una semana. Esta es la segunda actividad más frecuente que se ha encontrado en los libros de texto.

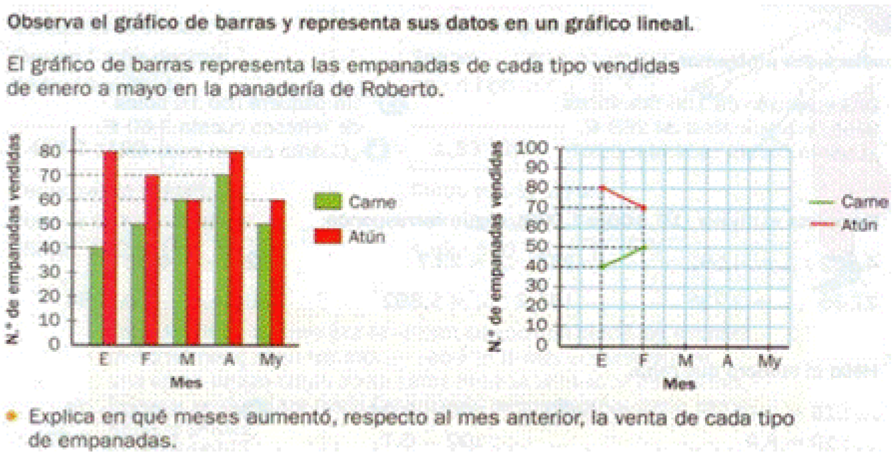


Figura 9. Ejemplo actividad traducir gráficos
Fuente: Texto Santillana, 5º curso, p.128

Traducir: Es cuando se pide que los estudiantes hagan un cambio de representación gráfica, es decir, pasar de un tipo de gráfico otro. La tarea es más compleja que la de construcción o lectura de un gráfico pues combina las dos anteriores; ha de leer el primer gráfico y con la información obtenida construir el segundo. Requiere así, conocimiento de los dos gráficos. Un ejemplo se muestra en la Figura 9, que presenta un gráfico de barras adosadas que ha de cambiarse a un gráfico de líneas donde se puede observar la variación de las ventas de ambos tipos de empanadas durante los cinco meses.

Pasar a tabla: Actividad que consiste en representar en una tabla de frecuencias la información que proporciona un gráfico estadístico. Uno de los ejemplos se plasma en la Figura 10, donde se pasa la información presente en un histograma a una tabla de frecuencias. Dentro de las tareas solicitadas está la observación del gráfico, la construcción de una tabla (en función de la lectura del gráfico) y dar respuesta a preguntas en base a las actividades anteriores. Observamos la complejidad de la tarea, pues además se une la dificultad de decidir, por ejemplo, si 6 años pertenece a la clase A o B. Esto se aclara en la primera pregunta, para la cual se da la respuesta, aunque matemáticamente no hay una regla especificada.

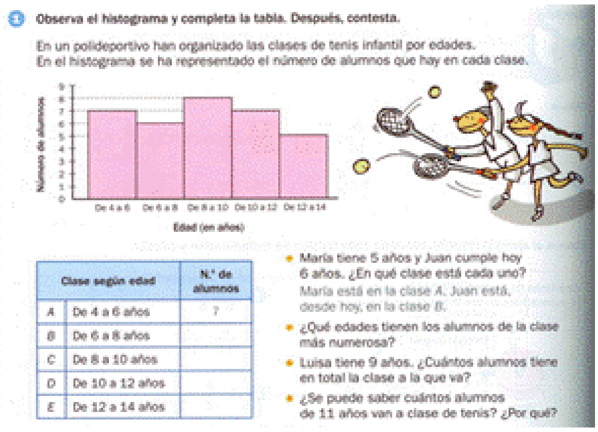
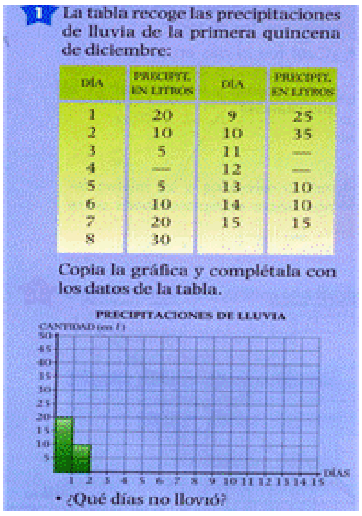


Figura 10. Ejemplo de pasar a tabla.
Fuente: Texto Santillana, 6º curso, p. 102

Completar: el estudiante debe continuar la construcción de un gráfico estadístico de acuerdo a los datos proporcionados y el modelo iniciado, que guían la construcción. Esta es una actividad de poco predominio en los libros de textos estudiados, ya que solo se han identificado tres. Un ejemplo se da en la Figura 11, en donde se muestra una tabla con la información de la cantidad de agua caída en los primeros quince días del mes de diciembre. El gráfico, que se muestra en la parte inferior de la tabla, tiene construidas las barras de los dos primeros días —sirviendo como guía— para que el niño pueda seguir con la construcción del diagrama.

Describir variable: Es un tipo de actividad donde se presenta un gráfico, y se pide definir y explicar las variables que intervienen en el mismo y la relación que existe entre ellas. En la Figura 12 se presenta una actividad en la que se pide al estudiante que mencione dos situaciones en que las gráficas tengan sentido. Ejemplos de estas situaciones pueden ser en consumo de electricidad en una casa y la cantidad de agua en un estanque, respectivamente.


1 La tabla recoge las precipitaciones de lluvia de la primera quincena de diciembre:

DÍA	PRECIPIT. EN LITROS	DÍA	PRECIPIT. EN LITROS
1	20	9	25
2	10	10	35
3	5	11	—
4	—	12	—
5	5	13	10
6	10	14	10
7	20	15	15
8	30		

Copia la gráfica y complétala con los datos de la tabla.

• ¿Qué días no llovió?

Figura 11. Ejemplo de completar
Fuente: Texto Anaya, 4º curso, p.170

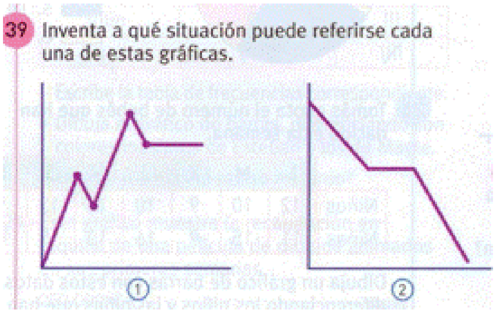


Figura 12. Ejemplo de describir variables
Fuente: Texto SM, 5º curso, p.120

Inventar problema: Es cuando se pide al estudiante generar un problema a partir de un gráfico estadístico, es decir, generar un contexto donde los datos entregados tengan sentido y coherencia. De este tipo de actividades solo se encontró un ejemplar (Figura 13), lo que se traduce en la actividad de menor presencia en los libros de texto estudiados.

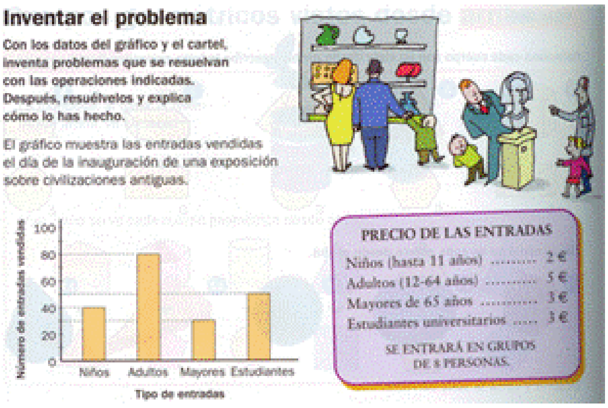


Figura 13. Ejemplo de inventar problema
Fuente: Texto Santillana, 3º curso, p.194

En la Tabla 12 se muestra la distribución de tareas de los textos analizados según el tipo actividad que se demanda al alumno y donde se ven involucrados gráficos estadísticos. Las actividades más frecuentes son las de: leer, ejemplo, construir y leer y construir. Entre construir, leer o ambas se encuentra más del 60% de actividades. Las actividades con menor frecuencia son: inventar problema, describir variable, completar y la de construir y comparar.

Actividad	Frecuencia	Porcentaje
Leer	77	35,8
Leer y calcular	19	8,8
Construir	27	12,6
Construir y leer	30	14
Construir y comparar	3	1,4
Ejemplo	36	16,7
Traducir	8	3,7
Pasar a tabla	9	4,2
Completar	3	1,4
Describir variable	2	0,9
Inventar problema	1	0,5
Total	215	100

Tabla 12. Frecuencia y porcentaje de tipo de actividades

En la Tabla 13 se analiza el tipo de actividad en que se utilizan gráficos estadísticos de acuerdo al nivel educacional. En el primer curso se observa que prácticamente todas consisten en leer o construir gráficos (50% sólo "leer", el 25% implica "construir y leer" y un 16,7% sólo "construir"). Ambos tipos de actividades se citan explícitamente en el Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006), por lo que en este sentido se siguen las orientaciones curriculares.

A partir de segundo curso se utilizan los ejemplos y la actividad de calcular; esta última va aumentando a medida que se avanza de curso; es a partir de tercero cuando se incluyen las otras actividades descritas. Así, en el segundo curso de primaria, las actividades más frecuentes son las de "leer" y "ejemplo"; en tercero las de "leer", "ejemplo" y "construir y leer"; y en cuarto "leer" y "construir". En quinto curso existe un predominio de las actividades de "leer", "leer y calcular", "construir y leer" y "ejemplo". En el sexto curso, las actividades más frecuentes son "leer", "ejemplo" y "construir".

Actividad	Curso 1		Curso 2		Curso 3		Curso 4		Curso 5		Curso 6		Total	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Leer	6	50	7	50	14	32,6	13	40,6	19	29,7	18	36	77	35,8
Leer y calcular			1	7,1	3	7	3	9,4	9	14,1	3	6	19	8,8
Construir	2	16,7	1	7,1	3	7	6	18,8	8	12,5	7	14	27	12,6
Ejemplo			3	21,4	10	23,3	2	6,3	9	14,1	12	24	36	16,7
Construir y leer	3	25	1	7,1	8	18,6	3	9,4	9	14,1	6	12	30	14
Otros	1	8,3	1	7,1	5	11,6	5	15,6	10	15,6	4	8	26	12,1
Total	12	100	14	100	43	100	32	100	64	100	50	100	215	100

Tabla 13. Frecuencia y porcentaje según tipo de actividad planteada y curso

En la Tabla 14 se presentan los tipos de actividades que se proponen en los libros de texto analizados según la editorial a la que pertenecen. Al igual, que en la tabla anterior, la actividad que predomina en las tres editoriales es "leer". En segundo lugar, en SM y Anaya está "ejemplo" y en Santillana "construir". En tercero, SM y Santilla tienen "construir y leer"; y Anaya tiene "construir". No observamos grandes diferencias en esta variable.

Actividad	SM		Anaya		Santillana		Total	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Leer	25	33,8	28	36,4	24	37,5	77	35,8
Leer y calcular	5	6,8	10	13	4	6,3	19	8,8
Construir	6	8,1	11	14,3	10	15,6	27	12,6
Ejemplo	15	20,3	17	22,1	4	6,3	36	16,7
Construir y leer	11	14,9	10	13	9	14,1	30	14
Otros	12	16,2	1	1,3	13	20,3	26	12,1
Total	74	100	77	100	64	100	215	100

Tabla. 14. Frecuencia y porcentaje según tipo de actividad planteada y editorial

5. Conclusiones

Nuestro análisis de las tres series de libros de texto de educación primaria española muestra la presencia de gráficos estadísticos en todos los cursos, tal y como se recomiendan en las orientaciones curriculares (MEC, 2006). La distribución de las actividades que presentan gráficos estadísticos es similar, en cantidad, en las tres editoriales analizadas; siendo tercero, quinto y sexto los cursos que presentan mayor número de actividades con gráficos estadísticos.

Dentro de los tipos de gráficos estadísticos que hemos identificado predomina el gráfico de barras, con presencia también del diagrama de líneas, de líneas acumulado, pictograma, de sectores, histograma, puntos, dispersión y pirámide de población, los primeros citados en el currículo español (MEC, 2006; MECD, 2014) y los últimos en el americano (NCTM, 2000; CCSSI, 2010). La distribución del tipo de gráfico según curso es, sin embargo, no homogénea: los gráficos de barras son introducidos en los dos primeros años de educación primaria; en tercer curso se introducen los de líneas y pictogramas; y en cuarto año los gráficos de sectores. Ello es razonable pues sigue la dificultad conceptual de los diferentes gráficos analizada por algunos autores como Watson (2006).

Los niveles de lectura de gráficos estadísticos más frecuentes son el 2, “leer dentro de los datos”, y el 1, “leer los datos”, sin diferencia por cursos, aunque sí por editorial. Estos son, a nuestro juicio, niveles adecuados para trabajar con los niños, pero recordamos que la lectura crítica de datos es importante trabajarla, aunque implicaría un nivel más avanzado 3 o 4 (leer detrás de los datos o leer más allá de los datos) que se contempla en muy pocos ejemplos.

Respecto a la complejidad del gráfico, existe un predominio del nivel de complejidad 3, “representación de una distribución de datos”, sin grandes diferencias por curso. Respecto a las editoriales, solo Santillana presenta una distribución más homogénea. Nos parece que se debiera trabajar más el nivel 2 (representar directamente una lista de datos sin formar la distribución) pues el concepto de distribución es complejo para los niños, sobre todo en los primeros cursos. Por otro lado, hemos observado gráficos de nivel 4 (comparación de dos distribuciones), incluso algunos en los primeros cursos. Nuestra opinión es que no se debe comenzar a trabajar este nivel hasta haber adquirido competencia en los anteriores.

Las actividades que más se piden a los niños son leer; ejemplo; construir y calcular, lo que parece seguir las recomendaciones curriculares. Las actividades de menor frecuencia son la de inventar problema y describir la variable.

Todos estos resultados proporcionan un análisis claro de la actividad que se requiere de los niños respecto a los gráficos estadísticos en los textos de Educación Primaria españoles. Una implicación inmediata es la necesidad de asegurar que los profesores de este nivel educativo tengan la suficiente competencia gráfica para llevar a cabo ellos mismos estas actividades, evaluarlas en sus alumnos y ayudarles a éstos en las posibles dificultades que presenten. Desafortunadamente, algunas investigaciones previas muestran que en España los futuros profesores no siempre tienen estas competencias. Así, por ejemplo, Arteaga (2011) mostró las dificultades y errores de los futuros profesores al construir gráficos de nivel de complejidad 3, que es el nivel más frecuencia en los libros de texto en nuestro estudio. Igualmente, algunos futuros profesores no llegan al nivel de lectura 3 o 4 de los gráficos, que, aunque estos niveles no son muy frecuentes en los libros analizados, pensamos que el conocimiento del futuro profesor debe ir algo más allá del requerido para sus estudiantes. La formación de profesores de primaria debe tener en cuenta estos resultados para asegurar una adecuada competencia gráfica de los futuros profesores.

Otra implicación de nuestra investigación es que deja explicito el tipo de gráficos y actividades que se espera que el profesor proponga y trabaje en los distintos niveles en su clase de primaria. El profesor puede utilizar nuestro análisis y replicarlo en otros textos que utilice para identificar el nivel de dificultad de las diferentes actividades que se proponen. Igualmente nuestros resultados pueden utilizarse para diseñar instrumentos de evaluación que tengan en cuenta las diferentes variables a considerar en el trabajo con gráficos estadísticos.

Finalmente, esperamos que esta investigación motive el desarrollo de otros estudios sobre la presentación de los gráficos estadísticos; por ejemplo, replicar con libros de texto de otro país, estudiar los gráficos estadísticos en libros de texto de ciencias naturales y/o sociales, o en otro nivel educativo.

Agradecimiento: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Arteaga, P. (2008). *Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos.* Trabajo fin de Máster. Universidad de Granada.

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números*, *76*, 55-67.

Arteaga, P., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2011). Gráficos estadísticos en la educación primaria y la formación de profesores. *Indivisa, 12*, 123-135.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-154.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. Números *83*, 7-18.

Bertin, J. (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.

Castiello, J. M. (2002). *Los desafíos de la educación intercultural: migraciones y currículum.* Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics.* Washington, DC: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Recuperable en: www.corestandards.org/Math/

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática, XI,* 99-119.

Eudave, D. (2009) Niveles de comprensión de información y gráficas estadísticas en estudiantes de centros de educación básica para jóvenes y adultos de México. *Educación Matemática, 21*(2), 5-37.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K- 12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association. Recuperable en: www.amstat.org/Education/gaise/.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2014). Análisis del lenguaje sobre la correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. *SUMA*, *76*, 37-45..

Gómez, E., Ortiz, J.J., Batanero, C. y Contreras, J.M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 35*, 75-91.

Herbel, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the" voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(4), 344-369.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(3), 383-406.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria.* Madrid: Autor.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* Madrid: Autor.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics. Reston*, VA: Autor

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Reys, B. J., Reys, R. E. y Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership, 61*(5), 61-66.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

Zapico, M. (2006). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. *Primer seminario internacional de textos escolares* (pp. 149-155). Santiago: Ministerio de Educación.

Anexo 1: Textos utilizados en el análisis

- ***Serie 1: Editorial SM:***

  Ferrandíz, B., Monzó, A. Santaolalla, E. (2008), *Matemáticas, 1 Primaria.* Proyecto Trampolín.

  Ferrandíz, B., Monzó, A., Fernández, B. y Santaolalla, E. (2008*). Matemáticas, 2 Primaria.* Proyecto Trampolín.

  Peña, M., Aranzubía, V. y Santaolalla, E. (2008). *Matemáticas 3º.* Proyecto Tirolina, reedición 2011.

  Peña, M., Aranzubía, V. y Santaolalla, E. (2008). *Matemáticas 4°.* Proyecto Tirolina, reedición 2011.

  Aranzubía, V. Santaolalla, E., Gómez, M. y Pérez, E. (2008), *Matemáticas 5º.* Proyecto Planeta Amigo.

  Aranzubía, V., Santaolalla, E., Roldán, J. y Pérez, E. (2008). *Matemáticas 6º.* Proyecto Planeta Amigo.

- ***Serie 2: Editorial Anaya:***

  Ferrero, L., Jiménez, C., y Martín, G. (2007). *Matemáticas 1. Salta a la vista.*

  Ferrero, L., Jiménez, C., y Martín, G. (2007). *Matemáticas 2. Salta a la vista.*

  Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2001). *Matemáticas 3.* Proyecto Sol y Luna, reedición 2004.

  Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2001). *Matemáticas 4.* Serie Sol y Luna, reedición 2004.

  Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2001). *Matemáticas 5.* Serie Sol y Luna. Reedición 2004

  Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2001). *Matemáticas 6.* Serie Sol y Luna, reedición 2004.

- ***Serie 3: Editorial Santillana***

  Garín, M., Rodríguez, M. (2004). *Matemáticas 1.* Un paso más, reedición 2006.

  García, P. y Garín, M. (2004). *Matemáticas 2.* Un paso más, reedición 2006.

  Almodóvar, J.A., García, F. Garín, M, Gómez, R., Rodríguez, M. y Uriondo, J. L. (2005). *Matemáticas 3.* Un paso más, reedición 2006.

  Almodóvar, J.A., García, F. Garín, M, Gómez, R., Rodríguez, M. y Uriondo, J. L (2005). *Matemáticas 4.* Un paso más

Almodóvar, J.A., García, F. Hernández, J. Moreno, R, Rodríguez, M. y Serrano, E. (2006). *Matemáticas 5.* Un paso más

Almodóvar, J.A., García, F. Hernández, J. Moreno, R, Rodríguez, M. y Serrano, E. (2006). *Matemáticas 6*. Un paso más

Danilo Díaz-Levicoy: Becario para Máster y Doctorado de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT-Chile). Profesor de Matemática y Computación (Universidad de Los Lagos). Máster en Didáctica de la Matemática (Universidad de Granada). **dddiaz01@hotmail.com**

Carmen Batanero Bernabeu: Catedrática de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. Licenciada en Matemáticas (Universidad Complutense de Madrid). Doctora en Matemáticas (Universidad de Granada). Fue miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Comisión on Mathematical Instruction) y Presidenta de IASE (International Association for Statistical Education). **batanero@ugr.es**

Pedro Arteaga Cezón: Profesor de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. Licenciado en Matemáticas (Universidad Complutense de Madrid). Máster y Doctor en Didáctica de la Matemática (Universidad de Granada). **parteaga@ugr.es**

María M. Gea Serrano: Profesora del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Lic. en Matemáticas (Universidad de Murcia), Lic. en CC. y TT. Estadísticas (Universidad de Granada). Máster en Estadística Aplicada (Universidad de Granada) y Doctora en Ciencias de la Educación (Universidad de Granada). **mmgea@ugr.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 113-132

Productividad de la comunidad de matemática educativa de la región centroamericana

Carlos Fuentes, Mario Sánchez Aguilar

Fecha de recepción: 10/02/2014
Fecha de aceptación: 28/11/2015

Resumen	Se reporta un estudio documental enfocado en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME). Particularmente, se indaga sobre la productividad de los educadores matemáticos de la región centroamericana a través de dos preguntas de investigación: 1) ¿cuál es el volumen de la productividad de la región centroamericana en cuanto a trabajos publicados en el ALME?, y 2) ¿cuáles son las características principales de sus trabajos que son reportados en el ALME? El método se basó en un análisis de los volúmenes 16 al 25 del ALME. Los resultados del estudio evidencian que la comunidad centroamericana de matemática educativa tiene una productividad limitada. **Palabras clave**: Productividad, Centroamérica, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.
Abstract	We report a documentary study focused on the analysis of the Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME). In particular, we inquire about the productivity of the mathematics education community in Central America through two research questions: 1) what is the volume of productivity of the Central America region in terms of documents published in ALME?, and 2) what are the main features of this productivity? The method is based on an analysis of ALME from volume 16 until volume 25. The results of the study show that the community of Central American mathematics educators has a limited productivity. **Keywords**: Productivity, Central America, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.
Resumo	No artigo é relatado um estudo documental sobre a Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME). Em particular, investiga a produtividade dos educadores matemáticos na América Central. Duas questões de pesquisa guiam este estudo: 1) qual é o volume de produtividade na América Central em termos de artigos publicados na ALME, e 2) quais são as principais características dos trabalhos? A metodología utilizada é uma análise dos volumes 16 até 25 da ALME. Os resultados do estudo mostram que a produtividade da comunidade centro-americana da educação matemática é limitada. **Palavras-chave:** Produtividade, América Central, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.

1. Introducción

Hoy en día es un hecho innegable que la comunidad latinoamericana de educadores matemáticos ha ido ganando reconocimiento en la arena internacional de la matemática educativa, esto debido principalmente a las diferentes e importantes aportaciones académicas que se han generado en esta región del mundo. Dos ejemplos de este reconocimiento internacional son, por un lado, el otorgamiento de la medalla Felix Klein al profesor Ubiratan D'Ambrosio por el rol que ha jugado en el desarrollo de la educación matemática como campo de investigación en todo el mundo, y sobre todo en Latinoamérica (International Commission on Mathematical Instruction [ICMI], 2008); otro ejemplo más reciente es el reconocimiento que se hace de distintas agrupaciones latinoamericanas de educadores matemáticos y sus publicaciones asociadas, en el *Third International Handbook of Mathematics Education* (Hodgson, Rogers, Lerman y Lim-Teo, 2013) como estructuras académicas estables que contribuyen al desarrollo de la educación matemática en la región y en el mundo.

A pesar de la existencia de este reconocimiento internacional, aún se sabe poco acerca de las características principales del tipo de trabajos académicos desarrollados por la comunidad latinoamericana de educadores matemáticos. Existe una escasez de estudios sistemáticos que caractericen los trabajos académicos relacionados con la matemática educativa que se producen en Latinoamérica. Hasta el momento no se han producido compendios como los elaborados en otras regiones del mundo (Sriraman, Bergsten, Goodchild, Pálsdóttir & Haapasalo, 2010; Sriraman et al., 2013), que proporcionen una idea general del tipo de investigación que se produce en la región latinoamericana. Aunque existen varios estudios que reportan cuáles han sido y cómo han cambiado las tendencias de investigación en el campo de la matemática educativa (Kilpatrick, 1992; Kieran, 1994; Gómez, 2000; Niss, 2000; Lubienski y Bowen, 2000; Chassapis, 2002; Hanna y Sidoli, 2002; Lerman, Xu y Tsatsaroni, 2002; Lerman y Tsatsaroni, 2004), dichos estudios no reflejan el estado de desarrollo de la región latinoamericana. Hasta ahora sólo contamos con estudios como los de Domínguez (2008), Hernández y Jacobo (2011), y Crespo (2013); y con compendios —como el volumen 42, número 3-4 de la revista ZDM enfocado en el desarrollo de la matemática educativa en Brasil durante los últimos 30 años— que proporcionan caracterizaciones parciales del tipo de trabajos de matemática educativa producidos en Latinoamérica. Así, aunque se reconoce la existencia de una comunidad activa de educadores matemáticos latinoamericanos, las características de los trabajos que se generan en esta región es un asunto un tanto desconocido para muchos investigadores, sobre todo para aquellos no latinoamericanos.

Entendemos que sería demasiado ambicioso para el alcance de un solo estudio proponer una caracterización del tipo de trabajos de matemática educativa que se desarrollan en Latinoamérica; así, lo que se presenta en este manuscrito es el reporte de un estudio documental de naturaleza exploratoria y descriptiva, que contribuye a avanzar nuestro conocimiento acerca del tipo de estudios de matemática educativa producidos en la región Latinoamericana y sus principales características. El estudio que reportamos se enfoca en analizar la producción académica de la comunidad de matemática educativa de la región centroamericana, tomando como referente los manuscritos publicados durante la última década en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME).

La elección de ALME como objeto de estudio, obedece a motivos históricos, ya que, lo que hoy se llama Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), inició llamándose "Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa", y luego de un proceso de diez reuniones, de las cuales cinco se realizaron en países de la región centroamericana, tomó el nombre y estructura que tiene actualmente (Fuentes 2013). Otro motivo por el cual se tomó el ALME como objeto de estudio, es que ambos autores del presente artículo consideramos que RELME, que da origen al ALME, ha contribuido bastante a nuestra formación y que estamos naturalmente cerca.

El estudio que reportamos en este manuscrito puede considerarse como un meta-estudio en el sentido de Niss (1999), en el que el objeto de estudio es la comunidad o el campo mismo de la matemática educativa. El manuscrito comienza con una discusión sobre el concepto de productividad científica, el cual es un constructo central en el estudio. Después de discutir este concepto se presentan las preguntas de investigación que guían el estudio, así como el método de investigación que se diseñó para contestarlas. Posteriormente se presentan los resultados del estudio, y en la parte final del manuscrito se discuten estos resultados y se mencionan nuevos cuestionamientos que surgen a partir de este trabajo.

2. Sobre el concepto de productividad

La productividad científica de una comunidad o un individuo puede estar constituida por diferentes elementos y puede ser vista desde distintos ángulos, sin embargo, un indicador ampliamente usado en estudios de productividad científica es la publicación de trabajos académicos (ver por ejemplo, Bauldry, 2013; Jeang, 2009). Dichos trabajos académicos pueden ser publicados en diferentes espacios como revistas especializadas, memorias de congresos, libros o capítulos de libros, e informes técnicos. Esta actividad de escritura y publicación es fundamental pues es una forma de comunicación, preservación y generación de conocimiento en cualquier disciplina científica.

De acuerdo a Wickremasinghe (2008), estudiar la productividad de una comunidad científica es importante porque puede proporcionar una idea aproximada del desarrollo de dicha comunidad; esta relación entre productividad científica y estado de desarrollo de una comunidad es uno de los supuestos básicos del estudio que reportamos en este manuscrito: siendo la matemática educativa una disciplina científica en expansión, creemos que no es ajena al vínculo planteado por Wickremasinghe (2008), es decir, creemos que el estudio de la productividad científica de la comunidad de educadores matemáticos latinoamericanos puede darnos una imagen aproximada de su estado de desarrollo.

Al pensar en la productividad científica de una comunidad debe pensarse en los lugares en que esa productividad se puede hacer visible. Al respecto Maz-Machado, Bracho-López, Torralbo-Rodríguez, Gutiérrez-Arenas y Hidalgo-Ariza (2011) declaran que el análisis de una disciplina científica a través del estudio de los congresos es una práctica común en otras ciencias distintas de la matemática educativa, pues la huella de la producción del conocimiento, así como su transmisión, puede seguirse mediante sus publicaciones en este tipo de eventos académicos. En el caso de la región centroamericana —región en la que se centra este estudio— y específicamente la comunidad de matemáticos educativos de esa región, uno de los lugares donde se puede hacer visible su productividad es la

Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) y gran parte de esa productividad queda registrada de forma escrita en el ALME. Nuestro interés en conocer el estado de desarrollo de la comunidad centroamericana de educadores matemáticos es la razón principal por la cual nuestro estudio se centra en el análisis del ALME como un medio para explorar la productividad de la comunidad centroamericana.

Aunque los términos educación matemática y matemática educativa tienen distintas connotaciones, como lo menciona Valero (1999), es evidente que a RELME asisten profesores de matemática, investigadores en matemática educativa y posiblemente personas que juegan ambos roles; por tal motivo, en este artículo, se utilizarán los términos: “comunidad de matemáticos educativos” y “comunidad de educadores matemáticos” de forma indistinta, para referirnos a la comunidad centroamericana que asiste a RELME y que publica en el ALME; todos aportando a la matemática educativa, pues según Godino (2010), “las teorías científicas no pueden ser realizaciones individuales ni hechos aislados; debe haber una comunidad de personas entre las que exista un acuerdo, al menos implícito, sobre los problemas significativos de investigación y los procedimientos aceptables de plantearlos y resolverlos” p. 4.

3. Preguntas de investigación

La inquietud inicial que dio origen al estudio reportado en este artículo se puede redactar de la siguiente manera: ¿Cuál es el estado de desarrollo de la comunidad de matemática educativa de la región centroamericana, tomando en cuenta su productividad científica?

Los países considerados en este estudio como constituyentes de la región centroamericana son: Guatemala, El Salvador, Honduras, Nicaragua, Costa Rica y Panamá; aclarando que, aunque Belice se considera como parte de la región geográfica centroamericana, no se incluyó en este estudio, ya que el idioma oficial en ese país es el inglés, lo cual podría ser limitante en su participación en un evento como RELME en el que mayoritariamente participan países que tienen como idioma oficial el español. Quizá por cuestiones de idioma, ALME no representa para la comunidad de educadores matemáticos de Belice una plataforma accesible de publicación de sus trabajos en matemática educativa.

Para acercarnos a una respuesta a la inquietud planteada anteriormente, se establecieron las siguientes dos preguntas de investigación:

1. ¿Cuál es el volumen de la productividad de la región centroamericana en cuanto a trabajos publicados en el ALME?

2. ¿Cuáles son las características principales de los trabajos que son reportados en el ALME por personas de la región centroamericana?

Dado que nos interesaba conocer detalles del volumen de productividad, para la pregunta número 1 se plantearon las siguientes preguntas auxiliares:

1.1 ¿Qué país centroamericano presenta más trabajos publicados en los volúmenes del ALME?

1.2 ¿Qué instituciones centroamericanas han aportado mayor cantidad de artículos al ALME?

1.3 ¿Cuáles son los autores centroamericanos con más aportaciones al ALME?

En cuanto a características de la productividad, a la que hace referencia la pregunta número dos, se establecieron las siguientes preguntas auxiliares:

2.1 ¿Cuáles son los temas más abordados por las personas que presentan trabajos en el ALME?

2.2 ¿Existe un sujeto u objeto de estudio más abordado en los trabajos reportados?

2.3 ¿Cuáles son las fuentes más referenciadas en el ALME por los autores que publicaron trabajos en el ALME?

2.4 ¿Cuáles son las revistas más citadas en el ALME?

2.5 ¿Cuáles son las referencias bibliográficas citadas con mayor frecuencia en los artículos publicados en el ALME?

2.6 ¿Cuáles son los autores más citados por personas que publicaron artículos en el ALME?

2.7 ¿Los trabajos publicados han sido trabajos individuales o en colaboración?

2.8 ¿A qué nivel educativo pertenecen los trabajos publicados en el ALME?

2.9 ¿Qué tipo de actividad académica de RELME ha recibido mayor aportación de autores centroamericanos?

4. Método

El método utilizado para buscar responder a las preguntas planteadas anteriormente se basó en una revisión bibliográfica del ALME, como documento oficial de publicación de trabajos presentados en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, pues es una plataforma importante de presentación de trabajos de personas de la región centroamericana. Por tal motivo, queriendo tener una revisión más o menos extensa y actualizada se consideraron 10 años de revisión, esto es, se revisaron desde el volumen 16 hasta el volumen 25.

Para el registro y organización de datos se diseñaron dos tablas en Excel, que sufrieron algunas modificaciones en su forma y tamaño original. La primera tabla denominada “Captura de datos”, consignó datos de cada artículo incluido en el estudio con la siguiente información:

+ Título del artículo

+ Nombre del autor(es)

+ Correo electrónico del autor(es)

+ País al que el autor representa

+ Institución

+ Tema abordado

+ Nivel educativo en el que se desarrolló o en el que se ubica el trabajo

+ Objeto o sujeto de la investigación (o de la actividad académica)

+ Objetivo(s) de la investigación (o de la actividad académica)

+ Pregunta(s) de investigación

+ Sede de RELME (ciudad-país) donde se presentó el trabajo

+ Resultados de la investigación (o de la actividad académica)

+ Datos de publicación (la cita completa en formato APA)

+ Observaciones

+ Actividad académica presentada

La segunda tabla, denominada “fuentes y autores citados”, reunió información relacionada a las referencias bibliográficas de cada artículo incluido en el estudio. La información que esta tabla incluyó fue:

+ Tipo de fuente (libro, revista, tesis, etc.)

+ Cita completa

+ Cantidad de referencias utilizadas en el artículo

+ Volumen de acta y página donde aparece la referencia

+ Actividad académica a la que corresponde el manuscrito (conferencia, taller, reporte, etc.)

+ Observaciones

Luego de tener la información de todos los artículos en las dos tablas descritas con anterioridad, se realizaron tablas de resumen para algunos de los focos del estudio, por ejemplo: los temas abordados, instituciones, países, tipo de fuente, entre otros.

En cuanto a la búsqueda de artículos publicados en los distintos volúmenes de ALME, se inició con ALME 25 hasta llegar a ALME 16, es decir desde el volumen más reciente hasta el más antiguo incluido en el estudio. Para identificar los trabajos publicados por autores centroamericanos, y dado que en el índice de cada acta no aparece publicado el nombre del país de quien se presenta el artículo, en las primeras cinco actas revisadas se dio lectura a todos los encabezados de los artículos, en búsqueda de información del país. Al encontrar en un acta un artículo que perteneciera a algunos de los países de la región centroamericana, se anotaron los datos de páginas para luego, al tener toda la información de dicha acta, tomar el tiempo necesario para analizar los artículos con mayor detalle.

Luego de ver que el trabajo de lectura de todos los encabezados era demasiado extenso, se decidió comparar los resultados de la búsqueda en dos de las actas que fueron revisadas de la forma anteriormente descrita, con los resultados arrojados por una búsqueda basada en el uso del comando “Buscar” del programa computacional Adobe Reader. El comando “Buscar” se encuentra en la pestaña de Edición, etiquetado con el nombre de “Buscar” y tiene asociado un ícono en forma de lupa. En algunas computadoras puede accederse a este comando mediante las teclas Ctrl+F. Dado que todas las ALME consideradas en el estudio están publicadas en formato PDF, fue posible implementar esta técnica de búsqueda. Esta comparación de los resultados arrojados con dos técnicas de búsqueda distintas nos permitió establecer una especie de triangulación para determinar la confiabilidad de la técnica basada en el comando “Buscar”. Esta comparación permitió concluir que se llegaba a los mismos hallazgos utilizando cualquiera de ambas técnicas. Fue así que la búsqueda de artículos en el resto de los volúmenes del ALME se realizó utilizando el comando “Buscar”, excepto en el ALME 16 en donde parece no funcionar este comando; por esta razón en esta acta se recurrió a la técnica original de lectura de los encabezados de los artículos, desde el primero hasta el último. Una vez identificada la paginación de todos los artículos de un acta, se procedió a analizarlos de forma detenida, buscando la información que debía vaciarse en las tablas utilizadas para el registro y organización de los datos.

Se presentaron algunos inconvenientes al momento de buscar la información en los distintos volúmenes de ALME. Por ejemplo que en la mayoría de los volúmenes, no se declara la actividad académica a la que corresponde el artículo. Esto obligó a leer todos los artículos, no obstante hubo ocasiones en que luego de leer todo un artículo no se encontró información para clasificarlo en alguna actividad académica; por tal motivo se decidió incluir estos artículos en la clasificación de comunicaciones breves. Otra razón por la que se leyeron todos los artículos, fue la búsqueda de información para clasificar cada artículo en el tema o campo de investigación más afín, ya que solo en algunos volúmenes del ALME se declaraba dicha información, pero no en todos. En cuanto a trabajos en coautoría, cuando se ubicaron artículos con dos o más autores y de distintos países, la información respecto al país al que representaba cada autor era ambigua, ya que en ocasiones no se podía distinguir cuál autor representaba a cuál país.

Los detalles anteriores se comentan como una manera de prevenir al lector de los posibles límites de la investigación, ya que dichos detalles tuvieron incidencia en decisiones que formaron parte del método, como por ejemplo, incluir en la categoría de comunicaciones breves, aquellos trabajos publicados en donde no fue posible determinar la actividad académica en la que se presentó.

5. Resultados

La cantidad total de artículos que se incluyeron en el estudio, luego de la revisión de un período de 10 años, fue de 37 artículos publicados en el ALME que tienen como autores o coautores a personas de la región centroamericana, o que hayan presentado algún trabajo en RELME en nombre de un país centroamericano, que luego haya sido publicado en el ALME.

En cuanto a volumen de productividad, los resultados obtenidos en el estudio son:

1. El país centroamericano con mayor cantidad de trabajos publicados en ALME es Costa Rica, con un total de 25 trabajos, seguido por Guatemala con un total de 9 y Panamá con 3 trabajos. No aparece ningún trabajo en nombre de El Salvador, Honduras y Nicaragua.

2. Las instituciones más productivas de la región centroamericana son: Universidad de Costa Rica con 15 trabajos, Universidad Nacional de Costa Rica con 8, Universidad de San Carlos de Guatemala con 4, Instituto Tecnológico de Costa Rica con 3, Universidad de Panamá con 2 y el Ministerio de Educación de Guatemala con 2 trabajos. Otras instituciones tienen presencia con 1 trabajo.

3. Los autores centroamericanos con más aportaciones al ALME son: Edison de Faria Campos, con 12 trabajos, Edwin Chaves Esquivel con 4 y Fernando Cajas con 3, los primeros dos representando a Costa Rica y el tercero representado a Guatemala. Los restantes autores tienen 2 o menos trabajos presentados.

En relación a las características de la productividad, se obtuvieron los siguientes resultados:

1. Los temas más abordados por personas centroamericanas que presentaron ponencias en RELME son mostrados en la tabla 1, en la cual los temas se clasificaron en áreas generales tomando como base las categorías establecidas por el CLAME para la publicación en el ALME (ver http://www.clame.org.mx/alme.htm).

Temas	**Cantidad de trabajos relacionados**
Formación de Profesores	8
Tecnología avanzada	4
Propuestas para la enseñanza	4
Resolución de problemas	4
Etnomatemáticas	3
Factores afectivos	3
Pensamiento algebraico	3
Pensamiento geométrico	2
Gráficas y funciones	2
Socioepistemología	2
Modelación matemática	1
Reforma educativa	1
Currículo	1

Creencias	1
Historia de la matemática	1
Evaluación	1
Educación a distancia	1
Medición	1
Metacognición	1
Modelos matemáticos	1
Aprendizaje cooperativo	1
Estudios socioculturales	1
Revisiones bibliográficas	1

Tabla 1. Temas abordados en los artículos de origen centroamericano publicados en el ALME, en sus volúmenes 16 al 25.

Es importante aclarar que en algunos casos hubo la necesidad de crear nuevas categorías, como las marcadas en negrita en la tabla 1, por no encontrarse alguna categoría afín a los artículos relacionados.

2. En relación al sujeto u objeto en torno a quien gira el trabajo, resultó que los estudiantes fueron sujeto de 16 trabajos publicados: 9 se centran en estudiantes universitarios, 5 en estudiantes del nivel medio y 2 en estudiantes del nivel primario. Esto posiciona a los estudiantes como el sujeto más abordado. Los objetos más abordados, ambos con 5 trabajos publicados fueron: a) Contenidos y temas matemáticos, y b) Programas y planes de estudio. Seguidos por los objetos Software-tecnología y Metodología-estrategias, ambos con 4 artículos publicados.

3. Los tipos de fuentes más referenciadas por los autores de los artículos revisados, se incluyen en la tabla 2.

Tipo de fuente	Cantidad de referencias
Libro	168
Revista	84
Otros	23
Internet	22
Memoria de congreso	21
Tesis	15
Programas de estudio	9
Investigación	4

Tabla 2. Tipos de fuentes y cantidad de referencias efectuadas por autores centroamericanos que publicaron artículos desde el volumen 16 de ALME hasta el 25.

Aunque la mayoría de tipos de fuente pueden resultar evidentes, algunos no, por tal motivo, se aclara que en la categoría “Otros” se incluyeron documentos tales como: informes de proyectos, informes de censos, manuscritos en preparación, agendas institucionales de trabajo, documentos institucionales, manuales y documentos de los cuales no se pudo establecer su procedencia. En la categoría

"Internet" se incluyeron documentos o artículos que se obtuvieron de páginas web personales, artículos periodísticos, y en la categoría "Investigación" se incluyeron estudios realizados por instituciones y/o personas pertenecientes a alguna institución (no tesis ni artículos), como universidades, institutos o departamentos de investigación.

4. Revistas más citadas. Debido a que desde el principio de la investigación se visualizaba que las revistas podrían ser el tipo de fuente más consultada por los distintos autores centroamericanos, se optó por preguntar ¿cuáles son las revistas más citadas? La tabla 3 que a continuación se presenta puede responder a esa pregunta. En la tabla se incluyen únicamente aquellas revistas que registraron al menos dos citas, por tal motivo la suma de ellas no coincidirá con el total de citas a revistas de la tabla 2.

Nombre de la revista	Cantidad de citas
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática	6
Enseñanza de las Ciencias	6
Revista Iberoamericana de Educación	5
UNO	5
Annales de Didactique et de Sciences Cognitives	4
Recherches en Didactique des Mathématiques	4
Educational Studies in Mathematics	3
Actualidades Investigativas en Educación	3
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa	3
Revista Uniciencia	3
Boletín de la Asociación Matemática Venezolana	2
Journal of Research in Science Teaching	2
Journal for Research in Mathematics Education	2
Revista de currículo y formación del profesorado	2
Revista Innovaciones Educativas	2

Tabla 3. Revistas más citadas por autores centroamericanos que publicaron artículos desde el volumen 16 de ALME hasta el 25.

5. Citas con mayor frecuencia. A continuación se presenta la tabla 4 la cual contiene las citas que más veces se repitieron en los artículos incluidos en el estudio. Se aclara que en el conteo de cada cita se incluyen tanto aquellas que se refieren al documento original, como aquellas que se refieren a traducciones al español del documento original. Se incluyen aquellas citas que se repitieron al menos tres veces, y se presentan ordenadas de forma descendente en cuanto a cantidad de citas.

Título	Cantidad de citas
Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65	5
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, USA: Academics Press	4
American Association for the Advancement of Science (1997). *Ciencia Conocimiento para Todos*. México: Harla S.A.	3
Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.	3
Ministerio de Educación Pública (2005). *Programas de estudios de matemática: Tercer Ciclo*. San José, Costa Rica: Autor.	3

Tabla 4. Citas registradas con mayor frecuencia en artículos de autores centroamericanos, publicados desde el volumen 16 de ALME hasta el 25.

6. Autores más citados. Los autores más citados se presentan en la tabla 5 la cual está ordenada de forma descendente con base en la cantidad de citas. Se incluyeron autores que al menos fueron citados en cuatro ocasiones. En algunos casos, fue fácil determinar el nombre del autor y en otros fue necesario realizar una búsqueda un poco más intensiva para determinar los nombres completos de los autores.

Nombre del autor	Cantidad de citas
Oliveras, Maria Luisa	12
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica	10
American Association for the Advancement of Science (AAAS)	9
Batanero, Carmen	9
Polya, George	8
De Faria, Edison	8
D’Ambrosio, Ubiratan	7
Chaves Esquivel, Edwin	7
Cajas, Fernando	7
Duval, Raymond	6
Bishop, Alan	6
Godino, Juan	5
Ruiz, Ángel	5
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, GUATEMALA	5
Schoenfeld, Alan H.	5
Hernández Sampieri, Roberto	4
Gavarrete, María Elena	4

Gómez-Chacón, Ines	4
Brousseau, Guy	4
National Council of Teachers of Mathematics	4

Tabla 5. Autores más citados, registrados en artículos de autores centroamericanos publicados desde el volumen 16 de ALME hasta el 25.

7. Trabajos individuales o en colaboración. Aquí se trató de determinar el tipo de autoría de los artículos, estableciéndose dos categorías, la primera referente a trabajos individuales y la segunda referente a trabajos en coautoría con otros profesionales.

Enseguida se presenta la tabla 6 que contiene el total de trabajos presentados por autor de forma individual. Un artículo presentado de forma individual fue excluido de esta tabla, ya que la autora presentó el trabajo en nombre de dos países, Venezuela y Guatemala. Guatemala por la universidad a quien representó en esa ocasión y Venezuela por ser el país correspondiente a su nacionalidad; se trata de la autora del artículo titulado "Prácticas de los docentes de ingeniería" publicado en el ALME 22.

Autor	Cantidad de trabajos presentados
Edison De Faria Campos	12
Fernando Cajas	3
Mayra Virginia Castillo Montes	1
Laura María Benavides López	1
Claudia María Lara Galo	1
Edwin Chaves Esquivel	1
Dalys Alvarado	1
Herbert Mendía	1

Tabla 6. Autores centroamericanos que presentaron trabajos individuales, publicados desde el volumen 16 de ALME hasta el 25.

En cuanto a la presentación de trabajos en coautoría se identificaron un total de 15, con detalles de autoría y coautoría que se presentan en la tabla 7. La primera columna registra el nombre de quien figura como primer autor en el artículo. El coautor o coautores del artículo se nombran en las columnas que están a la derecha de la columna que registra la cantidad de trabajos presentados.

Autor	Cantidad de trabajos	coautor 1	coautor 2	coautor 3
Anabelle Castro	1	Rommel Alvarado	Omar Gätgens	Francisco Rodríguez

Jonathan Espinoza González	1	Johan Espinoza González	Edwin Chaves Esquivel	
Edwin Chaves Esquivel	1	Mario Castillo Sánchez	Marianela Alpízar Vargas	
Enrique Vílchez Quesada	1	Eric Padilla Mora		
Greivin Ramírez	1	Jeffry Chavarría	Marianela Mora	
Greivin Ramírez	1	Jeffry Chavarría	Marianela Mora	Cruz Barahona
Luisa Mabel Morales Maure	1	José Gabriel Sánchez Ruiz**	Homero Roldán Rojas**	
Johan Espinoza González	1	Marianela Zumbado Castro		
Ismael Morales Garay	1	Maynor Jiménez Castro		
Elisa A. Mendoza González	1	Roberto M. Bula M.	Carmen C. Rodríguez M.	
Rina Rouanet	1	Alejandro Asijtuj	Cayetano Salvador	
Edwin Chaves Esquivel	1	Mario Castillo		
Cayetano Salvador	1	Rina Rouanet	Alejandro Asijtuj	
Luisa Oliveras*	1	Noelia Agudo*	Elena Gavarrete	
Elena Gavarrete	1	Luisa Oliveras*	Noelia Agudo*	

Tabla 7. Autores centroamericanos que presentaron trabajos en coautoría, publicados desde el volumen 16 de ALME hasta el 25.

Se hace la aclaración que los nombres marcados con un asterisco (*) corresponden a profesionales de nacionalidad española y los marcados con dos asteriscos (**) corresponden a profesionales de nacionalidad mexicana; se incluyeron en la tabla, únicamente como referencia para conocer con qué autores centroamericanos presentaron trabajos en coautoría.

8. El nivel educativo en el que se desarrollaron los artículos incluidos en el estudio se puede observar en la tabla 8 que se presenta a continuación. Se notará que los números no coinciden con el total de artículos que tomó el estudio, ya que algunos trabajos estuvieron relacionados con más de un nivel educativo.

Nivel	Cantidad de trabajos presentados
Superior	22
Medio	18

Primario	4
Pre-primario	1

Tabla 8. Nivel educativo de los trabajos presentados por autores centroamericanos, publicados desde el volumen 16 de ALME hasta la 25.

8. La tabla 9 muestra una clasificación del total de artículos estudiados, por actividad académica en la que fueron presentados los trabajos. Cabe aclarar que en la categoría de comunicación breve se incluyeron todos aquellos artículos que no declararon en ninguna parte del artículo el tipo de actividad académica en que el trabajo se presentó. En este caso, los números coinciden con el total de artículos tomados para el estudio.

Tipo de actividad académica	Cantidad de trabajos presentados
Curso	5
Reporte de Investigación	17
Comunicación breve	13
Conferencia	2

Tabla 9. Trabajos presentados en nombre de países centroamericanos, clasificados por actividad académica, publicados desde el volumen 16 de ALME hasta el 25.

Los resultados presentados en esta sección no representan la totalidad de resultados obtenidos en el estudio en el que se basa este manuscrito. El lector interesado en conocer la totalidad de los resultados puede consultar el documento Fuentes (2013), donde encontrará en información más amplia y detallada referente a los resultados del estudio.

6. Discusión

Luego de observar los resultados, es evidente que la comunidad centroamericana de matemática educativa tiene una productividad en ALME limitada, pues se observó productividad únicamente en la mitad de los países considerados en el estudio y la otra mitad no refleja ningún aporte al ALME.

Algo que es notorio es que Costa Rica, con un 67.57% de la productividad total revisada, es el país que en la región aporta mayor cantidad de trabajos al ALME, sin embargo se trata de una productividad relativa, pues gran parte de ella proviene de un solo autor.

El segundo país de la región que más aportaciones ha hecho al ALME es Guatemala, con un 24.32% de la producción total. Cabe resaltar que cuando se observa la diferencia entre Guatemala, Costa Rica y Panamá, puede verse claramente que ese segundo lugar de Guatemala está más cerca del tercer lugar de Panamá que del primer lugar de Costa Rica. Sin embargo, en el caso de Guatemala, y a diferencia de Costa Rica, hay una variedad significativa de instituciones y autores que aportan al ALME, lo cual puede significar una mayor oportunidad de crecimiento de la productividad, si se unifican esfuerzos y se establecen políticas para el efecto.

El tercer lugar en productividad dentro del ALME es Panamá, con únicamente tres artículos publicados en el ALME en un período de 10 años, lo cual representa un 8.11% del total de la productividad de la región y con una sola institución presente.

El Salvador, Honduras y Nicaragua no publicaron ningún trabajo en el ALME en los 10 años considerados en el estudio.

En cuanto a las instituciones más productivas de la región centroamericana, sobresalen las universidades, que por su naturaleza académica, pueden señalarse como agentes importantes para el desarrollo en la región, es decir pueden ser la clave para hacer más productiva a la región. Esa realidad puede obedecer a distintos factores, principalmente porque son las universidades las que tienen la responsabilidad social de proponer y ejecutar cambios en beneficio de toda la población de un país.

En el caso de la productividad por autor, vale la pena señalar que el desarrollo de la disciplina mostrada en Costa Rica, se debe en gran manera a una persona que del total de productividad del país ha aportado el 48%, casi la mitad de toda la producción del país que figura en primer lugar de la región. Poniendo en perspectiva este hecho, resulta que sólo él ha aportado al ALME lo mismo que la suma de los países que se encuentran en segundo y tercer lugar, lo cual asciende a un 32.43% del total de la productividad de la región. Esa situación puede darnos una pauta de lo que una sola persona puede producir si se tiene continuidad y el apoyo correspondiente.

Hablando de algunas características de la productividad, es evidente que existe mayor tendencia, hasta el momento, al tema de formación profesores, al figurar como el más abordado, seguido de tecnología avanzada, propuestas para la enseñanza, y resolución de problemas. En contraste, cabe destacar que el proceso de evaluación, es uno de los temas menos abordados.

Otro aspecto que es importante destacar, es el hecho de que, del total de artículos revisados, el 56.76% fue presentado en forma individual, y el porcentaje restante en coautoría. Aunque evidentemente existe colaboración entre autores, ésta es muy baja y en la mayoría de los casos, se observa entre personas de la misma institución o del mismo país, en pocas ocasiones se observó colaboración entre personas de distintas instituciones o países. Lo anterior señal un evidente “localismo” que puede estar incidiendo directamente en la productividad de la región, pues se puede notar que no existe fuerte colaboración interinstitucional ni internacional para la elaboración y presentación de trabajos, al menos en los que se publican en el ALME. La idea de localismo puede sustentarse en los resultados presentados en las tablas III, VI y VII, donde se evidencia que tanto los autores más productivos como la revista más citada son de Costa Rica.

Por último queremos hacer notar que la mayor cantidad de aportes de la región al ALME ha sido en forma de reportes de investigación, con un 45.95%, dejando el porcentaje restante en forma de comunicaciones breves, cursos y conferencias, ningún taller ha sido publicado en el ALME durante los 10 años revisados. Lo anterior es un aspecto prometedor, ya que evidencia interés por investigar en la región, que es la forma de avanzar cualquier disciplina científica.

Si en este punto recordamos la motivación que originó el presente estudio: ¿cuál es el estado de desarrollo de la comunidad de matemática educativa de la región centroamericana, tomando en cuenta su productividad científica?, y si además consideramos que, según Wickremasinghe (2008) la medición de la productividad de la comunidad científica es importante porque da una idea del desarrollo de un país en particular, en este caso de una región, entonces podemos afirmar que el estado de desarrollo de la comunidad de matemática educativa de la región centroamericana, es limitado, toda vez que en la mitad de países de la región no pudo determinarse productividad presente en el ALME.

No se está afirmando que la disciplina no se esté desarrollando en esos países, ya que puede ser que exista producción interna, incluso generada por otros educadores matemáticos de esa región, pero que posiblemente utilizan otras plataformas de publicación.

Con los resultados obtenidos en este estudio, es probable que surjan muchas preguntas en torno a la productividad de la comunidad de matemática educativa de la región centroamericana considerando otros espacios de publicación o posiblemente otras regiones geográficas. Estudios futuros podrían surgir de las preguntas siguientes: ¿es probable que en toda Latinoamérica se observen patrones similares a los vistos en Centroamérica?, ¿cómo se compara la productividad de la comunidad de matemática educativa de la región centroamericana con otras regiones u otros países?, ¿la no continuidad de publicación de autores en el ALME también se observa para el resto de países latinoamericanos?, ¿qué está sucediendo en el nivel primario y pre-primario de la región centroamericana en educación matemática?, ¿por qué hay pocos trabajos relacionados con los niveles primario y pre-primario?, ¿qué factores influyen en que la mayoría de trabajos publicados en el ALME provengan de los niveles educativos medio y superior?, ¿qué motiva a un profesor de matemáticas de la región centroamericana a participar en RELME y publicar en ALME?, ¿cuántos artículos de personas en nombre de países centroamericanos están publicados en RELIME en los últimos años?, ¿qué foros, eventos y espacios de publicación consideran los autores centroamericanos como más accesibles?, por último, una pregunta que puede resultar interesante para muchos es: ¿cuál es el estado de desarrollo de la comunidad de matemática educativa de la región latinoamericana y cuáles son las principales características de su productividad? Esta última pregunta, la vemos como una pregunta muy interesante pero extensa, y para responderla hay necesidad de realizar estudios similares a este, quizás muchos estudios, considerando otras regiones geográficas y otras plataformas de publicación, observando el fenómeno desde distintos ángulos. Por tal motivo, invitamos a los interesados en el tema, a realizar estudios de revisión de la productividad de la comunidad de matemática educativa desde sus propias regiones geográficas y puntos de vista, para ir construyendo la respuesta a la pregunta planteada anteriormente.

Referências

Bauldry, S. (2013). Trends in the research productivity of newly hired assistant professors at research departments from 2007 to 2012. *The American Sociologist*, *44*(3), 282-291. doi: 10.1007/s12108-013-9187-4

Chassapis, D. (2002) Social groups in mathematics education research. An investigation into mathematics education-related research articles published from 1971 to 2000. En P. Valero y O. Skovsome (Eds.), *Proceedings of Third International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 273-281). Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://mes3.learning.aau.dk/Papers/Chassapis.pdf

Crespo, C. (2013, julio). *Reflexiones sobre la evolución de la matemática educativa en Latinoamérica*. Conferencia presentada en la 27 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME12), Buenos Aires, Argentina.

Crespo, C. (Ed.). (2007). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 20). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.clame.org.mx/documentos/alme20.pdf

Delgado, J. (Ed.). (2003). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 16). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.clame.org.mx/documentos/alme16_1.pdf http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2016_2.pdf http://www.clame.org.mx/documentos/alme16_3.pdf

Díaz, L. (Ed.). (2004). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 17). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.clame.org.mx/documentos/alme17.pdf

Domínguez, R. E. N. (2008). *Tendencias metodológicas en las tesis de maestría en matemática educativa* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Autónoma de Yucatán. México. Recuperada el 22 de septiembre de 2014, de http://posgradofeuady.org.mx/wp-content/uploads/2011/03/MIE_Navarrete_Roman_2009.pdf

Flores, R. (Ed.). (2012). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 25). México, D.F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.clame.org.mx/documentos/alme25.pdf

Fuentes, C. (2013). *Estado de desarrollo de la comunidad de matemática educativa de la región centroamericana* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN. México. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/fuentes_2013.pdf

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Gómez, P. (2000). Investigación en educación matemática y enseñanza de las matemáticas en países en desarrollo. *Educación Matemática*, *12*(1), 93-106. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://funes.uniandes.edu.co/352/1/GomezP00-2527.PDF

Hanna, G. y Sidoli, N. (2002). The story of ESM. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(2), 123-156. doi: 10.1023/A:1021162617070

Hernández, S. y Jacobo, H. (2011). Descripción de algunas tesis de maestría en educación matemática. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 13*(1), 123-134. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://redie.uabc.mx/index.php/redie/article/viewFile/275/439

Hodgson, B.R., Rogers, L.F., Lerman, S. y Lim-Teo, S. K. (2013). International organizations in mathematics education. En M.A. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick y F.K.-S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 901-947). Nueva York: Springer. doi: 10.1007/978-1-4614-4684-2_28

International Commission on Mathematical Instruction (2008). *The Felix Klein Medal for 2005. Citation for the 2005 ICMI Felix Klein Award to Professor Ubiratan D'Ambrosio*. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.mathunion.org/icmi/other-activities/awards/past-recipients/the-felix-klein-medal-for-2005/

Jeang, K.-T. (2010). The importance of individualized article-specific metrics for evaluating research productivity. *Retrovirology*, *6*(82), 1-4. doi: 10.1186/1742-4690-6-82

Kieran, C. (1994). Doing and seeing things differently: A 25-year retrospective of mathematics education research on learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 583-607.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 3-38). New York: Macmillan.

Lerman, S. y Tsatsaroni, A. (2004, julio). *Surveying the field of mathematics education research*. Conferencia presentada en el 10th International Congress on Mathematical Education (ICME-10), Copenhague, Dinamarca.

Lerman, S., Xu, G. y Tsatsaroni, A. (2002). Developing theories of mathematics education research: The ESM story. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1), 23-40. doi: 10.1023/A:1022412318413

Lestón, P. (Ed.). (2008). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 21). México D. F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.clame.org.mx/documentos/alme21.pdf

Lestón, P. (Ed.). (2009). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 22). México D. F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.clame.org.mx/documentos/alme22.pdf

Lestón, P. (Ed.). (2010). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 23). México, D.F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.clame.org.mx/documentos/alme23.pdf

Lestón, P. (Ed.). (2011). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 24). México, D.F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf

Lezama, J., Sánchez, M. y Molina, J. (Eds.). (2005). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 18). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2018.pdf

Lubienski, S. T. y Bowen, A. (2000) Who's counting? A survey of mathematics education research 1982-1998. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 626-633

Martínez, G. (Ed.). (2006). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 19). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.clame.org.mx/documentos/alme19.pdf

Maz-Machado, A., Bracho-López, R., Torralbo-Rodríguez, M., Gutiérrez-Arenas. M. P. y Hidalgo-Ariza M. D. (2011). La investigación en educación matemática en España: los simposios de la SEIEM. *PNA, 5*(4), 163-185. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Maz2011LaInvestigacion.pdf

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 40*(1), 1-24. doi: 10.1023/A:1003715913784

Niss, M. (2000). Key issues and trends in research on mathematical education. En H. Fujita, Y. Hashimoto, B. R. Hodgson, P. Y. Lee, S. Lerman & T. Sawada (Eds), *Proceedings of The Ninth International Congress on Mathematical Education* (37-57). Boston: Kluwer. doi: 10.1007/1-4020-7910-9_3

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA, 5*(4), 129-145. Recuperado el 22 de septiembre de 2014, de http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Sanchez2011PNA5(4)AReview.pdf

Sriraman, B., Bergsten, C., Goodchild, S., Pálsdóttir, G. y Haapasalo, L. (Eds.). (2010). *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education. Norway, Sweden, Iceland, Denmark and Contributions from Finland*. Charlotte, NC.: Information Age Publishing.

Sriraman, B., Cai, J., Lee, K., Fan, L., Shimizu, Y., Lim, C. S. y Subramaniam, K. (Eds.). (2013). *The First Sourcebook on Asian Research in Mathematics Education. China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Valero, P. (1999). Deliberative mathematics education for social democratization in Latin America. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *31*(1), 20-26. doi: 10.1007/s11858-999-0004-z

Wickremasinghe, S. (2008). Evaluating research productivity: a case study of the rice scientists in India and Sri Lanka. *Journal of the National Science Foundation of Sri Lanka, 36*(1), 59-68. doi: 10.4038/jnsfsr.v36i1.141

Nombre autor 1: Carlos Fuentes
Dirección electrónica: caffuentes7@gmail.com
Dirección postal:
24 avenida 10-66 zona 3 Quetzaltenango, Guatemala, C.A.
C.P. 09001
Teléfono: (502) 41429991; (502) 77672398
Título: Maestro
Institución a la que pertenece: CUNOC, Universidad de San Carlos de Guatemala
Lugar de residencia: Quetzaltenango, Guatemala, C.A.
Publicaciones más recientes:
Breve reseña biográfica de no más de 5 líneas:
Profesor interino de la Universidad de San Carlos de Guatemala, impartiendo cursos en la Carrera de Profesorado y Licenciatura en Enseñanza de Matemática y Física. Ha escrito distintos libros de texto de matemática y física. Realizó estudios de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa en el CICATA del Instituto Politécnico Nacional, México D.F. (2010-2013).
Nombre autor 2: Mario Sánchez Aguilar
Dirección electrónica: mosanchez@ipn.mx
Dirección postal:
CICATA-Legaria
Calzada Legaria No. 694, Col. Irrigación
C.P. 11500 Del. Miguel Hidalgo D.F.
México
Teléfono: (55) 57296300 ext. 67732
Título: Doctor
Institución a la que pertenece: Profesor asociado del Instituto Politécnico Nacional de México, especializado en educación matemática. Realizó sus estudios de Doctorado en investigación en Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Roskilde en Dinamarca (RUC) (2007–2010). CICATA Legaria, Instituto Politécnico Nacional
Lugar de residencia: México, D.F.
Publicaciones más recientes:
Aguilar, M.S. (2014). Educación matemática crítica en México: una argumentación sobre su relevancia. *DIDAC*, 64, 30-36.
Flores, E., Escudero, D.I & Aguilar, M.S. (2014). Online mathematics teacher education: main topics, theoretical approaches, techniques and changes in researchers' work. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 89-96). Vancouver, Canada: PME.
Aguilar, M.S., Vázquez, A.R., Mendoza, A.R., Zavaleta, J.G.M. y Alonso, A.C. (2013). Factors motivating the choice of mathematics as a career among Mexican female students. En B. Ubuz, C. Haser y Mariotti, M.A. (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (1409-1418). Turquía: European Society for Research in Mathematics Education. ISBN: 978-975-429-315-9. Recuperado de http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 133-146

Determinación de registros semióticos en una investigación didáctica: un caso aplicado a números complejos

María Andrea Aznar, María Laura Distéfano, Marta Azucena Pesa, Emilce Graciela Moler

Fecha de recepción: 16/10/2014
Fecha de aceptación: 29/11/2015

Resumen	En el presente trabajo se describe el proceso de determinación de los registros semióticos pertinentes para una investigación didáctica. La misma se refiere a conversiones de representaciones semióticas de subconjuntos de números complejos. Se exponen y ejemplifican las argumentaciones que, siguiendo los lineamientos teóricos de Duval y las observaciones planteadas por D'Amore, marcaron las etapas del proceso. Se detallan los criterios y preguntas que orientaron la selección y delimitación de los registros, esperando que contribuyan como insumo para investigaciones que utilicen registros semióticos como herramienta teórico-metodológica. **Palabras clave**: registros semióticos pertinentes, criterios de delimitación, números complejos
Abstract	In this paper is described the process of determining the apropiated semiotic registers for educational research. This research is related to conversions of semiotic representations of subsets of complex numbers. Following the Duval's theoretical guidelines and D'Amore's remarks, the arguments that marked the stages of the process are exhibited and exemplified. Criteria and questions that guided the selection and delineation of registers are detailed, hoping they can be helpful in researches that use semiotic registers as a theoretical and methodological tool. **Keywords**: apropiated semiotic registers, demarcation criteria, complex numbers
Resumo	No presente trabalho se descreve o processo de determinação dos registros semióticos pertinentes a uma investigação didática. A mesma se refere a conversões de representações semióticas de subconjuntos de números complexos. São expostas e exemplificadas argumentações que, seguindo as diretrizes teóricas de Duval e as observações sugeridas por D'Amore, marcam as etapas do processo. Os critérios e questões que orientaram a seleção e delimitação dos registros são detalhados, esperando que contribuam como insumo a investigações que utilizem registros semióticos como ferramenta teórico-metodológica. **Palavras-chave:** registros semióticos pertinentes, critérios de delimitação, números complexos.

1. Introducción

La Teoría de Registros semióticos de Raymond Duval (1998, 2004) ha tenido gran trascendencia al alertar sobre la importancia del rol que juegan las representaciones, en sus variados registros semióticos, para la conceptualización de los objetos matemáticos.

Al abordar un problema de aprendizaje de un objeto matemático, desde el punto de vista de sus representaciones semióticas, surge de inmediato la necesidad de determinar cuáles son los registros de representación pertinentes a considerar para el objeto matemático estudiado. Esta delimitación puede no ser trivial ya que, por un lado, para algunos objetos matemáticos pueden ser muy variadas las maneras de representarlos y, por economía de esfuerzos, hay que seleccionar las realmente necesarias. Por otra parte, ya ha sido señalado por D'Amore (2009/11) que la definición de un registro de representación, inherente a un objeto matemático, no depende únicamente de los rasgos de la forma de la representación sino que es relativa al significado del objeto matemático a contemplar.

El siguiente artículo muestra el proceso de esta determinación en una investigación relativa al trabajo didáctico con representaciones de subconjuntos de números complejos. Se detallan los planteamientos y criterios seguidos en dicho proceso esperando que sea un insumo para quienes aborden este tipo de pesquisas vinculadas a los registros semióticos.

2. Marco Teórico

El aprendizaje de las matemáticas requiere el desarrollo de actividades cognitivas tales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas, etc. La Teoría de Registros Semióticos de Raymond Duval (1998, 2004) pone en foco el rol que las representaciones, y las acciones asociadas de interpretarlas, generarlas y transformarlas, tienen sobre dichas actividades. Esta teoría subraya el hecho de que, por la naturaleza de los objetos matemáticos, no se puede acceder a ellos si no es a través de sus representaciones semióticas en sus distintos sistemas de representación (numérico, algebraico, gráfico, simbólico,etc.).

A partir de la noción de *semiosis*, entendida como la aprehensión o producción de representaciones semióticas, Duval (1998,2004) caracteriza a los sistemas de representación que son escenarios de la misma. Dichos sistemas, a los que denomina *registros*, deben cumplir las siguientes condiciones:

- en ellos se debe poder constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como la representación de un objeto en un en dicho sistema. A esto es a lo que Duval denomina *formación de representaciones*.

- se deben poder realizar, con reglas internas al sistema, transformaciones de una representación a otra dentro de ese mismo registro; dichas transformaciones internas de las representaciones son llamadas *tratamientos*.

- se deben poder realizar transformaciones de una representación de un sistema a otra representación del mismo objeto en otro sistema semiótico. A tales transformaciones se las denomina *conversiones*.

Formación, tratamiento y conversión son distinguidas como tres tipos de actividades cognitivas ligadas a la semiosis.

Esta teoría sostiene que las representaciones semióticas, además de ser los medios de exteriorización de representaciones mentales a los fines de la comunicación, son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Duval (1998, 2004) afirma que no hay *noesis* (aprehensión conceptual de un objeto) sin *semiosis*, afirmando su inseparabilidad.

Al mismo tiempo, Duval (1998, 2004) señala que, para lograr la conceptualización, no se debe confundir el objeto matemático con su representación. Esto plantea una paradoja pues, las representaciones que son las que permiten el acceso a los objetos matemáticos, pueden ser el obstáculo para conceptualizarlos si el aprendiz confunde significante con significado.

Duval (1998, 2004), plantea una salida a la paradoja en la construcción de conceptos matemáticos a partir del imperativo de proveer al estudiante de prácticas matemáticas en las que coordine diferentes representaciones del mismo objeto matemático. Esto implica que pueda realizar conversiones de las representaciones del mismo objeto matemático plasmadas en, por lo menos, dos registros. Se busca, por una parte, contribuir a evitar la confusión entre objeto representado y representación; por otra parte, dado que cada representación muestra un significado parcial con respecto a lo que representa, la interacción de distintas representaciones favorecerá a la formación integral del concepto.

Particularmente, la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los alumnos y, con frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales. Esto se debe al fenómeno de *no congruencia* entre representaciones, que se produce cuando la conversión no resulta transparente pues no pueden ponerse en correspondencia unívoca los elementos que las constituyen. Al respecto, es importante señalar que la conversión entre dos representaciones semióticas planteadas en distintos registros, no presenta el mismo nivel de dificultad al cambiar el sentido de la conversión. Así, por ejemplo, es más utilizada y más sencilla, la conversión de fórmulas del registro algebraico al registro gráfico que la tarea de hallar, para una representación gráfica, la fórmula o ecuación que la representa en el registro algebraico. (Duval, 2004).

Al respecto del estudio de este tipo de problemas, D'Amore advierte: "Una duda de naturaleza teórica asalta a quien estudia este tipo de problemas: ¿un registro de representación semiótica es un absoluto o no?" (2009/11, p.19). Es decir, si se considera un signo, un dibujo, una fórmula, una escritura,... como representación semiótica de un cierto objeto ¿se puede establecer con certeza a qué registro pertenece?

D'Amore sostiene que la caracterización de los registros es relativa a los objetos que representan pues no sólo los rasgos de una representación definen a un registro semiótico. Al respecto afirma que "la característica específica de un registro semiótico depende estrechamente del objeto que se quiere representar; por lo tanto para "entender" el mensaje propuesto se necesita tener ya indicaciones preliminares acerca del objeto" (2009/11, p.19).

El tipo de duda descripta anteriormente surgió en el desarrollo de una investigación relativa a la enseñanza de números complejos y dio lugar a una serie de planteos y reformulaciones que se describen a continuación.

3. Descripción de la investigación en la cual surgió el problema de determinación de registros

El extraer información a partir de una representación gráfica para resolver un problema no era un recurso habitual o utilizado espontáneamente por parte de los estudiantes de primeros años de las carreras de Ingeniería que se dictan en la Universidad Nacional de Mar del Plata (Aznar,Distéfano, Figueroa, Moler, 2010). Sin embargo, los profesionales que resuelven problemas a través de las matemáticas coinciden en que es la visualización del problema lo que lleva a hallar su solución. Así, F. Hitt (2003) señala que la visualización matemática de un problema tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del mismo.

Al analizar las prácticas en el álgebra inicial, se comprobó que, en la unidad de Números Complejos se había subvaluado el uso de las representaciones gráficas. En particular esto se apreciaba fuertemente, en el cierre de dicha unidad temática, en la cual se trabaja habitualmente con subconjuntos de números complejos que definen curvas o regiones en el plano complejo. En las actividades propuestas, a partir de la expresión de las características de dichos conjuntos como ecuaciones o inecuaciones, se les solicitaba a los estudiantes su representación gráfica. Un ejemplo de tales actividades puede observarse en la Figura 1.

Determinar y representar en el plano complejo todos los $z \in C$ tales que:

a) $\mathrm{Re}(z^2) = 0$

b) $\arg(z) = \arg(\pi \cdot \bar{z}^2)$ y $|z| = 2$

c) $|z| \leq |(2-i)^2|$ y $\arg(z) = \arg(2 \cdot z^{-1})$ $z \neq 0$

d) $|z - (1+i)|^2 = 9$ y $\mathrm{Re}(z) = |z|$

Figura 1: Ejemplo de actividades presentadas habitualmente en la asignatura. Fuente: material de asignatura Álgebra A durante 2010, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata

Sin embargo, no se les planteaba a los estudiantes realizar actividades en el sentido inverso: es decir, a partir de representaciones de curvas o regiones del plano complejo, expresar condiciones que los caracterizaran. Un enunciado de este tipo alternativo de actividades se muestra en la Figura 2. Esta clase de prácticas involucran habilidades de visualización de gran utilidad; por ejemplo, en análisis de funciones de variable compleja.

Escribir por comprensión cada uno de los subconjuntos del plano complejo representados a continuación

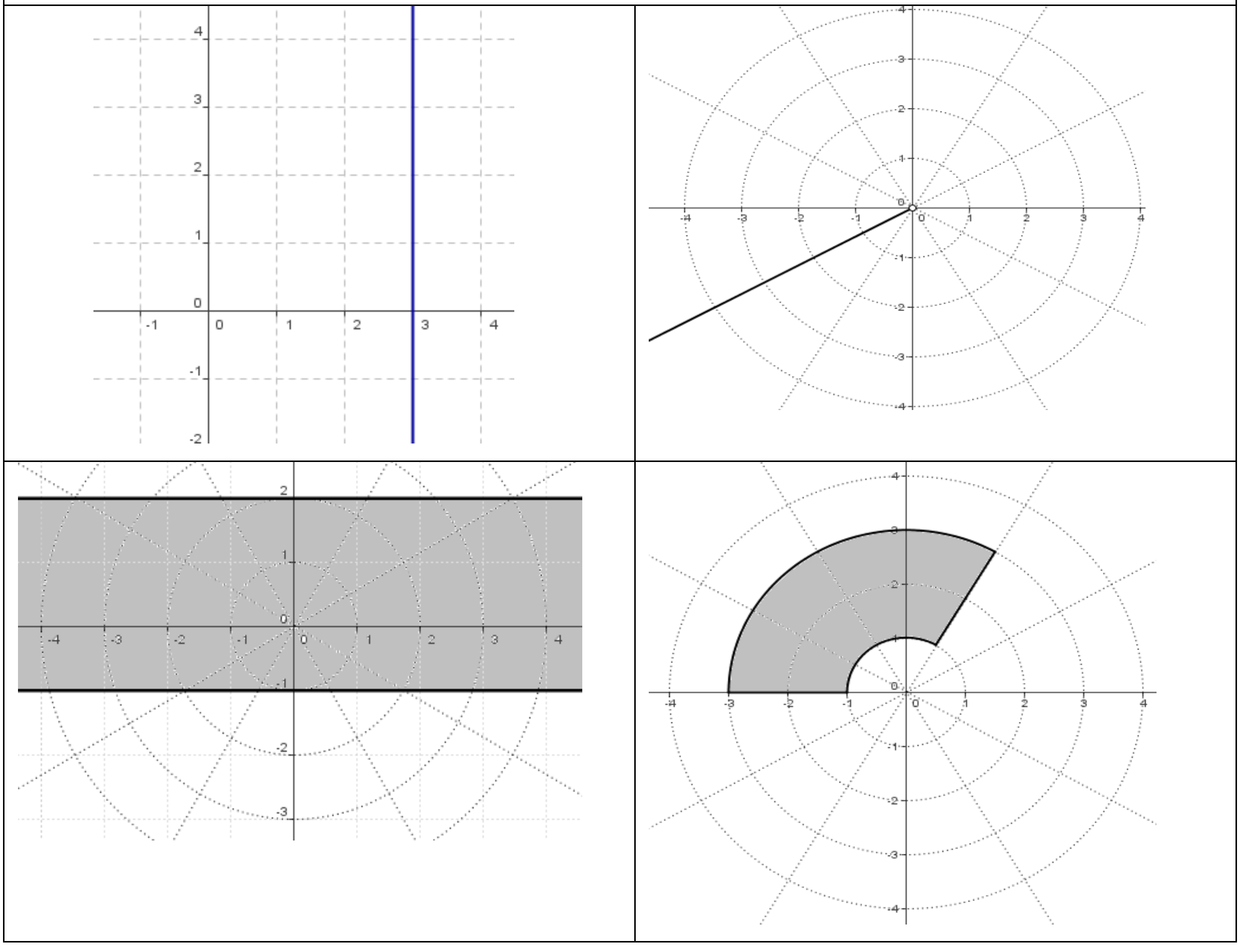


Figura 2. Enunciado de tareas que requieren caracterización de curvas y regiones del plano complejo no presentadas habitualmente en la asignatura.
Fuente: desarrollado por los autores (2010).

Aunque pudiera parecer que las dos actividades de las figuras 1 y 2 referenciadas son similares, tienen niveles de dificultad muy diferentes.

Desde la teoría de registros semióticos (Duval,1998, 2004), los dos tipos de tareas matemáticas descriptas están asociados a las actividades cognitivas de conversión. En el primer caso, se trata de conversiones de representaciones, de subconjuntos de números complejos, desde una serie de condiciones como ecuaciones o inecuaciones hacia una representación en el registro gráfico. En el caso de las caracterizaciones, las conversiones tienen el sentido inverso; esto es, se parte de representaciones de los mencionados subconjuntos en forma de curvas o regiones en el registro gráfico y se arriba a su caracterización en forma de ecuaciones o inecuaciones. Este último sentido de conversión, como se ha reportado en distintas investigaciones aplicadas a otros temas (González-Martín y Camacho Machín (2005), Duval (2006), Díaz Lozano y cols. (2013)) no es trivial y tiene un alto nivel de dificultad.

Lo anterior llevó a la formulación de los siguientes interrogantes: ¿es conveniente enseñar a hacer este tipo de conversiones para caracterizar de curvas o regiones del plano complejo? ¿es factible implementar una propuesta didáctica que satisfaga tal requerimiento siguiendo los lineamientos teóricos de la teoría de registros semióticos?

En la búsqueda de respuesta a estos interrogantes se planteó, como problema de investigación, realizar un estudio que permita conocer los resultados de la aplicación de una propuesta didáctica, orientada a favorecer la habilidad de efectuar conversiones, entre representaciones de subconjuntos de números complejos, partiendo de representaciones gráficas, para llegar a representarlos mediante ecuaciones o inecuaciones que los caracterizaran.

Para todas las tareas atenientes a la investigación, comenzando por la formulación de los objetivos de la misma, se impuso la necesidad de seleccionar y describir los registros de representación a considerar. La delimitación de los registros implicados en el problema planteado, como se verá más adelante, no fue trivial. La misma resultó de un proceso que se describe a continuación.

4. Un problema inicial dentro de la tarea de investigación: la delimitación de los registros.

Una investigación didáctica, basada en la Teoría de Registros Semióticos y focalizada en la actividad cognitiva de conversión, impone la clara definición de cuáles serán los registros de partida y de llegada en dicha actividad.

Claramente, el plano complejo o plano de Argand-Gauss se configura como registro gráfico y sería el punto de partida de las conversiones que se desean favorecer. Para trabajarlo didácticamente se lo dotó de elementos que, como señales tipográficas, sirvan de referencia para la formación de expresiones. Esto es, marcas que ayuden a representar y a identificar las componentes del número complejo: marcas en el eje real, en el eje imaginario, líneas auxiliares para valores de módulo y para valores de argumento. Pueden observarse estas marcas en la actividad de la Figura 2.

La delimitación de el o de los registros de llegada, que permitieran expresar las caracterizaciones de los subconjuntos, no se presentó de forma tan obvia al inicio de la investigación. En una primera instancia, la selección estuvo sujeta a las distintas formas de representar los números complejos, escogiendo la forma binómica y la forma polar, entre todas las disponibles, de acuerdo a un criterio de reducción. En una instancia posterior, se revisó esta selección, tomando en cuenta el objeto matemático a representar, los rasgos necesarios para dicha representación, las prácticas matemáticas que se pretendían que los estudiantes realizaran y sus actividades semióticas asociadas. Dichas instancias se describen a continuación.

4.1. Primera instancia: la selección de los registros a partir de las formas de representar números complejos

Como punto de partida se consideraron las distintas formas no gráficas de representar un número complejo que se muestran en la Figura 3.

z = (-1 , 1) Representación asociada a la forma de *par ordenado*.	z = -1 + 1 i Representación asociada a la *forma binómica*, que se muestra	$z = \sqrt{2}\Big|_{\frac{3}{4}\pi}$ Representación asociada a la *forma polar*.

	como una *combinación lineal* de los números -1 con *i*.	
$z=\sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+\sqrt{2}.sen\left(\frac{3}{4}\pi\right).i$ Representación asociada a la *forma trigonométrica.*	z= $\sqrt{2}.e^{i\frac{3}{4}\pi}$ Representación asociada a la forma exponencial.	

Figura 3. Distintas formas de representación de un número complejo en registros de características aritmético-algebraicas.
Fuente: desarrollado por los autores.

Pueden observarse múltiples representaciones del mismo número complejo, en registros donde figuran números, combinaciones lineales, y relaciones de igualdad, por lo que puede decirse que los registros tienen características aritmético-algebraicas.

Dada la cantidad de formas de representación disponibles, se consideró la posibilidad de reducir, para este estudio, la cantidad de formas a emplear. Para ello, se tomó en cuenta un criterio de reducción que contempla la información que aparece como evidente u ostensible en cada forma de representación. Así, tanto la forma de par ordenado como la forma binómica, exponen las componentes real e imaginaria del número complejo. Por otra parte, las formas polar, trigonométrica y exponencial hacen visibles los valores del módulo y del argumento. Se pueden considerar a estas dos agrupaciones de formas de representación como clases de una relación de equivalencia definida por "ostenta la misma información que" y, consecuentemente, seleccionar un representante de la clase. En este caso, se optó por la forma binómica como representante de la primera clase y la forma polar como representante de la segunda. Si se comparan ambas formas de representación y se consideran prácticas relativas a la resolución de operaciones de adición, producto o potencia entre números complejos, puede observarse que el costo en tratamientos es muy diferente en el registro asociado a la forma binómica que a la polar; así, una suma resulta más sencilla de expresar en el registro asociado a la forma binómica, en tanto que la resolución de una potencia se simplifica en el registro asociado a la forma polar.

Posteriormente se observó que, para caracterizar las curvas o regiones no sólo son necesarios los rasgos correspondientes a valores numéricos o a operaciones de números complejos. Como está detallado en la Figura 4, también son requeridas expresiones que hacen referencia a elementos de números complejos, es decir, *expresiones elementales* tales como "| z |", "Re(z)", "Im(z)", "arg(z)" o "Arg(z)" que están asociados a las formas binómica y polar. A través de estas expresiones elementales se pueden representar condiciones como ecuaciones o inecuaciones.

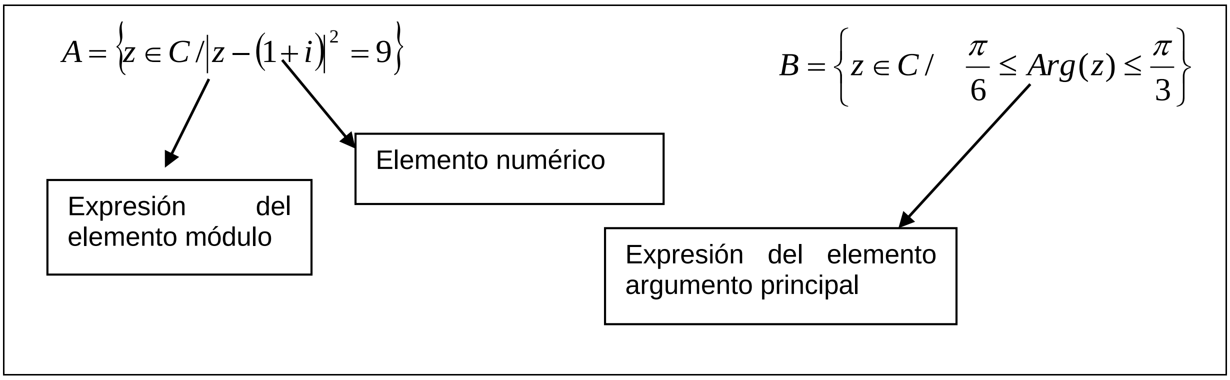


Figura 4. Expresiones elementales en caracterizaciones de curvas o regiones del plano complejo
Fuente: desarrollado por los autores.

Por lo anteriormente expuesto, los registros semióticos inicialmente seleccionados fueron: el registro algebraico asociado a la forma binómica, el registro algebraico asociado a la forma polar y el registro gráfico. Los mismos son esquematizados en la Figura 5 señalando las tareas de conversión involucradas.

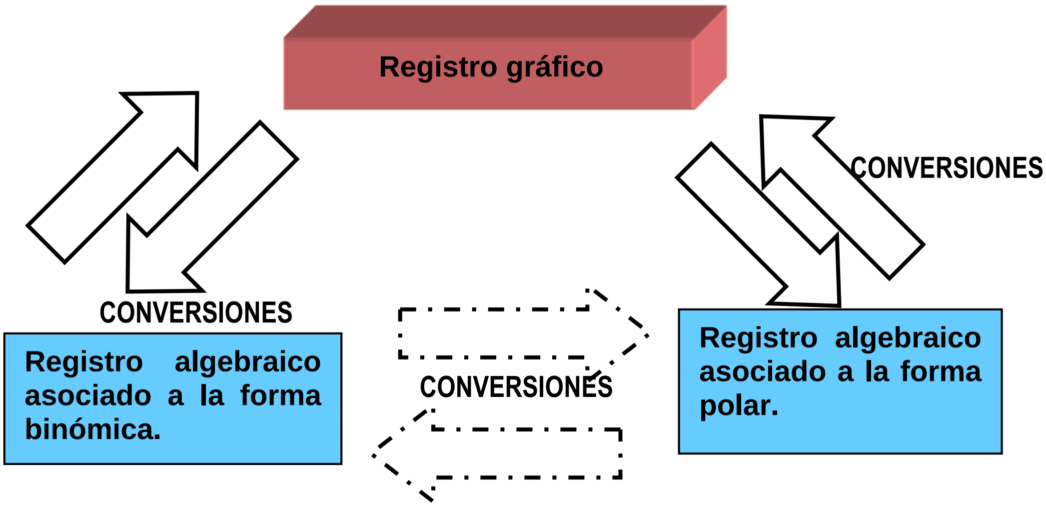


Figura 5. Esquema de los registros semióticos contemplados en la etapa inicial del proceso de determinación de registros.
Fuente: desarrollado por los autores.

En la figura 5 pueden observarse las flechas que señalan los sentidos posibles de conversión. Entre los dos registros algebraicos considerados las flechas están en línea punteada. Con ellas se pretende marcar el surgimiento de ciertos interrogantes, acerca de la necesidad y posibilidad de realizar dichas conversiones, para los subconjuntos de números complejos estudiados. Por ejemplo, se observaron subconjuntos en los que sólo es conveniente su caracterización utilizando rasgos correspondientes a elementos de la forma binómica y no a la polar o viceversa. Por ejemplo, la recta representada en la figura 6, se puede caracterizar con la expresión $B = \{z \in C / \quad \mathrm{Re}(z) = 1\}$. La representación de esa misma recta usando expresiones elementales como "| z |" o "Arg(z)" resultaría,

$B=\left\{z\in C/\quad |z|=\dfrac{1}{Cos(Arg(z))}\ y\ Arg(z)\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)\right\}$ que, por una parte, requiere de un rasgo adicional dado por la expresión "Cos( )" . Por otra parte, adquiere un nivel de complejidad no deseable para una tarea de caracterización.

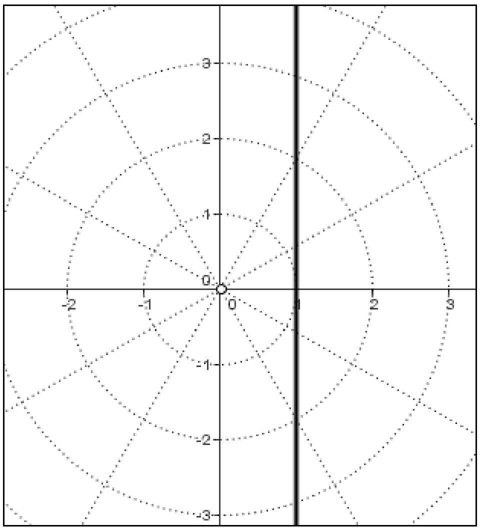


Figura 6. Recta en el plano complejo.
Fuente: desarrollado por los autores.

Las observaciones y cuestionamientos realizados acerca de los registros algebraicos iniciales condujeron a una segunda instancia en la que se revisó la definición del objeto matemático y los registros algebraicos implicados.

4.2. Segunda instancia: la revisión de los registros de naturaleza algebraica.

En esta instancia se plantearon algunas preguntas que surgieron a partir de las observaciones de D'Amore (2009/11) en relación a la definición de los registros, considerándolos relativos al significado que se quiere estudiar en los objetos matemáticos. Las preguntas formuladas fueron:

- ¿Qué objetos matemáticos se busca representar en estos registros?
- ¿Qué práctica/s matemática/s se pretende que realicen los estudiantes?
- ¿Qué rasgos de representación requieren dichas prácticas?

La primera pregunta tuvo como respuesta que los objetos matemáticos a considerar, no son números complejos aislados sino, específicamente, los subconjuntos de números complejos que definen curvas y o regiones en el plano asociado. Esta reconsideración del objeto matemático en juego tendrá impacto al contemplar las prácticas matemáticas que se busca favorecer y los rasgos de representación que las mismas solicitan.

Respecto de las prácticas matemáticas que se quiere trabajar con los estudiantes, se subrayaron dos. Por una parte, representar gráficamente conjuntos definidos por comprensión. Por otra, caracterizar una curva o región representada gráficamente. Las operaciones entre números complejos fueron trabajadas al inicio de la unidad temática y no constituyen las prácticas sobre las que se quiere poner el foco de atención. Para las tareas de caracterización sobre las que se desea hacer hincapié son demandados rasgos de representación semiótica de características algebraicas. Sin embargo, dado que las operaciones no constituyen el centro de las prácticas requeridas, deja de ser forzosa la distinción entre el registro algebraico asociado a la forma binómica y el asociado a la forma polar, entre los que se diferencian los costos cognitivos de llevar a cabo tales las operaciones.

Buscando responder al tercer interrogante y tomando en cuenta lo anterior, se consideraron los rasgos necesarios para las caracterizaciones mencionadas. En ellas juegan un rol fundamental las expresiones elementales. Las mismas están asociadas a la forma binómica o a la forma polar de un número complejo. Al respecto, surgió el siguiente cuestionamiento: los rasgos de estas expresiones elementales que componen las ecuaciones e inecuaciones que representan las caracterizaciones ¿deben ser considerados como pertenecientes a dos sistemas semióticos diferentes?

En los ejemplos de la Figura 2, para efectuar la caracterización es suficiente el uso de una o dos expresiones elementales, asociadas ambas, o a la forma binómica, o a la forma polar. Sin embargo, hay subconjuntos que requieren para su caracterización una combinación de expresiones de elementos de la forma polar y binómica. Por ejemplo, la región representada en la Figura 7 podría caracterizarse como $D = \{z \in C / \quad 3 \leq |z| \leq 4 \wedge 2 \leq \mathrm{Im}(z)\}$.

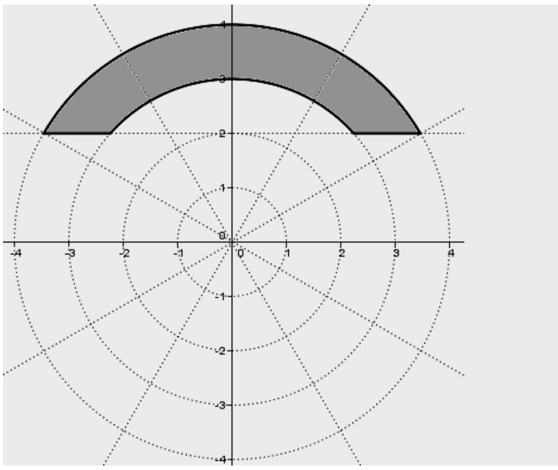


Figura 7. Región del plano complejo que para su caracterización requiere una combinación de expresiones elementales asociadas tanto a la forma binómica y como a la polar. Fuente: desarrollado por los autores.

Si se consideran regiones como la del ejemplo anterior, que no pueden ser representadas en un registro algebraico con rasgos únicamente asociados a la forma binómica o únicamente asociados a la forma polar, quiere decir que existen objetos matemáticos que queremos estudiar para los que *no puede realizarse la formación* de sus representaciones en registros así definidos. Esto último viola una de las condiciones que debe cumplir un sistema de representación para ser considerado un registro. En consecuencia determinó la necesidad de redefinir, un único registro donde convivan rasgos que hagan referencia a los elementos de un número complejo, tanto en forma polar como en forma binómica, de manera que permitan la formación de expresiones como la ejemplificada.

Los análisis anteriores condujeron a una nueva delimitación de los registros semióticos pertinentes para el estudio de los subconjuntos de números complejos considerados. Los mismos se esquematizan en la Figura 8.

El registro algebraico incluye entre sus rasgos componentes elementales y valores numéricos, tanto asociados a la forma binómica como polar, y símbolos de igualdad o desigualdad. Así definido, transformaciones entre las componentes elementales asociadas a las formas mencionadas, tales como la que lleva a considerar $|z|$ como $\sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2}$, siendo internas al registro, serán calificadas como tratamientos.

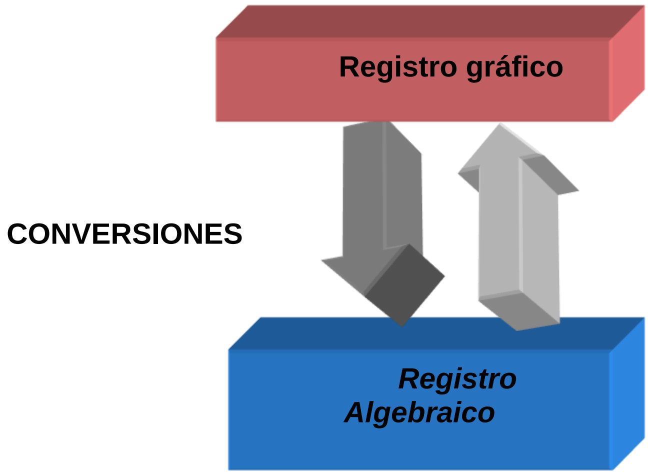


Figura 8. Esquema de los registros semióticos resultantes del proceso de determinación de registros.
Fuente: desarrollado por los autores.

5. Consideraciones finales

En este trabajo se describió un proceso de análisis para la delimitación de los registros semióticos pertinentes, para una investigación vinculada a números complejos, focalizada en curvas o regiones en el plano complejo. En dicho proceso se distinguen dos instancias.

En la primera de ellas se contemplaron como objetos matemáticos en juego a los números complejos. Para su representación, se consideraron un registro con rasgos gráficos y varios registros con rasgos algebraicos. De estos últimos, se seleccionaron dos, de acuerdo a un criterio de reducción basado en la relación de equivalencia “ostenta la misma información que”. Los registros seleccionados fueron: registro algebraico asociado a la forma binómica y registro algebraico asociado a la forma polar.

La segunda etapa se inició a partir de una contemplación más profunda de ciertos rasgos necesarios para la caracterización de las curvas y regiones en los registros algebraicos: los relativos a expresiones elementales. Se determinó que, por una parte, resultaba innecesariamente arduo representar una misma curva o región en ambos registros algebraicos. Por otra parte, se advirtió que, para la caracterización de algunas regiones, se requiere de expresiones elementales tanto asociadas a la forma binómica como a la polar. Lo anterior llevó a redefinir los registros respondiendo a los siguientes cuestionamientos: *¿Qué objetos matemáticos se busca representar en estos registros? ¿Qué práctica/s matemática/s se pretende que realicen los estudiantes? ¿Qué rasgos de representación requieren dichas prácticas?*.

Las respuestas a dichos cuestionamientos condujeron a la delimitación de dos registros pertinentes para la investigación mencionada: el registro gráfico y un único registro algebraico. Este último fue considerado con una estructura más global. Esta estructura admite entre sus rasgos, además de símbolos de igualdad o desigualdad, componentes elementales y valores numéricos, tanto asociados a la forma binómica como polar de un número complejo.

La práctica de caracterización de las curvas y regiones consideradas, que forma parte del significado de estos objetos, requiere del uso de expresiones elementales. El rol jugado por dichas expresiones en estas prácticas condujo a la redefinición de los registros que resultaban pertinentes para esta investigación. Las preguntas planteadas, que guiaron el refinamiento para la adecuación de definición de los registros, giran en torno a la especificidad del objeto que se buscaba representar y de las prácticas matemáticas ligadas al mismo. Es decir que los registros fueron definidos no sólo por los rasgos de los objetos matemáticos en juego sino también por el significado de dichos objetos, el cual está fuertemente vinculado a las prácticas de las que participan. Todo este proceso es acorde a lo planteado por D'Amore (2009/11):

> "Una duda de naturaleza teórica asalta a quien estudia este tipo de problemas: ¿un registro de representación semiótica es un absoluto o no? […] Es decir: ¿existen en absoluto registros de representación semiótica deducibles a partir de la forma de una representación específica singular? Desde mi punto de vista, la respuesta es negativa: la característica específica de un registro semiótico depende estrechamente del objeto que se quiere representar; por lo tanto para 'entender' el mensaje propuesto se necesita tener ya indicaciones preliminares acerca del objeto." (p. 19)

A partir de la experiencia aquí expuesta puede seguirse que, al momento de enfrentar una investigación didáctica que requiera de la definición de registros semióticos, es necesario determinar claramente los objetos matemáticos a trabajar y su contexto. Esto demanda considerar, tanto los rasgos de las representaciones de los objetos como las prácticas matemáticas involucradas. Los criterios y preguntas que se han presentado como regentes para los refinamientos efectuados, no se restringen necesariamente al ámbito de los números complejos sino que resultan lo suficientemente generales como para ser utilizadas en investigaciones cuyos objeto de estudio sea cualquier otro objeto matemático.

Referências

Aznar, M., Distéfano, M., Figueroa, S., Moler, E. (2010). Análisis de conversiones entre representaciones semióticas de números complejos. Memorias de la Tercera Reunión Pampeana de Educación Matemática (III REPEM) recuperado en marzo del 2014 de

http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem10/memorias/comunicaciones/Trabajos%20Inves/CB%2021.pdf

D'Amore B. (2009/2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Cientifica*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas,Bogotà. 11, 150-164. ISSN: 0124-2253. [El número 2009 fue impreso en el mayo 2011; esto explica la fecha puesta al articulo: 2009/11]. Recuperado el 11 de enero de 2012, de

http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/viewFile/419/648

Díaz Lozano, M. L., Haye, E. E., Montenegro, F., Córdoba, L. (2013) Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. Memorias del I Congreso de educación Matemática de América Central y el Caribe. Recuperado el 20 de Agosto de 2014, de http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/373-401-2-DR-C.pdf

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp.173-201). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Cali. Colombia.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1): 143-168. Recuperado el 18 de marzo de 2010, de http://www.rsme.es/gacetadigital/abrir.php?id=546

González-Martín, A. S., Camacho Machín, M. (2005) Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 23(1), pp. 81–96 . Recuperado el 20 de Agosto de 2014, de

www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/22006/332748

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la asociación matemática venezolana*, 10 (2), 213-223. Recuperado el 10 de febrero de 2011 de, http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf

Aznar, María Andrea: Profesora en Matemática. Especialista en investigación educativa. Docente e investigadora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. maznar@fi.mdp.edu.ar
Distéfano, María Laura: Profesora en Matemática. Ms. en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Docente e investigadora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. mldistefano@fi.mdp.edu.ar
Pesa, Marta Azucena: Licenciada en Física. Doctora en Física. Docente e investigadora del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina. Directora de Posgrado de la Facultad Regional Tucumán de la Universidad Tecnológica Nacional, Argentina. mpesa@herrera.unt.edu.ar
Moler, Emilce Graciela: Profesora en Matemática. Magister Scientiae en Epistemología y Metodología de la Ciencia. Doctora en Ciencias Biológicas (Orientación en Bioingeniería). Docente e investigadora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. egmoler@yahoo.com.ar

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

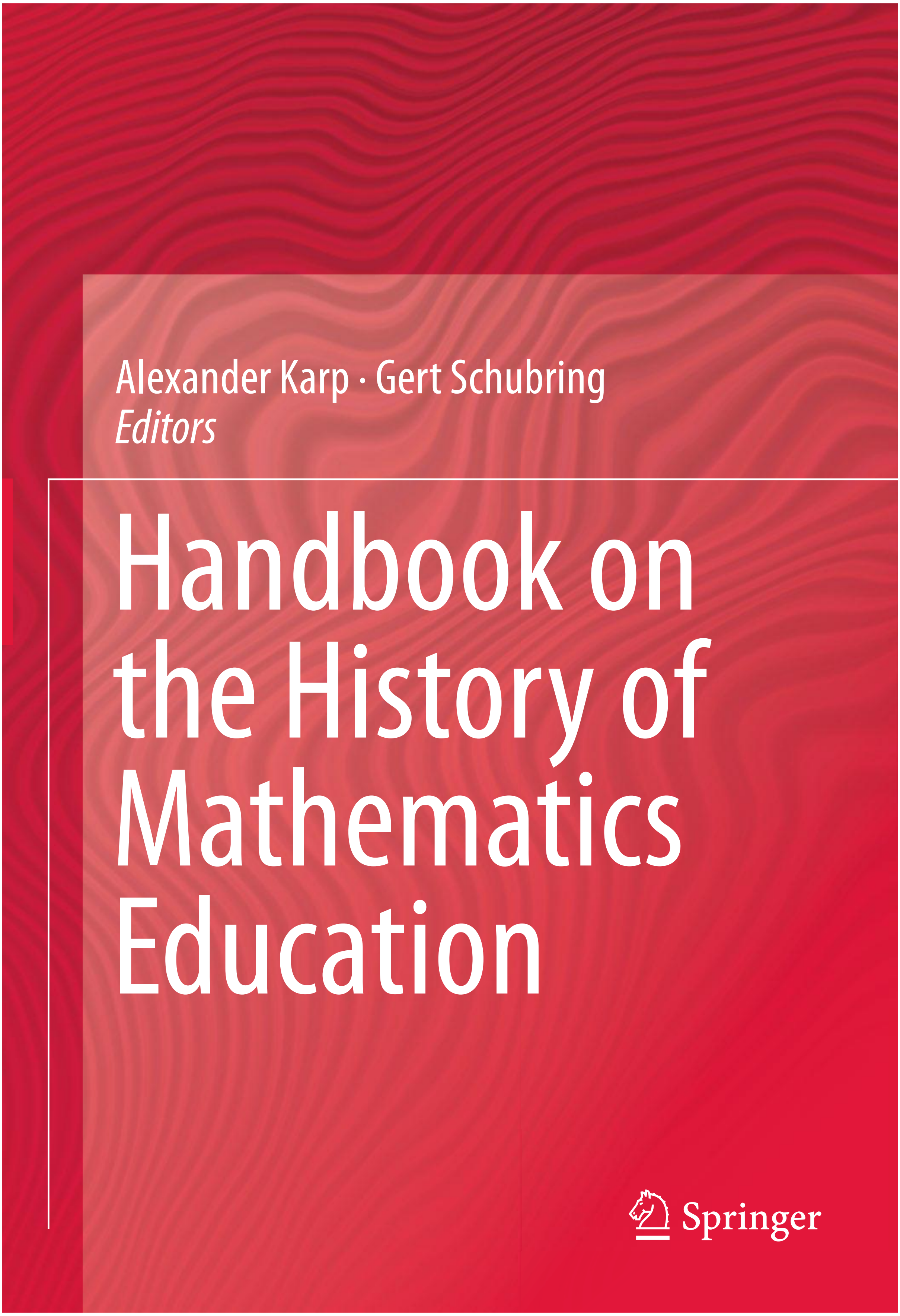
ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 147-151

Hanbook sobre História da Educação Matemática

Resenha

José Manuel Dos Santos Dos Santos

Resumen	Esta revisión presenta el Handbook on the History of Mathematics Education, dándose cuenta de la estructura de libro, indicando las partes que lo componen, así como las aportaciones de diversos expertos en Educación Matemática para la construcción de una historiografía de la educación y de el aprendizaje de matemáticas a nivel mundial. Esta reseña está pensada como una nota informativa sobre el contenido de este "Manual" que: presenta la Historia de la Educación Matemática como un cuerpo autónomo de conocimiento; analiza las diferentes metodologías de investigación utilizadas; presenta e discute la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, a lo largo del tiempo como en los diversos temas, enmarcando este análisis en las diferentes culturas y regiones del mundo. **Palabras Clave:** Historia, Educación Matemática.
Abstract	This review presents the Handbook on the History of Mathematics Education, is giving account of the book's structure, indicating the parts that compose it, as well as the contributions made by various experts in mathematics education for the construction of a historiography of education and the mathematics learning in the global world. This review aims to be an information note on the contents of this "Handbook" that: presents the History of Mathematics Education as a relevant body of knowledge; It discusses the various research methodologies used; It presents and discusses the teaching and learning both over time and in terms of the various mathematical topics, framing this analysis in different cultures and regions of the world. **Keywords**: History, Mathematics Education.
Resumo	Nesta resenha apresenta-se o Handbook on the History of Mathematics Education, dando-se conta da estrutura do libro, indicando as partes que o compõe, bem como as contribuições dadas pelo diversos especialistas em Educação Matemática para a construção de uma historiografia do ensino e da aprendizagem da matemática a nível global. Esta resenha pretende ser apenas uma nota informativa sobre os conteúdos deste “Manual” que: apresenta a História da Educação Matemática como um corpo de conhecimento relevante; discute as diversas metodologias de investigação utilizadas; apresenta e discute o ensino e a aprendizagem quer ao longo dos tempos quer ao nível dos diversos temas matemáticos, enquadrando esta análise nas diversas culturas e regiões do planeta. **Palavras-chave:** História, Educação Matemática, Curriculo.


Alexander Karp · Gert Schubring
Editors
Handbook on the History of Mathematics Education
Springer

Handbook on the History of Mathematics Education
Alexander Karp • Gert Schubring
Editores

Editores
Alexander Karp Teachers
College Columbia University
New York, NY, USA
Gert Schubring
Universität Bielefeld
Institut für Didaktik der Mathematik
Bielefeld, Germany

Handbook on the History of Mathematics Education

ISBN 978-1-4614-9154-5
Library of Congress Control Number: 2013949144
Springer is part of Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Lista de autores por ordem alfabética

Agathe Keller
Alain Bernard
Alexander Karp
Alexei Volkov
Amy Ackerberg-Hastings
Andrea Bréard
Annick Horiuchi
Charles Opolot-Okurut
Christine Proust
David Lindsay Roberts
Dhruv Raina
Elena Ausejo
Evelyne Barbin
Fulvia Furinghetti
Geoffrey Howson
Gert Schubrin
Harm Jan Smid
Hélène Gispert
Henrique Manuel Guimarães
Jens Høyrup
Jeremy Kilpatrick
João Bosco Pitombeira de Carvalho
João Pedro da Ponte
José Manuel Matos
Joseph W. Dauben
Karen Hunger Parshall
Kristín Bjarnadóttir
Lee Peng Yee
Leo Rogers
Livia Giacardi
Luciana Zuccheri
Mahdi Abdeljaouad
Marta Menghini
Micah Ross
Roberto Scoth
Rudolf Sträßer
Sonja Brentjes
Ubiratan D’Ambrosio
Verena Zudini
Yibao Xu

Resenha

A história da Educação Matemática é retratada nesta publicação, da Springer, desde o momento que este corpo de conhecimento suscitou interesse entre diversos especialistas até a atualidade. O livro colige, de um modo sistemático e profundo, o corpus do conhecimento existente ao longo de mais de seiscentas páginas. O livro está dividido em seis partes, contando ao todo com vinte e nove textos que incluem uma extensa lista de referências bibliográficas. Para esta publicação contribuíram quatro dezenas de Especialistas em Educação Matemática, entre eles vários pertencentes ao espaço iberoamericano. A publicação inclui, no final, uma apresentação dos autores, bem como, dois índices um para os nomes referenciados e um outro referente aos assuntos abordados nos diversos textos.

Os editores apresentam a história e as metodologias de investigação associadas a História da Educação Matemática na primeira parte da obra. Não pretendendo ser exaustivos, os dois textos, que integram a primeira parte do livro, refletem, de um modo sumário, sobre as preocupações historiográficas, o objecto de estudo e sobre as metodologias de investigação associada ao campo de conhecimento estudado, bem como, a conexão com outros áreas de estudo.

Numa primeira fase, integrada desde a segunda a quarta parte do livro, a historia da Educação Matemática é apresentada em diferentes épocas, a saber, na antiguidade e na idade média, no período pré moderno (entre os séculos xv e xviii da nossa era) e no período pós moderno. Refira-se ainda que é transversal a todos os textos o recurso a diversos documentos; a apresentação de figuras, que integram imagens.esquemas e tabelas com diversos dados relevantes; a descrição da organização educativa e do currículo, em particular no período pós moderno.

A história do ensino e da aprendizagem dos diversos temas da matemática, em contexto escolar, integram a quinta parte do livro. No handbok é abordado a visão dos “historiadores” do ensino da aritmética, da álgebra, da geometria, do cálculo, da matemática para as profissões1[1]. Também é abordada a análise histórica das práticas e métodos de ensino da matemática.

A última parte do livro debruça-se sobre o trabalho contemporâneo em História da Educação Matemática e o olhar sobre outras áreas afins, nomeadamente, a cooperação internacional, o papel da tecnologia na educação matemática, e a formação de professores. Salienta-se a atenção dada ao trabalho com as comunidades de Educadores Matemáticos, analisado-se o papel da cooperação internacional, na atividade dos diferentes grupos de trabalho, realçando os encontros realizados e as publicações periódicas existentes. O papel da tecnologia na Educação Matemática é analisada à luz de uma visão histórica e do impacto da sua utilização. Finalmente, é analisada a história da formação dos professores de

[1] Destaca-se a discussão deste conceito realizada por Rudolf Sträßer, bem como, a importância do assunto para a presença do ensino da matemática nas vias profissionais e vocacionais nos actuas sistemas educativos dos países ocidentais.

matemática, discutindo-se a temática ao longo de diversos períodos históricos e apresentado-se o panorama em vários países.

Este livro apresenta-se como uma enorme mais valia para todos os interessados em Educação Matemática, mostra-nos o olhar dos interessados na história do ensino é da aprendizagem da matemática. Do ponto de vista dos investigadores, o livro fornece-nos uma síntese do conhecimento existente sobre a história do ensino da matemática e as referencias necessárias para futuros trabalhos. Finalmente, esta obra é uma das primeiras memórias sobre o campo de conhecimento da História da Educação Matemática, que apesar de recente, se afirma como área de estudo e análise do fenómeno social inerente ao ato de ensinar e de aprender matemática numa realidade global.

Dos Santos Dos Santos, José Manuel
santosdossantos@me.com
Professor do quadro do Agrupamento de Escolas D. Afonso Sanches, Vila do Conde, Portugal.
Presidente do Instituto GeoGebra Portugal, Escola Superior de Educação – IP do Porto.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 152-158

El rincón de los problemas
Actividades lúdicas y creación de problemas (2)
Análisis y comentarios

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Sean los conjuntos finitos A y B. A tiene ***n*** *elementos y están relacionados con los elementos de B de modo que a cada uno de* ***p*** *elementos de A (****p*** *<* ***n****) le corresponde dos elementos del conjunto B. Mediante esta correspondencia quedan algunos elementos de A sin correspondiente en B, pero todos los elementos de B son correspondientes de algún elemento de A. ¿Es verdad que el conjunto A tiene (****n*** *– 2****p****) elementos más que el conjunto B?*

Este problema es una forma de presentar en contexto intra matemático el problema enunciado en el número anterior de UNIÓN, en contexto extra matemático, que a su vez es una generalización de un problema propuesto por Abril, una niña de 6 años, de educación inicial, como parte de un juego con cartas de una baraja incompleta y una cierta cantidad de granos de maíz.

Como anuncié en el número anterior, ahora haré algunos comentarios a la actividad lúdica que dio lugar a los problemas enunciados y también mostraré una manera de responder a la pregunta que se plantea.

En la experiencia lúdica desarrollada espontáneamente con Abril, surgieron varios problemas de matemáticas para educación inicial. A continuación explicito tales problemas, de manera un tanto formal, para hacer algunos análisis y comentarios.

Problema 1: Clasificar los elementos de un conjunto de cartas de una baraja incompleta, según el color predominante en las figuras de una de sus caras.

Problema 2: Dados dos conjuntos de cartas de una baraja, determinar cuál de ellos tiene más cartas, sin contar.

Problema 3: Dados dos conjuntos de cartas de una baraja y habiendo observado que uno de ellos tiene más cartas que el otro, determinar cuántas cartas más tiene, sin contar todas las cartas.

Problema 4: Dados un conjunto de cartas de una baraja y un conjunto de granos de maíz, determinar cuál de los conjuntos tiene más elementos y cuántos son tales elementos adicionales, sin contar todas las cartas ni todos los granos de maíz.

Problema 5: (El propuesto por Abril, aunque – obviamente – no en estos términos). Dados un conjunto de cartas de una baraja y un conjunto de granos de maíz en un recipiente, se colocan dos granos de maíz sobre algunas cartas. Así, no quedan granos de maíz en el recipiente, pero quedan algunas cartas sin granos de maíz. Determinar cuál de los conjuntos tiene más elementos y cuántos son tales elementos adicionales, sin tocar los granos de maíz y sin contar todas las cartas ni todos los granos de maíz.

Antes de hacer un análisis de los problemas mismos, de los conceptos matemáticos, de las proposiciones, de los argumentos y otros objetos matemáticos presentes en los problemas y sus soluciones, haré algunos comentarios generales sobre la experiencia desarrollada con la niña.

Comentarios:

a) Es importante estimular el pensamiento matemático y una actitud positiva hacia la resolución de problemas y hacia las matemáticas, respetando la libertad de los niños y partiendo de las inquietudes de ellos y en general de los estudiantes, cualquiera sea su nivel académico. Algunas muestras de las inquietudes de Abril, que fueron tomadas en cuenta en la experiencia didáctica:
   – *¿Qué es esto, abuelo?*
   – *¡Inventemos un juego!*
   – *Pero yo quiero que jueguen también Preciosa y Lucerito…*
   – *(Abril saca algunas cartas del montoncito de Preciosa para que sea de la misma altura que el montoncito de Lucerito)*
   – *Ya, pero no mires hasta que yo te diga.*
   – *¡NO!. Eso no vale porque ese juego ya lo hemos hecho antes. No vale mover el maíz.*

b) No debe olvidarse que un objetivo fundamental de la educación debe ser desarrollar la autonomía del estudiante (ya lo decía Piaget, refiriéndose a la educación de los niños). Así, debe incentivarse a resolver problemas reflexionando, encontrando razones y yendo más allá de recursos mecánicos. Es fundamental el estímulo de la creatividad del estudiante y en ese sentido el profesor tiene que ser particularmente cuidadoso con las preguntas que le haga. En la experiencia didáctica se estimula a responder preguntas sobre comparación de cantidades sin usar el recurso mecánico del conteo. Cabe destacar que en la niña se nota la tendencia a responder las preguntas usando el conteo, posiblemente por el énfasis a esta actividad que suele darse en los centros de educación inicial; sin embargo, muchas veces el conteo se queda a nivel de “recitar los nombres de los números”, con las limitaciones que esto conlleva, además de las inseguridades que puede suscitar si se trata de contar cantidades un tanto grandes. En la experiencia narrada, se incentiva el uso de la correspondencia biunívoca entre conjuntos finitos para determinar si un conjunto tiene o no más elementos que otro. Este es un recurso más general, que tiene un soporte más fuerte en la observación y en la intuición, que está en el fundamento del conteo y que muchas veces en los centros de educación inicial se pone poco énfasis y se pasa directamente a que los niños practiquen mecánicamente el conteo.

Se me ocurren algunas situaciones con preguntas que pueden responderse sin efectuar un conteo:

Situación 1: Un naranjal en plena producción (todas las plantas tienen naranjas)
Pregunta: ¿Qué hay más? ¿Naranjas o plantas de naranja?

Situación 2: Los carritos en buen estado que tiene un niño
Pregunta: ¿Qué hay más? ¿Carritos o ruedas de carritos?

Situación 3: Todas la muñecas de una niña tienen vestidos y algunas tienen más de un vestido para cambiarlas.
Pregunta: ¿La niña tiene más muñecas o más vestidos de muñeca?

Situación 4: Los habitantes de un país y los habitantes del continente en el que está ese país.
Pregunta: ¿Qué hay más? ¿Habitantes en España o habitantes en Europa?

Situación 5: Médicos y pacientes en un hospital
Pregunta: Normalmente ¿hay más médicos o más pacientes en un hospital? ¿Por qué? ¿En qué caso se puede tener una situación crítica?

Evidentemente, no todas las situaciones expuestas puede responderla un niño de 6 años, pero mi conjetura es que responderá las tres primeras y otras similares, relacionadas con su entorno, si es adecuadamente estimulado a pensar en correspondencias biunívocas entre conjuntos y entre un conjunto y un subconjunto de otro conjunto. ¡Es un tema a investigar con más minuciosidad!

c) En la experiencia se observa que la niña admite con naturalidad un error “cometido por ambos” (por ella y el abuelo) al afirmar que Princesa tenía 5 ó 6 cartas más que Lucerito. Se siente acompañada en el error, pero al mismo tiempo convencida de que la respuesta correcta es que Preciosa tiene 9 cartas más que Lucerito. Esta actitud hacia el error es algo que debe tenerse en cuenta en todos los niveles educativos y es un camino para incentivar la estimación, así como para conjeturar y demostrar o rechazar las conjeturas.

d) Otro aspecto interesante, que ya lo recomendaba Polya, es llegar a la solución de un problema resolviendo en el camino problemas más sencillos. Esto contribuye a comprender mejor el problema y a visualizar un camino para resolverlo. La niña resuelve con naturalidad y sin recurrir al conteo, el problema de determinar si Preciosa o Lucerito tiene más cartas, cuando el abuelo le pone muy pocas cartas a ambos. Con el recurso de las “cartas amigas” se facilita el establecimiento de la correspondencia biunívoca entre el conjunto de cartas de Lucerito y un subconjunto propio de las cartas de Preciosa.

Análisis de los objetos matemáticos[1]

1. En la experiencia didáctica, jugando, proponiendo y resolviendo los cinco problemas enunciados, se usó un lenguaje coloquial. Destaco algunas expresiones: tarjetas, cartas, baraja, jugar, inventar, igual, rojo, negro, repartir, más cartas que, contar, no contar todas, más alto que, la misma altura que, exactamente cuántas cartas más, correspondencia, cartas amigas, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, granos de maíz.
2. Todos los problemas son de contexto extra matemático.
3. El entorno matemático en cada caso es la correspondencia biunívoca y el conteo de pocas unidades (digamos hasta diez)
4. La información en cada uno de los problemas está dada por los elementos concretos de los conjuntos considerados (cartas de maíz, granos de maíz). En el caso del problema 5, adicionalmente se tiene una información relacional, que es la asociación de algunas cartas con dos granos de maíz cada una, el agotamiento de los granos de maíz que había en un pocillo y el hecho de haber algunas cartas que no están asociadas a grano de maíz alguno.
5. Los requerimientos varían en cada problema:

   Prob. 1: Clasificar

   Prob. 2: Determinar cuál de dos conjuntos de cartas considerados tiene más elementos.

   Prob. 3: Determinar cuántas cartas más tiene un conjunto de cartas, respecto a otro.

   Prob. 4 y Prob. 5: Determinar qué hay más ¿cartas o granos de maíz?, ¿cuántas o cuántos?.
6. Algunos conceptos matemáticos involucrados en la experiencia lúdica que comentamos, son: clasificación de los elementos de un conjunto, conjuntos finitos, subconjuntos de un conjunto, comparación de cantidades (sin contar), estimación, correspondencia biunívoca y conteo de cantidades pequeñas (hasta diez)
7. Algunas proposiciones sobre conjuntos finitos, implícitas en las soluciones de los problemas:

   Prob. 1: Las cartas a y b están en el mismo conjunto si y sólo si sus figuras tienen el mismo color predominante

   Prob. 2: i) Si los conjuntos E y F están en correspondencia biunívoca, entonces los conjuntos tienen el mismo número de elementos.

   ii) Todo conjunto tiene más elementos que cualquiera de sus subconjuntos propios.

[1] Usaré como pauta la herramienta "configuración epistémica", formulada en el EOS (Godino y colaboradores) y los elementos que conforman un problema, considerados en artículos anteriores en esta sección de UNIÓN.

Prob. 3: Si G es subconjunto propio de A y n(A) y n(G) representan, respectivamente el número de elementos de estos conjuntos, entonces A tiene n(A) – n(G) elementos más que G.

Prob. 4: Las proposiciones i y ii del Prob. 2 y la proposición del Prob. 3.

Prob. 5: Si existen p subconjuntos propios A_j de A y p subconjuntos propios B_j de B, de modo que cada A_j está en correspondencia biunívoca con B_j y la unión de todos los B_j es el conjunto B, pero la unión de todos los A_j es un subconjunto propio C de A, entonces A tiene más elementos que B. Tal número de elementos es n(A-C).

8. Los procedimientos empleados para resolver los problemas enunciados fueron todos empíricos, manipulando las cartas y los granos de maíz y efectuando el conteo de algunos conjuntos de pocos elementos.

9. En cuanto a argumentos, todos son de verificación empírica o de aplicación intuitiva de las proposiciones enunciadas:

Prob. 1: Verificación empírica que todos los elementos de cada uno de los dos subconjuntos formados tienen el mismo color predominante: rojo o negro. No existe ninguna carta roja entre las cartas negras ni ninguna carta negra entre las rojas. En el fondo, la relación “tener el mismo color que” es una relación de equivalencia y determina una partición en el conjunto de cartas de la baraja.

Prob. 2: Tesis 1: El conjunto de cartas B (las cartas de Lucerito) tiene el mismo número de elementos que un subconjunto propio del conjunto A (las cartas de Preciosa)

Demostración: Se establece una correspondencia biunívoca entre los elementos de B y un subconjunto propio de A, al poner sobre cada carta de B una carta de A y quedar algunas cartas de A sin poder colocarlas sobre una carta de B.

Tesis 2: El conjunto de cartas de A es mayor que el conjunto de cartas de B.

Demostración: A tiene más elementos que cualquiera de sus subconjuntos propios (Proposición ii); en particular, más elementos que el subconjunto propio que está en correspondencia biunívoca con B; pero como tal subconjunto propio tiene el mismo número de elementos que B, se deduce que A tiene más elementos que B.

Prob. 3: Aplicación empírica de la proposición enunciada para este problema, mediante conteo de las cartas de A que no se pusieron encima de una carta de B.

Prob. 4: Argumentación similar a las tesis 1 y 2 del problema 2 y a la del problema 3, pero ahora con un conjunto de cartas y un conjunto de granos de maíz.

Prob. 5: Tesis 1: Si los elementos de un conjunto T de n cartas se asocian con los elementos de un conjunto M de granos de maíz, de modo que existen p cartas asociadas ($p < n$) con dos granos de maíz cada una y $n > 2p$, entonces, T tiene n- 2p elementos más que M.

Demostración:

En la configuración mostrada, de las n cartas de T, p de ellas tienen dos granos de maíz cada una, pero como $n > 2p$, podemos escribir $n = p + p + q$, donde q es un número natural mayor que cero, y afirmar que hay $p + q$ cartas sin granos de maíz; entonces podemos usar p cartas de estas y poner cada una debajo de las cartas con dos granos de maíz. Así tenemos p subconjuntos propios de T, cada uno con dos elementos y en correspondencia biunívoca con sendos subconjuntos propios de M. Uniendo todos estos subconjuntos propios de M obtenemos M, pero uniendo los correspondientes subconjuntos propios de T no obtenemos T. Aplicando la proposición enunciada para este problema, concluimos que T tiene más elementos que M. Exactamente, tiene q elementos más que M y vemos que $q = n - 2p$. (En el caso particular de la experiencia lúdica, se tiene $n = 28$, $p = 10$)

Comentarios finales

I. El problema enunciado al inicio del artículo del número anterior, es una generalización del Problema 5 aquí enunciado y por los argumentos dados, vemos que no siempre es verdad que hay $n - 2p$ cartas más que granos de maíz. Para que esto sea verdad es necesario que $n > 2p$. Que n sea mayor que p no garantiza que n sea mayor que 2p. Si en la experiencia con la niña hubieran quedado 10 cartas con dos granos de maíz cada una y menos de 10 cartas sin granos de maíz (por ejemplo 8) habría más granos de maíz que cartas y serían $2p - n$ granos de maíz más que cartas (En el ejemplo que estamos armando, $n= 18$ y $p = 10$).

   El problema enunciado al inicio de este artículo es esencialmente el mismo que el problema que acabamos de analizar, con la única diferencia de estar presentado en contexto intra matemático. En consecuencia su solución es esencialmente la misma.

II. La experiencia desarrollada, muestra que es posible generar un ambiente de juego, de manera espontánea y con material estructurado o no, que conduzca a reflexionar y resolver situaciones problemáticas; más aún, a que el niño invente problemas y que tales problemas puedan ser enunciados luego con una redacción adecuada y aun haciendo una generalización, ya sea manteniendo el contexto extra matemático o en un contexto intra matemático.

III. La interacción entre lo didáctico y lo matemático es fundamental en la creación de problemas. Así, la proposición enunciada para el Problema 5 permite generalizar el tipo de problema que creó la niña, pues podría ponerse no solo dos granos de maíz sobre algunas cartas de la baraja sino cantidades diferentes y no necesariamente las mismas. El requerimiento sería el mismo ¿hay más cartas o granos de maíz? ¿Cuántas o cuántos?. Tenemos así nuevos problemas, creados por variación del problema creado por la niña. La proposición, elaborada a partir de la experiencia didáctica, permite resolver los nuevos problemas creados, de un modo esencialmente similar al usado para resolver el problema propuesto por la niña. Ciertamente, pueden presentarse situaciones problemáticas diferentes cuyo análisis, con base en lo realizado, llevará a su solución. Es interesante examinar los problemas en los que el número de cartas sin granos de maíz es menor que el número de cartas con granos de maíz.